Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2024, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85

MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

TWO-STAGE PROXIMAL ALGORITHMS FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES

S. V. Denysov[1], V. V. Semenov[2]

[1]Harbour.Space University, Barcelona, Spain, E-mail: denisov.univ@gmail.com
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine,
E-mail: volodya.semenov@gmail.com

ДВОЕТАПНІ ПРОКСИМАЛЬНІ АЛГОРИТМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА

С. В. Денисов[1], В. В. Семенов[2]

[1]Університет Harbour.Space, Барселона, Іспанія, E-mail: denisov.univ@gmail.com
[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
E-mail: volodya.semenov@gmail.com

Abstract. We consider the equilibrium problems in the Hadamard metric spaces. We obtained a theorem about weak convergence of the two-stage proximal algorithm for pseudo-monotone equilibrium programming problems in Hadamard spaces. We proposed an adaptive two-stage proximal algorithm for problems in metric Hadamard spaces. The parameter update rule does not use the values of the Lipschitz constants of the bifunction. In contrast to the rules of the linear search type, it does not require calculations of the bifunction values at additional points. For pseudo-monotone bifunctions of the Lipschitz type, we prove the theorem on weak convergence of the sequences generated by the algorithm. The adaptive extraproximal algorithm is proposed and theoretically substantiated. A regularized adaptive extraproximal algorithm is proposed and theoretically substantiated. We used the classical Halpern scheme to regularize the basic extraproximal procedure. For pseudo-monotone bifunctions of the Lipschitz type, we proved the convergence theorem for regularized adaptive extraproximal algorithm. We showed that the proposed algorithm could be applied to pseudo-monotone ones of variational inequalities in Hilbert spaces.
Keywords: Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, proximal algorithm, convergence.

Анотація. В статті розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в просторах Адамара. Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції

та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Запропоновано та теоретично обгрунтовано адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Запропоновано та теоретично обгрунтовано регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про збіжність. Показано, що запропоновані алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.
Ключові слова: простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, проксимальний алгоритм, збіжність.

Вступ

Задачі про рівновагу (задачі рівноважного програмування, нерівності Кі Фаня) та методи їх розв'язання є популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу [1].

Формулювання задачі про рівновагу, яке вважають класичним, було наведено ще в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, виконаних в 1950-х роках [2] та пов'язаних з доведенням існування точок рівноваги за Нешем в некооперативних іграх.

Увагу дослідників до задач рівноважного програмування у 1990-х привернули роботи W. Oettli [3,4], у яких були розглянуто такий варіант задачі про рівновагу:

$$\text{знайти } \ x \in C: \ F(x,y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{1}$$

де C — підмножина гільбертового простору H, $F : C \times C \to \mathbb{R}$ — біфункція (equilibrium bifunction), тобто, $F(x,x) = 0$ для всіх $x \in C$.

Задача (1) — зручна загальна форма запису та дослідження різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації [1]. Наведемо ряд типових постановок.

(1) Якщо $F(x,y) = g(y) - g(x)$, де $g : C \to \mathbb{R}$, то задача (1) є задачею умовної мінімізації:
$$g \to \min_C .$$

(2) Якщо $F(x,y) = (Ax, y - x)$, де $A : C \to H$, то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності [5, 6]:
$$\text{знайти } \ x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{2}$$

(3) Нехай I — скінченна множина індексів. Для кожного $i \in I$ задано множину C_i та функцію $f_i : C \to \mathbb{R}$, де $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ позначимо $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Точка $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ називається рівновагою Неша, якщо для всіх $i \in I$ справедливі нерівності
$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \ \ \forall\, y_i \in C_i .$$

Визначимо функцію $F : C \times C \to \mathbb{R}$ таким чином

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} \left(f_i(x^i, y_i) - f_i(x) \right).$$

Точка $\bar{x} \in C$ є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли $\bar{x}$ є розв'язком задачі (1).

Теореми існування та інші якісні результати стосовно задач рівноважного програмування див. в [1, 7]. Найбільш завершені результати отримані для задач з монотонними та псевдомонотонними біфункціями на опуклих допустимих множинах.

У 2008 р. Quoc, Muu та Hien [8] запропонували аналог екстраградієнтного методу

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} x_n, \end{cases} \tag{3}$$

де $\lambda_n > 0$, а prox_g — проксимальний оператор [9], що відповідає власній опуклій напівнеперервній знизу функції g:

$$H \ni x \mapsto \operatorname{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Автори [8] довели при певних умовах збіжність методу (3) та його аналогу з відстанню Брегмана замість евклідової. Дана робота отримала продовження [10–16]. Наприклад, в роботі [16], відштовхуючись від двокрокового екстраградієнтного алгоритму [17], запропоновано та досліджено такий алгоритм

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ z_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} y_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(z_n, \cdot)} x_n, \end{cases}$$

де $\lambda_n > 0$.

Останнім часом виникла обумовлена проблемами математичної біології та машинного навчання потреба в побудові теорії та алгоритмів розв'язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара (також відомих під назвою $CAT(0)$ просторів) [18].

Ще однією сильною мотивацією для вивчення даних задач є можливість записати деякі неопуклі задачі у вигляді геодезично опуклих в просторі зі спеціально підібраною рімановою метрикою [19]. З'явився помітний інтерес до задач про рівновагу в метричних просторах Адамара [20,21]. Наприклад, в роботі [21] відштовхуючись від результатів статті [8], запропонували та обґрунтували для псевдомонотонних задач про рівновагу в просторах Адамара аналог екстрапроксимального методу (3).

Нарешті, в роботах [22–26] для задач про рівновагу в просторах Адамара запропоновано та досліджено адаптивні аналоги алгоритму (3) та алгоритму Попова [27–32].

Оглядову статтю, що продовжує роботу [33], присвячено новим результатам щодо збіжності проксимальних алгоритмів для задач про рівновагу в метричних просторах Адамара

Статтю побудовано таким чином. В розділі 1 наведено основні поняття та факти, що пов'язані з метричними просторами Адамара та необхідні для наших подальших досліджень. Розділ 2 містить постановку загальної задачі про рівновагу в метричному просторі Адамара. В розділі 3 двоетепний проксимальний алгоритм обгрунтований для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в метричних просторах Адамара. В розділі 4 розглянуто адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач рівноважного програмування в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшіцевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Розділ 5 присвячено дослідженню адаптивного екстрапроксимального алгоритму. В розділі 6 досліджується регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доводиться теорема про збіжність. Показано, що запропонований алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Для підготовки статті використано результати робіт [22–26].

