Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2021, № 2 (136)** | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.5

MSC 65C60

EQUALITY OF LS AND AITKEN ESTIMATIONS OF THE HIGHER COEFFICIENT OF THE LINEAR REGRESSION MODEL IN THE CASE OF CORRELATED DEVIATIONS

Marta Savkina

Institute of Mathematics of NASU, Kyiv, Ukraine, E-mail: marta@imath.kiev.ua

РІВНІСТЬ ОЦІНОК МНК ТА ЕЙТКЕНА СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТУ ЛІНІЙНОЇ МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ КОРЕЛЬОВАНИХ ВІДХИЛЕНЬ

М. Ю. Савкіна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна, E-mail: marta@imath.kiev.ua

Abstract. At the paper a linear regression model whose function has the form $f(x) = ax + b$, a and b — unknown parameters, is studied. Approximate values (observations) of functions $f(x)$ are registered at equidistant points x_0, x_1,..., x_n of a line segment. It is also assumed that the covariance matrix of deviations is the Toeplitz matrix. Among all Toeplitz matrices, a family of matrices is selected for which all diagonals parallel to the main, starting from the $(k+1)$th, are zero, $k = n/2$, n — even. Elements of the main diagonal are denoted by λ, elements of the kth diagonal are denoted by c, elements of the jth diagonal are denoted by c_{k-j}, $j = 1, 2,..., k-1$. The theorem proved at the paper states that if $c_j = \left(k/(k+1)\right)^j c$, $j = 1, 2,...,k-1$, that the LS estimation and the Aitken estimation of the a parameter of this model coincide for any values λ and c, which provide the positive definiteness of the resulting matrix.

Keywords: least square method, regression model, Aitken estimation.

Анотація. В роботі вивчається регресійна модель, функція якої має вигляд $f(x) = ax + b$, де a та b — невідомі параметри. Також припускається, що коваріаційна матриця відхилень є матрицею Тепліца. Наближені значення (спостереження) функції $f(x)$ реєструються у рівновіддалених точках відрізку $[0, 1]$. В теоремі, яку доведено в роботі, у випадку непарної кількості точок спостереження знайдено певний вигляд матриці Тепліца, який забезпечує рівність оцінки МНК та оцінки Ейткена параметра a даної моделі. При такому вигляді коваріаційної матриці відхилень оцінки Ейткена та МНК параметра b не будуть збігатися.

Ключові слова: метод найменших квадратів, регресійна модель, оцінка Ейткена.

Вступ

В класичній регресії передбачається, що відхилення в регресійній моделі гомоскедастичні та не корелюють одне з іншим. Це доволі жорстка умова, яка досить часто не виконується. В зв'язку з цим актуально дослідження моделі, в якій відхилення мають різну дисперсію та корелюють одне з іншим. Проте в такому випадку коваріаційна матриця відхилень вже не буде одиничною, й оцінка звичайного методу найменших квадратів (МНК) невідомих параметрів моделі втрачає свої оптимальні властивості. Точніше, вона залишається незміщеною та спроможною, але вже не буде ефективною.

У випадку корельованих відхилень з різними дисперсіями ефективну оцінку, яка називається оцінкою Ейткена, дає зважений МНК. В формулу оцінки Ейткена входить вигляд коваріаційної матриці відхилень, тобто використання цієї оцінки передбачає знання такої матриці. А вона на практиці як правило невідома. Тому доводиться користуватися оцінкою МНК.

Отже порівняння цих оцінок, встановлення зв'язку між ними, а також знаходження випадків, коли вони збігаються, має важливе значення.

В [1] у випадку моделі, лінійної по параметрам, доведено теорему, яка стверджує, що для збігу оцінки МНК та оцінки Ейткена необхідно і достатньо, щоб кожну незалежну змінну можно було представити у вигляді лінійної комбінації деяких характеристичних векторів коваріаційної матриці відхилень. Причому одних й тих самих характеристичних векторів; їх кількість має дорівнювати кількості незалежних змінних моделі.

