Журнал обчислювальної та прикладної математики **2023, № 1** Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.8

MSC 90C27, 90B05, 90B15

NETWORK FLOW ANALYSIS AS A METHOD OF SUPPLY CHAIN MANAGEMENT OPTIMIZATION

D. I. Symonov

Department of Microprocessor Technology, V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine, E-mail: denys.symonov@gmail.com

АНАЛІЗ ПОТОКУ В МЕРЕЖІ ЯК МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ЛАНЦЮГОМ ПОСТАЧАННЯ

Д. І. Симонов

Відділ мікропроцесорної техніки, Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, E-mail: denys.symonov@gmail.com

Abstract. The paper considers several methods of analyzing opportunities for optimizing supply chains. An iterative method of finding the optimal structure is proposed, considering the power of the supply chain links and the capacity of the paths between them. The theorem on the value of the maximum flow in the combined path is proved. A numerical simulation of the operation of the proposed algorithm for finding directions for the optimization of the network structure was performed.
Keywords: Supply Chain, maximum flow, minimum cut, throughput, Ford–Fulkerson algorithm.

Анотація. В роботі розглянуто декілька методів аналізу можливостей для оптимізації ланцюгів постачання. Запропоновано ітераційний метод пошуку оптимальної структури з урахуванням потужності ланок ланцюгів постачання та пропускної здатності шляхів між ними. Доведено теорему про величину максимального потоку в об'єднаному шляху. Виконано чисельне моделювання роботи запропонованого алгоритму пошуку напрямів для оптимізації структури мережі.
Ключові слова: ланцюг постачання, максимальний потік, мінімальний розріз, пропускна здатність, алгоритм Форда–Фалкерсона.

Вступ

Ланцюг постачання — це складна динамічна система, що виконує функцію забезпечення виробництва певними матеріальними та нематеріальними ресурсами. Якість управління ланцюгами постачання безпосередньо впливає на конкурентоспроможність організації [1].

В процесі планування ланцюгів постачання однією з важливих тем є визначення пропускної здатності ланок на кожному етапі постачання. Максимальний потік [2] кожної ланки впливає на можливість своєчасного виконання плану, терміни обробки завдань, доступність послуг та товарів та визначення оптимального плану розміщення виробництва. Для проектування мережи, де задіяні всі проміжні пункти [3], доцільно використовувати графові методи, які дозволяють наглядно продемонструвати зв'язок між парами певних заданих об'єктів [4] та визначити оптимальних шлях ресурсів [5].

Для проєктування і аналізу мережи необхідно знайти баланс в методах, які плануються використовувати. Алгоритми повинні надавати точну і повну інформацію, але не бути занадто вимогливими до ресурсів, та рівню підготовки користувачів [6].

1. Постановка задачі

Припустимо, що структурні компоненти ланцюга постачання (ланки) — це множина вершин графа $G(X, E)$ [7]. З урахуванням основних функцій ланок (вершин), вершини розподілені на три умовні групи: виробники (джерела) $\left\{x_i \in X^p \middle|\, X^p \subseteq X,\, i = \overline{0, p}\right\}$; мережа забезпечення потоку від виробника до споживача (логістична) $\left\{x_i \in X^c | X^c \subseteq X,\, i = \overline{p+1, n-1}\right\}$; кінцевий споживач (стік) $x_n \in X$. Відповідно, граф $G(X, E)$ є об'єднанням множин $X^p \cup X^s \cup x_n$, пов'язаних множиною ребер $e_i \in E(G)$. Припущення щодо неорієнтованого графа зроблено з урахуванням можливості зворотного потоку товару від кінцевого споживача до виробника, яке є доволі частим явищем на ринку харчової промисловості. Також доцільно розглядати як неорієнтований граф «логістичну мережу», що дозволяє перерозподіляти потік між вершинами в процесі постачання від виробника до кінцевого споживача. Під кінцевим споживачем мається на увазі організація, яка консолідує потоки товарів або послуг для власної потреби.