1. Допоміжні відомості

Наведемо кілька понять і фактів, пов'язаних з метричними просторами Адамара. З деталями можна ознайомитися в [18, 34, 35].

Нехай (X, d) — метричний простір і x, $y \in X$. Геодезичним шляхом, що з'єднує точки x і y, називають таку ізометрію

$$\gamma : [0, d(x, y)] \to X,$$

що $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Множину

$$\gamma\left([0, d(x, y)]\right) \subseteq X$$

позначають $[x, y]$ і називають геодезичним сегментом з кінцями x і y (або просто — геодезичною).

Метричний простір (X, d) називають геодезичним простором, якщо будь-які дві точки X можна з'єднати геодезичною, і однозначно геодезичним простором, якщо для будь-яких двох точок X існує єдина геодезична, яка їх з'єднує.

Геодезичний простір (X, d) називають $CAT(0)$ простором, якщо для будь-якої трійки таких точок y_0, y_1, $y_2 \in X$, що

$$d^2(y_1, y_0) = d^2(y_2, y_0) = \frac{1}{2} d^2(y_1, y_2),$$

виконується нерівність

$$d^2(x, y_0) \leq \frac{1}{2} d^2(x, y_1) + \frac{1}{2} d^2(x, y_2) - \frac{1}{4} d^2(y_1, y_2) \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Нерівність (4) інколи називають CN-нерівністю [34] (зауважимо, що в евклідовому просторі (4) перетворюється на тотожність), а точку y_0 — серединою між точками y_1 і y_2 (вона завжди існує в геодезичному просторі).

Відомо, що $CAT(0)$ простір є однозначно геодезичним [35].

Для двох точок x і y $CAT(0)$ простору (X,d) і $t \in [0,1]$ будемо позначати

$$t\,x \oplus (1-t)y$$

таку єдину точку z сегмента $[x,y]$, що

$$d(z,x) = (1-t)d(x,y) \quad \text{i} \quad d(z,y) = t\,d(x,y).$$

Множина $C \subseteq X$ називається опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх $x,\ y \in C$ і $t \in [0,1]$ виконується $t\,x \oplus (1-t)y \in C$.

Корисним інструментом для роботи в $CAT(0)$ просторі (X,d) є наступна нерівність:

$$d^2(t\,x \oplus (1-t)y, z) \le t\,d^2(x,z) + (1-t)d^2(y,z) - \\ - t(1-t)d^2(x,y), \quad \{x,y,z\} \in X, \quad t \in [0,1]. \quad (5)$$

Зауваження 1. Практично важливими прикладами $CAT(0)$ просторів є евклідові простори, $\mathbb{R}$-дерева, многовиди Адамара (повні зв'язні ріманові многовиди недодатної кривизни) і гільбертова куля з гіперболічною метрикою [18, 34, 35].

Повний $CAT(0)$ простір називають простором Адамара.

Як і в гільбертовому просторі, в просторах Адамара коректно визначений оператор метричного проектування на опуклу замкнену множину C [18]. А саме, для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $P_C x$ множини C з властивістю

$$d(P_C x, x) = \min_{z \in C} d(z,x),$$

причому має місце такий критерій [18]:

$$y = P_C x \quad \Leftrightarrow \quad d^2(y,z) \le d^2(x,z) - d^2(y,x) \ \ \forall z \in C.$$

Нехай (X,d) — метричний простір і (x_n) — обмежена послідовність елементів X. Нехай $r\left(x,(x_n)\right) = \limsup_{n\to\infty} d(x,x_n)$. Число

$$r\left((x_n)\right) = \inf_{x \in X} r\left(x,(x_n)\right)$$

називають асимптотичним радіусом послідовності (x_n), а множину

$$A\left((x_n)\right) = \{x \in X :\ r\left(x,(x_n)\right) = r\left((x_n)\right)\}$$

— асимптотичним центром послідовності (x_n).

Відомо, що в просторі Адамара асимптотичний центр $A\left((x_n)\right)$ складається з однієї точки [18].

Послідовність (x_n) елементів простору Адамара (X,d) слабко збігається (або, як іноді кажуть, Δ-збігається [34]) до елементу $x \in X$, якщо $A\left((x_{n_k})\right) = \{x\}$ для будь-якої підпослідовності (x_{n_k}). Відомо, що довільна послідовність елементів обмеженої, замкненої та опуклої підмножини K

простору Адамара має підпослідовність, яка слабко збігається до елементу з K [18, 34].

Зауваження 2. У гільбертовому просторі згадана Δ-збіжність (слабка збіжність) співпадає з класичною слабкою збіжністю.

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів метричного простору Адамара корисний відомий аналог леми Опяла [18].

Лема 1. *Нехай послідовність* (x_n) *елементів простору Адамара* (X, d) *слабко збігається до елементу* $x \in X$. *Тоді для всіх* $y \in X \setminus \{x\}$ *маємо*

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, x) < \liminf_{n\to\infty} d(x_n, y).$$

Нехай (X, d) — простір Адамара. Функція $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ називається опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх x, $y \in X$ і $t \in [0, 1]$ виконується

$$\varphi(t\, x \oplus (1-t)y) \le t\,\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Наприклад, в просторі Адамара функції $y \mapsto d(y, x)$ опуклі. Якщо ж існує така константа $\mu > 0$, що для всіх x, $y \in X$ і $t \in [0, 1]$ виконується

$$\varphi(t\, x \oplus (1-t)y) \le t\,\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - \mu t(1-t)d^2(x, y),$$

то функція φ називається сильно опуклою.

Відомо, що для опуклих функцій напівнеперервність знизу та слабка напівнеперервність знизу еквівалентні [18], а сильно опукла напівнеперервна знизу функція досягає мінімуму в єдиній точці.

Багато важливих для застосувань конструкцій в просторах Адамара пов'язані з точками мінімуму опуклих функцій [18, 35]. Наприклад, нехай дано набір точок $\{x_i\}_{i=\overline{1,m}}$ метричного простору (X, d) і набір додатніх чисел $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Барицентром (центром мас, середнім Фреше) точок $\{x_i\}$ з вагами $\{\alpha_i\}$ називається точка

$$z \in \operatorname{argmin}_{y\in X} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i).$$

У просторі Адамара функції

$$y \mapsto d^2(y, x_i)$$

сильно опуклі (випливає з нерівності (5), тому функція

$$y \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i)$$

також сильно опукла. Звідси випливає, що барицентр існує та він єдиний.

