

УДК 534.2

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.16>

Володимир КУЗЬМЕНКО, студ.

ORCID ID: 0009-0005-7922-430X

e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ярослав ТРОЦЕНКО, д-р філософії, асист.

ORCID ID: 0009-0000-8387-9118

e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЗВУКУ У ПЛОСКОМУ ХВИЛЕВОДІ З ОКРУГЛИМИ ВИГИНАМИ

в' Актуальність проведеного дослідження зумовлена практичною значущістю хвильоводів складної геометрії та суттєвою залежністю характеристик поширення хвиль у них від фізичних і геометричних параметрів системи. Мета роботи – визначення закономірностей поширення звукових хвиль у плоскому хвильоводі, заповненому ідеальною стислою рідиною, який містить два округлі вигини. На основі методу часткових областей побудовано чисельно-аналітичну модель, що дає змогу досліджувати поведінку акустичних хвиль у хвильоводі залежно від обраних параметрів. Виконано аналіз особливостей проходження хвилі крізь геометричні неоднорідності залежно від хвильового розміру для двох варіантів значень кутів вигинів. Обчислено енергетичні коефіцієнти проникнення звукової хвилі крізь вигини, а також коефіцієнти збурення однорідних мод у широкому діапазоні параметрів. Проведено верифікацію отриманих результатів шляхом контролю виконання закону збереження енергії. Похибка обчислення зростає зі збільшенням хвильового розміру та кутів вигинів, проте може бути зменшена завдяки врахуванню більшої кількості неоднорідних мод. Показано, що зародження вищої однорідної моди пов'язане зі зменшенням коефіцієнта проникнення. При цьому можливе повне запирання потоку енергії хвилі, що відповідає зародженню першої моди. Для кутів вигинів 45° домінують нульова мода майже на всьому діапазоні хвильових розмірів. Для кутів вигинів 135° виявлено додаткові області зниження коефіцієнта проникнення, що зумовлені резонансними ефектами геометрії хвильоводу. У цьому випадку на першій половині розглянутого діапазону хвильових розмірів домінує нульова мода, а на другій – перша. Отримані результати можуть бути використані під час проєктування повітряних звукопроводів, частотно-селективних пристроїв і систем шумопоглинання. Перспективним напрямом подальших досліджень є аналіз механізмів перетворення енергії між модами, що відкриває можливості для керування просторовою структурою акустичного поля.

Ключові слова: акустична хвиля, хвильовід, звукове поле, однорідні моди, неоднорідні моди, енергетичні коефіцієнти, метод часткових областей.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 34B60, 65L10.

Вступ

Сучасна акустика є однією із ключових галузей фізики, а її прикладні аспекти охоплюють широкий спектр практичних застосувань. Особливе значення мають хвильоводи, геометрія яких у багатьох інженерних і наукових задачах є складною, що суттєво впливає на характер поширення хвиль (Grinchenko, Vovk, & Matsypura, 2018). Зокрема, у роботі (Маципура, Вовк, & Трунов, 2013) встановлено, що власні форми однорідних мод у криволінійних і плоскопаралельних хвильоводах можуть суттєво відрізнятися. Крім того, у дослідженні (Трунов, 2014) показано, що структура поля за вигином хвильоводу значно залежить від його геометричних параметрів. У зв'язку із цим виникає потреба в детальній аналізі закономірностей поширення звукових хвиль у хвильоводах складної форми.

Одним з ефективних сучасних підходів до аналізу хвильових процесів у складних геометріях є метод часткових областей. Наприклад, у роботі (Naida et al., 2023) продемонстровано ефективність розширення цього методу для розв'язання складних просторових задач із практичними застосуваннями, зокрема, у біомедицинській інженерії. У дослідженні (Грінченко, & Маципура, 2025) продемонстровано можливість одночасного використання різних форм загального розв'язку в окремих часткових областях – як аналітичних, так і чисельних – з метою зменшення обсягів обчислень за збереження точності результатів.

