Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9

MSC 45D05, 45K05, 35L99

WELL-POSEDNESS OF A DIRICHLET PROBLEM FOR A HYPERBOLIC TYPE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

A. Anikushyn, O. Zhyvolovych

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: anik_andrii@ukr.net

КОРЕКТНІСТЬ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

А. В. Анікушин, О. Є. Живолович

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: anik_andrii@ukr.net

Abstract. In the paper we consider a Dirichlet problem for an integro-differential equation with Volterra type integral term. Proving a priori estimates for the differential and integral parts, we provide negative norms' a priori estimates for the operator of the problem. Based on the latest, we formulate theorems regarding the well-posedness of the formulated boundary value problem.
Keywords: Integro-differential equation, hyperbolic equation, Volterra operator, well-posedness, a priori estimates

Анотація. В статті застосовано метод апріорних оцінок в негативних нормах для доведення коректності постановки задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння з інтегральним доданком типу Вольтерра. Доведено апріорні оцінки для диференціальної та інтегральної частин. Сформульовано теореми узагальненої розв'язності.
Ключові слова: Інтегро-диференціальне рівняння, гіперболічне рівняння, оператор Вольтерра, узагальнена розв'язність, апріорні оцінки

Вступ

У обмеженій циліндричній просторово-часовій області розглянемо початково-крайову задачу Діріхле для гіперболічного диференціального рівняння

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = f,$$

де оператор A не залежить від змінної t і задається еліптичним диференціальним виразом другого порядку.

У роботі [1] для оператору вказаної задачі було отримано апріорні оцінки в негативних нормах у деякій шкалі просторів H^k, S^k, V^k. Як наслідок, доведно коректність постановки відповідної початково крайової задачі та розглянуто питання керованості.

Відзначимо, що апріорні нерівності було отримано явно тільки для однієї трійки просторів. Для усіх інших трійок шкали нерівності було доведено за допомогою граничного переходу.

Після цього у статті [2] автором було встановлено аналогічні теореми узагальненої розв'язності для інтегро-диференціального рівняння

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + Bu = f.$$

Тут оператор B є інтегральним оператором Вольтера

$$Bu = \int_0^t \sum_{i=1}^n K_i(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau.$$

У цитованій роботі використовуються оцінки, отримані в [1] для "диференціальної" частини $u_{tt} + Au$ та доведено нові оцінки для інтегральної частини Bu у фіксованій трійці просторів

$$S^1, \quad V^0, \quad H^2.$$

У роботі [3] авторами було показано як розширити результати [2] на іншу трійку просторів. Зокрема, було показано, що теореми узагальненої розв'язності залишаються вірними і для трійки

$$S^1, \quad V^0, \quad H^2.$$

Відзначимо, що для того аби застосувати підхід з [3] авторам довелося передовести явним чином апріорні нерівності в негативних нормах для диференціальної частини оператора, на противагу доведенню за допомогою граничного переходу з [1].

Наша робота продовжує дослідження з [3]. Ми покажемо, що узагальнена постановка для інтегро-диференціального рівняння буде коректною у ще одній трійці просторів з [1]. У цій статті, як і у цитованих вище джерелах, використовується один і той самий підхід до доведення коректності постановок початково-крайових задач. А саме метод апріорних нерівностей в негативних нормах [4].

Ця методика була успішно застосована до багатьох задач з диференціальними операторами в частинних похідних.

Результати опубліковано у великій кількості статей та монографій. Ми не будемо наводити бібліографічні посилання через різноманітність постановок. Натомість відзначимо, що той самий підхід можна застосовувати до інтегро-диференціальних рівняннь. Це було зроблено у вже цитованих роботах [2], [3] для гіперболічних рівняннь, а також для еліптичних [5], параболічних [6], [7], та деяких спеціальних інтегро-диференціальних рівнянь [8], [9]. Також відзначимо монографію [10] у якій було зібрано результати в цій галузі.