Для опуклої, власної і напівнеперервної знизу функції $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальний оператор визначається наступним чином [18]:

$$\operatorname{prox}_\varphi x = \operatorname{argmin}_{y\in X} \left(\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(y, x) \right).$$

Оскільки функції

$$\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$$

сильно опуклі, означення проксимального оператора коректне, тобто для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $\operatorname{prox}_\varphi x \in X$.

Нагадаємо, що оператор $T : X \to X$ є нерозтягуючим, якщо

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Алгоритм Гальперна генерує послідовність (x_n) за допомогою схеми

$$x_{n+1} = \alpha_n y \oplus (1 - \alpha_n) T x_n, \tag{6}$$

де $y \in X$, а (α_n) — послідовність чисел з $(0, 1)$. Відомо [18], що коли

$$F(T) = \{x \in X : x = Tx\} \neq \emptyset$$

та

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \\ \sum_n \alpha_n = +\infty, \\ \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)/\alpha_{n+1}^2 = 0 \quad \text{або} \quad \sum_n |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < +\infty, \end{array}\right\}$$

алгоритм (6) збігається до $P_{F(T)} y$.

Зауваження 3. Метод Гальперна використовується для регуляризації алгоритмів розв'язання багатьох задач нелінійного аналізу.

Перейдемо до формулювання задачі про рівновагу в просторі Адамара.

2. Задача про рівновагу у просторі Адамара

Нехай (X, d) — метричний простір Адамара. Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq X$ і біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R}$ розглянемо задачу про рівновагу (або задачу рівноважного програмування):

$$\text{знайти} \quad x \in C : F(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{7}$$

Припустимо, що виконані умови:

(A1) $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;
(A2) функції $F(x, \cdot) : C \to \mathbb{R}$ опуклі і напівнеперервні знизу для всіх $x \in C$;
(A3) функції $F(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$ слабко напівнеперервні зверху для всіх $y \in C$;
(A4) біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ псевдомонотонна, тобто

$$\text{для всіх} \quad x, y \in C \quad \text{із} \quad F(x, y) \geq 0 \quad \text{випливає} \quad F(y, x) \leqslant 0;$$

(A5) біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ ліпшицевого типу, тобто існують дві константи $a > 0$, $b > 0$, такі, що

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a\, d^2(x, z) + b\, d^2(z, y) \quad \forall x, y, z \in C. \tag{8}$$

Розглянемо дуальну задачу про рівновагу:

$$\text{знайти} \quad x \in C : F(y, x) \leq 0 \quad \forall y \in C. \tag{9}$$

Множини розв'язків задач (7) і (9) позначимо S і S^*, відповідно. При виконанні умов (A1)–(A4) маємо $S = S^*$ [20]. Крім того, множина S^* опукла та замкнена.

Далі будемо припускати, що $S \neq \varnothing$.

3. Двоетапний проксимальний алгоритм для задачі про рівновагу у просторі Адамара

Для наближеного розв'язання задачі (7) розглянемо наступний

Алгоритм 1 (Ведель–Сандраков–Семенов–Чабак, [22]).

Для x_1, $y_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів x_n, $y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_{n-1},\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right), \end{cases}$$

де $\lambda > 0$.

Зауваження 4. Алгоритм 1 для задач в гільбертовому просторі був розглянутий у роботах [29–31].

Основним елементом алгоритму 1 є сильно опукла задача мінімізації вигляду

$$F(p, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, q) \to \min_{y \in C}.$$

Конструктивність процесу залежить від можливості її ефективного розв'язання.

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 1.

Має місце

Лема 2. *Для послідовностей (x_n), (y_n), породжених алгоритмом 1, має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1}, z) \leq d^2(x_n, z) - (1 - 2\lambda b) d^2(x_{n+1}, y_n) - \\ - (1 - 4\lambda a) d^2(y_n, x_n) + 4\lambda a\, d^2(x_n, y_{n-1}), \tag{10}$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. З визначення x_{n+1} випливає

$$F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \leq F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \qquad \forall y \in C. \tag{11}$$

Поклавши в (11) $y = t\, x_{n+1} \oplus (1-t)z$, $t \in (0,1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} F(y_n, x_{n+1}) &+ \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq F(y_n, t\, x_{n+1} \oplus (1-t)z) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t\, x_{n+1} \oplus (1-t)z, x_n) \leq \\ &\leq t\, F(y_n, x_{n+1}) + (1-t)F(y_n, z) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda}\big(t\, d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(z, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, z)\big). \end{aligned}$$

З псевдомонотонності біфункції F випливає

$$F(y_n, z) \leq 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &(1-t)F(y_n, x_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda}\big(-(1-t)d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(z, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, z)\big). \end{aligned} \quad (12)$$

Скоротивши в (12) $1-t$ і зробивши граничний перехід при $t \to 1$, отримаємо

$$F(y_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{2\lambda}\big(d^2(z, x_n) - d^2(x_{n+1}, x) - d^2(x_{n+1}, z)\big). \quad (13)$$

З визначення y_n випливає

$$F(y_{n-1}, y_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y_n, x_n) \leq F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \qquad \forall y \in C. \quad (14)$$

Поклавши в (14) $y = t\, x_{n+1} \oplus (1-t)y_n$, $t \in (0,1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, y_n) &+ \frac{1}{2\lambda} d^2(y_n, x_n) \leq \\ &\leq F(y_{n-1}, t\, x_{n+1} \oplus (1-t)y_n) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t\, x_{n+1} \oplus (1-t)y_n, x_n) \leq \\ &\leq t\, F(y_{n-1}, x_{n+1}) + (1-t)F(y_{n-1}, y_n) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda}\big(t\, d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(y_n, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, y_n)\big). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} &t\, F(y_{n-1}, y_n) - t\, F(y_{n-1}, x_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda}\big(t\, d^2(x_{n+1}, x_n) - t\, d^2(y_n, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, y_n)\big). \end{aligned} \quad (15)$$

Скоротивши в (15) t і зробивши граничний перехід при $t \to 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} &F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\lambda}\big(d^2(x_{n+1}, x_n) - d^2(y_n, x_n) - d^2(x_{n+1}, y_n)\big). \end{aligned} \quad (16)$$

Склавши нерівності (13) і (16), маємо

$$F(y_n,x_{n+1})+F(y_{n-1},y_n)-F(y_{n-1},x_{n+1})\le$$
$$\le \frac{1}{2\lambda}\big(d^2(z,x_n)-d^2(x_{n+1},z)-d^2(y_n,x_n)-d^2(x_{n+1},y_n)\big). \quad (17)$$

З умови типу ліпшицевості випливає

$$F(y_n,x_{n+1})+F(y_{n-1},y_n)-F(y_{n-1},x_{n+1})\ge$$
$$\ge -b\,d^2(y_n,x_{n+1})-a\,d^2(y_{n-1},y_n). \quad (18)$$

