Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2022, № 2** | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.988

MSC 35R11, 65M06

FUNDAMENTAL POLYNOMIALS OF HERMITE'S INTERPOLATION FORMULA IN LINEAR NORMAL AND IN EUCLIDEAN SPACES

O. F. Kashpur

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: olena.kashpur@knu.ua

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ФОРМУЛИ ЕРМІТА В ЛІНІЙНОМУ НОРМОВАНОМУ ТА В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРАХ

О. Ф. Кашпур

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: olena.kashpur@knu.ua

Abstract. In a linear infinite-dimensional space with a scalar product and in a finite-dimensional Euclidean space the interpolation Hermite polynomial with a minimal norm, generated by a Gaussian measure, contains fundamental polynomials are shown. The accuracy of Hermit's interpolation formulas on polynomials of the appropriate degree are researched.
Keywords: linear space, Euclidean space, Hermite's interpolation formula, fundamental polynomials.

Анотація. У лінійному нескінченновимірному просторі зі скалярним добутком та в скінченновимірному Евклідовому просторі показано, що інтерполяційний поліном Ерміта, що має мінімальну норму, яка породжена гаусовою мірою, містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтеполяційних формул Ерміта на поліномах відповідного степеня.
Ключові слова: лінійний простір, евклідовий простір, інтерполяційна формула Ерміта, фундаментальні поліноми.

Вступ

Важливість досліджень в області поліноміальної операторної інтерполяції підтверджується багатьма прикладними задачами [1, 4, 5]. На практиці досить часто зустрічаються нелінійні системи, які описуються операторними поліномами. Такі системи знаходять численні застосування в таких галузях як розпізнавання образів, динаміка урбанізації, нейрологія, теорії лазерів, ідентифікація систем та ін.

На відміну від класичної інтерполяції функцій [6], операторне інтерполювання має певні особливості: в загальному випадку розв'язок інтерполяційної задачі неєдиний, кількість вузлів та степінь інтерполяційного полінома не пов'язані між собою, довільний інтерполянт немає властивості збереження багаточленів відповідного степеня.

В роботах В. Л. Макарова, В. В. Хлобистова [3, 12, 13] побудовано основи загальної теорії поліноміальної операторної інтерполяції в абстрактних Гільбертових та векторних просторах. Авторами розглянуто інтерполяційні операторні задачі типу Лагранжа, Ерміта та Ерміта-Біркгофа. Одержано необхідні та достані умови існування операторних інтерполяційних поліномів в гільбертовому, а також у векторному просторах при довільному співвідношенні між числом вузлів та степенем інтерполянта. Описано всю множину операторних інтерполяційних поліномів відповідного степеня та із цієї множини виділено підмножину інтерполянтів, що зберігають багаточлени відповідного степеня.

При розв'язанні задач, пов'язаних із точністю інтерполяції, у випадку довільної нелінійності апроксимуючого оператору, результати, що отримуються, мають в більшості випадків теоретичний інтерес та малоефективні на практиці. Якщо розглянути поліноміальну інтерполяцію, то можна отримати більш сильні результати.

В статті у лінійному просторі зі скалярним добутком розглянуто інтерполяційну формулу Ерміта, що отримано в [12, 13] та показано, що вона містить фундаментальні поліноми. Досліджено точність інтерпоянту Ерміта на поліномах відповідного степеня у випадку скінченновимірного евклідового простору. Зауважимо, що в роботі [9] одержано аналогічні результати для операторного інтерполяційного поліному Лагранжа.

1. Постановка задачі

Нехай X — гільбертовий, Y — лінійній нормований простори, $(\cdot,\cdot)_X$ — скалярний добуток в X. Позначимо Π_n — множину операторних поліномів $P_n : X \to Y$ степеня n вигляду

$$\Pi_n = \left\{ P_n(x) : P_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \cdots + L_n x^n, \right\}$$

де $L_0 \in Y$, $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{k})$, $k = \overline{1, n}$, $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервна, симетрична k-лінійна операторна форма. Оператор $F : X \to Y$ (в загальному випадку нелінійний) заданий своїми значеннями у вузлах інтерполяції $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ та значеннями диференціалів Гато $F^{(k)}(x_i) v_{ik}^{(k)} v_{ik-1}^{(k)} \cdots v_{i1}^{(k)}$ у цих вузлах за напрямками $v_{ik}^{(k)}, v_{ik-1}^{(k)}, \ldots, v_{i1}^{(k)} \in X$, $k = \overline{1, k_i}$, $i = \overline{1, m}$, [14]:

$$F^{(k)}(x_i) v_{ik}^{(k)} v_{ik-1}^{(k)} \cdots v_{i1}^{(k)} = \frac{\partial^k}{\partial \alpha_1 \cdots \alpha_k} F \left(x_i + \sum_{p=1}^{k} \alpha_p v_{ip}^{(k)} \right) \Bigg|_{\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0} .$$