Об'єктом пропонованого дослідження є акустичне поле в нескінченному плоскому хвильоводі з двома округлими вигинами, заповненому ідеальною стислою рідиною. Мета роботи – побудова чисельно-аналітичного розв'язку задачі поширення звукових хвиль у такому хвильоводі із застосуванням методу часткових областей, а також визначення залежностей між характеристиками акустичного поля та параметрами хвильоводу.

1. Постановка задачі та математична модель

Авторами розглянуто задачу про поширення акустичних хвиль у нескінченному плоскому хвильоводі з двома округлими вигинами (рис. 1). Величини вигинів визначено кутами α та β . Хвильовід заповнений ідеальною стислою рідиною, поверхні вважалися абсолютно жорсткими. Втрати звукової енергії у середовищі відсутні.

Дослідження акустичного поля у хвильоводі проводили на основі методу часткових областей. Загальну область існування звукового поля природно розділити на п'ять областей, де області I та V – це напівнескінченні хвильоводи з висотою h , область III – скінченний хвильовід з висотою h та довжиною l , області II і IV – обмежені дугами кіл з радіусами R , $R + h$ та R' , $R' + h$ відповідно. Уводилися чотири декартові системи координат xOy , $x'Oy'$, $x''O'y''$ та $x'''O'y'''$ так, щоб їхні осі ординат були паралельними до поверхонь областей I, III та V, а також дві полярні системи координат із центрами в точках O та O' .

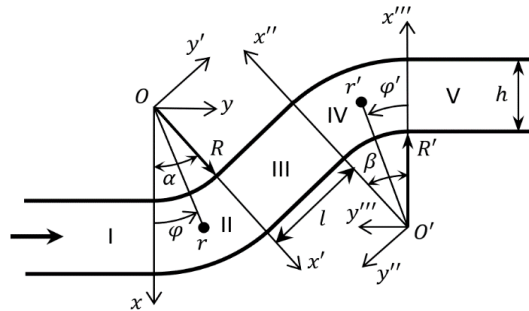


Рис. 1. Схема хвильоводу з вигинами

Нехай ліворуч у хвильоводі поширюється гармонічна плоска хвиля з одиничною амплітудою тиску $p_0 = \exp \exp(iky)$, де $k = 2\pi/\lambda$ — хвильове число, λ — довжина хвилі. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$, де ω — частота хвилі, не враховуємо для скорочення викладок. Для аналізу акустичного поля хвильоводу необхідно представити функції тиску p в кожній частковій області так, щоб вони задовольняли рівняння Гельмгольца та крайові умови на поверхнях хвильоводу, тобто нормальна складова швидкості коливань на стінках дорівнювала нулю.

Унаслідок взаємодії плоскої хвилі з вигином утворюється відбита хвиля та хвиля, що проходить в область II. Тому тиск в області I можна записати в системі координат xOy як суму падаючої хвилі та відбитої, яку представлено як суперпозицію нормальних мод області I:

$$p_I = \exp \exp(iky) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\eta_n(x-R)) \exp(-i\xi_n y), \quad \text{де } \eta_n = \frac{n\pi}{h}, \quad \xi_n = \sqrt{k^2 - \eta_n^2}.$$

Аналогічно, поле тиску в області V в системі координат $x'''O'y'''$ визначає прониклу хвилю крізь другий вигин:

$$p_V = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\eta_n(x''' - R')) \exp(-i\xi_n y''').$$

В області III функцію тиску можна представити в системі координат $x'O'y'$ як суперпозицію відбитих хвиль від першого та другого вигину:

$$p_{III} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos \cos(\eta_n(x' - R)) \exp \exp(i\xi_n y') + \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos \cos(\eta_n(x' - R)) \exp \exp(-i\xi_n (y' - l)).$$

Побудуємо розв'язок для області II:

$$p_{II} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos \cos(\eta_n(x - R)) \exp \exp(i\xi_n y) + \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos \cos(\eta_n(x' - R)) \exp \exp(-i\xi_n y') + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} G_n \cos \cos(v_n \varphi) \frac{J_{v_n}(kr)}{J_{v_n}'(k(R+h))} + \sum_{n=0}^{\infty} H_n \cos \cos(v_n \varphi) \frac{Y_{v_n}(kr)}{Y_{v_n}'(kR)}, \quad \text{де } v_n = \frac{n\pi}{\alpha}.$$

Тут $J_{v_n}(kr)$ та $Y_{v_n}(kr)$ — функції Бесселя 1-го та 2-го роду відповідно, штрих при функції Бесселя позначає похідну за аргументом.