Комбінуючи (17) і (18) отримаємо

$$d^2(x_{n+1},z)\le d^2(z,x_n)-d^2(y_n,x_n)-d^2(x_{n+1},y_n)+$$
$$+2\lambda a\,d^2(y_{n-1},y_n)+2\lambda b\,d^2(y_n,x_{n+1}).$$

Оскільки

$$d^2(y_{n-1},y_n)\le 2d^2(y_{n-1},x_n)+2d^2(x_n,y_n),$$

то

$$d^2(x_{n+1},z)\le d^2(z,x_n)-d^2(y_n,x_n)-d^2(x_{n+1},y_n)+$$
$$+4\lambda a\,d^2(y_{n-1},x_n)+4\lambda a\,d^2(x_n,y_n)+2\lambda b\,d^2(y_n,x_{n+1}),$$

що і потрібно було довести. □

Зауважимо, що при виконанні для деякого $n\in\mathbb{N}$ рівностей

$$y_{n-1}=y_n=x_n \quad \text{або} \quad x_{n+1}=x_n=y_n. \quad (19)$$

має місце включення $y_n\in S$.

Дійсно, рівність

$$x_{n+1}=\operatorname{prox}_{\lambda F(y_n,\cdot)}x_n=\arg\min_{y\in C}\left(F(y_n,y)+\frac{1}{2\lambda}d^2(y,x_n)\right),$$

означає

$$F(y_n,x_{n+1})-F(y_n,p)\le\frac{1}{2\lambda}\big(d^2(x_n,p)-d^2(x_{n+1},x_n)-d^2(x_{n+1},p)\big)\ \ \forall p\in S.$$

З другої рівності (19) випливає

$$-F(y_n,p)\le 0 \qquad \forall p\in S,$$

тобто $y_n\in S$.

Аналогічно, з

$$F(y_{n-1},y_n)-F(y_{n-1},p)\le\frac{1}{2\lambda}\big(d^2(p,x_n)-d^2(y_n,x_n)-d^2(p,y_n)\big)\ \ \forall p\in S$$

при першій рівності в (19) отримуємо $y_n\in S$.

Далі будемо припускати, що для всіх номерів $n\in\mathbb{N}$ умова (19) не має місця.

Нехай $z\in S$. Покладемо

$$a_n=d^2(x_n,z)+4\lambda a\,d^2(x_n,y_{n-1}),$$
$$b_n=(1-4\lambda a)d^2(y_n,x_n)+(1-4\lambda a-2\lambda b)d^2(x_{n+1},y_n).$$

Тоді нерівність (10) набуває вигляду

$$a_{n+1} \leqslant a_n - b_n.$$

Має місце

Лема 3. *Нехай невід'ємні послідовності* (a_n), (b_n), *такі, що*

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Тоді існує границя $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Вимагатимемо виконання умови $0 < 2(2a+b)\lambda < 1$. Тоді існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \left(d^2(x_n, z) + 4\lambda a\, d^2(x_n, y_{n-1})\right)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \left((1-4\lambda a)d^2(y_n, x_n) + (1-4\lambda a - 2\lambda b)\, d^2(x_{n+1}, y_n)\right) = 0.$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 \qquad (20)$$

і збіжність числових послідовностей $\left(d(x_n, z)\right)$, $\left(d(y_n, z)\right)$ для всіх $z \in S$. Зокрема, послідовності (x_n), (y_n) обмежені.

З (13), (16), (18) і (20) випливає

$$\limsup_{n\to\infty} F(y_n, x_{n+1}) \leq 0,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \left(F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})\right) \leq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, x_{n+1})\right) = 0.$$

Звідки, зокрема, отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n, x_{n+1}) = 0. \qquad (21)$$

Нехай $p \in C$. Поклавши в (11) $y = t\, x_{n+1} \oplus (1-t)p$, $t \in (0,1)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
F(y_n, x_{n+1}) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x_{n+1}, x_n) &\leq \\
\leq F(y_n, t\, x_{n+1} \oplus (1-t)p) + \frac{1}{2\lambda} d^2(t\, x_{n+1} \oplus (1-t)p, x_n) &\leq \\
\leq t\, F(y_n, x_{n+1}) + (1-t)F(y_n, p) &+ \\
+ \frac{1}{2\lambda}\left(t\, d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(p, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, p)\right)&.
\end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}
&(1-t)F(y_n, x_{n+1}) - (1-t)F(y_n, p) \leq \\
&\leq \frac{1}{2\lambda}\left(-(1-t)d^2(x_{n+1}, x_n) + (1-t)d^2(p, x_n) - t(1-t)d^2(x_{n+1}, p)\right). \qquad (22)
\end{aligned}$$

Скоротивши в (22) $1-t$ і зробивши граничний перехід при $t \to 1$, отримаємо

$$F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, p) \leq \frac{1}{2\lambda}\left(d^2(x_n, p) - d^2(x_{n+1}, x) - d^2(x_{n+1}, p)\right). \qquad (23)$$

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), слабко збіжну до деякої точки $z \in C$. Тоді з (20) випливає, що (y_{n_k}) слабко збіжна до z.

Покажемо, що $z \in C$. З (23) випливає

$$F(y_{n_k}, p) \geq F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \\ + \frac{1}{2\lambda}\big(d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, p) - d^2(x_{n_k}, p)\big) \ \ \forall p \in C. \quad (24)$$

Зробивши граничний перехід в (24), отримаємо ($\forall p \in C$)

$$F(z, p) \geq \limsup_{k\to\infty} F(y_{n_k}, p) \geq \limsup_{k\to\infty} \Big(F(y_{n_k}, x_{n_k+1}) + \\ + \frac{1}{2\lambda}\left(d^2(x_{n_k+1}, x_{n_k}) + d^2(x_{n_k+1}, p) - d^2(x_{n_k}, p)\right)\Big) = 0,$$

тобто, $z \in S$.

Застосовуючи варіант леми Опяла для метричних просторів Адамара (лема 1), отримуємо слабку збіжність послідовності (x_n) до точки $z \in S$. Дійсно, поміркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}), яка слабко збігається до деякої точки $\overline{z} \in C$ і $\overline{z} \neq z$. Ясно, що $\overline{z} \in S$. Далі, маємо

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, z) < \\ < \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, \overline{z}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \overline{z}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, \overline{z}) < \\ < \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z),$$

що неможливо. Отже, (x_n) слабко збігається до $z \in S$.

