Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 Прикладна математика

на тему

ТЕОРІЯ ВІДНОВЛЕННЯ НА ДЕРЕВАХ (ПОЧАТКОВІ РІВНІ)

студента 4 курсу
Шуляка Нікіти Віталійовича

Науковий керівник
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов Олександр Маратович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол №........... від . . . . 2021р.

Завідувач кафедри ДО   проф. Іксанов О.М.

Київ - 2021

ЗМІСТ

Вступ

Класична теорія відновлення – це область прикладної теорії ймовірностей, що має справу з неспадаючими стандартними випадковими блуканнями та різними похідними процесами такими, як процес відновлення, час першого проходження, перестриб, недостриб і т.д.

Нехай (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2), \ldots$ є незалежними копіями випадкового веткора (ξ, η) із додатними довільно залежними координатами. Випадкова послідовність $S := (S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) що визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається *випадковим блуканням, що стартує в нулі*. Випадкова послідовність $T := (T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, що визначається так

$$T_k := S_{k-1} + \eta_k = \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається *збуреним випадковим блуканням.*

Припустимо, що загальний гіллястий процес (відомий також як гіллястий процес Крампа-Мода-Ягерса) породжується стандартним випадковим блуканням $S^{(1)} := S$ з невід'ємними кроками. Зрозуміло, що випадкова послідовність $S^{(j)}$, що задається моментами народження індивідуумів j-го покоління процесу ($j \geq 2$), є набагато складнішою, ніж стандартне випадкове блукання S, що задає моменти народження індивідуумів 1-го покоління. Природно назвати $\left(S^{(j)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ *ітеративним стандартним випадковим блуканням на дереві загального гіллястого* *процесу.* У даній дипломній роботі ми досліджуємо послідовності $S^{(j)}$ для $j \geq 2$ та деякі похідні процеси. Нашою головною метою є отримання аналогів елементарної теореми відновлення, теореми Блекуелла та ключової теореми відновлення, що є класичними результатами теорії відновлення. Насправді ми будемо аналізувати модель, що є більш складною, ніж описано вище. Нами буде розроблено елементи теорії відновлення для *ітеративних збурених випадкових блукань*, а не стандартних випадкових блукань, що зробить наші результати більш загальними.

Покладемо $N(t) := \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j \leq t\}}$ та $V(t) := \mathbb{E}N(t)$ для $t \geq 0$. Можна перевірити, що

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbb{E}U((t-\eta)_+) = (U * G)(t) \\ &= \int_{[0,\, t]} U(t-y) dG(y), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

де для $t \geq 0$ $U(t) := \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\{S_i \leq t\}$ є функцією відновлення, $G(t) := \mathbb{P}\{\eta \leq t\}$ та $x_+ = \max\{x, 0\}$. Тут і надалі $u * v$ позначає згортку Лебега-Стілт'єса двох локально обмежених функцій u та v, а $u^{*(j)}$, $j \in \mathbb{N}$ позначає j-кратну згортку функції u з собою.

Зараз ми надамо більше подробиць щодо конструкції загального гіллястого процесу у спеціальному випадку, що він породжується збуреним випадковим блуканням T. У початковий момент 0 є одна особа, предок. Предок народжує потомство (перше покоління) у моменти часу, що задаються послідовними елементами T. Індивідууми першого покоління народжують власне потомство, що утворює друге покоління популяції. Зсуви моментів народження індивідуумів другого покоління відносно моментів народження їх матерів задаються копіями T, при цьому для різних матерів ці копії незалежні. Індивідууми другого покоління народжують індивідуумів третього покоління і т.д. Всі індивідууми діють незалежно один від одного.

У даному дипломі ми розглядаємо лише *початкові рівні* дерева загального гіллістого процесу, тобто фіксовані рівні $1, 2, \dots$ з номерами, що не залежать від t. Це (частково) пояснює назву роботи.

Для $t \geq 0$ та $j \in \mathbb{N}$ позначимо через $N_j(t)$ кількість індивідуумів j-го покоління з часом народження $\leq t$ та покладемо $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$. Зазначимо, що $V_j(t) = 0$ для $t < 0$. Таким чином, $N_1(t) = N(t)$, $V_1(t) = V(t)$ та

$$V_j(t) = (V_{j-1} * V)(t) = \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)dV(y), \quad j \geq 2,\ t \geq 0.$$

Наведемо базове зображення процесів $N_j := (N_j(t))_{t\geq 0}$, що демонструє їх властивості, зокрема, рекурсивну структуру:

$$\begin{aligned} N_j(t) &= \sum_{r\geq 1} N_{j-1}^{(r)}(t - T_r)\mathbb{1}_{\{T_r \leq t\}} \\ &= \sum_{k\geq 1} N_1^{(k)}(t - T_k^{(j-1)})\mathbb{1}_{\{T_k^{(j-1)} \leq t\}},\ j \geq 2,\ t \geq 0, \quad (2) \end{aligned}$$

де $N_{j-1}^{(r)}$ – кількість нащадків індивідуума першого покоління, народженого у момент T_r, що є представниками j-го покоління, народженими у інтервалі часу $[T_r, t + T_r]$; $T^{(j-1)} := (T_k^{(j-1)})_{k\geq 1}$ – занумеровані у деякий спосіб моменти народження індивідуумів $(j-1)$-го покоління; $N_1^{(k)}(t)$ – кількість дітей індивідуума $(j-1)$-го покоління, народженого у момент $T_k^{(j-1)}$, що є представниками j-го покоління, народженими у інтервалі часу $[T_k^{(j-1)}, t + T_k^{(j-1)}]$. За властивістю розгалуження $(N_{j-1}^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $(N_{j-1}^{(2)}(t))_{t\geq 0}$, $\dots$ є незалежними копіями $N_{(j-1)}$, що також не залежать від T, а $(N_1^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $(N_2^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $\dots$ є незалежними копіями $(N(t))_{t\geq 0}$, що також не залежать від $T^{(j-1)}$.

