

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/4.13>

Улітко І. А.¹, к. ф.-м. н., доцент
Курилко О. Б.¹, к. ф.-м. н., асистент
Затхей М. Б.¹, студентка

I. A. Ulitko¹, Ph.D., Assoc.Prof.,
O. B. Kurylko¹, Ph.D. Asistant.Prof.,
M. B. Zathei¹, Student

Визначення параметрів первинної моди твердотільного гіроскопу камертонного типу

Determination of parameters of the primary mode of the tuning fork type solid-state gyroscope

¹ Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 03680,
м. Київ, просп. Глушкова, 4 е,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv,
03680, Kyiv, Glushkova Ave., 4 e,
e-mail: ulitko@univ.kiev.ua

Розв'язок задачі про визначення первинної моди коливань п'єзореzonансного камертонного сенсора кутової швидкості обертання побудовано у випадку, коли довжина стержнів камертона набагато перевищує радіус кривизни його основи. Встановлені умови пружного опирання сенсорних елементів та асимптотична форма резонансного визначника можуть бути корисними під час аналізу повної математичної моделі гіроскопа, визначення його резонансних властивостей та параметрів гіроскопічного ефекту.

Ключові слова: вібраційний гіроскоп, камертонний п'єзоперетворювач, резонансні коливання.

The use of a tuning fork resonator as sensitive element of a gyroscopic sensor has some advantages in comparison with other types of the resonators. For instance, it allows to compensate lateral accelerations in the direction perpendicular to the axis of rotation. At the same time, the task of accurate determination of the carrying frequency of the primary mode of a non-moving tuning fork is of great importance. Thus, in [1] the analysis of vibrations of a gyroscope is built on the evaluation of the first frequency of flexure vibrations of Timoshenko's beam with one rigidly fixed end [2]. As a result, the sensing frequencies of the Bryan's splitting pair [3] of the fork lie below the frequency of Timoshenko's beam, and the resonant frequency of the non-moving tuning fork remained uncertain. The purpose of a present paper is to establish this frequency.

In the statement of a problem, concerning real geometric dimensions of the tuning fork elements, we assume that the length of the tuning fork rods l is much more then the radius of the base r : $r/l \ll 1$. Then, frequencies of the flexure vibrations of the half-ring lie much higher than the frequencies of the bending vibrations of the rods. It allows us to give a solution for the base in a quasi-static approximation, and to take into account the dynamics of the tuning fork in the solution for bimorph piezoceramic rods. Conditions of coupling between the rods and the half-ring are reduced to the conditions of elastic fixing of the rods, which take into account the geometric parameters r and l .

Key Words: solid state vibratory gyroscope, tuning fork piezotransducer, resonance vibrations.

Статтю представив член-кореспондент НАН України Жук Я. О.

1. Вступ

Використання камертонного резонатора [6] у якості чутливого елемента гіроскопічного сенсора має певні переваги у порівнянні з іншими типами резонаторів, оскільки дозволяє компенсувати бічні прискорення, перпендикулярні до вісі обертання [7]. На практиці застосовуються як високодобротні п'єзокварцеві резонатори, так і низькодобротні резонатори з п'єзокераміки, танталату або ніобату літію. При цьому завдання точного визначення параметрів первинної моди не-

рухомого камертонного сенсора має принципово важливе значення, оскільки цей тип перетворювачів вирізняється суттєвою залежністю амплітудних і частотних характеристик від геометрії резонатора, електрофізичних й механічних констант п'єзоматеріалу, умов кріплення основи камертона до рухомого об'єкту. При не повному врахуванні цих чинників, що пов'язане з необгрунтованими спрощеннями складеної математичної моделі неможливо встановити достовірні параметри вторинної (сенсорної) моди гіроскопа.