Якщо оцінка МНК та оцінка Ейткена відрізняються одна від одної, досліджується задача, яку похибку ми допускаємо, коли використовуємо оцінку МНК замість оцінки Ейткена. В якості міри ефективності оцінки МНК беруть відношення визначників коваріаційних матриць цих оцінок.

В [1] доведено, що міра ефективності оцінки МНК завжди менше або дорівнює одиниці; дорівнює одиниці вона тоді і тільки тоді, коли оцінка МНК та оцінка Ейткена збігаються. Також отримано формулу для міри ефективності оцінки МНК.

Ватсон у своїх роботах [7–8] отримав границі знизу для міри ефективності оцінки МНК. Одна з цих границь є функцією відношення найменшого характеристичного числа коваріаційної матриці відхилень до найбільшого характеристичного числа цієї матриці. Інша границя залежить від усіх характеристичних чисел коваріаційної матриці.

Гренандер [5] та Розенблат [6] вивчали асимптотичну ефективність оцінки МНК.

В статті [9] у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень вивчається лінійна регресійна модель, функція якої має вигляд

$$f(x) = ax + b.$$

Знайдено умови на дисперсії відхилень, при яких оцінка Ейткена збігається з оцінкою МНК окремо для кожного невідомого параметру моделі. При цих умовах оцінки Ейткена та МНК параметра іншого параметру не будуть збігатися.

1. Оцінка МНК та оцінка Ейткена лінійної регресійної моделі у випадку гетероскедастичних незалежних відхилень

Розглянемо модель регресії

$$y_i = ax_i + b + \epsilon_i, \qquad i = 0, 1, ..., n, \tag{1}$$

де $\epsilon_0, ..., \epsilon_n$ — випадкові величини з $E\epsilon_i = 0$ та коваріаційною матрицею $\sigma^2\Omega_c$, n — парне, а Ω_c — додатньо визначена матриця, що має вигляд

$$\Omega_c = \begin{pmatrix} \lambda & c_{k-1} & \dots & c_2 & c_1 & c & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_{k-1} & \lambda & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & c_{k-2} & c_{k-3} & \dots & c & 0 \\ c & c_1 & \dots & c_{k-2} & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & c_{k-2} & \dots & c_1 & c \\ 0 & c & \dots & c_{k-3} & c_{k-2} & c_{k-1} & \lambda & c_{k-1} & \dots & c_2 & c_1 \\ . & . & \dots & . & . & . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & c_1 & c_2 & c_3 & \dots & \lambda & c_{k-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c & c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & \lambda \end{pmatrix},$$

$\lambda > 0, \quad k = \frac{n}{2}$.

В [2] знайдено формули для оцінки МНК та оцінки Ейткена невідомих параметрів моделі лінійної регресії загального вигляду. З цих формул у випадку моделі (1) та $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$, маємо такі оцінки МНК та Ейткена параметрів a та b:

$$\hat{a}_{MNK} = \frac{12n}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2} \right) y_i, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{AIT} \\ \hat{b}_{AIT} \end{pmatrix} = (X'\Omega_c^{-1}X)^{-1}X'\Omega_c^{-1}\vec{y},$$

де

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \dots & \frac{n-1}{n} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{y}\,' = (y_0, y_1, ..., y_n).$$

2. Умови на коваріаційну матрицю відхилень для збігу оцінок МНК та Ейткена параметру a лінійної моделі

Має місце

Теорема 1. *Якщо в моделі (1)*

$$c_j = \left(\frac{k}{k+1} \right)^j c, \quad j = 1, 2, ..., k-1, \tag{3}$$

λ та c — будь-які величини, які забезпечують додатню визначеність матриці Ω_c, то оцінка Ейткена та оцінка МНК параметра a збігаються.