Наведемо обгрунтування доречності та корисності введення поняття *ітерованих збурених випадкових блукань*.

1. Для кожного цілого $j \geq 2$ послідовність $T^{(j)}$ і процес N_j є природними узагальненнями збуреного випадкового блукання T та лічильного процесу $(N(t))_{t\geq 0}$. Цікаво дослідити, у якій мірі властивості T та $(N(t))$ успадковуються $T^{(j)}$ та N_j. Таким чином, діяльність, що здійснюється у даній роботі, є частковим розвиненням теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань.

2. Послідовність $(T^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ є окремим прикладом гіллястого випадкового блукання, в якому точковий процес, відповідальний за перше покоління, є лічильним процесом $(N(t))_{t\geq 0}$ для збуреного випадкового блукання. В якості альтернативи, і це наша переважна точка зору, для $j \in \mathbb{N}$, $T^{(j)}$ можна інтерпретувати як послідовність часів народження в j-му поколінні загального гіллястого процесу. Отже, результати дипломної роботи сприяють кращому розумінню того, як відбуваються народження в межах певного покоління. Будучи вкрай цікавим питанням для теорії загальних гіллястих процесів, ця інформація також проливає світло на структуру рівнів (наборів вершин, розташованих на однаковій відстані від кореня) деяких випадкових дерев (наприклад, випадкових рекурсивних дерев та бінарного дерев пошуку), які можна побудувати як родинні дерева загальних гіллястих процесів, зупинених у належні випадкові моменти часу.

Аналоги класичних результатів теорії відновлення для збурених випадкових блукань

У цьому розділі ми доведемо аналоги деяких теорем класичної теорії відновлення (див. розділ Додаток) для збурених випадкових блукань.

Розпочнемо з аналогу елементарної теореми відновлення.

Лема 1. *Нехай* $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$. *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{3}$$

Доведення. Нагадаємо позначення $G(x) = \mathbb{P}(\eta \le x)$ для $x \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що $G(x) = 0$ для $x < 0$ внаслідок додатності η. Покладемо $T(t) := \sum_{k\ge1} \mathbb{1}_{\{S_{k-1}\le t<S_{k-1}+\eta_k\}}$ для $t \ge 0$ та зазначимо, що

$$V(t) = U(t) - \mathbb{E}T(t), \quad t \ge 0,$$

де $U(t) = \sum_{k\ge1} \mathbb{P}(S_{k-1} \le t)$ для $t \ge 0$ є функцією відновлення.

Знайдемо альтернативне зображення $\mathbb{E}T(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T(t) &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(S_{k-1}\leq t< S_{k-1}+\eta_k)\\
&= \sum_{k\geq 1}\int_{[0,\,\infty)}\mathbb{P}(y\leq t,\eta_k>t-y|S_{k-1}=y)d\mathbb{P}(S_{k-1}\leq y)\\
&= \sum_{k\geq 1}\int_{[0,\,t]}\mathbb{P}(\eta_k>t-y)d\mathbb{P}(S_{k-1}\leq y)\\
&= \sum_{k\geq 1}\int_{[0,\,t]}(1-G(t-y))d\mathbb{P}(S_{k-1}\leq y)\\
&= \int_{[0,t]}(1-G(t-y))dU(y).
\end{aligned}$$

Згідно з елементарною теоремою відновлення (теорема 5)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=\frac{1}{\mu}. \tag{4}$$

Тому бажаний висновок $\lim_{t\to\infty}\dfrac{V(t)}{t}=\dfrac{1}{\mu}$ буде зроблено, якщо ми покажемо, що $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\mathbb{E}T(t)}{t}=0$.

Для довільного фіксованого $x\in(0,t)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}T(t) &= \int_{[0,\,t-x]}(1-G(t-y))dU(y)\\
&+ \int_{(t-x,\,t]}(1-G(t-y))dU(y)\\
&\leq (1-G(x))U(t-x)+U(t)-U(t-x)\\
&\leq (1-G(x))U(t-x)+U(x).
\end{aligned}$$

Для оцінки інтегралу $\int_{[0,\,t-x]}$ ми скористалися монотонністю $1-G$, а для оцінки інтегралу $\int_{(t-x,\,t])}$ - нерівністю $1-G\leq 1$, а потім субадитивністю функції відновлення U. Застосовуючи елементарну теорему відновлення (теорема 5), отримуємо

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}T(t)}{t} \le \mu^{-1}(1 - G(x)).$$

Для завершення доведення залишилось спрямувати $x \to \infty$. $\square$

Обговоримо швидкість збіжності у граничних співвідношеннях (3) та (4). Для подальшого викладення нам необхідно відокремити два випадки. Згідно з означенням 35 у [1] випадкове блукання (S_n) називається *арифметичним* або *гратчастим*, якщо носій розподілу випадкової величини ξ зосереджений на множині $(nd)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для деякого $d > 0$. Величина d називається *кроком* розподілу ξ. Якщо d є максимальним кроком, тобто носій розподілу ξ зосереджений на множині $(nd)_{n\in\mathbb{N}_0}$ та не зосереджений на множині $(nd_1)_{n\in\mathbb{N}_0}$ для жодного $d_1 > d$, то випадкове блукання називають *d-арифметичним*. Випадкове блукання (S_n) називають *неарифметичним* або *негратчастим*, якщо воно не є d-арифметичним для жодного $d > 0$.

Лема 2. *Нехай (i) $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ для деякого $r \in (1, 2]$, чи (ii) $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim bt^{-r}$ при $t \to \infty$ для деякого $r \in (1, 2)$ і деякого $b > 0$. Тоді*

$$U(t) = \frac{t}{\mu} + O(t^{2-r}), \qquad t \to \infty, \tag{5}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. У випадку (i) коли $r \in (1, 2)$, O велике може бути замінене на o.