Аналогічно побудуємо розв'язок для області IV:

$$p_{IV} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos \cos(\eta_n(x'' - R'')) \exp \exp(-i\xi_n y'') + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos \cos(\eta_n(x''' - R')) \exp \exp(i\xi_n y''') + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} R_n \cos \cos(\mu_n \varphi') \frac{J_{\mu_n}(kr')}{J_{\mu_n}'(k(R'+h))} + \sum_{n=0}^{\infty} S_n \cos \cos(\mu_n \varphi') \frac{Y_{\mu_n}(kr')}{Y_{\mu_n}'(kR')}, \quad \text{де } \mu_n = \frac{n\pi}{\beta}.$$

Для визначення невідомих коефіцієнтів необхідно задовольнити умови спряження на межах часткових областей, тобто забезпечити рівність тисків і нормальних складових коливальних швидкостей, а також крайові умови на жорстких поверхнях в областях II та IV. Підстановка виразів, що описують поля тиску в кожній з областей, у відповідні умови спряження та крайові умови, з урахуванням формул перетворень між системами координат, приведе до системи функціональних рівнянь. Застосування властивості ортогональності відповідних систем функцій дає змогу алгебраїзувати функціональну систему. У підсумку отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду відносно невідомих коефіцієнтів, яку розв'язують методом редукції (Grinchenko, Vovk, & Matsypura, 2018).

2. Результати роботи програми

Важливими характеристиками поширення звукової хвилі у хвильоводі є енергетичні коефіцієнти, тобто коефіцієнт проникнення W падаючої хвилі крізь вигини та коефіцієнт відбиття V від першого вигину. Коефіцієнт W визначимо як відношення середнього потоку потужності хвилі в області V до середнього потоку потужності падаючої хвилі в області I. Використовуючи відповідні вирази для функцій p_0 та p_V , отримаємо

$$W = \sum_{n=0}^{N_1} W_n, \quad \text{де } W_n = \frac{\varepsilon_n}{k} \operatorname{Re}(\xi_n) |B_n|^2.$$

Тут N_1 — кількість однорідних мод в області V. Для хвильоводу із жорсткими межами $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0.5$ для $n > 0$ (Grinchenko, Vovk, & Matsypura, 2018). Аналогічно, коефіцієнт відбиття V визначаємо як відношення середнього потоку потужності у відбитій хвилі до середнього потоку потужності падаючої хвилі в області I:

$$V = \sum_{n=0}^{N_2} V_n, \quad \text{де } V_n = \frac{\varepsilon_n}{k} \operatorname{Re}(\xi_n) |A_n|^2,$$

N_2 – кількість однорідних мод в області I.

Для представлених у цій роботі результатів кількість доданків у рядах Фур'є становила $n = 15$. Довжину області III обирали такою, що дорівнює $l = h - R \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) - R' \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right)$, а радіуси вигинів – $R = R'$. На рис. 2–3 наведено залежності енергетичних коефіцієнтів $W + V$, W та коефіцієнтів збурення нормальних хвиль W_n області V від хвильових розмірів $\frac{h}{\lambda}$. За кутів вигинів $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ$ закон збереження енергії виконується з точністю не нижче 0.03 % (рис. 2 а). За $\frac{h}{\lambda} \approx 0.5$ коефіцієнт проникнення W знижується до нуля, тобто спостерігається запирання потоку енергії хвилі, що пов'язане із зародженням першої моди хвильоводу. За $\frac{h}{\lambda} \approx 1$ і $\frac{h}{\lambda} \approx 1.5$, що відповідає зародженню другої та третьої мод відповідно, запирання потоку енергії не відбувається (рис. 2 б). Варто зауважити, що практично на всьому розглянутому інтервалі $\frac{h}{\lambda}$ домінують нульова мода (рис. 2 в).