Наша робота побудована таким чином:

– у частині 1 сформульовано початково-крайову задачу, описано простори у яких відбувається дослідження та наведено допоміжні технічні твердження;
– у частині 2 доведено апріорні нерівності для диференціальної та інтегральної частини рівняння;
– на основі отриманих оцінок, у частині 3 наведено теореми, що показують коректність постановки початково-крайової задачі.

1. Постановка задачі

Розглянемо лінійний оператор

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au + Bu \tag{1}$$

де $u(x,t)$ — функція, що описує стан системи в області $Q = \Omega \times (0,T)$, де Ω — обмежена область в n-вимірному просторі з гладкою межею $\partial\Omega$.

Оператор A не залежить від змінної t і задається диференціальним виразом другого порядку:

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u. \tag{2}$$

Задля спрощення технічної частини доведень, ми розглядаємо частковий випадок

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Тобто

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u \tag{3}$$

Зауважимо, що ті саме результати будуть справедливі і у випадку рівномірно еліптичного оператора.

Оператор B має вигляд:

$$Bu = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) u_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau. \tag{4}$$

де ядра $K_i(t,\tau)$ — неперервні на $[0,T]^2$ та неперервно диференційовні за змінною τ.

Будемо вважати, що коефіцієнти a_i, b_i, a - неперервні в $\overline{\Omega}$ функції, а також, що всі функції a_i є строго додатними та відділеними від нуля сталою α:

$$a_i(x) \geq \alpha > 0. \tag{5}$$

Шукана функція $u(t,x)$ задовольняє початкові умови:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{6}$$

та крайові умови:

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{7}$$

Так само, як і в роботах [1] та [2] позначимо через L_0 множину функцій $u(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють такі умови:

$$u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \ldots = 0, \tag{8}$$

L_T — множина функцій $v(t,x) \in C^\infty(\overline{Q})$, що задовольняють умови:

$$v|_{t=T} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=T} = \ldots = 0. \tag{9}$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами і переходячи до поверхневих інтегралів, неважко впевнитися, що для довільних гладких в області $\overline{Q}$ функцій $u(t,x) \in L_0$, $v(t,x) \in L_T$, f, що задовольняють рівняння (1), має місце рівність:

$$\begin{aligned} -(u_t, v_t)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_i u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i}, v)_{L_2(Q)} \\ + (au, v)_{L_2(Q)} + (B_1 u, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$B_1 u = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} K_i(t,\tau) u_{x_i}(x,\tau) d\tau.$$

Ліва частина рівності (10) визначена для довільних $u \in H_0^1$, $v \in H_T^1$. Це дає можливість розглядати ліву частину (10) як визначення оператора

$$\mathcal{L} : H_0^1 \to (H_T^1)^*,$$

що визначений для усіх $u \in H_0^1$. Легко впевнитися, що $\mathcal{L}$ — лінійний оператор.

Та сама ліва частина (10) визначає і лінійний спряжений оператор

$$\mathcal{L}^* : H_T^1 \to (H_0^1)^*,$$

який формально можна записати у вигляді:

$$\mathcal{L}^* v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A^* v + B^* v, \tag{11}$$

де

$$A^* v = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x) v) + a(x) v,$$

$$B^* v = \int_t^T \sum_{i=1}^{n} K_i(\tau,t) v_{x_i x_i}(x,\tau) d\tau.$$

Простори L_0, L_T будемо вважати областями визначення оператора $\mathcal{L}$ та $\mathcal{L}^*$ відповідно.

Нехай H_0^k, V_0^k, S_0^k, H_T^k, S_T^k,V_T^k, $k = 0, 1, 2, 3$ — поповнення множини L_0, L_T, відповідно, за відповідними нормами:

$$||u||^2_{H_0^k} = \int_Q (u^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{(k-1)})^2 \, \mathrm{d}Q,$$

$$||u||^2_{V_0^k} = ||u||^2_{H_0^k} + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_{x_i}^{(k-1)})^2|_{t=T} \, \mathrm{d}\Omega,$$

$$||u||^2_{S_0^k} = ||u||^2_{V_0^k} + \int_\Omega (u^{(k)})^2|_{t=T} \, \mathrm{d}\Omega,$$

$$||v||^2_{H_T^k} = \int_Q (v^{(k)})^2 + \sum_{i=1}^n (v_{x_i}^{(k-1)})^2 \, \mathrm{d}Q,$$

$$||v||^2_{V_T^k} = ||v||^2_{H_T^k} + \sum_{i=1}^n \int_\Omega (v_{x_i}^{(k-1)})^2|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega,$$

$$||v||^2_{S_T^k} = ||v||^2_{V_T^k} + \int_\Omega (v^{(k)})^2|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega.$$