За додаткового припущення $\mathbb{E}(\eta \wedge t) = O(t^{2-r})$ при $t \to \infty$

$$V(t) = \frac{t}{\mu} + O(t^{2-r}), \qquad t \to \infty. \tag{6}$$

Доведення. Спочатку зфокусуємось на доведенні (5).
Випадок (i). Якщо $r = 2$, то (5) випливає із нерівності Лордена (формула (25)). Нехай тепер $r \in (1, 2)$. Ми не виключаємо

ситуації, у якій $\mathbb{E}S_0^* < \infty$ або, еквівалентно, $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ (зазначимо, що для $p > 1$ нерівності $\mathbb{E}\xi^p < \infty$ та $\mathbb{E}(S_0^*)^{p-1} < \infty$ є еквівалентними), де S_0^* - випадкова величина, із розподілом (26). При цьому $U(t) = \mu^{-1}t + O(1) = \mu^{-1}t + O(t^{2-r})$ при $t \to \infty$. Отже, далі ми можемо припускати, що $\mathbb{E}S_0^* = \infty$. У цьому випадку

$$\begin{aligned} U(t) - \mu^{-1}t &= \int_{[0,\,t]} \mathbb{P}\{S_0^* > t - y\} dU(y) \\ &\sim \mu^{-1} \int_0^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\} dy, \qquad t \to \infty, \end{aligned}$$

де рівність є еквівалентною відомій рівності $\mathbb{E}U(t - S_0^*) = \mu^{-1}t, \quad t \to \infty$ (див. формулу (27)), а асимптотика випливає із теореми 4 у [9]. З нерівності $\mathbb{E}(S_0^*)^{r-1} < \infty$ випливає співвідношення $\mathbb{P}\{S_0^* > t\} = o(t^{1-r})$, і, отже, $\int_0^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\}dy = o(t^{2-r})$ при $t \to \infty$.

Випадок (ii), у якому $\mathbb{P}\{S_0^* > t\} \sim b(\mu(r-1))^{-1}t^{-(r-1)}$ при $t \to \infty$. Як наслідок,

$$\begin{aligned} U(t) - \frac{t}{\mu} &\sim \frac{1}{\mu} \int_0^t \mathbb{P}\{S_0^* > y\} dy \\ &\sim \frac{b}{\mu^2(r-1)(2-r)} t^{2-r}, \qquad t \to \infty, \end{aligned}$$

що доводить (5). За додаткового припущення, що розподіл ξ є негратчастим, співвідношення (5) також випливає з теореми 2.2 у [7].

Нарешті, співвідношення (6) випливає з рівності

$$V(t) - \mu^{-1}t = \int_{[0,t]} (U(t-y) - \mu^{-1}(t-y)) dG(y) - \mu^{-1}\mathbb{E}(\eta \wedge t),$$

оскільки кожен доданок має асимптотику $O(t^{2-r})$ згідно з (5) та припущенням теореми відповідно. $\square$

Нам також знадобиться нерівність

$$V(x+y) - V(x) \le U(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

що буде відігравати у доведеннях, пов'язаних з V, ту ж роль, що субадитивність відіграє у доведеннях, пов'язаних з U.

Для доведення (7) запишемо для $x, y \ge 0$

$$\begin{aligned} V(x+y) - V(x) &= \mathbb{E}(U(x+y-\eta) - U(x-\eta))\mathbb{1}_{\{\eta \le x\}} \\ &+ \mathbb{E}U(x+y-\eta)\mathbb{1}_{\{x<\eta\le x+y\}} \\ &\le U(y)(\mathbb{P}\{\eta \le x\} + \mathbb{P}\{x < \eta \le x+y\}) \\ &\le U(y), \end{aligned} \tag{8}$$

використавши субадитивність та монотонність U для передостанньої нерівності. Якщо $x, y < 0$, то обидві частини (7) дорівнюють нулеві. Нарешті, ми користуємось монотонністю V, щоб дістатись такого висновку: якщо $x < 0$ та $y \ge 0$, то $V(x+y) - V(x) = V(x+y) \le V(y) \le U(y)$; якщо $x \ge 0$ та $y < 0$, то $V(x+y) - V(x) \le 0 = U(y)$.

Леми 3 та 4 є аналогами теореми Блекуелла (теорема 7) та ключової теореми відновлення (теорема 8) відповідно. Зауважимо, що присутність η_k не відіграє жодної ролі, і результати є тими самими, що і для функції відновлення U.

Лема 3. *Нехай $h > 0$ - фіксоване.*
(а) *Нехай розподіл ξ негратчастий та $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}(V(t+h) - V(t)) = \mu^{-1}h.$$

(б) *Нехай $\mu = \infty$ (припущення негратчастості ξ не накладається). Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}(V(t+h) - V(t)) = 0. \tag{9}$$

Доведення. (а) Згідно з теоремою Блекуелла у негратчастому випадку (теорема 7)

$$\lim_{t\to\infty}(U(t+h) - U(t)) = \mu^{-1}h. \tag{10}$$

З (10) випливає $\lim_{t\to\infty}(U(t+h-\eta)-U(t-\eta))\mathbb{1}_{\{\eta\le t-t^{1/2}\}}=\mu^{-1}h$ м.н. Згадуючи (7), ми робимо висновок

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}(U(t+h-\eta)-U(t-\eta))\mathbb{1}_{\{\eta\le t-t^{1/2}\}}=\mu^{-1}h$$

згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Користуючись (7) ще раз, отримуємо

$$\mathbb{E}(U(t+h-\eta)-U(t-\eta))\mathbb{1}_{\{t-t^{1/2}<\eta\le t\}}\le U(h)\mathbb{P}\{t-t^{1/2}<\eta\le t\},$$