Потрібно знайти такий операторний поліном $P_n(x) \in \Pi_n$, що відповідає інтерполяційним умовам

$$P_n^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(k)}v_{ik-1}^{(k)}\cdots v_{i1}^{(k)} = F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(k)}v_{ik-1}^{(k)}\cdots v_{i1}^{(k)},\ k=\overline{0,k_i},\ i=\overline{1,m}. \quad (1)$$

Введемо позначення:

$$\vec{F}_H = \{F^{(i)}(x_j)h_{ji}^{(i)}h_{j,i-1}^{(i)}\dots h_{j1}^{(i)},\ i=\overline{0,k_j}\}_{j=1}^m, \quad (2)$$

$$\vec{Q}_H = \{Q^{(i)}(x_j)h_{ji}^{(i)}h_{j,i-1}^{(i)}\dots h_{j1}^{(i)},\ i=\overline{0,k_j}\}_{j=1}^m,$$

$$\vec{g}_H(x) = \left\{ \frac{\partial^i}{\partial\alpha_1\cdots\partial\alpha_i} g\left(x_j + \sum_{p=1}^{i}\alpha_p h_{jp}^{(i)}, x\right)\Bigg|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_i=0},\ i=\overline{0,k_j} \right\}_{j=1}^m, \quad (3)$$

Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори симетричної матриці

$$H = \|H^{ls}\| = \|H_{ij}^{ls}\|_{i=\overline{0,k_l},\ j=\overline{0,k_s}} \quad (4)$$

з нульовим власним числом, де

$$H_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial\alpha_1\dots\partial\alpha_i\partial\beta_1\dots\partial\beta_j} g(x_l + \sum_{p=1}^{i}\alpha_p v_{lp}^{(i)},$$

$$x_s + \sum_{p=1}^{j}\beta_p v_{sp}^{(j)})|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_i=\beta_1=\cdots=\beta_j=0},$$

$$g(u,v) = \sum_{p=0}^{n}(u,v)_X^p,\ u,v\in X, \quad (5)$$

H^+ — псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до матриці H [2]. У монографії [3] одержано такий результат.

Теорема 1. *Нехай виконується умова*

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}, \quad (6)$$

тоді формула

$$P_n(x) = Q(x) + \left\langle \vec{F}_H - \vec{Q}_H, H^+\vec{g}_H(x) \right\rangle, \quad (7)$$

коли $Q(x) \in \Pi_n$ *описує всю множину операторних поліномів типу Ерміта* n*-го степеня, що відповідає інтерполяційним умовам* (1), $\langle \cdot,\cdot \rangle = \sum_{i=1}^{m} f_i\alpha_i$, $\alpha_i \in R_1$.

В [3] показано, що умова (6) еквівалентна такій:

$$A_0\vec{F}_H = \vec{0}, \quad (8)$$

де $A_0 = E - H^+H = E - HH^+$ — ідемпотентна, симетрична матриця.

Нехай виконуються умови теореми 1. Розглянемо інтерполяційний поліном Ерміта

$$P_n(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \right\rangle, \tag{9}$$

що належить множині (7) та має серед усіх інтерполянтів, що відповідають умовам (1) мінімальну норму [15], яка породжена скалярним добутком за гаусовою мірою [8].

Вузли інтерполювання оберемо таким чином, щоб матриця H мала обернену ($H^+ = H^{-1}$). Тоді на підставі (8) операторна задача Ерміта (1) буде мати розв'язок при будь-яких значеннях оператора F та значеннях диференціалів Гато $F^{(k)}(x_i)v_{ik}^{(k)}v_{ik-1}^{(k)}\cdots v_{i1}^{(k)}$, $k=\overline{0,k_i}$, $i=\overline{1,m}$, у вузлах $x_i, i=\overline{1,m}$. Це означає, що задача (1) є інваріантно розв'язною. В [12] наведено умови інваріантної розв'язуваності операторної задачі Ерміта. В цьому випадку інтерполянт Ерміта (9) набуває вигляду:

$$P_n(x) = \left\langle \vec{F}_H, H^{-1} \vec{g}_H(x) \right\rangle. \tag{10}$$

2. Фундаментальні поліноми інтерполяційної формули Ерміта

Нехай X, Y — лінійні простори, X — зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$, Y є нормованим. Розглянемо розв'язок задачі (1) у вигляді інтерполянта мінімальної норми (10). Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато оберемо таким чином, щоб матриця H була невиродженою.