Верхній індекс у виразах $u^{(k)}$ ($v^{(k)}$) тут означає k-ту похідну функції $u(t, x)$ ($v(t, x)$) за змінною t. Через $(H_0^k)^*$, $(V_0^k)^*$, $(S_0^k)^*$, $(H_T^k)^*$, $(V_T^k)^*$, $(S_T^k)^*$ позначимо відповідні спряжені простори.

2. Апріорні оцінки

Розглянемо диференціальну частину оператора (1). Позначимо її $\mathcal{D}$.

Міркуючи аналоічно до робіт [1], [2], [3] легко показати, що мають місце такі теореми:

Теорема 1. *Для довільної функції $u \in L_0$ має місце нерівність*

$$||\mathcal{D}u||_{(H_T^{-1})^*} \leqslant c||u||_{H_0^3} \tag{12}$$

де c — деяка додатна стала, що не залежить від функції $u(t, x)$.

Теорема 2. *Для довільної функції $v \in L_T$ має місце нерівність*

$$||\mathcal{D}^* u||_{H_0^3} \leqslant c||u||_{(H_T^3)^*},$$

де c — деяка додатна стала, що не залежить від функції $v(t, x)$.

Зауваження. Вказані нерівності дозволяють продовжити оператори $\mathcal{D}$ та $\mathcal{D}^*$ з множин L_0 та L_T на простори H_0^3 та $(H_T^3)^*$ за неперервністю відповідно. Збережемо за розширеннями операторів ті самі позначення. Відзначимо, що нерівності, вказані в теоремах 1 і 2, будуть справедливі вже для усіх функцій $u \in H_0^3$ та $v \in (H_T^3)^*$ відповідно.

Теорема 3. *Для довільної функції $u \in H_0^3$ має місце нерівність*

$$c^{-1}||u||_{S_0^2} \leqslant ||\mathcal{D}u||_{(V_T^{-1})^*}. \tag{13}$$

Доведення. Нехай спочатку $u \in L_0$. Для доведення нерівності (13) розглянемо значення функціонала $\mathcal{D}u \in (H_T^3)^* \subset (V_T^3)^*$ на елементі $v(t,x)$, де $v(t,x)$ — розв'язок задачі

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^\xi e^{M\tau}(-\overline{v} + \overline{\overline{v}}) d\xi d\tau. \tag{14}$$

Тут

$$\overline{v}(t,x) = \int_T^t v(s,x)ds, \quad \overline{\overline{v}}(t,x) = \int_T^t \overline{v}(s,x)ds.$$

Зазначимо, що

$$\begin{aligned} u_t &= \int_0^t e^{M\tau}(-\overline{v} + \overline{\overline{v}})d\tau, \\ u_{tt} &= e^{Mt}(-\overline{v} + \overline{\overline{v}}), \\ u_{ttt} &= Me^{Mt}(-\overline{v} + \overline{\overline{v}}) + e^{Mt}(-v + \overline{v}), \end{aligned}$$

Розглянемо кожен з доданків формули $(\mathcal{D}u, v)_{(H_0^3)^* \times H_0^3}$. У першому доданку використаємо інтегрування частинами:

$$I_1 = (u_{tt}, v) = -(u_{ttt}, \overline{v}) = M(e^{Mt}\overline{v}, \overline{v}) - M(e^{Mt}\overline{\overline{v}}, \overline{v}) + (e^{Mt}v, \overline{v}) - (e^{Mt}\overline{v}, \overline{v}).$$