Продуктивність ланцюга постачання залежить від обмежень кожного з компонентів трьох груп. Будь яка система постачання першочергово проектується виходячи з потужності генерувати потік виробниками, які є першими ланками ланцюга постачання — джерела X^p, тобто наявності вільного об'єму товару на ринку. Обмеження щодо потреби кінцевого споживача x_n визначає особа, яка приймає рішення, враховуючи обмеження щодо наявності товару на ринку та можливостей логістичної мережи X^c. Враховуючи вищезазначене, найбільшу увагу при управлінні ланцюгами постачання вимагає управління логістичною мережею, яка безпосередньо впливає на можливість постачати необхідний товар або послуги до кінцевого споживача з узгодженими параметрами: якість, вартість, терміни, об'єм та інше. Отже в подальшому увага буде сконцентрована на дослідженні процесу управління максимальним потоком логістичної мережи. Цільова функція управління сегментом «логістична мережа» полягає в балансуванні пропускної здатності ланок в ланцюзі постачання:

$$ex_f(x_i) = \left| \sum_i f(x_{ij}) - \sum_k f(x_{jk}) \right| \to \min, \tag{1}$$

за обмеженнями:

$$\sum_i f(x_{ij}) = \sum_k f(x_{jk}), \tag{2}$$

$$f(x_{ij}) + f(x_{jk}) \leq \nu(x_i), \tag{3}$$

$$0 \leq f(x_i), i \in I, \tag{4}$$

де $ex_f(x_i)$ — надлишок пропускної здатності вершини x_i, $f(x_{ij})$ — вихідний потік у вершині x_i, $f(x_{ij}) = \sum\limits_i e_{ij}$, $f(x_{jk})$ — потік, що заходить у вершину x_i, $\nu(x_i)$ — пропускна здатність вершини x_i.

2. Аналіз резервів для оптимізації мережи

Розглянемо фрагмент графу $G(X, E)$, що було визначено як «логістичну» мережу

$$\left\{x_i \in X^c \middle|\ X^c \subseteq X,\ i = \overline{p+1, n-1}\right\}.$$

Як раніше було зазначено, підграф, що розглядається, є неорієнтованим графом $G(X^c, E^c)$ з максимальною пропускною здатністю вершини

$$\nu(x_i) = f(x_{ij}) \cup f(x_{jk}).$$

Лема 1. *Припустимо існування мінімального розрізу $c_1(S_1, T_1)$, який розділяє в вершині x_i усі вершини підграфа $G(X^c, E^c)$ на дві множини S_1 і T_1 так, що*

$$\{x_i \in S_1|\ S_1 \subseteq X^c,\ x_i \in S_1 \wedge x_i \notin T_1\}.$$

Припустимо існування вершин x_l і x_k такі, що

$$\{x_l, x_k \in T_1|\ T_1 \subseteq X^c,\ x_l,\ x_k \in T_1 \wedge x_l,\ x_k \notin S_1\}.$$

Також, можливо зробити припущення щодо існування розрізу $c_2(S_2, T_2)$, який розділяє x_l і x_k на дві множини S_2 і T_2 та не перетинає розріз $c_1(S_1, T_1)$, відповідно отримаємо дві множини:

$$\{x_l \in S_2|\ S_2 \subseteq T_1,\ S_2 \backslash S_1,\ S_2 \backslash T_2,\ T_1 \in X^c\}$$

та

$$\{x_k \in T_2|\ T_2 \subseteq T_1,\ T_2 \backslash S_1, T_2 \backslash S_2,\ T_1 \in X^c\}.$$

Доведення. Зробимо припущення щодо існування розрізу $c_3(S_3, T_3)$, який розділяє x_l і x_k за умови $c_3 \cap c_1$. Внаслідок розбиття утворюються наступні множини:

$$S_1 \cap S_3 = M_1, S_1 \cap T_3 = M_2, S_3 \cap T_1 = M_3, T_1 \cap T_3 = M_4. \tag{5}$$

Аналізуючи множини M_1, M_2, M_3, M_4 можливо зробити висновок, що вершина x_i може належати: $x_i \in M_1 \vee x_i \in M_2$. Зробимо припущення, що

$x_i \in M_1$, $x_l \in M_3$, $x_k \in M_4$. Вважаючи, що $c_1(S_1, T_1)$ є мінімальним розрізом $G(X^c, E^c)$, що відсікає $x_i \in S_1$ від вершин множини T_1, то порівняв його з розрізом $c(M_1, M_2 \cup M_3 \cup M_4)$ отримаємо:

$$\begin{multline} c(M_1, M_3) + c(M_2, M_3) + c(M_1, M_4) + c(M_2, M_4) \leq \\ c(M_1, M_2) + c(M_1, M_3) + c(M_1, M_4). \quad (6) \end{multline}$$