2. Математична модель вібраційного гіроскопа камертонного типу

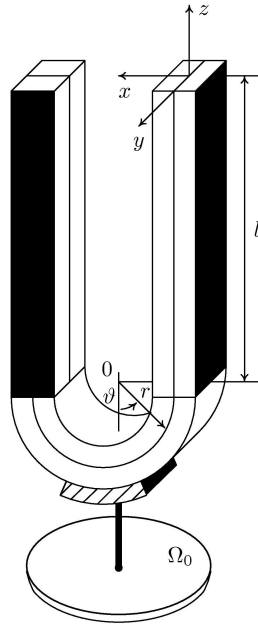


Рис. 1 Геометрія камертонного резонатора

При розробці математичної моделі гіроскопа (рис. 1) він розглядається як коливальна система, що складається з двох тонких біморфних п'єзокерамічних стержнів та електромеханічно неактивного напівкільця з ідентичними до стержнів пружними характеристиками. Збуджуваний біморфний стержень (праворуч на рис.1) має товщину поляризацію у напрямку вісі Ox й електродні покриття на бічних гранях, перпендикулярних до вісі Ox . Вимірювальний біморфний стержень (ліворуч на рис.1) має поляризацією в напрямку вісі Oy й електродні покриття на бічних гранях, перпендикулярних до вісі Oy . В серединній площині обох біморфів містяться електрично не навантажувані роздільні електроди (рис. 2). Оскільки знаки поляризації матеріалу в стержнях є протилежними відносно роздільних електродів, то в однорідному електричному полі виникає сумарна деформація згину, викликана розтягом і стиском рівних половин стержня.

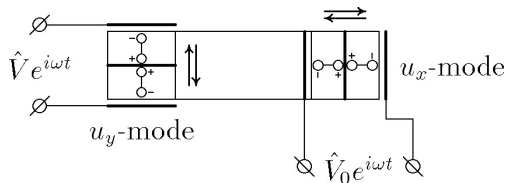


Рис. 2 Поляризація п'єзоелементів

Пружне напівкільце жорстко з'єднується з досліджуваним об'єктом, який обертається з

постійною кутовою швидкістю Ω_0 . Вважаємо, що біморфні п'єзостержні й напівкільце мають один і той же квадратний поперечний переріз зі стороною h , довжина стержнів – l , радіус серединної лінії напівкільця – r .

Визначення механічних характеристик, що відносяться до первинної та вторинної мод функціонування гіроскопічного сенсора, є таким.

Первинна мода. Для нерухомого камертона деформавання обох біморфних п'єзостержнів та пружного напівкільця характеризується лише згином у площині Oxz та у площині $Or\vartheta$, відповідно. Номенклатура невідомих функцій включає: $u_x(z, t)$ – прогин стержня у напрямку вісі Ox , $u(\vartheta, t)$ – прогин напівкільця у площині камертона Oxz , M_x, M_ϑ – моменти згину, відповідно, стержня і напівкільця, Q_x, Q_ϑ – перерізуючі сили.

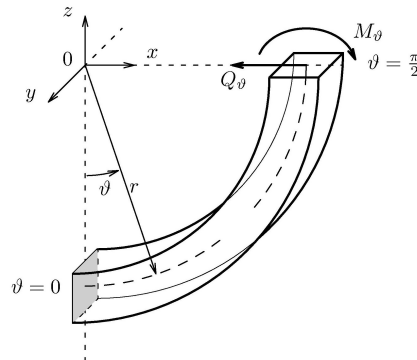


Рис. 3 Деформація згину напівкільця у площині кривизни

Вторинна мода. Під час обертання навколо вісі Oz сили інерції Коріоліса у напрямку вісі Oy викликають згинну деформацію елементів камертона у площині Oyz . В свою чергу, згинна деформація у взаємно перпендикулярних напрямках Ox та Oy породжує деформацію кручення і біморфних стержнів і напівкільця. До номенклатури невідомих функцій додаються: $u_y(z, t)$ – прогин стержня у напрямку вісі Oy ; $v(\vartheta, t)$ – прогин напівкільця у площині Oyz ; φ, β – кути закручування, відповідно, поперечних перерізів стержня та напівкільця; M_y, Q_y – момент згину та перерізуюча сила стержня у напрямку вісі Oy ; M_φ, H – моменти кручення стержня та напівкільця; M_1, N_2 – згинаючий момент та перерізуюча сила напівкільця у напрямку вісі Oy . Явні вирази для перелічених сил та моментів через прогини наведено у роботі [1].