Маємо

$$M(e^{Mt}\overline{v}, \overline{v}) = M \int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 \, \mathrm{d}Q, -(e^{Mt}\overline{v}, \overline{v}) = -\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{15}$$

$$M(e^{Mt}\overline{\overline{v}}, \overline{v}) = -\frac{M}{2} \int_\Omega \overline{\overline{v}}^2\big|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega - \frac{M^2}{2} \int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{16}$$

$$(e^{Mt}v, \overline{v}) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \overline{v}^2\big|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega - \frac{M}{2} \int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{17}$$

Беручі до уваги отримані співвідношення (15)–(17) загалом отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 = -(u_{ttt}, \overline{v}) = \frac{M-2}{2} \int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 \, \mathrm{d}Q - \frac{1}{2} \int_\Omega \overline{v}^2\big|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega + \\ + \frac{M}{2} \int_\Omega \overline{\overline{v}}^2\big|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{M^2}{2} \int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2 \, \mathrm{d}Q. \end{aligned} \tag{18}$$

Зауважимо, що із співвідношенн $u_{tt} = e^{Mt}(-\overline{v} + \overline{\overline{v}})$ та $u_{tt}(0,x) = 0$ випливає, що $\overline{v}|_{t=0} = \overline{\overline{v}}|_{t=0}$. Отже,

$$I_1 = \frac{M-2}{2} \int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 \, \mathrm{d}Q + \frac{M-1}{2} \int_\Omega \overline{v}^2\big|_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{M^2}{2} \int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{19}$$

Для другого доданку маємо

$$I_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_i}(a_i u_{x_i}), v \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 |_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega + M \sum_{i=1}^{n} \int_Q a_i e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 \, \mathrm{d}Q + \sum_{i=1}^{n} \int_Q a_i e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 \, \mathrm{d}Q.$$

Звідки

$$I_2 \geq \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 |_{t=0} \, \mathrm{d}\Omega + M \sum_{i=1}^{n} \int_Q a_i e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{20}$$

Розглядаючи доданок I_2 в інший спосіб (а саме викоистовуючи співвідношення (14) можна отримати загальну оцінку

$$I_2 = I_2' = -\sum_{i=1}^{n} (a_i u_{tx_i}, \overline{\overline{v}}_{x_i} - e^{-Mt} u_{ttx_i}) \geq \tag{21}$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha}{2} \int_\Omega e^{-MT} u_{tx_i}^2 \big|_{t=T} \, \mathrm{d}\Omega + \frac{\alpha M}{2} \int_Q e^{-Mt} u_{tx_i}^2 \, \mathrm{d}Q -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{C_0}{2} \int_Q e^{-Mt} u_{tx_i}^2 + e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 \, \mathrm{d}Q.$$

Для третього доданку маємо:

$$I_3 = \sum_{i=1}^{n} (b_i u_{x_i}, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_Q b_i e^{Mt} \overline{v} \overline{\overline{v}}_{x_i} \, \mathrm{d}Q + \sum_{i=1}^{n} \int_Q b_i e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i} \overline{\overline{v}} \, \mathrm{d}Q. \tag{22}$$

Використовуючи нерівність Коші, отримаємо

$$I_3 \geq -\frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} \overline{v}^2 + e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 \, \mathrm{d}Q - \frac{C_0}{2} \sum_{i=1}^{n} \int_Q e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2 + e^{Mt} \overline{\overline{v}}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{23}$$

І нарешті для четвертого доданку аналогічно отримуємо нерівність

$$I_4 \geq -\frac{C_0}{2} \int_Q e^{Mt} \overline{v}^2 + e^{Mt} \overline{\overline{v}}^2 \, \mathrm{d}Q + \int_Q a e^{Mt} \overline{\overline{v}}^2 \, \mathrm{d}Q. \tag{24}$$