Вважаючи, що $c(M_2, M_3) \neq \emptyset$, тобто $c(M_2, M_3) \geq 0$, то:

$$c(M_2, M_4) \leq c(M_1, M_2). \quad (7)$$

Відповідно, отримаємо:

$$\begin{multline} c(M_3, M_4) + c(M_1, M_4) + c(M_2, M_4) \leq \\ c(M_1, M_2) + c(M_3, M_4) + c(M_2, M_3) + c(M_1, M_4). \quad (8) \end{multline}$$

Нерівність (8) демонструє:

1. ліва частина: пропускна здатність розрізу $c(M_1 \cup M_2 \cup M_3, M_4)$, який розділяє вершини x_l і x_k, за умови відсутності перетину розрізу $c_1(S_1, T_1)$;
2. права частина: пропускна здатність мінімального розрізу $c_3(S_3, T_3)$, який розділяє вершини x_l і x_k.

Ґрунтуючись на вище наведеному, можливо зробити висновок, що $c_2(S_2, T_2)$ є шуканим мінімальним розрізом $c(M_1 \cup M_2 \cup M_3, M_4)$. $\square$

Лема 2. *Припустимо існування мінімального розрізу* $c_1(S_1, T_1)$*, який розділяє в вершині* x_i *усі вершини підграфа* $G(X^c, E^c)$ *на дві множини* S_1 *і* T_1 *так, що* $\{x_i \in S_1 | \ S_1 \subseteq X^c, \ x_i \in S_1 \wedge x_i \notin T_1\}$*. Припустимо існування вершини* x_l *така, що* $\{x_l \in T_1 | \ T_1 \subseteq X^c, \ x_l \in T_1 \wedge x_l \notin S_1\}$*. Відповідно, можливо зробити припущення щодо існування розрізу* $c_2(S_2, T_2)$*, який розділяє вершини* x_i *і* x_l *на дві множини* S_2 *і* T_2 *та не перетинає розріз* $c_1(S_1, T_1)$*, відповідно*

$$\{x_l \in S_2 | \ S_2 \subseteq T_1, \ S_2 \backslash S_1, \ S_2 \backslash T_2, \ T_1 \in X^c\}.$$

Доведення. Зробимо припущення щодо існування розрізу $c_3(S_3, T_3)$, який розділяє вершини x_i і x_l за умови $c_3 \cap c_1$. Внаслідок розбиття утворюються наступні множини:

$$S_1 \cap S_3 = M_1, S_1 \cap T_3 = M_2, S_3 \cap T_1 = M_3, T_1 \cap T_3 = M_4, \quad (9)$$

де $x_i \in M_1$, $x_l \in M_4$. Приймаючи до уваги вищенаведені аргументи при доведені леми 1 та нерівність (8) можливо зробити висновок, що для леми 2 нерівність (8) демонструє:

1. ліва частина: пропускна здатність розрізу $c(M_1 \cup M_2 \cup M_3, M_4)$, який розділяє вершини x_i і x_l;
2. права частина: пропускна здатність мінімального розрізу $c_3(S_3, T_3)$, який розділяє вершини x_i і x_l.

Відповідно, розріз $c(M_1 \cup M_2 \cup M_3, M_4)$ є розрізом $c_2(S_2, T_2)$. Ґрунтуючись на результатах доведення леми, можливо зробити наступний висновок: якщо розріз $c_1(S_1, T_1)$є мінімальним розрізом, що розділяє вершину x_i і будь-який інший вузол або вершину підграфу $G(X^c, E^c)$, то в процесі пошуку балансу та максимального потоку припустимо виконати агрегацію вершин множини $S_1 \subseteq X^c$ в один вузол, представлений вершиною $x_i \in S_1$. □

3. Алгоритм пошуку максимального потоку в мережі постачання

Розглянемо алгоритм пошуку максимального потоку в мережі постачання, використовуючи цілочисельний метод визначення пропускної здатності ланок (вершин). Алгоритм пошуку Форда–Фалкерсона [8]:

1. Надати значення змінним: $f(e) := 0$, для $\forall e \in E^c(G)$, відповідно: $f(x_{ij}) := 0$ та $f(x_{ji}) := 0$.
2. Визначити f-збільшувальний шлях p по ланкам ланцюга постачання ($\max(p) = n - 1$), визначеного підграфом $G(X^c, E^c)$: **if** відповідний шлях p відсутній **then stop**.
3. Розрахувати значення $\gamma = \min\limits_{x_i \in X^c} f(x_i)$.
4. Оновити значення: $f(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \gamma$: **go to n.2**.