В роботах [10, 11] для скінченновимірного Евклідового простору E_k знайдено умови, які накладаються на систему вузлів інтерполяції, при виконанні яких матриця H є неособливою, та одержано умови іваріантної розв'язуваності задачі Ерміта у випадку, коли у вузлах інтерполяції задано значення оператора F та значення його диференціалів Гато до першого та до другого порядків відповідно.

Нехай

$$\vec{h}(x) = H^{-1}\vec{g}_H(x) = \left\{ \begin{matrix} h_{i0}(x) \\ h_{i1}(x) \\ \cdots \\ h_{ik_i}(x) \end{matrix} \right\}_{i=1}^{m}. \tag{11}$$

Покажемо, що компоненти вектора $\vec{h}(x)$ є фундаментальними поліномами інтерполяційної формули Ерміта (10). Маємо:

$$\vec{h}(x_k) = H^{-1}\vec{g}_H(x_k) = H^{-1}H\vec{e}_k = \vec{e}_k,$$

де $\vec{e}_k$ — вектор у якого на k-му місці стоїть одиниця, решта — нулі. Ця рівність означає, що

$$h_{i0}(x_k) = \delta_{ik}, \quad i,k=\overline{1,m},$$
$$h_{ij}(x_k) = 0, \quad j=\overline{1,k_i}, \quad i,k=\overline{1,m},$$

де δ_{ik} — символ Кронекера. Знайдемо $\vec{h}^{(q)}(x_k)v_{kq}^{(q)}\cdots v_{k1}^{(q)}$. Маємо

$$\vec{h}^{(q)}(x_p)v_{kq}^{(q)}\cdots v_{k1}^{(q)} = H^{-1}\vec{g}_H^{(q)}(x_p)v_{kq}^{(q)}\cdots v_{k1}^{(q)} =$$
$$= H^{-1}H\vec{e}_{k_1+\cdots+k_{q-1}+p+k},$$

тобто

$$h_{ij}^{(q)}(x_p)v_{pq}^{(p)}\cdots v_{p1}^{(p)}=\delta_{ip},\;\; q=\overline{1,k_p},\;\; j=\overline{0,k_i},\;\; p,i=\overline{1,m}.$$

Таким чином довели таку теорему:

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді елементи вектора* $\vec{h}(x)$*, що визначаються формулою* (11)*, є фундаментальними поліномами інтерполяційної задачі Ерміта* (1) *у лінійному просторі* X *зі скалярним добутком.*

Надалі формулу (10) запишемо в іншому вигляді та зведемо її до інтерполяційної формули Ерміта. Введемо позначення:

$$P_{nj0}(x)=g(x_j,x),$$
$$P_{nj1}(x)=\frac{\partial}{\partial\alpha_1}g(x_j+\alpha_1v_{11}^{(1)},x)\Big|_{\alpha_1=0},$$
$$P_{nj2}(x)=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2\partial\alpha_1}g(x_j+\alpha_1v_{21}^{(2)}+\alpha_2v_{22}^{(2)},x)\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{njk_j}(x)=\frac{\partial^{k_j}}{\partial\alpha_{k_j}\cdots\partial\alpha_1}g(x_j+\sum_{p=1}^{k_j}\alpha_pv_{jp}^{(k_j)},x)\Big|_{\alpha_1=\cdots=\alpha_{k_j}=0}.$$

В цих позначеннях вектор $\vec{g}_H(x)$ та матриця $H=\|H^{js}\|_{j,s=1}^m$ запишуться у вигляді:

$$\vec{g}_H(x)=\begin{Bmatrix}P_{nj0}(x)\\P_{nj1}(x)\\\cdots\\P_{njk_j}(x)\end{Bmatrix}_{j=1}^m,\qquad(12)$$