Загалом, додаючи отримані нерівності маємо

$$(\mathcal{D}u, v) = I_1 + \frac{1}{2} I_2 + \frac{1}{2} I_2' + I_3 + I_4 + I_5 \geq$$

$$\geq \frac{M-2}{2}\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2\,\mathrm{d}Q + \frac{M-1}{2}\int_\Omega \overline{v}^2\big|_{t=0}\,\mathrm{d}\Omega + \tag{25}$$
$$+\frac{M^2}{2}\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\,\mathrm{d}Q + \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^n\int_\Omega \overline{\overline{v}}^2_{x_i}|_{t=0}\,\mathrm{d}\Omega +$$
$$+\frac{\alpha M}{2}\sum_{i=1}^n\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2_{x_i}\,\mathrm{d}Q + \sum_{i=1}^n\frac{\alpha}{4}\int_\Omega e^{-MT}u^2_{tx_i}\big|_{t=T}\,\mathrm{d}\Omega +$$
$$+\frac{\alpha M}{4}\int_Q e^{-Mt}u^2_{tx_i}\,\mathrm{d}Q - \sum_{i=1}^n\frac{C_0}{2}\int_Q e^{-Mt}u^2_{tx_i} + e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2_{x_i}\,\mathrm{d}Q -$$
$$-\frac{C_0}{2}\sum_{i=1}^n\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 + e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2_{x_i}\,\mathrm{d}Q - \frac{C_0}{2}\sum_{i=1}^n\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2_{x_i} + e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\,\mathrm{d}Q -$$
$$-\frac{C_0}{2}\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2 + e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\,\mathrm{d}Q + \int_Q a e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\,\mathrm{d}Q.$$

Тепер нескладно побачити, що можна обрати достатньо велике число M, що

$$(\mathcal{D}u,v) \geq d\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2\,\mathrm{d}Q + d\int_\Omega \overline{v}^2\big|_{t=0}\,\mathrm{d}\Omega + d\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\,\mathrm{d}Q + \tag{26}$$
$$+ d\sum_{i=1}^n\int_\Omega \overline{\overline{v}}^2_{x_i}|_{t=0}\,\mathrm{d}\Omega + d\sum_{i=1}^n\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2_{x_i}\,\mathrm{d}Q +$$
$$+ d\sum_{i=1}^n\int_\Omega e^{-MT}u^2_{tx_i}\big|_{t=T}\,\mathrm{d}\Omega + d\sum_{i=1}^n\int_Q e^{-Mt}u^2_{tx_i}\,\mathrm{d}Q.$$

Відзначимо також, що

$$\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2\,\mathrm{d}Q + \int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\,\mathrm{d}Q = \int_Q e^{Mt}(\overline{v}^2+\overline{\overline{v}}^2)\,\mathrm{d}Q \geq 2\int_Q e^{Mt}(-\overline{v}+\overline{\overline{v}})^2\,\mathrm{d}Q \geq$$
$$\geq 2e^{-MT}\int_Q \left(e^{Mt}(\overline{v}+\overline{\overline{v}})\right)^2\,\mathrm{d}Q = 2e^{-MT}\int_Q u^2_{tt}\,\mathrm{d}Q.$$

Тобто, для деякої сталої c виконується нерівність

$$(\mathcal{D}u,v) \geq c(\|u\|^2_{S_0^2} + \|v\|^2_{V_T^{-1}}).$$

Нарешті маємо

$$\|\mathcal{D}u\|_{(V_T^{-1})^*}\|v\|_{V_T^{-1}} \geq (\mathcal{D}u,v) \geq c(\|u\|^2_{S_0^2} + \|v\|^2_{V_T^{-1}}) \geq 2c\|u\|_{S_0^2}\|v\|_{V_T^{-1}}.$$

Таким чином твердження теореми доведено для всіх $u \in L_0$. За допомогою граничного переходу нескладно показати, що вказана нерівність залишається вірною для всіх $u \in H_0^3$. □

Розглянемо тепер інтегральну частину оператора

$$Bu = \int_0^t \sum_{i=1}^n K_i(t,\tau)u_{x_ix_i}(x,\tau)d\tau. \tag{27}$$

Шукана функція $u(t,x)$ задовольняє початкові умови (6) та крайові умови (7), та зазначимо що $K_i(t,\tau)$ — двічі неперервно диференційовна функція. Використовуючи інтегральну нерівність Коші–Буняковського та інтегруючи частинами, можна показати, що має місце така теорема:

Теорема 4. *Існує деяка стала $c_B > 0$, що для довільних функцій $u \in S_0^2$, $v \in V_T^{-1}$ і довільної сталої $M > 0$ має місце нерівність*

$$\left|(Bu, v)_{L^2_{(Q)}}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} c_K^2 \left(\frac{T}{M} + 1\right) \int_Q e^{-Mt} u_{x_i}^2(x,t)\ \mathrm{d}Q + \\ + 2c_k^2 \int_Q u_{tx_i}^2(x,t)\ \mathrm{d}Q + \frac{1}{2}\int_Q e^{Mt} \overline{\overline{v}}_{x_i}^2\ \mathrm{d}Q. \tag{28}$$

Тепер можна поєднати отримані вище результати і сформулювати два центральні твердження.

Теорема 5. *Існує така стала $c > 0$, що для довільної функції $u \in H_0^3$ має місце нерівність*

$$||\mathcal{L}u||_{(H_T^{-1})^*} \leqslant c||u||_{H_0^3}. \tag{29}$$

Доведення. Спираючись на теорему 4, інтегруючи частинами та використовуючи нерівність Фрідріхса маємо

$$|(Bu, v)_{L^2_{(Q)})}| \leqslant c||u||_{H_0^3} \cdot ||v||_{H_T^{-1}}.$$

Звідки виводимо нерівність $||Bu||_{(H_T^{-1})^*} \leqslant c||u||_{H_0^3}$, що в купі з раніше доведеною оцінкою для диференціальної частини оператора $\mathcal{D}$

$$||\mathcal{D}u||_{(H_T^{-1})^*} \leqslant c||u||_{H_0^3}$$

дає потрібний результат. □

Теорема 6. *Існує така стала $c > 0$, що $\forall u \in H_0^3$ має місце*

$$c^{-1}||u||_{S_0^2} \leqslant ||\mathcal{L}u||_{(V_T^{-1})^*}.$$

Доведення. Спочатку розглянемо значення $\mathcal{L}u \in (H_T^{-1})^* \subset (V_T^{-1})^*$ на елементі $v(t,x)$, де $v(t,x)$ - розв'язок задачі Коші

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^\xi e^{Mt}(-\overline{v} + \overline{\overline{v}})\ \mathrm{d}\xi\ \mathrm{d}\tau, \quad v\big|_{t=T} = 0.$$

Попередньо було доведено, що для довільного $d > 0$ знайдеться таке число M, що для диференціальної частини $\mathcal{D}$ оператора має місце нерівність:

$$(\mathcal{D}u, v)_{V_T^{-1}} \geqslant d\int_Q e^{Mt}\overline{v}^2\ \mathrm{d}Q + d\int_\Omega \overline{v}^2\big|_{t=0}\ \mathrm{d}\Omega + d\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}^2\ \mathrm{d}Q + \\ + d\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \overline{\overline{v}}_{x_i}^2|_{t=0}\ \mathrm{d}\Omega + d\sum_{i=1}^{n}\int_Q e^{Mt}\overline{\overline{v}}_{x_i}^2\ \mathrm{d}Q + \\ + d\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega e^{-MT}u_{tx_i}^2\big|_{t=T}\ \mathrm{d}\Omega + d\sum_{i=1}^{n}\int_Q e^{-Mt}u_{tx_i}^2\ \mathrm{d}Q. \tag{30}$$

З теореми 4 відомо, що

$$\left|(Bu,v)_{L^2_{(Q)}}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} 2c_k^2\Big(\frac{T}{M}+1\Big)\int_Q e^{-Mt}u_{x_i}^2 \,\mathrm{d}Q + 2c_k^2\int_Q u_{tx_i}^2 \,\mathrm{d}Q + \\ + \frac{1}{2}\int_Q e^{-Mt}\overline{\overline{v}}_{x_i}^2 \,\mathrm{d}Q.$$