Таким чином, має місце

Теорема 1. *Нехай (X, d) — метричний простір Адамара, $C \subseteq X$ — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R}$ виконані умови (A1)–(A5) і $S \neq \varnothing$. Припустимо, що*

$$\lambda \in \left(0, \tfrac{1}{2(2a+b)}\right).$$

Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу (7), причому $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = 0$.

Зауваження 5. Аналогічний теоремі 1 результат має місце і для нестаціонарної послідовності (λ_n) такої, що $\{\inf_n \lambda_n, \sup_n \lambda_n\} \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a+b)}\right)$.

4. Адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм

У розділі 3 (див. статтю [22]) для розв'язання задачі (7) був запропонований такий алгоритм:

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1},\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C}\left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n)\right), \end{cases} \quad (25)$$

де величина $\lambda_n > 0$ задавалася, виходячи з вимоги

$$\{\inf \lambda_n, \sup \lambda_n\} \subseteq \left(0, \tfrac{1}{2(2a+b)}\right),$$

тобто явно використовувалася інформація про константи умови типу ліпшицевості біфункції F.

Відштовхуючись від ітераційної схеми (25) та роботи [36], побудуємо двоетапний проксимальний алгоритм з адаптивним вибором величини λ_n.

Алгоритм 2 (Ведель–Сандраков–Семенов, [23]).

Обираємо елементи x_1, $y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладаємо $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_{n-1}, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right).$$

2: *Обчислити*

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right).$$

*Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, то зупинка та $x_n \in S$. Інакше перейти на крок **3**.*

3: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1})}{(F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

*Покласти $n := n + 1$ та перейти на **1**.*

У алгоритмі 2 параметр λ_{n+1} залежить тільки від розташування точок y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, значень $F(y_{n-1}, x_{n+1})$, $F(y_{n-1}, y_n)$ і $F(y_n, x_{n+1})$. Ніяка інформація про константи a і b з нерівності (8) не використовується. Очевидно, що послідовність (λ_n) незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min\left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2 \max\{a, b\}} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} &F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le \\ &\qquad \le a\, d^2(y_{n-1}, y_n) + b\, d^2(y_n, x_{n+1}) \le \\ &\qquad\qquad \le \max\{a, b\} \left(d^2(y_{n-1}, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Перейдемо до обґрунтування збіжності алгоритму 2.

Спочатку доведемо важливу нерівність.

Лема 4. *Для x, $z \in C$ і $x^+ = \operatorname{prox}_{\lambda F(z, \cdot)} x$, де $\lambda > 0$, має місце нерівність*

$$F(z, x^+) - F(z, y) \le \frac{1}{2\lambda} \left(d^2(y, x) - d^2(x, x^+) - d^2(x^+, y) \right) \ \forall y \in C. \tag{26}$$

Доведення. З визначення

$$x^+ = \arg\min_{y \in C} \left(F(z, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x) \right)$$

випливає

$$F(z, x^+) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x^+, x) \le F(z, p) + \frac{1}{2\lambda} d^2(p, x) \;\; \forall p \in C. \tag{27}$$

Поклавши в (27) $p = t\,x^+ \oplus (1-t)y$, $y \in C$, $t \in (0,1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} F(z, x^+) + \frac{1}{2\lambda} d^2(x^+, x) &\le \\ \le F(z, t\,x^+ \oplus (1-t)y) &+ \frac{1}{2\lambda} d^2(t\,x^+ \oplus (1-t)y, x) \le \\ &\le t\,F(z, x^+) + (1-t)F(z, y) + \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \left(t\,d^2(x^+, x) + (1-t)d^2(y, x) - t(1-t)d^2(x^+, y) \right). \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} (1-t)F(z, x^+) - (1-t)F(z, y) &\le \\ \le \frac{1}{2\lambda} &\left(-(1-t)d^2(x^+, x) + (1-t)d^2(y, x) - t(1-t)d^2(x^+, y) \right). \end{aligned} \tag{28}$$

Скоротивши в (28) $1-t$ і зробивши граничний перехід при $t \to 1$ отримаємо (26). □

З леми 4 випливає, що для послідовностей (x_n), (y_n), породжених алгоритмом 2, мають місце нерівності

$$\begin{aligned} F(y_{n-1}, y_n) - F(y_{n-1}, y) &\le \\ &\le \frac{1}{2\lambda_n} \left(d^2(y, x_n) - d^2(x_n, y_n) - d^2(y_n, y) \right) \quad \forall y \in C, \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} F(y_n, x_{n+1}) - F(y_n, y) &\le \\ &\le \frac{1}{2\lambda_n} \left(d^2(y, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, y) \right) \quad \forall y \in C. \end{aligned} \tag{30}$$

Нерівність (30) дає обґрунтування правила зупинки алгоритму 2. Дійсно, при $x_{n+1} = x_n = y_n$ із (30) випливає

$$-F(y_n, y) \le 0 \qquad \forall y \in C,$$

тобто $x_n = y_n \in S$.

Зауваження 6. Можна використовувати для зупинки алгоритму 2 правило $x_n = y_n = y_{n-1}$, яке гарантує $x_n \in S$.

Доведемо основну оцінку, яка пов'язує відстані між породженими алгоритмом 2 точками і довільним елементом множини розв'язків S.

Лема 5. *Для послідовностей* (x_n), (y_n), *породжених алгоритмом 2, має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1},z) \le d^2(x_n,z) - \left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1},y_n) - \\ - \left(1-2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n,x_n) + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n,y_{n-1}), \quad (31)$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. Із псевдомонотонності біфункції F випливає

$$F(y_n,z) \le 0. \quad (32)$$

Із (32) і (30) випливає

$$2\lambda_n F(y_n,x_{n+1}) \le d^2(z,x_n) - d^2(x_n,x_{n+1}) - d^2(x_{n+1},z). \quad (33)$$

Склавши нерівності (33) та нерівність, що випливає з (29)

$$2\lambda_n \left(F(y_{n-1},y_n) - F(y_{n-1},x_{n+1})\right) \le \\ \le d^2(x_{n+1},x_n) - d^2(x_n,y_n) - d^2(y_n,x_{n+1}),$$

маємо

$$2\lambda_n \left(F(y_n,x_{n+1}) + F(y_{n-1},y_n) - F(y_{n-1},x_{n+1})\right) \le \\ \le d^2(z,x_n) - d^2(x_{n+1},z) - d^2(y_n,x_n) - d^2(x_{n+1},y_n). \quad (34)$$

З правила обчислення λ_{n+1} випливає нерівність

$$F(y_{n-1},x_{n+1}) - F(y_{n-1},y_n) - F(y_n,x_{n+1}) \le \\ \le \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} \left(d^2(y_{n-1},y_n) + d^2(x_{n+1},y_n)\right). \quad (35)$$