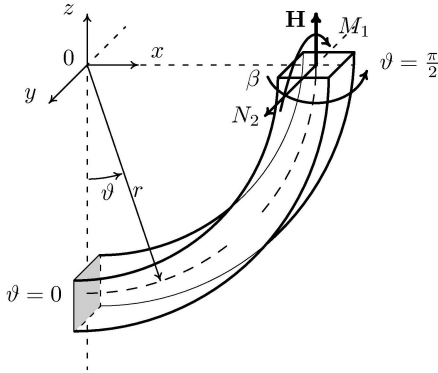


Рис 4. Деформація згину з крученням напівкільця з площини його кривизни

При побудові математичної моделі камертонного гіроскопа система зв'язаних за Коріолісом рівнянь коливань біморфних стержнів формулюється відносно прогинів u_x та u_y

$$\frac{\partial^4 u_x}{\partial z^4} + \frac{\rho h}{EJ} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \Omega_0^2 u_x + 2\Omega_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial^4 u_y}{\partial z^4} + \frac{\rho h}{EJ} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \Omega_0^2 u_y - 2\Omega_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) = 0, \quad (1)$$

де ρ – густина, $EJ = (1 - \bar{\nu}^2) \bar{D}$ – згинна жорсткість. Електропружні константи п'єзоматеріалу $\bar{D}$ та $\bar{\nu}$ визначаються за формулами [4]

$$\bar{D} = \frac{h^4}{12s_{11}^E(1 - \bar{\nu}^2)} \left(1 + \frac{1 + \bar{\nu}}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \right),$$

$$\bar{\nu} = \frac{\bar{\nu} + \frac{1 + \bar{\nu}}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}{1 + \frac{1 + \bar{\nu}}{8} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2}}, \quad k_p^2 = \frac{2}{1 - \bar{\nu}} \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^T}, \quad (2)$$

де s_{11}^E, s_{12}^E – пружні податливості, $\bar{\nu} = -s_{12}^E / s_{11}^E$ – коефіцієнт Пуасона, k_p^2 – квадрат планарного КЕМЗ, d_{31} – п'єзомодуль.

Рівняння згинних коливань напівкільця на первинній моді, у площині його кривизни $Or\vartheta$, записується у вигляді [6]

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + u + \frac{\rho h^2 r^4}{EJ} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

а на деформаціях згину з крученням з площини кривизни для прогину $v(\vartheta, t)$ на вторинній моді в роботі [1] встановлене рівняння

$$\frac{\partial^6 v}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial \vartheta^4} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} - \rho h^2 r^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{1}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{v}{kEJ} \right) = 0, \quad (4)$$

де $k \approx 0,65$ для $\bar{\nu} = 0,33$. Нарешті, крутильні коливання стержнів камертона визначаються з рівняння $\partial^2 \varphi / \partial z^2 = c^{-2} \partial^2 \varphi / \partial t^2$, $c = (\rho s_{11}^E)^{-1/2}$.

Повний аналіз математичної моделі резонатора камертонного гіроскопа приводить до такої системи з двадцяти граничних співвідношень.

Умови спряження на нижньому кінці стержня $z = 0$, відповідно, у верхньому перерізі напівкільця $\vartheta = \pi/2$, налічують десять рівностей:

• первинна мода

$$u|_{\vartheta=\pi/2} = u_x|_{z=0}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

$$M_\vartheta|_{\vartheta=\pi/2} = M_x|_{z=0}, \quad Q_\vartheta|_{\vartheta=\pi/2} = Q_x|_{z=0}, \quad (5)$$

• вторинна мода

$$v|_{\vartheta=\pi/2} = u_y|_{z=0}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} = \frac{\partial u_y}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

$$M_1|_{\vartheta=\pi/2} = M_y|_{z=0}, \quad N_2|_{\vartheta=\pi/2} = Q_y|_{z=0},$$

$$H|_{\vartheta=\pi/2} = M_\varphi|_{z=0}, \quad \beta|_{\vartheta=\pi/2} = \varphi|_{z=0}. \quad (6)$$

Граничні умови на верхньому кінці збуджуваного стержня $z = l$ налічують п'ять рівностей: на первинній моді тут задається момент M_x , що враховує збуджуючу гармонічну різницю електричних потенціалів V_0 , решта моментів та перерізуючих сил дорівнюють нулю

$$M_x|_{z=l} = \frac{1}{2} M_0 \exp(i\omega t), \quad M_0 = 3EJ \frac{1 - \bar{\nu}}{1 - \bar{\nu}} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right),$$

$$Q_x|_{z=l} = 0, \quad (7)$$

$$M_y|_{z=l} = 0, \quad Q_y|_{z=l} = 0, \quad M_\varphi|_{z=l} = 0.$$

Умови кріплення основи камертона на утримувачі налічують п'ять рівностей у кореневому перерізі $\vartheta = 0$

$$u|_{\vartheta=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad (8)$$

$$v|_{\vartheta=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=0} = 0, \quad \beta|_{\vartheta=0} = 0.$$

і відповідають випадку жорсткого закріплення стосовно характеристик деформації згину.