Тому, обравши $d > c_B$ отримуємо, що для деякої сталої $c > 0$ має місце:

$$(\mathcal{L}u,v)_{V_T^{-1}} \geqslant c^{-1}(||u||^2_{S_0^2} + ||v||^2_{V_T^{-1}}) \geq 2c^{-1}||u||_{S_0^2}\cdot||v||_{V_T^{-1}}.$$

Звідки і випливає твердження теореми. □

3. Узагальнення розв'язність

Для задачі

$$\mathcal{L}u = F, \quad F \in (V_T^{-1})^* \tag{31}$$

визначимо її розв'язок $u(x,t) \in H_0^3$ таким чином:

Означення 1. Функція $u(x,t)$ з простору H_0^3 називається (слабким) розв'язком задачі (31), якщо існує послідовність функцій $u_i(x,t) \in L_0$ така, що $||u-u_i||_{S_0^2} \to 0$, $||\mathcal{L}u_i - F||_{(V_T^{-1})^*} \to 0$, $i \to \infty$.

Зауваження. Можна розглянути спряжену задачу, для якої розв'язки визначаються аналогічним чином.

Заключні теореми ми формулуюємо спираючись на класичні роботи [4]. [11] та раніше доведені (у теоремах 5 та 6) нерівності:

$$\begin{cases} c^{-1}||u||_{S_0^2} \leqslant ||\mathcal{L}u||_{(V_T^{-1})^*} \leqslant c_1||u||_{H_0^3}; \\ c^{-1}||v||_{(S_T^2)^*} \leqslant ||\mathcal{L}^*u||_{V_0^{-1}} \leqslant c||v||_{(H_T^3)^*}. \end{cases}$$

Теорема 7. *Для довільного $F \in (V_T^{-1})^*$ існує єдиний (слабкий) розв'язок $u(x,t)$ задачі* (31).

Теорема 8. *Нехай $u(x,t)$ – розв'язок задачі* (31)*, в сенсі означення 1. Тоді справедлива оцінка*

$$||u||_{H_0^3} \leqslant c||F||_{(V_T^{-1})^*}.$$

де стала c, що не залежить від F.

Зауваження. Для спряженої задачі можуть бути сформульовані аналогічні теореми.

Література

1. Анікушин А. В., Номіровський Д. А. Траекторно-фінальна керованість гіперболічними системами в різних класах узагальнених функцій. *Вісник Київського національного університету. Сер.: фіз.-мат. науки.* 2008. № 3. С. 119–124.
2. Анікушин А. В. Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь. *Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки.* 2013. № 4. С. 60–65.
3. Anikushyn A. V., Hranishak H. M. On a weak solvability of a hyperbolic integro-differential equation. *5-th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky.* Kyiv. 2016. P. 31–33
4. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами. К.: Наукова думка, 1998. 465 с.
5. Анікушин А. В. Узагальнена розв'язність лінійних інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного типу. *Вісник Київського університету. Сер.: фіз.-мат. науки.* 2010. № 3. С. 163–168.
6. Аникушин А. В., Гуляницкий А. Л. Обобщенная разрешимость параболических интегро-дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения.* 2014. Т. 50. № 1. С. 98–109.
7. Анікушин А. В. Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2010. № 3. С. 3–16.
8. Анікушин А. В., Костєєва Л. О. Апріорні оцінки та узагальнена розв'язність початково крайової задачі для одного інтегро-диференціального рівняння. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2018. № 3. С. 2–14.
9. Anikushyn A. V. Weak solvability and optimal control for a class of partial Integro-differential equations. *International Conference on Differential Equations Dedicated to 110th Anniversary of Ya.B. Lopatynsky.* Lviv. 2016. P. 13.
10. Анікушин А. В., Гуляницкий А. Л. Моделювання та оптимізація процесів, що описуються лінійними інтегро-диференціальнимим рівняннями. Київ: Паперовий змій, 2015. 134 с.
11. Lyashko S. I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. Boston–Dordrecht–London: Kluwer Academic Publishers, 2002. 466 p.

Надійшла: 15.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022