Доведення. Матриця $X'\Omega_c^{-1}$ має розмір $2 \times (n+1)$, позначимо i-й елемент першого та другого рядка через a_i та b_i, $i = 0$, 1,..., n, відповідно. Помітимо, що

$$b_i = b_{n-i}, \quad i = 0, 1, ..., k-1.$$

В цих позначеннях маємо

$$X'\Omega_c^{-1}X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{2k} ia_i & \sum_{i=0}^{2k} a_i \\ \sum_{i=0}^{k-1} b_i + \frac{1}{2}b_k & 2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k \end{pmatrix}.$$

Позначимо через Δ_c визначник матриці $X'\Omega_c^{-1}X$. Отримуємо

$$\Delta_c = \Big(2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k\Big)\Big(-\frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)a_i + \frac{1}{2k}\sum_{i=k+1}^{2k}(i-k)a_i\Big).$$

Далі,

$$(X'\Omega_c^{-1}X)^{-1}X'\Omega_c^{-1} =$$

$$= \Delta_c^{-1}\begin{pmatrix} 2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k & -\sum_{i=0}^{k-1} b_i + \frac{1}{2}b_k \\ -\sum_{i=0}^{2k} a_i & \frac{1}{2k}\sum_{i=0}^{2k} ia_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{2k} \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{2k} \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\hat{a}_{AIT}^{(j)}$, $j = 0$, 1,..., n, j-й елемент першого рядка матриці $(X'\Omega_c^{-1}X)^{-1}X'\Omega_c^{-1}$. Маємо

$$\hat{a}_{AIT}^{(j)} = \Delta_c^{-1}\Big[\Big(2\sum_{i=0}^{k-1} b_i + b_k\Big)a_j - \Big(\sum_{i=0}^{k-1} b_i + \frac{1}{2}b_k\Big)b_j\Big] =$$

$$= \frac{Z_j}{Z}, \quad j = 0, 1, ..., 2k, \tag{4}$$

де

$$Z_j = 2a_j - b_j,$$

$$Z = -\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)a_i + \frac{1}{k}\sum_{i=k+1}^{2k}(i-k)a_i.$$

Доведемо, що якщо виконується умова (3), то

$$Z_j = \frac{k-j}{k^2}D_k(c), \tag{5}$$

де

$$D_k(c) = \bigg(\Big(2\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^{k-1} - \frac{k+1}{k}\Big)c - \frac{\lambda}{k}\bigg)^{-1}.$$

Помітимо, що a_j та b_j, $j = 0, 1, ..., n$, є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею Ω_c та стовпцями вільних членів

$$\vec{x}_a\,' = \Big(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\Big) \quad \text{та} \quad \vec{x}_b\,' = (1, 1, 1, \dots, 1, 1)',$$

відповідно. Отже,

$$Z_j = 2\frac{||\Omega_{c,j}^{(a)}||}{||\Omega_c||} - \frac{||\Omega_{c,j}^{(b)}||}{||\Omega_c||} = \frac{||\Omega_{c,j}^{(0)}||}{||\Omega_c||}, \tag{6}$$

де $||\Omega_c||$ — визначник матриці Ω_c, $||\Omega_{c,j}^{(a)}||$, $||\Omega_{c,j}^{(b)}||$ та $||\Omega_{c,j}^{(0)}||$, $j = 0,\ 1,...,n$ — визначники матриць, які отримані з матриці Ω_c заміною j-го стовпця на стовпці $\vec{x}_a\,'$, $\vec{x}_b\,'$ та

$$\vec{x}_0\,' = \left(-1, -\frac{k-1}{k}, \ldots, -\frac{1}{k}, 0, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, 1\right),$$

відповідно.

Розглянемо добуток $P_i(c)$ $(i = 0,\ 1,...,\ k-1)$ i-го рядка матриці Ω_c на $\vec{x}_0$. Маємо

$$P_0(c) = -\lambda \cdot 1 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{k-j}{k} c_{k-j};$$

$$P_i(c) = -\sum_{j=0}^{i-1} \frac{k-j}{k} c_{k-i+j} - \lambda \cdot \frac{k-i}{k} -$$

$$-\sum_{j=i+1}^{2i} \frac{k-j}{k} c_{k+i-j} - \sum_{j=2i+1}^{k+i-1} \frac{k-j}{k} c_{k+i-j} + c\frac{i}{k} =$$

$$= -\frac{2(k-i)}{k} \sum_{j=k-i}^{k-1} c_j - \lambda\frac{k-i}{k} - \sum_{j=1}^{k-i-1} \frac{j-i}{k} c_j + c\frac{i}{k},\ \ i = 1, 2, ..., k-2;$$

$$P_{k-1}(c) = -\frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} c_{k-j} - \frac{\lambda}{k} + c\frac{k-1}{k}. \tag{7}$$