Для оцінки виразу $F(y_{n-1},x_{n+1}) - F(y_{n-1},y_n) - F(y_n,x_{n+1})$ в (34) скористаємося (35). Отримаємо

$$d^2(x_{n+1},z) \le d^2(z,x_n) - d^2(y_n,x_n) - d^2(x_{n+1},y_n) + \\ + \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\left(d^2(y_{n-1},y_n) + d^2(x_{n+1},y_n)\right).$$

Оскільки

$$d^2(y_{n-1},y_n) \le 2d^2(y_{n-1},x_n) + 2d^2(x_n,y_n),$$

то

$$d^2(x_{n+1},z) \le d^2(z,x_n) - d^2(y_n,x_n) - d^2(x_{n+1},y_n) + \\ + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(y_{n-1},x_n) + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n,y_n) + \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_{n+1},y_n),$$

що і треба було довести. □

Сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 2. *Нехай (X, d) — простір Адамара, $C \subseteq X$ — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R}$ виконані умови (A1)–(A5) і $S \neq \varnothing$. Тоді породжені алгоритмом 2 послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу* (7), *причому*

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0.$$

Доведення. Нехай $z' \in S$. Покладемо

$$a_n = d^2(x_n, z') + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}),$$

$$b_n = \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n).$$

Нерівність (31) набуває вигляду

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Оскільки існує $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 2\tau \in (0,1) \quad \text{і} \quad 1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 3\tau \in (0,1)$$

при $n \to \infty$. З леми 3 можемо зробити висновок, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \left(d^2(x_n, z') + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} d^2(x_n, y_{n-1}) \right)$$

та збігається числовий ряд

$$\sum_n \left(\left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) + \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) \right).$$

Звідки отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0 \tag{36}$$

і збіжність числових послідовностей $\big(d(x_n, z')\big)$, $\big(d(y_n, z')\big)$ для всіх $z' \in S$. Зокрема, послідовності (x_n), (y_n) обмежені.

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), яка слабко збігається до деякої точки $z \in C$. Тоді з (36) випливає, що (y_{n_k-1}) слабко збігається до z. Покажемо, що $z \in S$. З (30) випливає

$$F(y_{n_k-1}, y) \geq F(y_{n_k-1}, x_{n_k}) + \\ + \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} \left(d^2(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) + d^2(x_{n_k}, y) - d^2(x_{n_k-1}, y) \right) \quad \forall y \in C. \tag{37}$$

Скористаємося нерівністю (35) для оцінки знизу члена $F(y_{n_k-1}, x_{n_k})$ в (37). Отримаємо

$$F(y_{n_k-1}, y) \geq F(y_{n_k-2}, x_{n_k}) - F(y_{n_k-2}, y_{n_k-1}) + \\ + \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} \big(d^2(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) + d^2(x_{n_k}, y) - d^2(x_{n_k-1}, y) \big) - \\ - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k}} \big(d^2(y_{n_k-2}, y_{n_k-1}) + d^2(x_{n_k}, y_{n_k-1}) \big). \quad (38)$$

Різницю $F(y_{n_k-2}, x_{n_k}) - F(y_{n_k-2}, y_{n_k-1})$ оцінимо знизу за допомогою (29). Маємо

$$F(y_{n_k-2}, x_{n_k}) - F(y_{n_k-2}, y_{n_k-1}) \geq \\ \geq \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} \big(d^2(x_{n_k-1}, y_{n_k-1}) - d^2(y_{n_k-1}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k-1}) \big). \quad (39)$$

Комбінуючи (38) й (39) отримаємо

$$F(y_{n_k-1}, y) \geq \\ \geq \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} \big(d^2(x_{n_k-1}, y_{n_k-1}) - d^2(y_{n_k-1}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k-1}) \big) + \\ + \frac{1}{2\lambda_{n_k-1}} \big(d^2(x_{n_k}, x_{n_{k-1}}) - d^2(x_{n_k}, y) - d^2(x_{n_k-1}, y) - \\ - \frac{1}{2\lambda_{n_k}} \big(d^2(y_{n_k-2}, y_{n_k-1}) + d^2(x_{n_k}, y_{n_k-1}) \big) \quad \forall y \in C. \quad (40)$$

Виконавши граничний перехід в (40) з урахуванням (36) і слабкої напівнеперервності зверху функції $F(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$, отримуємо

$$F(z, y) \geq \limsup_{k\to\infty} F(y_{n_k-1}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто $z \in S$.

Застосовуючи варіант леми Опяла для метричних просторів Адамара (лема 1), отримуємо слабку збіжність послідовності (x_n) до точки $z \in S$. Дійсно, міркуємо від супротивного. Нехай існує підпослідовність (x_{m_k}), яка слабко збігається до деякої точки $\overline{z} \in C$ і $\overline{z} \neq z$. Ясно, що $\overline{z} \in S$. Далі маємо

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, z) < \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, \overline{z}) < \\ = \lim_{n\to\infty} d(x_n, \overline{z}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, \overline{z}) < \\ < \lim_{k\to\infty} d(x_{m_k}, z) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, z),$$

що неможливо. Отже, (x_n) слабко збігається до $z \in S$. З (36) випливає, що й послідовність (y_n) слабко збігається до $z \in S$. □

Зауваження 7. В майбутньому ми плануємо розглянути більш спеціальні варіанти адаптивного двоетапного проксимального алгоритму для варіаційних нерівностей і мінімаксних задач на многовидах Адамара (наприклад, на многовиді симетричних додатньо визначених матриць). Також цікавою є побудова рандомізованих адаптивних версій алгоритмів.

Розглянемо окремий випадок задачі про рівновагу: варіаційна нерівність в гільбертовому просторі H:

$$\text{знайти} \quad x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{41}$$

Нехай виконані наступні умови: множина $C \subseteq H$ — опукла і замкнена; оператор $A : C \to H$ — псевдомонотонний, ліпшицевий і секвенційно слабко неперервний; множина розв'язків варіаційної нерівності (41) непорожня.

Нехай P_C — оператор метричного проектування на опуклу замкнену множину C, тобто $P_C x$ — єдиний елемент множини C з властивістю

$$\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|.$$

Для варіаційних нерівностей (41) двоетапний проксимальний алгоритм 2 приймає такий вигляд.

Алгоритм 3.

Обираємо елементи x_1, $y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. *Покладаємо* $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_{n-1}).$$

2: *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

Якщо $x_{n+1} = x_n = y_n$, *то зупинка та* x_n *— розв'язок. Інакше перейти на крок **3**.*

3: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \ \text{якщо} \ (Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leq 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2)}{(Ay_{n-1} - Ay_n, x_{n+1} - y_n)}\right\}, \quad \text{інакше}. \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ *та перейти на **1**.*

З теореми 2 випливає наступний результат.