$$\|H^{js}\|=\begin{Vmatrix}P_{nj0}(x_s) & P_{nj0}^{(1)}(x_s)v_{s1}^{(1)} & \cdots & P_{nj0}^{(k_s)}(x_s)v_{sk_s}^{(k_s)}\cdots v_{sk_s}^{(k_s)}\\P_{nj1}(x_s) & P_{nj1}^{(1)}(x_s)v_{s1}^{(1)} & \cdots & P_{nj1}^{(k_s)}(x_s)v_{sk_s}^{(k_s)}\cdots v_{sk_s}^{(k_s)}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\P_{njk_j}(x_s) & P_{njk_j}^{(1)}(x_s)v_{s1}^{(1)} & \cdots & P_{njk_j}^{(k_s)}(x_s)v_{sk_s}^{(k_s)}\cdots v_{sk_s}^{(k_s)}\end{Vmatrix}=\qquad(13)$$
$$=\|P_{njq}^{(p)}(x_s)v_{sp}^{(p)}\cdots v_{s1}^{(p)}\|_{q=\overline{0,k_j},p=\overline{0,k_s}}.$$

Нехай $(P_{njq}^{(p)}(x_s)v_{sp}^{(p)}\cdots v_{s1}^{(p)})^{-1}$, $q=\overline{0,k_j}, p=\overline{0,k_s}$, $j,s=\overline{1,m}$ — елементи оберненої матриці H^{-1}. Відповідно до [12] маємо:

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^m\Bigg\{F(x_j)\sum_{s=1}^m\left\{(P_{nj0}(x_s))^{-1}P_{nj0}(x)\right\}+$$
$$+F'(x_j)v_{j1}^{(1)}\sum_{s=1}^m\left\{(P_{nj1}^{(1)}(x_s)v_{s1}^{(1)})^{-1}P_{nj1}(x)\right\}+\cdots+\qquad(14)$$
$$+F^{(k_j)}(x_j)v_{jk_j}^{(k_j)}\cdots v_{j1}^{(k_j)}\sum_{s=1}^m\left\{(P_{njk_j}^{(k_s)}(x_s)v_{sk_s}^{(k_s)}\cdots v_{s1}^{(k_s)})^{-1}P_{njk_j}(x)\right\}\Bigg\}.$$

Розглянемо частинний випадок, коли $X = E_2$ є скінченновимірним Евклідовим простором, $F : E_2 \to R_1$, $\gamma \in E_2, \gamma = (x, y)$, $\gamma_i = (x_i, y_i)$, $v_{ij}^{(p)} = (\alpha_i^{pj}, \beta_i^{pj})$, $j = \overline{1,p}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$. Фукнція $F(\gamma)$ задана своїми значеннями $F(\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато $F^{(p)}(\gamma_i)v_{ip}^{(p)} \cdots v_{i1}^{(p)}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$. Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів оберемо таким чином, щоб матриця H була неособливою. В цьому випадку формула (5) запишеться у вигляді

$$g(\gamma_i, \gamma_j) = \sum_{p=0}^{n} (x_i x_j + y_i y_j)^p,$$

а інтерполяційний поліном Ерміта $P_n(\gamma)$ визначається формулами (12)–(14).

Нехай M — кількість інтерполяційних умов (1). Надалі будемо вважати, що число вузлів m задано (фіксовано), а отже і M є фіксованим. Степінь інтерполяційного полінома n обираємо з нерівності $M \le \min p = \overline{p}$, де p — розмірність простору поліномів степеня n в E_2, $p = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ [7].

Приклад 1. Нехай $m = 2$, $\gamma_i = (x_i, y_i), i = 1, 2$, $\gamma_1 = (0, 1), \gamma_2 = (1, 0)$, $v_1 = (1, 0)$. Задані значення $F(\gamma_1)$, $F'(\gamma_1)v_1$, $F(\gamma_2)$, $M = 3$. Вузли $\gamma_i, i = 1, 2$ та напрямок диференціала Гато v_1 задавольняють умови теореми 1 із роботи [11]. Отже, в цьому випадку інтерполяційна задача Ерміта є інваріантно розв'язною, а побудований розв'язок буде єдиним. Це означає, що матриця H, що визначається на підставі формули (4) є невиродженою. Визначимо степінь інтерполянта із нерівності

$$M = 3 \le \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overline{p} = 3.$$

Одержали, що $n = 1$. Побудуємо інтерполяційний поліном Ерміта $P_1(\gamma)$. З урахуванням формули (4) маємо

$$H = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{Vmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -2 & -11 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