Використання алгоритму Форда–Фалкерсона дозволяє суттєво спростити пошук шляху p в підграфі $G(X^c, E^c)$ з урахуванням максимальної пропускної здатності ланок ланцюга, але він має ряд недоліків. Окрім відсутності можливості оптимізувати використання ланок (наприклад, надавати інформацію щодо доцільності об'єднання в хаби), алгоритм Форда–Фалкерсона може не дозволити отримати рішення, тобто нескінчена ітерація циклів, в наслідок обрання невдалого початкового маршруту.

Теорема 1. *Якщо і тільки якщо не існує f-збільшувального шляху, то довільний потік $f(x_{ij})$, або $f(x_{ji})$, або, якщо припустим одночасний потік в обидві сторони з однієї вершини, то $f(x_i) := f(x_{ij}) + f(x_{ji})$ є максимальним.*

Доведення. Ґрунтуючись на використанні алгоритму Форда–Фалкерсона, припустимо існування f-збільшувального шляху. Знайдемо потік більшої пропускної здатності, такий що буде більше існуючого потоку $f(x_{ij})$, який буде свідчити о том, що існуючий $f(x_{ji})$ потік не є максимальним.

Якщо не існує f-збільшувального шляху, то можливо зробити висновок, що вершина x_{ji} не досяжна із вершини x_{ij} в підграфі $G(X^c, E^c)$. Припустимо множина $T_1 \subseteq X^c$ — є множиною вершин, що можливо досягнути з вершини x_i такої, що $\{x_i \in S_1 | S_1 \subseteq X^c, x_i \in S_1 \land x_i \notin T_1\}$, в підграфі $G(X^c, E^c)$. $f(x_{ij}) = f(x_i)$ для $\forall e \in \delta_G^+(T^c)$, та $f(x_{ji}) = 0$ для $\forall e \in \delta_G^-(T^c)$.

Відповідно,

$$f(x_i) = \sum_{\forall e \in \delta_G^+(T^c)} f(x_{ij}). \tag{10}$$

Рівняння (10) свідчить про максимальність потоку $f(x_i)$. Якщо усі пропускні здатності в мережі є цілочисельними, то існує цілочисельний максимальний потік [9]. □

Розглянемо алгоритм пошуку максимального потоку, який використовує потоково-еквівалентну побудову дерева з множин вершин, що розглядаються.

Означення 1. Полюс N_i — це множина вузлів, що виконують функцію джерела і/або стоку графа, між якими виконується пошук максимального потоку.

Алгоритм пошуку максимального потоку передбачає ітераційне виконання послідовності кроків з метою побудови потоково-еквівалентної мережі графу $G(X, E)$. Алгоритм пошуку максимального потоку:

1. Агрегація вершин в вузол за методом мінімального розрізу $c_i(S_i, T_i)$ в підграфі $G(X^c, E^c)$.
2. Обрати два полюси N_i та N_j підграфа $G(X^c, E^c)$ та виділити мінімальний розріз.
3. Знайти дуги дерева, використавши значення мінімального розрізу $c_i(S_i, T_i)$, розраховане на етап 2. **if** (n > p-1): **go to n.2.**, else: **then stop**.

Теорема 2. *Величина максимального потоку в об'єднаному единому шляху від вузла N_i до вузла N_j підграфа $G(X^c, E^c)$, що визначаються як полюси, дорівнює:*

$$f_{ij} = \min \{v_{ia}, v_{ab}, ..., v_{dj}\}.$$

Доведення. Припустимо, що існує дуга, яка об'єднує полюси N_i та N_j. Також припустимо існування мінімального розрізу $c_N(S_N, T_N)$ з величина максимального потоку f_{ab}, що розділяє N_a, такий що

$$\{N_a \in S_N | \; S_N \in X^c, \; S_N \backslash T_N\},$$

та N_b, такий що

$$\{N_b \in T_N | \; T_N \in X^c, \; T_N \backslash S_N\}.$$

Величина максимального потоку f_{ab} дорівнює величині мінімального розрізу в підграфі $G(X^c, E^c)$. Зробимо припущення, що $\{N_a \in S_N^* | S_N^* \subset S_N\}$, та $\{N_b \in T_N^* | T_N^* \supset T_N\}$, відповідно можливо розглянути два варіанти:

1. $N_i \in S_N^*$, $c(S_N^*, T_N^*) \geq f_{ij} = c(S_N, T_N)$. Розріз $c(S_N, T_N)$ не є мінімальним розрізом між вузлами N_a та N_b.
2. $N_i \in S_N \cap T_N^*$.