Теорема 3. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, оператор $A : C \to H$ псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабко неперервний та існують розв'язки* (41). *Тоді породжені алгоритмом 3 послідовності* (x_n), (y_n) *слабко збігаються до розв'язку варіаційної нерівності* (41), *причому*

$$\lim_{n \to \infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n \to \infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

Зауваження 8. Якщо оператор A монотонний, то результат теореми 3 справедливий без припущення про секвенційну слабку неперервність оператора A.

5. Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Для наближеного розв'язання задачі (7) розглянемо екстрапроксимальний алгоритм з адаптивним вибором λ_n

Алгоритм 4 (Ведель–Голубєва–Семенов–Чабак, [24]).

Обираємо елементи $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$. *Покладаємо* $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda F(x_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right).$$

Якщо $y_n = x_n$, *то зупинка та* $x_n \in S$. *Інакше перейти на крок **2**.*

2: *Обчислити*

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right).$$

3: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \text{ якщо } F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n,y_n)+d^2(x_{n+1},y_n)}{(F(x_n,x_{n+1})-F(x_n,y_n)-F(y_n,x_{n+1}))} \right\}, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ *та перейти на **1**.*

Зауваження 9. В алгоритмі 4 параметр λ_{n+1} залежить тільки від розташування точок x_n, y_n, x_{n+1}, значень $F(x_n, x_{n+1})$, $F(x_n, y_n)$ і $F(y_n, x_{n+1})$. Ніяка інформація про константи a і b з нерівності (8) не використовується. Очевидно, що послідовність (λ_n) незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min\left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a,b\}} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$\begin{aligned} F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) &\le \\ \le a d^2(x_n, y_n) + b d^2(x_{n+1}, y_n) &\le \\ \le \max\{a, b\} \left(d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n) \right). \end{aligned}$$

Для варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі алгоритм 4 набуває вигляду.

Алгоритм 5.

Обираємо елементи $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$. *Покладаємо* $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

Якщо $y_n = x_n$, *то зупинка та* x_n *— розв'язок. Інакше перейти на крок **2**.*

2: *Обчислити*

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

3: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \frac{\tau}{2}\frac{\|x_n-y_n\|^2+\|x_{n+1}-y_n\|^2}{(Ax_n-Ay_n,x_{n+1}-y_n)}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (42)$$

Покласти $n := n+1$ *та перейти на* ***1***.

Зауваження 10. Алгоритм 5 відрізняється від дослідженого в [36,37] методу правилом оновлення параметру λ_{n+1}. В [36,37] замість (42) розглядалось таке правило

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\frac{\|x_n-y_n\|}{\|Ax_n-Ay_n\|}\right\}, & \text{якщо } Ax_n \ne Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 4.

Має місце

Лема 6. *Для* $x \in C$ *і* $x^+ = \mathrm{prox}_{\lambda F(x,\cdot)}x$, *де* $\lambda > 0$, *має місце нерівність*

$$F(x,x^+) - F(x,y) \le \frac{1}{2\lambda}\left(d^2(y,x) - d^2(x,x^+) - d^2(x^+,y)\right) \ \forall y \in C. \quad (43)$$

Доведення. Випливає з леми 4. □

З леми 6 випливає, що для послідовностей (x_n), (y_n), породжених алгоритмом 4, мають місце нерівності ($\forall y \in C$)

$$F(x_n,y_n) - F(x_n,y) \le \frac{1}{2\lambda_n}\left(d^2(y,x_n) - d^2(x_n,y_n) - d^2(y_n,y)\right), \quad (44)$$

$$F(y_n,x_{n+1}) - F(y_n,y) \le$$
$$\le \frac{1}{2\lambda_n}\left(d^2(y,x_n) - d^2(x_n,x_{n+1}) - d^2(x_{n+1},y)\right). \quad (45)$$

Нерівність (44) дає обгрунтування правилу зупинки в алгоритмі 4. Дійсно, для $x_n = y_n$ з (44) випливає

$$-F(x_n,y) \le 0 \ \forall y \in C,$$

тобто, $x_n \in S$

Зауваження 11. Насправді, має місце еквівалентність:

$$x \in S \ \Leftrightarrow \ x = \mathrm{prox}_{\lambda F(x,\cdot)}x, \ \lambda > 0.$$

Має місце

Лема 7. *Для послідовностей* (x_n), (y_n), *породжених алгоритмом 4, має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1},z) \le d^2(x_n,z) -$$
$$-\left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(x_{n+1},y_n) - \left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(y_n,x_n), \quad (46)$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. З псевдомонотонності біфункції F маємо

$$F\left(y_n, z\right) \leq 0. \tag{47}$$

З (47) та (45) випливає

$$2\lambda_n F\left(y_n, x_{n+1}\right) \leq d^2\left(z, x_n\right) - d^2\left(x_n, x_{n+1}\right) - d^2\left(x_{n+1}, z\right). \tag{48}$$

З правила обчислення λ_{n+1} отримуємо

$$F\left(x_n, x_{n+1}\right) - F\left(x_n, y_n\right) - F\left(y_n, x_{n+1}\right) \leq \\ \leq \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}}\left(d^2\left(x_n, y_n\right) + d^2\left(x_{n+1}, y_n\right)\right). \tag{49}$$

Оцінивши знизу ліву частину (48) з допомогою (49), одержимо

$$2\lambda_n\left(F\left(x_n, x_{n+1}\right) - F\left(x_n, y_n\right)\right) - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\left(d^2\left(x_n, y_n\right) + d^2\left(x_{n+1}, y_n\right)\right) \leq \\ \leq d^2\left(z, x_n\right) - d^2\left(x_n, x_{n+1}\right) - d^2\left(x_{n+1}, z\right). \tag{50}$$

Для оцінки знизу $2\lambda_n\left(F\left(x_n, x_{n+1}\right) - F\left(x_n, y_n\right)\right)$ в (50) використаємо нерівність (44). Маємо

$$d^2\left(x_n, y_n\right) + d^2\left(y_n, x_{n+1}\right) - d^2\left(x_{n+1}, x_n\right) - \\ - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\left(d^2\left(x_n, y_n\right) + d^2\left(x_{n+1}, y_n\right)\right) \leq \\ \leq d^2\left(z, x_n\right) - d^2\left(x_n, x_{n+1}\right) - d^2\left(x_{n+1}, z\right). \tag{51}$$

Перегрупувавши (51), отримаємо (46). □

Сформуюємо основний результат розділу.