та права частина збігається до 0 при $t\to\infty$. Нарешті, внаслідок монотонності U

$$\mathbb{E}U(t+h-\eta)\mathbb{1}_{\{t<\eta\le t+h\}}\le U(h)\mathbb{P}\{t<\eta\le t+h\},$$

та права частина збігається до 0 при $t\to\infty$. Доведення частини (а) завершується посиланням на першу рівність у (8) з $x=t$ та $y=h$.
(б) Якщо розподіл ξ негратчастий, то за теоремою Блекуелла (7),

$$\lim_{t\to\infty}(U(t+h)-U(t))=0. \tag{11}$$

Якщо розподіл ξ - d-арифметичний, тоді, за теоремою Блекуелла (6), (11) виконується при $h=jd,\ j\in\mathbb{N}$. Однак, використовуючи монотонність U, ми можемо переконатися, що (11) виконується для будь-якого фіксованого $h>0$ як у негратчастому, так і в гратчастому випадках. Повторюючи аналогічні кроки доведення частини (а), ми приходимо до (9). $\square$

Далі нам знадобиться поняття *безпосередньої інтегровності за Ріманом.*

Кажуть, що функція $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $[0,\infty)$, якщо
(a) $\overline{\sigma}(h)<\infty$ для кожного $h>0$ та
(b) $\lim_{h\downarrow 0}(\overline{\sigma}(h)-\underline{\sigma}(h))=0$, де

$$\overline{\sigma}:=h\sum_{n\ge1}\sup_{(n-1)h\le y<nh}f(y) \text{ та } \underline{\sigma}:=h\sum_{n\ge1}\inf_{(n-1)h\le y<nh}f(y).$$

Подібним чином функція $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ є *безпосередньо інтегровною за Ріманом* на $(-\infty, 0]$ або на $\mathbb{R}$, якщо
(a1) $\sum_{n\le 0} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
(b1) $\lim_{h\downarrow 0} h \sum_{n\le 0}(\sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) - \inf_{(n-1)h\le y<nh} f(y)) = 0$
або
(a2) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) < \infty$ для кожного $h > 0$ та
(b2) $\lim_{h\downarrow 0} h \sum_{n\in\mathbb{Z}}(\sup_{(n-1)h\le y<nh} f(y) - \inf_{(n-1)h\le y<nh} f(y)) = 0$

Лема 4. *Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом функцією (dRi) на $\mathbb{R}$.*
(a) *Нехай $\mu < \infty$ та розподіл ξ неарифметичний. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\infty)} f(t-y)dV(y) = \mu^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(y)dy.$$

(b) *Нехай $\mu = \infty$ (припущення неґратчастості ξ не накладаєтьcя). Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\infty)} f(t-y)dV(y) = 0.$$

Якщо f є dRi на $[0,\infty)$ чи $(-\infty, 0]$, тоді проміжок інтегрування $[0,\infty)$ та $\mathbb{R}$ слід замінити на $[0,t]$ та $[0,\infty)$ чи $[t,\infty)$ та $(-\infty, 0]$, відповідно.

Доведення. (a) Ми доводимо твердження користуючись лише припущенням про те, що функція f є *dRi* на $\mathbb{R}$, що еквівалентно - f_+ та f_- (невід'ємна та недодатня частини функції f) є *dRi* на $\mathbb{R}$. Тому, ми припускаємо, що $f \ge 0$ на $\mathbb{R}$. Очевидно, достатньо показати, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,t]} f(t-y)dV(y) = \mu^{-1} \int_0^\infty f(y)dy$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y) = \mu^{-1} \int_{-\infty}^0 f(y)dy.$$

Доведення першого співвідношення наведено на ст. 241-242 у [8] із заміною V на U. Ми перевіримо лише друге співвідношення, спираючись на доведення Резніка.

Ми пройдемо три етапи, послідовно ускладнюючи структуру функції f.

Крок 1. Припустимо спочатку, що

$$f(t) = \mathbb{1}_{[(n-1)h,nh)}(t), \qquad t < 0$$

для фіксованого невід'ємного цілого числа n та $h > 0$. Тоді $f(t-y) = 1$, тоді, і тільки тоді, коли $y \in (t-nh, t-(n-1)h]$, що тягне за собою

$$\lim_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y) = V(t-(n-1)h) - V(t-nh).$$

За лемою 6(a), остання різниця прямує до $\mu^{-1}h$ при $t \to \infty$, що, тим самим, доводить

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y) = \mu^{-1}h = \mu^{-1}\int_{-\infty}^{0} f(y)dy.$$

Крок 2. Припустимо тепер, що

$$f(t) = \sum_{n\leq 0} c_n \mathbb{1}_{[(n-1)h,nh)}(t), \qquad t < 0,$$

де $(c_n)_{n\leq 0}$ послідовність невід'ємних чисел, що задовільняє $\sum_{n\leq 0} c_n < \infty$. Аналогічно діям, наведеними на попередньому кроці, ми стверджуємо

$$\int_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y) = \sum_{n\leq 0} c_n(V(t-(n-1)h) - V(t-nh)).$$

Користуючись лемою 6(a) разом із (7), за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, робимо висновок, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y) = \mu^{-1}h \sum_{n\leq 0} c_n = \mu^{-1}\int_{-\infty}^{0} f(y)dy.$$

Крок 3. Нехай тепер f - довільна невід'ємна dRi функція на $\mathbb{R}$ (насправді, для даного доведення достатньо dRi функції на $(\infty, 0)$). Для кожного $h > 0$, покладемо

$$\bar{f}_h(t) := \sum_{n \leq 0} \sup_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t), \qquad t < 0$$

та

$$\underline{f}_h(t) := \sum_{n \leq 0} \inf_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) \mathbb{1}_{[(n-1)h, nh)}(t), \qquad t < 0.$$

За визначенням безпосередньої інтегровності за Ріманом,

$$\sum_{n \leq 0} \sup_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) < \infty \quad \text{та} \quad \sum_{n \leq 0} \inf_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) < \infty$$