При виконанні усіх записаних вище умов задача виявляється надзвичайно складною. Щоб з'ясувати шлях до редукції повної математичної моделі камертонного гіроскопа, застосуємо гіпотезу квазістатичного наближення.

На практиці камертонні резонатори для сенсорних застосувань виготовлені так, що довжина стержнів камертона є набагато більшою за ширину розрізу між стержнями, також довжина стержнів є набагато більшою за характерний розмір основи. Тому ми обмежимося випадком, коли радіус напівкільця набагато менший за довжину стержнів камертона:

$$\frac{r}{l} \ll 1. \quad (9)$$

При цьому відбувається суттєва перебудова резонансних властивостей складеної коливальної системи, а саме:

- значне підвищення нижчих резонансних частот коливань напівкільця згинно-крутильного типу у порівнянні з резонансними частотами згинних коливань стержнів камертона,
- суттєве зменшення відносних амплітуд прогинів напівкільця.

Тоді можна знехтувати зв'язаністю рівнянь для прогинів напівкільця і стержнів камертона, а в рівняннях (3), (4) можна взагалі знехтувати силами інерції. Інакше кажучи, розв'язок для напівкільця слід шукати у квазістатичному наближенні, що дає змогу спростити виконання умов спряження напівкільця зі стержнями камертона.

3. Визначення основної частоти згинних коливань нерухомого камертона

Для визначення резонансної частоти симетричних згинних коливань нерухомого камертона відбираємо величини, що відповідають первинній моді: прогин стержнів у площині камертона $u_x(z, t)$ та прогин напівкільця у площині його кривизни $\hat{u}(\vartheta)$. В першому рівнянні (1) слід покласти $\Omega_0 = 0$, а в рівнянні (3) $\partial^2 u / \partial t^2 \equiv 0$. Статичний загальний розв'язок для напівкільця запишемо у вигляді

$$\hat{u}(\vartheta) = A \sin \vartheta + B \cos \vartheta + C \vartheta \sin \vartheta + D \vartheta \cos \vartheta, \quad (10)$$

а загальний розв'язок для прогину стержня в динаміці: $u_x(z, t) = \hat{u}_x(z) \exp(i\omega t)$ у вигляді

$$\hat{u}_x(z) = a \sin(\lambda z) + b \cos(\lambda z) + c \operatorname{sh}(\lambda z) + d \operatorname{ch}(\lambda z), \quad (11)$$

де a, b, c, d та A, B, C, D – довільні сталі.

Виконуючи умови кріплення у кореневому перерізі (8) над розв'язком (10) при $\vartheta = 0$ маємо

спрощення: $A = 0, B = 0$. Тоді вирази для прогину напівкільця, кута нахилу перерізу, моменту та перерізуючої сили набувають вигляду

$$\begin{aligned} \hat{u}(\vartheta) &= C \vartheta \sin \vartheta - D(\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta), \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vartheta} &= C(\sin \vartheta + \vartheta \cos \vartheta) - D \vartheta \sin \vartheta, \\ \hat{M}_\vartheta &= -EJ \frac{2}{r^2} (C \cos \vartheta - D \sin \vartheta), \\ \hat{Q}_\vartheta &= EJ \frac{2}{r^3} (C \sin \vartheta + D \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (12)$$

Сталі напівкільця C і D та сталі a, b, c, d стержнів продовжимо визначати з умов спряження на первинній моді (5). Переформулюємо ці умови так, щоб отримати залежності для функцій, що описують коливання стержнів, і так, щоб розв'язки для напівкільця виключити з розгляду. Це означає, що слід шукати сталі інтегрування C, D напівкільця, вважаючи праві частини в рівняннях (5) відомими величинами. В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \hat{u}|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad \frac{\pi}{2} C - D = \hat{u}_x|_{z=0}, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial \vartheta}|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad C - \frac{\pi}{2} D = r \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z}|_{z=0}, \\ \hat{M}_\vartheta|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad EJ \frac{2}{r^2} D = \hat{M}_x|_{z=0}, \\ \hat{Q}_\vartheta|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} &: \quad EJ \frac{2}{r^3} C = \hat{Q}_x|_{z=0}, \end{aligned} \quad (13)$$