Припустимо, що існує мінімальний розріз $c\left(\widehat{S}, \widehat{T}\right)$, такий, що

$$\left(\widehat{S}, \widehat{T}\right) = (S_1 \cap S_2, \; T_1 \cap T_2),$$

де – мінімальний розріз, що не перетинає $c(S_1, T_1)$, а $c(S_2, T_2)$ – мінімальний розріз, що не перетинає $c(S_N^*, T_N^*)$. Також припустимо, що $N_i \in \widehat{S}$, $N_a \in \widehat{T}$, відповідно, $N_b, N_j \in \widehat{T}$. Оскільки $c\left(\widehat{S}, \widehat{T}\right)$ розділяє N_i та N_a, то $f_{ia} = c\left(\widehat{S}, \widehat{T}\right)$, отримаємо:

$$f_{ij} \le c\left(\widehat{S}, \widehat{T}\right),$$

$$f_{ij} = c(S_N, T_N).$$

Оскільки $c(S_N^*, T_N^*)$ розділяє N_i та N_a, то:

$$f_{ia} \le c(S_N^*, T_N^*),$$

$$f_{ia} = c\left(\widehat{S}, \widehat{T}\right),$$

$$f_{ia} \ge c(S_N, T_N),$$

відповідно, для двох варіантів:

$$c(S_N, T_N) \le c(S_N^*, T_N^*),$$

за умови мінімального розрізу N_a та N_b:

$$c(S_N, T_N) \ge c(S_N^*, T_N^*), \tag{11}$$

таким чином, з (17) та (18) випливає, що:

$$f_{ab} = c(S_N, T_N) = c(S_N^*, T_N^*). \tag{12}$$

Ґрунтуючись на (19), можливо зробити висновок, що:

$$f_{ij} = \min\{f_{ia}, f_{ab}, ..., f_{dj}\} = \min\{v_{ia}, v_{ab}, ..., v_{dj}\}. \tag{13}$$

Теорема доведена. $\square$

4. Моделювання роботи алгоритму на прикладі

Нехай $A(e_{ij})$ — матриця суміжності неорієнтованого підграфа $G(X^c, E^c)$, що демонструє структуру логістичної мережі ланцюга постачання.

$$A(e_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай $D(G)$ — матриця пропускної здатності дуг неорієнтованого підграфа $G(X^c, E^c)$.

$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 5 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ітерація 1: вершини N_1 і N_5 визначимо якості полюсів. Отримаємо мінімальний розріз з множин $S_1 = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ і $T_1 = \{N_5, N_6, N_7\}$:

$$c(N_1, N_2, N_3, N_4 | N_5, N_6, N_7) = e(N_2, N_5) + e(N_3, N_7) + \\ + e(N_3, N_6) + e(N_4, N_5) + e(N_4, N_6) = 19.$$

Матриця пропускної здатності після першої ітерації:

$$D_1(G) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 4 \\ 7 & 0 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ітерація 2: вершини N_7 і N_5 визначимо якості полюсів. Отримаємо мінімальний розріз:

$$c(N_7 | N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6) = c(N_7 | S_1, N_5, N_6) = \\ = e(S_1, N_7) + e(N_5, N_7) + e(N_6, N_7) = 6 + 4 + 6 = 14.$$

Ітерація 3: вершини N_5 і N_6 визначимо якості полюсів. Отримаємо мінімальний розріз:

$$c(N_5 | N_1, N_2, N_3, N_4, N_6, N_7) = c(N_5 | S_1, N_6, N_7) = \\ = e(S_1, N_5) + e(N_5, N_6) + e(N_5, N_7) = 7 + 6 + 4 = 17.$$

Ітерація 4: вершини N_1 і N_2 визначимо якості полюсів. Отримаємо мінімальний розріз:

$$c(N_1 | N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7) = e(N_1, N_2) + e(N_1, N_3) + \\ + e(N_1, N_4) = 10 + 7 + 8 = 25.$$

Ітерація 5: вершини N_2 і N_3 визначимо якості полюсів. Отримаємо мінімальний розріз:

$$c(N_1, N_2 | N_3, N_4, N_5, N_6, N_7) = e(N_2, N_5) + e(N_2, N_3) + \\ + e(N_1, N_3) + e(N_1, N_4) = 24.$$