для кожного $h > 0$. Таким чином, функції $\bar{f}_h$ та $\underline{f}_h$ мають таку ж структуру, як і функції на Кроці 2. Згідно з результатами Кроку 2,

$$\lim_{t \to \infty} \int_{(t, \infty)} \bar{f}_h(t-y) dV(y) = \mu^{-1} h \sum_{n \leq 0} \sup_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) =: \mu^{-1} \bar{\sigma}(h)$$

та

$$\lim_{t \to \infty} \int_{(t, \infty)} \underline{f}_h(t-y) dV(y) = \mu^{-1} h \sum_{n \leq 0} \inf_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) =: \mu^{-1} \underline{\sigma}(h)$$

для всіх $h > 0$. Отже, для кожного h>0,

$$\underline{f}_h(t) \leq f(t) \leq \bar{f}_h(t), \qquad t < 0,$$

слідує

$$\begin{aligned}
\mu^{-1}\underline{\sigma}(h) &= \liminf_{t\to\infty}\int_{(t,\infty)}\underline{f}_h(t-y)dV(y)\\
&\le \liminf_{t\to\infty}\int_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y)\\
&\le \limsup_{t\to\infty}\int_{(t,\infty)} f(t-y)dV(y)\\
&\le \limsup_{t\to\infty}\int_{(t,\infty)} \bar{f}_h(t-y)dV(y)\\
&= \mu^{-1}\bar{\sigma}(h).
\end{aligned}$$

За визначенням безпосередньої інтегровності за Ріманом, $\lim_{h\to 0+}(\bar{\sigma}(h)-\underline{\sigma}(h)) = 0$. Також відомо, що $\lim_{h\to 0+}\bar{\sigma}(h) = \int_{-\infty}^{0} f(y)dy$. Спрямовуючи $h \to 0+$ в останньому ланцюжку нерівностей завершує доведення частини (a).
(b) Користуючись лемою 3(b) та повторивши кроки доведення леми 4(a) отримує доведення леми 4(b). $\square$

Іноді трапляється так, що асимптотика леми 4 не потрібна. У цій ситуації може бути достатньо наведеної нижче більш слабкої версії, запозиченої з леми 9.1 у [6].

Лема 5. *Нехай* $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ – *dRi функція на* $\mathbb{R}$. *Тоді для деякого* $r>0$ *та усіх* $x\in\mathbb{R}$

$$\int_{[0,\infty)} f(x-y)dV(y) \le r. \tag{12}$$

Якщо f є dRi на $[0,\infty)$ чи $(-\infty,0]$, тоді проміжок інтегрування $[0,\infty)$ можна замінити на $[0,x]$ чи $[x,\infty)$. При цьому (12) справджується для усіх $x\ge 0$ чи усіх $x\le 0$ відповідно.

Основні результати

Розпочнемо з аналога елементарної теореми відновлення для V_j у початкових рівнях.

Лема 6. *Припустимо, що* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. *Тоді, для деякого фіксованого* $j \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_j(t)}{t^j} = \frac{1}{j!\mu^j} := c_j. \tag{13}$$

Доведення. Найпростіший спосіб доведення цього твердження є використання перетворення Лапласа. Дійсно, для фіксованого $j \in \mathbb{N}$

$$\int_{[0,\infty)} e^{-st} dV_j(t) = (\frac{\mathbb{E}e^{-s\eta}}{1-\mathbb{E}e^{-s\eta}})^j \sim \frac{1}{\mu^j s^j}, \quad s \to 0+.$$

За теоремою Карамата (теорема 1.7.1 в [3]) співвідношення (13) виконується. □

Теорема 1. *Нехай розподіл* ξ *є неарифметичним та* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ *і* $\mathbb{E}\eta < \infty$. *Тоді для будь-якого фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$V_j(t) - \frac{t^j}{j!\mu^j} \sim \frac{cjt^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t \to \infty, \tag{14}$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ *та* $c := \mu^{-1}(\mathbb{E}\xi^2/(2\mu) - \mathbb{E}\eta) \in \mathbb{R}$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо індукцію по

j. Покладемо $j = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} V(t) - \mu^{-1}t &= \int_{[0,t]} (U(t-y) - \mu^{-1}(t-y))dG(y) \\ &- \mu^{-1}\int_0^t (1 - G(y))dy. \end{aligned} \tag{15}$$

Очевидно, другий доданок збігається до $-\mu^{-1}\mathbb{E}\eta$ при $t \to \infty$. Згідно з формулою (28)

$$\lim_{t\to\infty}(U(t) - \mu^{-1}t) = (2\mu^2)^{-1}\mathbb{E}\xi^2 =: b.$$

Разом із нерівністю Лордена (8), за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, перший вираз у (15) збігається до b при $t \to \infty$. Отже, база індукції доведена.

Припустимо тепер, що (14) справджується для $j = k$. Згідно з (14) для $j = 1$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$, таке, що

$$|V(t) - \mu^{-1}t - c| \le \varepsilon \tag{16}$$

для будь-якого $t \ge t_0$. Запишемо, для $t \ge t_0$,

$$\begin{aligned} V_{k+1}(t) &- \frac{t^{k+1}}{(k+1)!\mu^{k+1}} \\ &= \int_{[0,t-t_0]} (V(t-y) - \mu^{-1}(t-y))dV_k(y) \\ &+ \int_{(t-t_0,t]} (V(t-y) - \mu^{-1}(t-y))dV_k(y) \\ &+ \mu^{-1}\int_0^t (V_k(y) - \frac{y^k}{k!\mu^k})dy = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \end{aligned}$$

З (12),

$$(c-\varepsilon)V_k(t-t_0) \le I_1(t) \le (c+\varepsilon)V_k(t-t_0),$$

де, за лемою 6

$$\frac{c-\varepsilon}{k!\mu^k} \le \liminf_{t\to\infty}\frac{I_1(t)}{t^k} \le \limsup_{t\to\infty}\frac{I_1(t)}{t^k} \le \frac{c+\varepsilon}{k!\mu^k}.$$