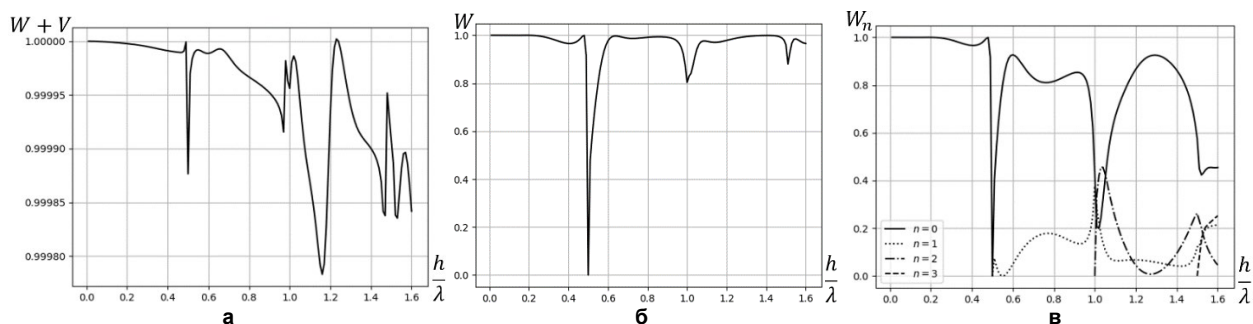


Рис. 2. Залежність енергетичних коефіцієнтів від хвильових розмірів за $\alpha = 45^\circ, \beta = 45^\circ$: а – $W + V$; б – W ; в – W_n

Для кутів $\alpha = 135^\circ, \beta = 135^\circ$ закон збереження енергії виконується з меншою точністю, найвища похибка обчислення становить близько 3.9 % за $\frac{h}{\lambda} \approx 1.44$ (рис. 3 а). Зменшити похибку можна, урахувавши більшу кількість доданків n у рядах Фур'є. Запирання потоку енергії за $\frac{h}{\lambda} \approx 0.5$ не відбувається, проте наявні додаткові області зниження коефіцієнта проникнення W , пов'язані з резонансними властивостями геометрії. Найбільше зниження коефіцієнта проникнення W спостерігається за $\frac{h}{\lambda} \approx 1.04$ (рис. 3 б). У цьому випадку за $\frac{h}{\lambda} < 0.82$ домінують нульова мода, тоді як за $\frac{h}{\lambda} > 0.82$ переважає перша мода (рис. 3 в).

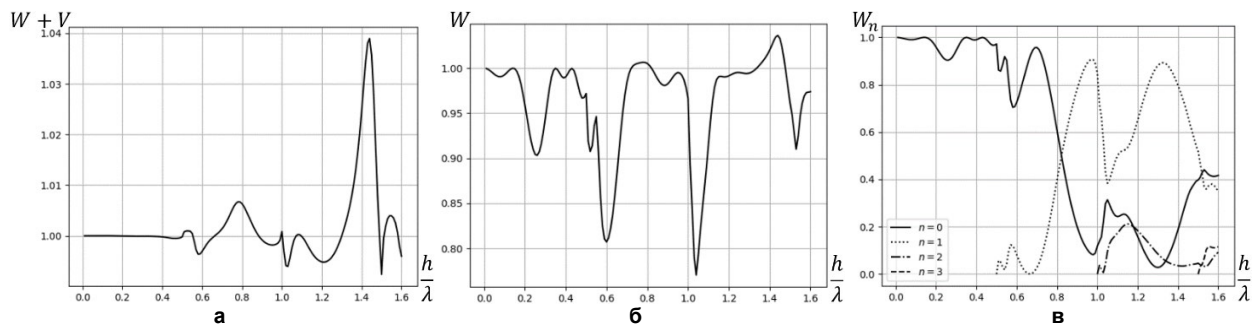


Рис. 3. Залежність енергетичних коефіцієнтів від хвильових розмірів за $\alpha = 135^\circ, \beta = 135^\circ$: а – $W + V$; б – W ; в – W_n