вектори (2), (3) набувають вигляду

$$\vec{F}_H = \begin{Vmatrix} F(\gamma_1) \\ F'(\gamma_1)v_1 \\ F(\gamma_2) \end{Vmatrix}, \quad \vec{g}_H(x, y) = \begin{Vmatrix} 1 + x \\ x \\ 1 + y \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо вектор $\vec{h}(x, y)$:

$$\vec{h}(x, y) = H^{-1}\vec{g}_H(x, y) = \begin{Vmatrix} 1 - y \\ -1 + x + y \\ y \end{Vmatrix},$$

$$h_1(x, y) = 1 - y, \quad h_2(x, y) = -1 + x + y, \quad h_3(x, y) = y.$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що виконуються рівності

$$h_i(\gamma_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1,3, \quad h_2(\gamma_j) = 0, \quad j = 1,2,$$
$$h_i'(\gamma_j)v_1 = 0, \quad i = 1,3, \quad h_2'(\gamma_j)v_1 = \delta_{1j}, \quad j = 1,2,$$

а інтерполяційний поліном $P_1(x,y)$ запишеться у вигляді

$$P_1(\gamma) = F(\gamma_1)h_1(\gamma) + F'(\gamma_1)v_1h_2(\gamma) + F(\gamma_2)h_3(\gamma).$$

Нехай $F(x,y) = 1 + 2x - 3y$. Тоді

$$F(1,0) = 3, \quad F'(1,0)v_1 = 2, \quad F(0,1) = -2,$$
$$P_1(x,y) = 3(1-y) + 2(-1+x+y) - 2y = 1 + 2x - 3y,$$

тобто у випадку $m = 2$, $M = 3$, $\overline{p} = 3$, $n = 1, k_1 = 1, k_2 = 0$ інтерполянт $P_1(x,y)$ є точним на поліномі першого степеня.

Приклад 2. Нехай $m = 2$, $\gamma_i = (x_i, y_i), i = 1,2$, $\gamma_1 = (1,0)$, $\gamma_2 = (0,1)$, $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$. Задано $F(\gamma_i)$, $F'(\gamma_i)v_i$, $i = 1,2$, $M = 4$. Обрані вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато відповідають умовам теореми 1 [11]. Це означає, що матриця H неособлива. Степінь інтерполянта обираємо з нерівності

$$M = 4 \le \min \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \overline{p} = 6.$$

Отже, $n = 2$. Побудуємо інтерполяційний поліном $P_2(\gamma)$. Матриця H, що визначається формулою (4), набуває вигляду

$$H = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{Vmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{11}\begin{Vmatrix} 30 & -18 & -25 & 15 \\ -18 & 13 & 15 & -9 \\ -25 & 15 & 30 & -18 \\ 15 & -9 & -18 & 13 \end{Vmatrix}.$$

Вектори (2), (3) запишуться так

$$\vec{F}_H = \begin{Vmatrix} F(\gamma_1) \\ F'(\gamma_1)v_1 \\ F(\gamma_2) \\ F'(\gamma_2)v_2 \end{Vmatrix}, \quad \vec{g}_H(x,y) = \begin{Vmatrix} 1+x \\ x \\ 1+y \\ y \end{Vmatrix}.$$

Обчислимо $\vec{h}(x,y)$:

$$\vec{h}(x,y) = H^{-1}\vec{g}_H(x,y) = \begin{Vmatrix} 1+x+x^2 \\ x+2x^2 \\ 1+y+y^2 \\ y+2y^2 \end{Vmatrix}.$$

Тоді інтерполянт Ерміта (14) має вигляд:

$$P_2(\gamma) = \sum_{i=1}^{2} \left\{ F(\gamma_i)h_{2i-1}(\gamma) + F'(\gamma_i)v_ih_{2i}(\gamma_i) \right\},$$

де

$$h_1(x,y) = 1 + x + x^2, \quad h_2(x,y) = x + 2x^2,$$
$$h_3(x,y) = 1 + y + y^2, \quad h_4(x,y) = y + 2y^2.$$

Як неважко бачити, поліноми $h_i(\gamma), i = \overline{1,4}$, відповідають співвідношенням

$$h_{2i-1}(\gamma_k) = \delta_{ik}, \;\; h_{2i}(\gamma_k) = 0, \;\; i,k = 1,2,$$

$$h'_{2i-1}(\gamma_k)v_k = 0, \;\; h'_{2i}(\gamma_k)v_k = \delta_{ik}, \;\; i,k = 1,2,$$

тобто вони є фундаментальними поліномами інтерполяційної формули Ерміта.