Користуючись нерівністю Лордена (8) ми отримуємо $|I_2(t)| \le c_L(V_k(t) - V_k(t-t_0))$ для будь-якого $t \ge t_0$, де $c_L = max(c_0, \mu^{-1}\mathbb{E}\eta)$ та, згідно з припущенням (2), $\lim_{t\to\infty} t^{-k} I_2(t) = 0$. Спрямувавши $\varepsilon \to 0+$ та скориставшись останньою формулою, маємо

$$I_1(t) + I_2(t) \sim \frac{ct^k}{k!\mu^k}.$$

Зрештою, за припущенням індукції та правила Лапіталя

$$I_3(t) \sim \frac{ct^k}{(k-1)!\mu^k}, \quad t \to \infty.$$

Поєднавши все разом, ми доводимо (14) для $j = k+1$. $\square$

Наведемо аналог теореми Блекуелла для V_j у початкових рівнях.

Теорема 2. *Нехай ξ має неарифметичний розподіл та $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді для фіксованих $j \in \mathbb{N}$ та $h > 0$*

$$V_j(t+h) - V_j(t) \sim \frac{ht^{j-1}}{(j-1)!\mu^j}, \quad t \to \infty. \tag{17}$$

Доведення. При $j = 1$, співвідношення (17) виконується згідно з лемою 3(a). Запишемо

$$\begin{aligned} V_j(t+h) - V_j(t) &= \int_{[0,t]} (V(t+h-y) - V(t-y)) dV_{j-1}(y) \\ &+ \int_{(t,t+h]} V(t+h-y) dV_{j-1}(y) \\ &=: A_j(t) + B_j(t). \end{aligned}$$

Покажемо спочатку, що внесок $B_j(t)$ є несуттєвим. Дійсно, користуючись монотонністю V та $\lim_{t\to\infty}(V_j(t+h)/V_j(t)) = 1$ (див. лему 6), отримуємо

$$B_j(t) \le V(h)(V_{j-1}(t+h) - V_{j-1}(t)) = o(V_{j-1}(t)), \quad t \to \infty.$$

Згідно з лемою 3(a) при будь-якому $\varepsilon > 0$ існує $t_0 > 0$ таке, що

$$|V(t+h) - V(t) - \mu^{-1}h| \leq \varepsilon$$

при $t \geq t_0$. Тому маємо для $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} A_j(t) &= \int_{[0,t-t_0]} (V(t+h-y) - V(t-y))dV_{j-1}(y) \\ &+ \int_{(t-t_0,t]} V(t+h-y)dV_{j-1}(y) =: A_{j,1}(t) + A_{j,2}(t). \end{aligned}$$

Аналогічно міркуванням, пов'язаним з $B_j(t)$, ми робимо висновок, що $A_{j,2}(t) = o(V_{j-1}(t))$. Далі $A_{j,1}(t) \leq (\mu^{-1}h+\varepsilon)V_{j-1}(t-t_0)$, де

$$\limsup_{t\to\infty}(A_j(t)/V_{j-1}(t)) \leq \mu^{-1}h.$$

Аналогічні викладки доводять обернену нерівність для нижньої границі. Залишається лише скористатись лемою 6. На цьому доведення теореми 2 завершено. $\square$

Наведемо посилений закон великих чисел для N_j у початкових рівнях.

Теорема 3. *Нехай $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді для фіксованого $j \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_j(t)}{t^j} = \frac{1}{\mu^j j!} \quad \text{м.н.} \tag{18}$$

Для доведення теореми нам знадобиться допоміжний результат.

Лема 7. *Нехай $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N(t))^2}{t^2} = \frac{1}{\mu^2}.$$

Доведення. Співвідношення

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(N(t))^2}{t^2} \geq \frac{1}{\mu^2}$$

випливає з $\mathbb{E}(N(t))^2 \geq (V(t))^2$ та припущення 6. Обернена нерівність для верхньої границі слідує із такої нерівності

$$N(t) \leq \nu(t) = \sum_{i \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t\}}, \quad t \geq 0 \quad \text{м.н.}$$

та $\lim_{t\to\infty} t^{-2}\mathbb{E}(\nu(t))^2 = \mu^{-2}$ (див. теорему 5.1 (ii) на с. 57 у [5]). □

Доведення теореми 3. Доводити будемо за математичною індукцією. При $j = 1$ (18) виконується згідно з формулою (24) у [2]. Припускаючи, що (18) виконується для $j = k$, ми покажемо, що рівність виконується і для $j = k+1$. Скористаємось таким представленням

$$\begin{aligned} N_{k+1}(t) &= \sum_{k \geq 1} (N_1^{(r)}(t - T_r^{(k)}) - V(t - T_r^{(k)}))\mathbb{1}_{\{T_r^{(k)} \leq t\}} \\ &+ \int_{[0,\,t]} V(t-y) dN_k(y), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Згідно з випадком $j = 1$ формули (13), для будь-якого $\varepsilon > 0$, існує $t_0 > 0$, таке, що $|t^{-1}V(t) - c_1| \leq \varepsilon$ при $t \geq t_0$. За припущенням індукції маємо

$$\begin{aligned} \int_{(t-t_0,t]} V(t-y) dN_k(y) &\leq V(t_0)(N_k(t) - N_k(t-t_0)) \\ &= o(t^k) \quad \text{м.н.} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\int_{(t-t_0,t]} (t-y) dN_k(y) = o(t^k) \quad \text{м.н.} \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Далі

$$\begin{aligned}\int_{[0,t-t_0]} V(t-y)dN_k(y) &\geq (c_1-\varepsilon)\int_{[0,t-t_0]}(t-y)dN_k(y)\\ &\geq (c_1-\varepsilon)(\int_{[0,t]}(t-y)dN_k(y)\\ &- \int_{(t-t_0,t]}(t-y)dN_k(y)).\end{aligned}$$