звідки

$$C = \frac{r^3}{2EJ} \hat{Q}_x|_{z=0}, \quad D = \frac{r^2}{2EJ} \hat{M}_x|_{z=0}. \quad (14)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \hat{u}_x|_{z=0} &= \frac{\pi}{2} \frac{r^3}{2EJ} \hat{Q}_x|_{z=0} - \frac{r^2}{2EJ} \hat{M}_x|_{z=0}, \\ r \frac{\partial \hat{u}_x}{\partial z}|_{z=0} &= \frac{r^3}{2EJ} \hat{Q}_x|_{z=0} - \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{2EJ} \hat{M}_x|_{z=0}, \end{aligned} \quad (15)$$

Ці граничні рівності при $r \rightarrow 0$ перетворюються на умови жорсткого закріплення стержня на нижньому кінці: $\hat{u}_x|_{z=0} \rightarrow 0, (\partial \hat{u}_x / \partial z)|_{z=0} \rightarrow 0$. За цією ознакою визначимо умови (16) як умови пружного закріплення біморфних стержнів камертона на напівкільці.

Підставляючи в граничні умови первинної моди (7) та в умови пружного закріплення (15) за-

гальний розв'язок для $\hat{u}_x(z)$ (11) і враховуючи вирази для моменту [4] та перерізуючої сили

$$\begin{aligned}\hat{M}_x &= -EJ \frac{d^2 \hat{u}_x}{dz^2} + \frac{h^4}{4s_{11}^E} \frac{1-\bar{\nu}}{1-\nu} \left(d_{31} \frac{V_0}{h} \right), \\ \hat{Q}_x &= \frac{d\hat{M}_x}{dz} = -EJ \frac{d^3 \hat{u}_x}{dz^3},\end{aligned}\quad (16)$$

отримуємо систему чотирьох алгебраїчних рівнянь відносно констант a, b, c, d

$$\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{4}(\lambda r)^3 & 1+\frac{1}{2}(\lambda r)^2 & \frac{\pi}{4}(\lambda r)^3 & 1-\frac{1}{2}(\lambda r)^2 \\ 1+\frac{1}{2}(\lambda r)^2 & \frac{\pi}{4}(\lambda r) & 1+\frac{1}{2}(\lambda r)^2 & -\frac{\pi}{4}(\lambda r) \\ \sin(\lambda l) & \cos(\lambda l) & -\text{sh}(\lambda l) & -\text{ch}(\lambda l) \\ -\cos(\lambda l) & \sin(\lambda l) & \text{ch}(\lambda l) & \text{sh}(\lambda l) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\lambda^2} \frac{M_0}{2EJ} \\ 0 \end{pmatrix}\quad (17)$$

У перші два рівняння системи (17) входять величини, пов'язані з радіусом напівкільця r , а в другі два рівняння – величини, пов'язані з довжиною стержня l , тому слід ввести заміну

$$\lambda r = (\lambda l) \left(\frac{r}{l} \right) = \xi \left(\frac{r}{l} \right)\quad (18)$$

Оцінимо величини коефіцієнтів системи (17) для типового відношення r/l , наприклад, $r/l = 0.1$:

$$\mathbf{A}(\xi) = \begin{pmatrix} -0.0008\xi^3 & 1+0.005\xi^2 & 0.0008\xi^3 & 1-0.005\xi^2 \\ 1-0.005\xi^2 & 0.0785\xi & 1+0.005\xi^2 & -\frac{\pi}{4}0.0785\xi \\ \sin\xi & \cos\xi & -\text{sh}\xi & -\text{ch}\xi \\ -\cos\xi & \sin\xi & \text{ch}\xi & \text{sh}\xi \end{pmatrix}$$