Дискусія і висновки

Отримані результати узгоджуються з даними попередніх досліджень. У роботі (Трунов, 2014), наприклад, показано, що за певних комбінацій параметрів хвильоводу з вигином спостерігаємо домінування однієї з мод, і цей ефект посилюється зі зменшенням відношення радіуса заокруглення до ширини хвильоводу. У роботі (Вовк, Маципура, & Трунов, 2014) встановлено, що за домінування нульової моди коефіцієнт проникнення є високим, тоді як у разі переважання вищих мод він знижується.

Отже, у представленій роботі розв'язано задачу поширення звукових хвиль у плоскому хвильоводі з акустично жорсткими стінками та геометричними неоднорідностями у вигляді двох округлих вигинів із використанням методу часткових областей. Проведено верифікацію закону збереження енергії. Показано, що зародження вищих однорідних мод супроводжується зменшенням коефіцієнта проникнення. Крім цього, можливе повне запирання потоку енергії хвилі, що пов'язане з появою першої однорідної моди. Встановлено, що за кутів вигинів 45° нульова мода домінує практично в усьому діапазоні хвильових розмірів. Натомість за кутів 135° виявлено додаткові області зниження коефіцієнта проникнення, зумовлені резонансними властивостями геометрії хвильоводу. У цьому випадку у нижній частині діапазону хвильових розмірів переважає нульова мода, тоді як у верхній – перша. У майбутніх дослідженнях плануємо проаналізувати залежність характеристик акустичного поля у хвильоводі від радіуса заокруглення та кутів вигинів, а також розглянути конфігурацію хвильоводу із протилежним напрямком другого вигину.

Отримані результати мають практичну цінність для розвитку теорії та застосування хвильоводів складної форми. Кількісні характеристики трансформації мод можуть бути використані, наприклад, під час проектування повітряних звукопроводів. Подальше вивчення механізмів перетворення енергії між модами відкриває перспективи створення ефективних шумопоглинальних систем і частотно-селективних пристроїв.

Внесок авторів: Володимир Кузьменко – формальний аналіз, програмне забезпечення, написання (оригінальна чернетка); Ярослав Троценко – аналіз джерел, концептуалізація, методологія, написання (перегляд і редагування).

Джерела фінансування. Фінансування здійснюється власним коштом авторів та частково забезпечено Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Вовк, І. В., Маципура, В. Т., & Трунов, О. О. (2014). Поширення хвилі у криволінійному хвильоводі з різкою зміною ширини вигину. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, 3, 28–31.
- Грінченко, В. Т., & Маципура, В. Т. (2025). Дискретно-аналітичний метод розв'язання задач математичної фізики. *Вісник Національного технічного університету "ХПІ". Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*, 1, 55–60. [https://doi.org/10.20998/2222-0631.2025.01\(8\).06](https://doi.org/10.20998/2222-0631.2025.01(8).06)
- Маципура, В. Т., Вовк, І. В., & Трунов, О. О. (2013). Поширення хвиль в криволінійному хвильоводі. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, 3, 192–195.
- Трунов, О. О. (2014). Хвильове поле у хвильоводі з вигином. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, 2, 83–86.
- Grinchenko, V. T., Vovk, I. V., & Matsypura, V. T. (2018). *Acoustic wave problems*. Begell House, Inc. <https://doi.org/10.1615/978-1-56700-459-5.0>
- Naida, S. A., Korzhyk, O. V., Naida, N. S., Korzhyk, M. O., Naida, A. S., & Popovych, P. V. (2023). Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer. *Journal of nano- and electronic physics*, 15(6), 06012. [https://doi.org/10.21272/jnep.15\(6\).06012](https://doi.org/10.21272/jnep.15(6).06012)