Якщо $i = k-2,\ k-3,...,0$, то враховуючи (7) отримуємо

$$P_i(c) = -\frac{2(k-i)}{k} \sum_{j=1}^{k-1} c_j + \left(\frac{2(k-i)}{k} \sum_{j=1}^{k-i-1} c_j - \sum_{j=1}^{k-i-1} \frac{j-i}{k} c_j\right) +$$

$$-\lambda\frac{k-i}{k} + c\frac{i}{k} = \left(-\frac{2(k-i)}{k} \sum_{j=1}^{k-1} c_j - \lambda\frac{k-i}{k} + c\frac{(k-1)(k-i)}{k}\right) -$$

$$-c\frac{(k-1)(k-i)}{k} + \sum_{j=1}^{k-i-1} \frac{2k-i-j}{k} c_j + c\frac{i}{k} =$$

$$= (k-i)P_{k-1}(c) + \sum_{j=1}^{k-i-1} \frac{2k-i-j}{k} c_j - c(k-i-1). \tag{8}$$

Доведемо, що при умові (3)

$$\sum_{j=1}^{k-i-1} c_j \frac{2k-i-j}{k} - c(k-i-1) = 0,\ \ i = 0, 1, ..., k-2. \tag{9}$$

Справді, якщо представити $c_j = \alpha^j c$, то ліва частина (9) — поліном $(k-i-1)$-го степеня відносно α, його можна розкласти на добуток

$$\sum_{j=1}^{k-i-1} \alpha^j \frac{2k-i-j}{k} - (k-i-1) = \left(\frac{k+1}{k}\alpha - 1\right) \sum_{j=0}^{k-i-2} \alpha^j (k-i-j-1).$$

Якщо $\alpha = \frac{k}{k+1}$, то $\sum_{j=1}^{k-i-1} \alpha^j (2k-i-j) - (k-i-1)k = 0$, звідки випливає (9).

Таким чином, з (8) при умові (3) отримуємо

$$P_i(c) = (k-i)P_{k-1}(c), \quad i = 0, 1, ..., k-2. \tag{10}$$

За допомогою аналогічних міркувань, враховуючи, що $P_{k+1}(c) = = -P_{k-1}(c)$, отримуємо

$$P_i(c) = (i-k)P_{k+1}(c) =$$
$$= (k-i)P_{k-1}(c), \quad i = k+1, k+2, ..., 2k. \tag{11}$$

Далі, розглянемо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею $\Omega^{+}_{c,j}$, яка утворена з матриці Ω_c додаванням до i-го елемента j-го стовпця доданку $-\frac{(k-i)k}{k-j} P_{k-1}(c)$, $i = 0, 1, ..., 2k$. З (10) та (11) випливає, що при умові (3) ця система має ненульовий розв'язок, а це значить, що

$$||\Omega^{+}_{c,j}|| = 0, \tag{12}$$

де $||\Omega^{+}_{c,j}||$ — визначник матриці $\Omega^{+}_{c,j}$.

Далі, оскільки

$$||\Omega^{+}_{c,j}|| = ||\Omega_c|| - \frac{k^2}{k-j} P_{k-1}(c) ||\Omega^{(0)}_{c,j}||, \tag{13}$$

з (12) та (13) отримуємо

$$||\Omega^{(0)}_{c,j}|| = \frac{k-j}{k^2} P^{-1}_{k-1}(c) ||\Omega_c||. \tag{14}$$

Підставимо (3) в (7); отримуємо, що при умові (3)

$$P_{k-1}(c) = D^{-1}_k(c). \tag{15}$$

Співвідношення (6) має місце для будь-яких c_j, $j = 1, 2, ..., k-1$, значить, і для тих, які визначаються формулою (3).