Видно, що коефіцієнти при ξ^3 та ξ^2 є малими третього й четвертого порядку і ними можна знехтувати в (17). На цій підставі виконаємо асимптотичний аналіз резонансного визначника камертона. Маємо: $b \approx -d$, $c \approx 1/2 \pi(\lambda l)(r/l)d - a$ та

$$\begin{aligned}& [\text{sh}(\lambda l) + \sin(\lambda l)]a - \\ & - \left[\cos(\lambda l) + \text{ch}(\lambda l) + \frac{\pi}{2}(\lambda l) \left(\frac{r}{l} \right) \text{sh}(\lambda l) \right] d = \frac{1}{\lambda^2} \frac{M_0}{2EJ}, \\ & [\text{ch}(\lambda l) + \cos(\lambda l)]a + \\ & + \left[\sin(\lambda l) - \text{sh}(\lambda l) - \frac{\pi}{2}(\lambda l) \left(\frac{r}{l} \right) \text{ch}(\lambda l) \right] d = 0.\end{aligned}\quad (19)$$

Із системи (19) отримуємо

$$\begin{aligned}\Delta^{\text{acc}}(\lambda l) &= \underbrace{1 + \cosh(\lambda l) \cos(\lambda l)}_{\Delta_0(\lambda l)} - \\ &- \frac{\pi}{4} \left(\frac{r}{l} \right) (\lambda l) \left\{ \cosh(\lambda l) [\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l)] - \right. \\ &\left. - \sinh(\lambda l) [\cos(\lambda l) + \cosh(\lambda l)] \right\}\end{aligned}\quad (20)$$

На рис. 5 показана поведінка таких визначників у околі першого основного резонансу камертона:

$$\Delta_0(\lambda l) = 1 + \cosh(\lambda l) \cos(\lambda l)\quad (21)$$

– визначника С.П.Тимошенка для стержня з одним жорстко закріпленим торцем [2], $\det(\mathbf{A})$ – точного визначника системи (17), $\Delta^{\text{acc}}(\lambda l)$ – асимптотичного визначника (20) та визначника камертонного гіроскопа [1], розрахованого при однакових розмірах та значеннях констант.

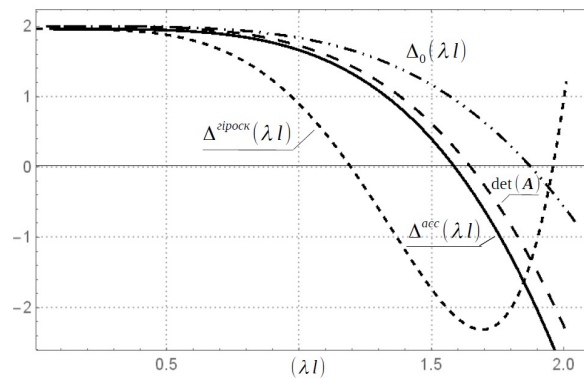


Рис. 5 Порівняння визначників у околі першого резонансу згинних коливань

Видно, що напівкільце малого радіуса r суттєво зменшує частоту першого основного резонансу камертона у порівнянні з частотою жорстко закріпленої балки С.П.Тимошенка $(\lambda l)_1^{(0)} = 1.8751$. При $r/l = 0.1$ значення кореня рівняння $\det(\mathbf{A}) = 0$ складає $(\lambda l)_1^{\text{точн}} = 1.7299$, а значення кореня рівняння $\Delta^{\text{acc}}(\lambda l) = 0$: $(\lambda l)_1^{\text{acc}} = 1.7505$; вони відрізняються від частоти жорстко закріпленого стержня $(\lambda l)_1^{(0)}$ на 7.8% та 6.7%, відповідно. Асимптотика (20) забезпечує задовільну для практики точність обрахунку: відмінність між значеннями $(\lambda l)_1^{\text{acc}}$ та $(\lambda l)_1^{\text{точн}}$ складає лише 1%.

Під час розрахунку резонансних частот камертонного гіроскопа на вторинній сенсорній моді за формулами роботи [1] при кутовій швидкості $\varepsilon = \Omega_0 / \omega = 0.01$ маємо такі значення частот пер-