Скориставшись тим, що $\int_{[0,t]}(t-y)dN_k(y)=\int_0^t N_k(y)dy$, та правилом Лапіталя у поєднанні із припущенням індукції, робимо висновок

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,t]}(t-y)dN_k(y)}{t^{k+1}}=\frac{1}{\mu^k(k+1)!}\quad \text{м.н.}$$

Поєднуючи усе разом, отримуємо

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,t]}V(t-y)dN_k(y)}{t^{k+1}}\geq\frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!}\quad \text{м.н.}$$

Обернена нерівність для верхньої границі випливає аналогічно. Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,t]}V(t-y)dN_k(y)}{t^{k+1}}=\frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!}\quad \text{м.н.}\tag{20}$$

Далі

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(&\textstyle\sum_{r\geq1} (N^{(r)}(t-T_{r,k})-V(t-T_{r,k}))\mathbb{1}_{\{T_{r,k}\leq t\}})^2\\ &= \sum_{r\geq1}\mathbb{E}(N^{(r)}(t-T_{r,k})-V(t-T_{r,k}))^2\mathbb{1}_{\{T_{r,k}\leq t\}}\\ &\leq \int_{[0,t]}\mathbb{E}(N(t-y))^2dV_k(y)\\ &\leq \mathbb{E}(N(t))^2V_k(t)=O(t^{k+2}),\quad t\to\infty,\end{aligned}$$

де ми скористалися монотонністю $t \mapsto \mathbb{E}(N(t))^2$ для останньої нерівності та лемами 6 і 7 для останньої рівності. Тепер, скориставшись нерівністю Маркова та лемою Бореля-Кантелі (твердження 9), отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{r\geq 1}(N^{(r)}(n^2 - T_{r,k}) - V(n^2 - T_{r,k}))\mathbb{1}_{\{T_{r,k}\leq n^2\}}}{n^{2(k+1)}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{21}$$

(n прямує до ∞ по натуральних числах). Це разом із (20) дає

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_{k+1}(n^2)}{n^{2(k+1)}} = \frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!} \quad \text{м.н.}$$

Спрямувавши t до ∞, ми отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_{k+1}(t)}{t^{k+1}} \frac{1}{\mu^{k+1}(k+1)!} \quad \text{м.н.},$$

довівши тим самим крок індукції. На цьому доведення теореми 3 завершується. $\square$

Наведемо аналог ключової теореми відновлення для V_j у початкових рівнях.

Теорема 4. *Нехай $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – безпосередньо інтегровна за Ріманом функція на $[0,\infty)$. Також вважаємо розподіл ξ неарифметичним та $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. Тоді для фіксованого $j \in \mathbb{N}$*

$$\begin{aligned}(f * V_j)(t) &= \int_{[0,t]} f(t-y)dV_j(y) \\ &\sim (\frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(y)dy)V_{j-1}(t) \\ &\sim \int_0^\infty f(y)dy \frac{t^{j-1}}{(j-1)!\mu^j}, \quad t\to\infty \end{aligned} \tag{22}$$

Доведення. Для $t \geq 0$ покладемо $g(t) := \int_{[0,t]} f(t-y)dV(y)$ та $I := \mu^{-1}\int_0^\infty f(y)dy$. Згідно з лемою 4(a) для будь-якого $\varepsilon > 0$

існує $t_0 > 0$ таке, що $|g(t) - I| \leq \varepsilon$, $t \geq t_0$. Також згідно з лемою 5 $g(t) \leq J$ для деякого $J > 0$ та всіх $t \geq 0$. Отже, для $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
(f * V_j)(t) &= (g * V_{j-1})(t) = \int_{[0.t]} g(t-y)dV_{j-1}(y) \\
&= \int_{[0,t-t_0]} g(t-y)dV_{j-1}(y) + \int_{(t-t_0,t]} g(t-y)dV_{j-1}(y) \\
&\leq (I+\varepsilon)V_{j-1}(t) + J(V_{j-1}(t) - V_{j-1}(t-t_0)). \qquad (23)
\end{aligned}$$

Ми стверджуємо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_{j-1}(t) - V_{j-1}(t-t_0)}{V_{j-1}(t)} = 0. \qquad (24)$$

Граничне співвідношення (24) виконується згідно з лемою 6. Тому, поєднавши разом (23) та (24), отримаємо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{(f * V_j)(t)}{V_{j-1}(t)} \leq I.$$

Аналогічно випливає обернена нерівність для нижньої границі. На цьому доведення теореми завершено. $\square$

Висновки

Головна інтелектуальна цінність даної роботи – отримання аналогів класичних результатів теорії відновлення, а саме елементарної теореми відновлення, теореми Блекуелла та ключової теореми відновлення, для ітеративних збурених випадкових блукань. Встановлені у роботі результати сприяють кращому розумінню того, як відбуваються народження в межах певного покоління загального гіллястого процесу, породженого збуреним випадковим блуканням. Будучи вкрай цікавим питанням для теорії загальних гіллястих процесів, ця інформація також проливає світло на структуру рівнів деяких випадкових дерев (наприклад, випадкових рекурсивних дерев та бінарного дерев пошуку), які можна побудувати як родинні дерева загальних гіллястих процесів, зупинених у належні випадкові моменти часу.

Бібліоґрафія

[1] О. М. Іксанов, *Елементи теорії відновлення.* Електронний курс лекцій (2021) доступний за адресою `http://do.unicyb.kiev.ua/index.php/uk/2011-01-03-10-24-53/11-2011-01-03-10-44-09`

[2] G. Alsmeyer, A. Iksanov and A. Marynych, *Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve.* Stoch. Proc. Appl. 127 (2017), 995-–1017.