Підставимо (15) в (14), а (14) в (6). Отримуємо (5).

Далі, доведемо, що Z при умові (3)

$$Z = -\frac{(k+1)(2k+1)}{6k^2} D_k(c), \; j = 0, 1, ..., 2k. \tag{16}$$

Помітимо, що Z можна переписати у вигляді

$$Z = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (k-i)(a_{2k-i} - a_i), \tag{17}$$

де

$$a_{2k-i} - a_i = \frac{||\Omega^{(a)}_{c,2k-i}||}{||\Omega_c||} - \frac{||\Omega^{(a)}_{c,i}||}{||\Omega_c||}. \tag{18}$$

Розкладемо в (18) визначники $||\Omega^{(a)}_{c,2k-i}||$ та $||\Omega^{(a)}_{c,i}||$ по $(2k-i)$-му та i-му стовпцям відповідно згідно з теоремою Лапласа [3]. Маємо

$$a_{2k-i} - a_i = ||\Omega_c||^{-1}\left(\sum_{l=0}^{2k} \frac{l}{2k} A_{l,2k-i} - \sum_{l=0}^{2k} \frac{l}{2k} A_{l,i}\right), \tag{19}$$

де $A_{l,2k-i}$ та $A_{l,i}$ алгебраїчні доповнення до елементів $\omega_{l,2k-i}$ та $\omega_{l,i}$ матриці Ω_c відповідно. Доведемо, що для матриці Ω_c має місце рівність

$$A_{l,2k-i} = A_{2k-l,i}. \tag{20}$$

Позначимо через $\Omega_{c,\pi}$ матрицю, яка утворена з матриці Ω_c розворотом на 180 градусів, а через $\bar{\Omega}^{(i,j)}_c$ та $\bar{\Omega}^{(i,j)}_{c,\pi}$ матриці, які утворені з матриць Ω_c та $\Omega_{c,\pi}$ відповідно викресленням i-го рядка та j-го стовпця, а через $||\bar{\Omega}^{(i,j)}_c||$ та $||\bar{\Omega}^{(i,j)}_{c,\pi}||$ — визначники матриць $\bar{\Omega}^{(i,j)}_c$ та $\bar{\Omega}^{(i,j)}_{c,\pi}$ відповідно.

Оскільки матриця Ω_c симетрична відносно головної та побічної діагоналей, то при розвороті на 180 градусів вона перейде сама в себе, тобто $\Omega_c = \Omega_{c,\pi}$. З цього випливає, що $\bar{\Omega}^{(n-j,n-i)}_c = \bar{\Omega}^{(n-j,n-i)}_{c,\pi}$. Враховуючи, що

$$A_{n-j,n-i} = (-1)^{2n-i-j}||\bar{\Omega}^{(n-j,n-i)}_c||, \;\; A^{(\pi)}_{n-j,n-i} = (-1)^{2n-i-j}||\bar{\Omega}^{(n-j,n-i)}_{c,\pi}||,$$

де $A^{(\pi)}_{n-j,n-i}$ — алгебраїчне доповнення до елемента $\omega^{(\pi)}_{n-j,n-i}$ матриці $\Omega_{c,\pi}$, отримуємо

$$A_{n-j,n-i} = A^{(\pi)}_{n-j,n-i}. \tag{21}$$

З іншого боку, матриця $\bar{\Omega}^{(i,j)}_c$ при розвороті на 180 градусів переходить в матрицю $\bar{\Omega}^{(n-j,n-i)}_{c,\pi}$. В [4] доведено, що при розвороті будь-якої матриці порядку N на 90 градусів її визначник множиться на $(-1)^{C^2_N}$, значить, при розвороті на 180 градусів — на $(-1)^{2C^2_N}$. Оскільки $2C^2_N = N(N-1)$ — парне число для будь-якого N, то при розвороті на 180 градусів визначник матриці не змінюється, тобто

$$A^{(\pi)}_{n-j,n-i} = A_{i,j}. \tag{22}$$

В силу (21) та (22) $A_{i,j} = A_{n-j,n-i}$, тобто маємо (20).