References

- Grinchenko, V. T., & Matsypura, V. T. (2025). Discrete-analytical method of solving problems in mathematical physics. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Mathematical modeling in engineering and technologies*, 1, 55–60 [in Ukrainian]. [https://doi.org/10.20998/2222-0631.2025.01\(8\).06](https://doi.org/10.20998/2222-0631.2025.01(8).06)
- Grinchenko, V. T., Vovk, I. V., & Matsypura, V. T. (2018). *Acoustic wave problems*. Begell House, Inc. <https://doi.org/10.1615/978-1-56700-459-5.0>
- Matsypura, V. T., Vovk, I. V., & Trunov, O. O. (2013). Wave propagation in the bent waveguide. *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 3, 192–195 [in Ukrainian].
- Naida, S. A., Korzhyk, O. V., Naida, N. S., Korzhyk, M. O., Naida, A. S., & Popovych, P. V. (2023). Application of the Partial Domain Method to the Determination of the Directional Properties of a Finite-Length Cone Horn for a Broadband Acoustic Ear Echo Spectrometer. *Journal of nano- and electronic physics*, 15(6), 06012. [https://doi.org/10.21272/jnep.15\(6\).06012](https://doi.org/10.21272/jnep.15(6).06012)
- Trunov, O. O. (2014). A wave field in a waveguide with a bend. *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 2, 83–86 [in Ukrainian].
- Vovk, I. V., & Matsypura, V. T. & Trunov, O. O. (2014). The wave propagation in bent waveguide with thickened bend. *Bulletin of the Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physical and Mathematical Sciences*, 3, 28–31 [in Ukrainian].

Отримано редакцією журналу / Received: 27.08.25

Прорецензовано / Revised: 26.09.25

Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Volodymyr KUZMENKO, Student
ORCID ID: 0009-0005-7922-430X
e-mail: vovakuzmenko0200@gmail.com
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Yaroslav TROTSENKO, PhD, Assist.
ORCID ID: 0009-0000-8387-9118
e-mail: yaroslav.trotsenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

MODELING OF SOUND PROPAGATION IN A PLANAR WAVEGUIDE WITH ROUNDED BENDS

The relevance of this study is determined by the practical significance of waveguides with complex geometries and the strong dependence of their wave propagation characteristics on the physical and geometric parameters of the system. This work aims to investigate the regularities of sound wave propagation in a planar waveguide filled with an ideal compressible fluid and containing two rounded bends. A numerical-analytical model based on the partial domains method has been developed, enabling the analysis of acoustic wave behavior in the waveguide depending on the selected parameters. The features of wave transmission through geometric inhomogeneities are analyzed for two bending angle configurations across a wide range of normalized wavelengths. The energy transmission coefficients of the sound wave through the bends, as well as the propagating mode excitation coefficients, have been computed over an extensive set of parameters. The obtained results have been verified by checking the fulfillment of the energy conservation law. It is shown that the computational error increases with larger normalized wavelengths and bending angles, but can be reduced by accounting for a greater number of inhomogeneous modes. The onset of higher-order propagating modes reduces the transmission coefficient, while the emergence of the first mode can lead to a complete suppression of the wave energy flux. For bending angles of 45°, the zero mode dominates across almost the entire range of normalized wavelengths. For bending angles of 135°, additional regions of reduced transmission are observed due to the resonant properties of the waveguide geometry. In this case, the zero mode dominates in the lower half of the considered wavelength range, while the first mode becomes dominant in the upper half. The obtained results can be applied in the design of air ducts, frequency-selective acoustic devices, and noise reduction systems. A promising direction for future research is the detailed study of intermodal energy conversion mechanisms, which provides opportunities for controlling the spatial structure of the acoustic field.

Keywords: acoustic wave, waveguide, sound field, homogeneous modes, inhomogeneous modes, energy coefficients, partial domains method.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript; or in the decision to publish the results.