Нехай $F(x,y) = 1 + x - y + x^2$, тоді

$$F(1,0) = 3, \;\; F(1,0)v_1 = 3,$$

$$F(0,1) = 0, \;\; F(1,0)v_2 = -1.$$

Інтерполяційний поліном Ерміта має вигляд

$$P_2(x,y) = \frac{1}{11}(9 + 15x - 7y + 9x^2 - 2y^2),$$

тобто у випадку $M = 4$, $\overline{p} = 6$, $n = 2$ інтерполянт Ерміта (14) не є точним на поліномі другого степеня двох змінних.

Таким чином для скінченновимірного евклідового простору E_2 можна зробити такий висновок: у випадку $M < \overline{p}$ маємо єдиний інтерполянт Ерміта мінімальної норми, при цьому він не є точним на поліномах відповідного степеня (приклад 2). Цей інтерполянт називають недовизначеним. Якщо $M = \overline{p}$, то інтерполяційний поліном Ерміта єдиний та є точним на поліномах відповідного степеня [6] (приклад 1).

Аналогічні міркування та перетворення можна провести для евклідового простору E_k, $\gamma \in E_k$, $\gamma = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, де кількість вузлів m та число інтерполяційних умов M задано (фіксовано), а степінь інтерполянта n визначаємо з умови

$$M \leq \min p = \overline{p}, \;\; p = \frac{(n+k)!}{n!k!}, \;\; k \geq 2, \tag{15}$$

де p — розмірність простору поліномів n-го степеня в E_k [6]. Вузли інтерполяції та напрямки диференціалів Гато із (1) обираємо таким чином, щоб існувала обернена матриця (4), а степінь інтерполяційного полінома визначаємо з нерівності (15).

Сформулюємо наступний висновок для простору E_k у вигляді теореми:

Теорема 3. *Нехай m, M задані, функція $F : E_k \to R_1, k \geq 2$. задана значеннями $F(x_i)$, $i = \overline{1,m}$, у вузлах інтерполяції $x_i, i = \overline{1,m}$, та значеннями диференціалів Гато у цих вузлах до відповідного порядку $k_i, i = \overline{1,m}$ за напрямками $v_{ip}^{(p)} \cdots v_{i1}^{(p)}$, $p = \overline{1,k_i}$, $i = \overline{1,m}$. Тоді, якщо $M = \overline{p}$, то інтерполянт Ерміта $P_n(\gamma)$, $\gamma \in E_k$, що визначається формулою (14), буде точним на всіх поліномах степеня не вище n, а якщо $M < \overline{p}$, то інтерполянт мінімальної норми $P_n(\gamma)$ не має такої властивості.*

Література

1. Cox D. A. Applications of Polynomial Systems. AMS, Mathematics, 2020. 250 p.
2. Nashed M. Generalized Inverses and Applications. New York: Academic Press, 1976. 1054 p.
3. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of operator interpolation. Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. Т. 83. 516 с.
4. Porter W. A. An overview of polinomic system theory. *IEEE Proc. Special issue on system theory.* 1976. Vol. 64, №1. P. 18–26.
5. Prenter P. On Polynomial Operators and Equations. Nonlinear Functional Analysis and Application. New York: Acad. Press. Rail Edition, 1971. 566 p.
6. Бабенко К. И. Основы численного анализа. Москва, Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. 848 с.
7. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. Москва: Наука, 1966. 632с.
8. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайних процесов. Том 1. Москва: Наука, 1971. 664 с.
9. Кашпур О. Ф., Хлобистов В. В. Інтерполяційний поліном Лагранжа в лінійному просторі зі скалярним добутком. *Доповіді Національної академії наук України.* 2018. №8. С. 12–17.
10. Кашпур О. Ф. Інтерполяційний поліном Ерміта для функцій багатьох змінних. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. №3. С. 91–100.
11. Кашпур О. Ф. Розв'язання інтерполяційної задачі Ерміта у скінченновимірному Евклідовому просторі. *Кібернетика та системний аналіз.* 2022. №2. С. 118–127.
12. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В. Основы теории полиномиального операторного интерполирования. Киев: Институт математики НАН Украины, 1998. 278 с.
13. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. Интерполирование операторов. Киев: Наукова думка, 2000. 406 с.
14. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002. 495 с.
15. Хлобистов В. В., Кашпур О. Ф. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах. *Вісник Київського університету, серія: фіз.-міт. науки.* 2005. №2. С. 437–448.

Надійшла: 23.09.2022 / Прийнята: 10.10.2022