Таким чином, з (19) з урахуванням (20) отримуємо

$$a_{2k-i} - a_i = ||\Omega_c||^{-1}\left(\sum_{l=0}^{2k} \frac{l}{2k} A_{2k-l,i} - \sum_{l=0}^{2k} \frac{l}{2k} A_{l,i}\right) =$$

$$= ||\Omega_c||^{-1} \sum_{l=0}^{2k} \Big(\frac{2k-l}{2k} - \frac{l}{2k}\Big) A_{l,i} = ||\Omega_c||^{-1} \sum_{l=0}^{2k} \frac{k-l}{k} A_{l,i} =$$

$$= -||\Omega_c||^{-1}||\Omega^{(0)}_{c,i}||. \tag{23}$$

Якщо c_j, $j = 1, 2,...,k-1$, визначаються формулою (3), то з (23) з урахуванням (14) маємо

$$a_{2k-i} - a_i = -\frac{k-i}{k^2} D_k(c). \qquad (24)$$

Підставимо (24) в (17). Отримуємо

$$Z = -\frac{D_k(c)}{k^3} \sum_{i=1}^{k} i^2,$$

звідки випливає (16).

З (4), (5) та (16) отримуємо

$$\hat{a}_{AIT}^{(j)} = -\frac{6(k-j)}{(k+1)(2k+1)}, \quad j = 0, 1, ..., 2k.$$

Далі, оцінку $\hat{a}_{AIT}$ можна подати у вигляді

$$\hat{a}_{AIT} = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_{AIT}^{(j)} y_j.$$

З урахуванням (16) вона збігається з (2). □

Література

1. Anderson T. The statistical analysis of time series. Moscow: Mir, 1976. 756 p. (in Russian)
2. Demidenko E. Z. Linear and nonlinear regression. Moscow: Finance and Statistics, 1981. 304 p. (in Russian)
3. Kurosh A. G. Advanced Algebra Course. Moscow: Nauka, 1965. 431 p. (in Russian)
4. Proskuryakov E. Z. Collection of problems in linear algebra. Moscow: Nauka, 1970. 384 p. (in Russian)
5. Grenander U. On the estimation of the regression coefficients in the case of the autocorrelated disturbance. *Ann. Math. Statist.* 1954. 25. P. 252–272.
6. Rosenblatt M. Serial correlation in Some regression problems in the time series analysis. Proc. Third Berkelay Symposium on Mathematical Statistics and Probability (J. Neyman, ed.). Vol. 1. Univ. of California Press, Berkelay and Los Angeles. 1956. P. 165–186.
7. Watson G. S. Serial correlation in regression analysis, I. *Biometrika.* 1955. 42. P. 327–341.
8. Watson G. S. Linear least squares regression. *Ann. Math. Statist.* 1967. 38. P. 1679–1699.
9. Savkina M. Conditions for the coincidence of the IS and Aitken estimations of the parameters of the linear regression model. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2018. No. 3 (129). P. 36–44. (in Ukrainian)

Надійшла: 25.10.2021 / Прийнята: 10.11.2021

РАВЕНСТВО ОЦЕНОК МНК И ЭЙТКЕНА СТАРШЕГО КОЭФФИЦИЕНТА ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

М. Ю. Савкіна

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина, E-mail: marta@imath.kiev.ua

Аннотация. В работе изучена регрессионная модель с функцией вида $f(x) = ax + b$, где a и b — неизвестные параметры. Предполагается, что ковариационная матрица отклонений является матрицей Теплица. Приближенные значения (наблюдения) функции $f(x)$ регистрируются в равноудаленных точек отрезка $[0, 1]$. В доказанной теореме для случая нечетного количества точек наблюдения найдено вид матрицы Теплица, который обеспечивает равенство оценок МНК и оценки Эйткена параметра a данной модели. При таком виде ковариационной матрицы отклонений оценки Эйткена и МНК параметра b не будут совпадать.

Ключевые слова: метод наименьших квадратов, регрессионная модель, оценка Эйткена.