[3] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular variation.* Cambridge University Press, 1989.

[4] H. Carlsson and O. Nerman, *An alternative proof of Lorden's renewal inequality.* Adv. Appl. Probab. 18 (1986), 1015–1016.

[5] A. Gut, *Stopped random walks. Limit theorems and applications.* 2nd Edition, Springer, 2009.

[6] A. Iksanov, A. Marynych and I. Samoilenko, *On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking II.* Препринт (2020) доступний за адресою: `https://arxiv.org/abs/2011.12231`.

[7] N. R. Mohan,*Teugels' renewal theorem and stable laws.* Ann.Probab., **4** (1976), 863–868.

[8] S. I. Resnick, *Adventures in stochastic processes.* 3rd printing, Birkhäuser, 2002.

[9] M. S. Sgibnev, *Renewal theorem in the case of an infinite variance*. Sib. Math. J. **22** (1982), 787–796.

Додаток

Тут ми наведемо деякі теореми класичної теорії відновлення, аналоги яких ми отримали у даній роботі.

Теорема 5 (*елементарна теорема відновлення*)**.** *Нехай* $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$. *Для функції відновлення* U *виконується співвідношення*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

При цьому запис $\frac{1}{\infty}$ *інтерпретується як 0.*

(Доведення теореми 5 можно знайти на с. 18 у [1]).

Теорема 6 (*теорема Блекуелла – гратчастий випадок*)**.** *Якщо випадкове блукання є* d*-арифметичним, то*

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{S_k = nd\} = U(nd) - U((n-1)d) \quad \to \quad \frac{d}{\mu}, \quad n \to \infty,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$. *Еквівалентно*

$$\lim_{t\to\infty} (U(t) - U(t-h)) = \frac{h}{\mu}$$

для довільного фіксованого $h = id$, $i \in \mathbb{N}$.

(Доведення теореми 6 можна знайти на с. 28 у [1]).

Теорема 7 (*теорема Блекуелла – негратчастий випадок*)**.** *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, то для довільного фіксованого* $h > 0$

$$\lim_{x \to \infty} (U(x+h) - U(x)) = \frac{h}{\mu},$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

(Доведення теореми 7 можна знайти на с. 32 у [1]).

Теорема 8 (*ключова теорема відновлення – негратчастий випадок*)**.** *Якщо випадкове блукання є неарифметичним, а функція* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $\mathbb{R}^+$*, то*

$$\lim_{x \to \infty} \int_{[0,x]} f(x-y) dU(y) = \mu^{-1} \int_0^\infty f(y) dy,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty]$.

(Доведення теореми 8 можна знайти на с. 50 у [1]).

Нерівність (25), наведена нижче, називається *нерівністю Лордена.*

Твердження 8. *Нехай* U *– функція відновлення* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *та* $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$*. Тоді*

$$U(t) - \mu^{-1} t \le c_0, \quad t \ge 0, \tag{25}$$

де $c_0 := \mathbb{E}\xi^2 / \mu^2$ *та* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

Доведення нерівності Лордена у припущенні, що розподіл ξ є неарифметичним, міститься у статті [4]. Нехай S_0^* - випадкова величина з розподілом

$$\mathbb{P}\{S_0^* \in dx\} = \mu^{-1} \mathbb{P}\{\xi > x\} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) dx. \tag{26}$$

Основна формула (2) із статті [4], яка стверджує

$$\mathbb{E}U(t - S_0^*) = \mu^{-1} t, \quad t \ge 0, \tag{27}$$

також виконується і у арифметичному випадку. Тому, твердження із [4] доводить формулу (25) як у неарифметичному, так і у арифметичному випадках. Також зазначимо, що

$$\lim_{t\to\infty}(U(t)-\mu^{-1}t)=\frac{\mathbb{E}\xi^2}{2\mu^2} \tag{28}$$

за умови, що розподіл ξ є неарифметичним, та $\mathbb{E}\xi^2<\infty$.

Оскільки $V(t)\le U(t)$ при $t\ge 0$, то

$$V(t)-\mu^{-1}t\le c_0,\quad t\ge 0. \tag{29}$$

З іншої сторони, припускаючи, що $\mathbb{E}\eta<\infty$ (припущення $\mathbb{E}\xi^2$ не накладається),

$$\begin{aligned}
V(t)-\mu^{-1}t &= \int_{[0,t]}(U(t-y)-\mu^{-1}(t-y))dG(y)\\
&= \mu^{-1}\int_0^t(1-G(y))dy \ge -\mu^{-1}\int_0^t(1-G(y))dy\\
&\ge -\mu^{-1}\mathbb{E}\eta
\end{aligned}$$

скориставшись $U(t)\ge\mu^{-1}t$ для $t\ge 0$, що є наслідком тотожності Вальда $t\le\mathbb{E}S_{v(t)}=\mu U(t)$, де $v(t):=\inf\{k\in\mathbb{N}:S_k>t\}$ для $t\ge 0$. Отже, ми показали, що за припущення $\mathbb{E}\xi^2<\infty$ та $\mathbb{E}\eta<\infty$,

$$|V(t)-\mu^{-1}t|\le c_L,\quad t\ge 0, \tag{30}$$

де $c_L=max(c_0,\mu^{-1}\mathbb{E}\eta)$.

Наведене нижче твердження, що називається *лемою Бореля-Кантеллі*, є одним з ключових результатів теорії ймовірностей.

Теорема 9. *Якщо $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю випадкових подій таких, що $\sum_{n\ge1}\mathbb{P}(A_n)<\infty$, то $\mathbb{P}\{A_n\quad н.ч.\}=0$. Якщо випадкові події $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними та $\sum_{n\ge1}\mathbb{P}(A_n)=\infty$, то $\mathbb{P}\{A_n..\}=1$.*

(Доведення твердження 9 можна знайти на с. 110 у [1]).