Ітерація 6: вершини N_4 і N_6 визначимо якості полюсів. Отримаємо мінімальний розріз:

$$c(N_4 | N_1, N_2, N_3, N_5, N_6, N_7) = e(N_1, N_4) + e(N_4, N_5) + e(N_4, N_6) = 14.$$

Матриця максимальних потоків $f(G)$ буде мати наступний вигляд:

$$f(G) = \begin{pmatrix} \infty & 25 & 25 & 25 & 19 & 19 & 19 \\ 25 & \infty & 24 & 24 & 19 & 19 & 19 \\ 25 & 24 & \infty & 24 & 29 & 19 & 19 \\ 25 & 24 & 14 & \infty & 19 & 19 & 19 \\ 19 & 19 & 19 & 19 & \infty & 17 & 14 \\ 19 & 19 & 19 & 19 & 17 & \infty & 14 \\ 19 & 19 & 19 & 19 & 14 & 14 & \infty \end{pmatrix}.$$

Величина максимального потоку: $f_{ij} = \min 25, 24, 19, 17, 14, 14 = 14$. Отже, логістична мережа має можливість забезпечити доставку 14 одиниць товару. Складемо матрицю відсотків завантаження вузлів $l(G)$:

$$l(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 & 0.6 & 0.125 & 0 & 0 & 0 \\ 0.9 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

та матрицю відсотків надлишків ресурсів $\bar{l}(G)$:

$$\bar{l}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.4 & 0.875 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.875 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця надлишків ресурсів $\bar{l}(G)$ надає інформацію щодо можливого напрямку оптимізації: або скорочення ресурсів на цих ланках ланцюга постачання, або розширення потужності ланцюга постачання за рахунок оптимізації постачання по цім ланкам.

Висновок

Використання запропонованого ітераційного методу агрегації (об'єднання вершин графу) є альтернативою жадібному алгоритму пошуку максимального потоку [10]. Перевагою запропонованого алгоритму є можливість використання для аналізу окремої частини ланцюга, що дає можливість застосовувати експертне знання для обрання початкового розрізу, та отримати швидке рішення в потужних мережах. Інформація, що надає запропонований алгоритм, дозволяє особам, які приймають рішення, обрати напрям концентрації зусиль для оптимізації ресурсів організації. Як демонструють результати моделювання, щонайменше, є два напрями оптимізації: скорочення надлишкової потужності, або усуненя «вузьких» місць в ланцюзі.

Література

1. Годонога А. Ф., Блануца Ш. А., Чумаков Б. М. Алгоритм настройки входных и выходных потоков в процессе производства. *Теорія оптимальних рішень.* 2005. № 18. С. 34–39.
2. Симонов Д. І. Алгоритм визначення оптимального потоку в ланцюгах постачання з урахуванням багатокритеріальних умов та стохастичності процесів. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки.* 2021. № 2. С. 109-116. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/2.15
3. Стецюк П. І., Бисага О. П., Трегубенко С. С. Двоетапна транспортна задача з обмеженням на кількість проміжних пунктів. *Компьютерная математика.*2018. № 2. С. 119–128.
4. Zhang B., Peng J. Uncertain Graph and Network Optimization. Springer Singapore, 2022. P. 130. https://doi.org/10.1007/978-981-19-1472-0
5. Гуляницький Л. Ф., Павленко А. І. Моделювання залежних від часу проблем пошуку оптимальних маршрутів: огляд. *Математичне моделювання в економіці.* 2017. № 1-2. С. 102–116.
6. Chen L., Kyng R., Liu Y. P., Peng R., Gutenberg M. P., Sachdeva S. Maximum Flow and Minimum-Cost Flow in Almost-Linear Time. *IEEE 63rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS).* 2022. P. 612–623.
7. Донец Г. А., Колечкина Л. Н. Подход к решению экстремальных задач с помощью графов. *Теорія оптимальних рішень.* 2016. С. 142–148.
8. Korte B., Vygen J. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Springer Berlin, Heidelberg, 2007. P. 627. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71844-4
9. Dantzig G. B., Fulkerson D. R. On the Max Flow Min Cut Theorem of Networks. In: Linear Inequalities and Related Systems. Princeton: Princeton University Press, 1956. P. 215–221
10. Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф. Поліноміальний метод наближеного розв'язання комбінаторної задачі знаходження максимального потоку в мережі. *Доповіді Національної академії наук України.* 2013. № 4. С. 33–37.

Надійшла: 04.04.2023 / Прийнята: 01.05.2023