шого резонансу $(\lambda l)_R^- = 1.68354$, $(\lambda l)_R^+ = 1.81754$, що складають Браянівську пару розщеплення [3]. Знайдена нами резонансна частота первинної моди нерухомого камертону точно співпадає з середнім арифметичним частот $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$ вторинної моди. Значення цього результату полягає у наступному: при збудженні коливань п'єзореzonаторів з низькою добротністю Q частота прикладеного електричного поля має лежати у проміжку між частотами $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$. Тоді слід очікувати, що Браянівські частоти $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$ першого резонансу збуджуватимуться одночасно і сенсорний електричний сигнал гіроскопа матиме вигляд модульованих коливань [5]

$$\frac{V}{h} = \frac{M_0 Q}{EJ} K(\lambda l) \frac{h}{8} \frac{1 - \bar{v}}{d_{31}} \frac{k_p^2}{1 - k_p^2} \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \cos \Omega_0 t,$$

де $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_0^+ + \omega_0^-) \propto \frac{1}{2}[(\lambda l)_R^+ + (\lambda l)_R^-]$ – збуджувана частота первинної моди, що відповідає

значенню $(\lambda l)_1^{\text{acc}} = 1.7505$, а частота модуляції дорівнює прикладеній кутовій швидкості обертання: $\omega_{\text{mod}} = \Omega_0$, $K(\lambda l) = 0.23$ при $(\lambda l)_1^{\text{acc}} = 1.7505$.

4. Висновки

Спираючись на повну математичну модель сенсора кутової швидкості обертання камертонного типу [1] виконано розрахунок частотних параметрів первинної моди гіроскопа. Асимптотична формула резонансного визначника забезпечує визначення резонансної частоти нерухомого камертона з точністю 1%. Встановлене значення резонансної частоти слід використовувати для розрахунку сенсорного сигналу гіроскопа: частота первинної моди нерухомого камертону в точності співпадає з середнім арифметичним частот $(\lambda l)_R^-$ та $(\lambda l)_R^+$ Браянівської пари розщеплення вторинної моди.

Список використаних джерел

1. Ulitko I.A. Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope / I.A. Ulitko // 1995 IEEE Int. Frequency Control Symposium, San Francisco, USA: proceedings. – 1995. – P. 786–793.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер / – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
3. Bryan G.H. On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell / G.H. Bryan // Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci. – 1890. – Vol.7. – P. 101–111.
4. Гринченко В.Т. Электроупругость. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // К.: Наукова думка, 1989 - 280с.
5. Улітко І.А. Сенсорний сигнал вібраційного п'єзогіроскопу камертонного типу / І.А. Улітко, О.В. Борисейко // 36. праць XIX МНК Моделювання та дослідження стійкості динамічних систем (DSMSI-2019) 22-24 травня 2019, Київ. - 2019. – С. 284 - 286.
6. Friedt J.M., Introduction to the quartz tuning fork / J.M. Friedt, É Carry. // Am. Journ. Physics. – Vol 75 – No 5 (May) – 2007. – P.415-422.
7. Fan M. Research progress of quartz tuning fork micromachined gyroscope / M. Fan, L. Zhang // Int. Conf. on Artificial Intelligence & Industrial Engineering, AIIIE 2015, July 26-27, 2015, Phuket, Thailand: proceedings. – 2015. – P.361-364.

References

1. ULITKO, I. A. (1995) Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope. In: Proc 1995 IEEE Int. Frequency Control Symposium. San Francisco, USA pp. 786–793
2. TIMOSHENKO, S., YOUNG, D.H., WEAVER, W. (1974) *Vibration problems in engineering*. John Willey & Sons.
3. BRYAN, G.H. (1890) On the beats in the vibrations of a revolving cylinder or bell. *Proc. Cambridge Phil. Soc. Math. Phys. Sci.* 7. pp. 101–111
4. GRINCHENKO, V.T., ULITKO, A.F., SHULGA, N.A. (1989) *Electroelasticity*. Naukova Dumka
5. ULITKO, I. A. BORISEIKO, O.V. (2019) Sensorny signal vibratsiynogo piezogyroscopy kamertonnoho typu. In: Proc XIX Int. Conf. Dynamical Systems Modeling and Stability Investigation (DSMSI-2019) 22-24 May 2019, Kyiv. pp. 284 - 286
6. FRIEDT, J.M., CARRY, É. (2007) Introduction to the quartz tuning fork *American Journ. Physics*. 75(5) pp.415-422
7. FAN, M., ZHANG, L. (2015) Research progress of quartz tuning fork micromachined gyroscope In: *Int. Conf. on Artificial Intelligence & Industrial Engineering*, AIIIE 2015, July 26-27, 2015, Phuket, Thailand: pp.361-364