Теорема 4. *Нехай (X, d) — простір Адамара, $C \subseteq X$ — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R}$ виконані умови (A1)–(A5) і $S \neq \varnothing$. Тоді породжені алгоритмом 4 послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу (7), причому $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0$.*

Доведення. Нехай $z \in S$. Покладемо

$$a_n = d\left(z, x_n\right),$$

$$b_n = \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2\left(x_{n+1}, y_n\right) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2\left(y_n, x_n\right).$$

Нерівність (46) приймає вигляд $a_{n+1} \leq a_n - b_n$. Оскільки існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0, 1), \ \ n \to \infty.$$

З леми 3 випливає існування границі

$$\lim_{n\to\infty} d^2\left(z, x_n\right)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(d^2\left(x_{n+1},y_n\right)+d^2\left(y_n,x_n\right)\right)<+\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності (x_n) та

$$\lim_{n\to\infty} d\left(y_n,x_n\right)=\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1},y_n\right)=\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1},x_n\right)=0. \tag{52}$$

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $z\in C$. Тоді з (52) випливає, що (y_{n_k}) слабко збігається до z. Покажемо, що $z\in S$. Маємо

$$\begin{aligned}
F\left(y_{n_k},y\right)\geq F\left(y_{n_k},x_{n_k+1}\right)-&\\
-\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y,x_{n_k})-d^2(x_{n_k},x_{n_k+1})-d^2\left(x_{n_k+1},y\right)\right)\geq&\\
\geq F\left(x_{n_k},x_{n_k+1}\right)-F\left(x_{n_k},y_{n_k}\right)-\frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2\left(x_{n_k},y_{n_k}\right)+d^2\left(x_{n_k+1},y_{n_k}\right)\right)-&\\
-\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2\left(y,x_{n_k}\right)-d^2\left(x_{n_k},x_{n_k+1}\right)-d^2\left(x_{n_k+1},y\right)\right)\geq&\\
\geq-\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2\left(x_{n_k+1},x_{n_k}\right)-d^2\left(x_{n_k},y_{n_k}\right)-d^2\left(y_{n_k},x_{n_k+1}\right)\right)-&\\
-\frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2\left(x_{n_k},y_{n_k}\right)+d^2\left(x_{n_k+1},y_{n_k}\right)\right)-&\\
-\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2\left(y,x_{n_k}\right)-d^2\left(x_{n_k},x_{n_k+1}\right)-d^2\left(x_{n_k+1},y\right)\right)\quad\forall y\in C.&
\end{aligned} \tag{53}$$

Здійснивши граничний перехід в (53) з врахуванням (52) та слабкої напівнеперервності функції $F(\cdot,y):C\to\mathbb{R}$, отримаємо

$$F\left(z,y\right)\geq\limsup_{k\to\infty}F\left(y_{n_k},y\right)\geq 0\ \ \forall y\in C,$$

тобто, $z\in S$.

Застосовуючи варіант леми Опяла для простору Адамара, отримуємо слабку збіжність послідовності (x_n) до точки $z\in S$. Дійсно, припустимо, що існує підпослідовність (x_{m_k}), яка слабко збігається до деякої точки $\bar z\in C$ та $\bar z\neq z$. Ясно, що $\bar z\in S$. Далі, маємо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,z\right)=\lim_{k\to\infty}d\left(x_{n_k},z\right)<&\\
<\lim_{k\to\infty}d\left(x_{n_k},\bar z\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,\bar z\right)=\lim_{k\to\infty}d\left(x_{m_k},\bar z\right)<&\\
<\lim_{k\to\infty}d\left(x_{m_k},z\right)=\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,z\right),&
\end{aligned}$$

що неможливо. Отже, (x_n) слабко збігається до $z\in S$. З (52) випливає, що і послідовність (y_n) слабко збігається до $z\in S$. □

Зауваження 12. Як видно з доведення теореми 4, для послідовності (x_n), починаючи з деякого номера N, виконується фейєрівська властивість відносно множини розв'язків S.

Знову розглянемо окремий випадок задачі про рівновагу: варіаційна нерівність в гільбертовому просторі H:

$$\text{знайти} \quad x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C. \tag{54}$$

З теореми 4 випливає такий результат.

Теорема 5. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, оператор $A : C \to H$ псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабко неперервний та існують розв'язки* (54)*. Тоді породжені алгоритмом 5 послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку варіаційної нерівності* (54)*, причому*

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

6. Регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Для задачі про рівновагу (7) розглянемо регуляризований за допомогою схеми Гальперна [38] екстрапроксимальний алгоритм з адаптивним підбором кроку [24, 25].

Наступні факти відіграють важливу роль у доведенні основного результату підрозділу.

Лема 8. *Нехай (ξ_n) — послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність*

$$\xi_{n+1} \leq (1 - \alpha_n)\xi_n + \alpha_n \beta_n + \gamma_n,$$

де послідовності (α_n), (β_n) і (γ_n) мають властивості:

1) $\alpha_n \in (0, 1)$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$*;*
2) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 0$*;*
3) $\gamma_n \in [0, +\infty)$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

Тоді $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Лема 9 (P.-E. Mainge, [39])**.** *Нехай числова послідовність (α_n) має підпослідовність (α_{n_k}), яка володіє властивістю*

$$\alpha_{n_k} < \alpha_{n_k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує така неспадна послідовність (m_k) натуральних чисел, що

$$m_k \to +\infty \quad \text{і} \quad \alpha_{m_k} \leq \alpha_{m_k+1}, \ \alpha_k \leq \alpha_{m_k+1} \ \forall k \geq n_1.$$

В [26] запропоновано такий алгоритм.

Алгоритм 6 (Ведель–Денисов–Семенов, [26]).

Обираємо елементи $a \in C$, $x_1 \in C$, числа $\tau \in (0, 1)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$ та таку послідовність (α_n), що $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. Покладаємо $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n, \cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

2: *Обчислити*

$$z_n = \mathrm{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)}\, x_n = \mathrm{argmin}_{y\in C}\left(F\left(y_n, y\right) + \tfrac{1}{2\lambda_n} d^2\left(y, x_n\right)\right).$$

3: *Обчислити*

$$x_{n+1} = \alpha_n a \oplus \left(1-\alpha_n\right) z_n.$$

4: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо } F(x_n,z_n) - F(x_n,y_n) - F(y_n,z_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \frac{\tau}{2}\frac{d^2(x_n,y_n)+d^2(z_n,y_n)}{(F(x_n,z_n)-F(x_n,y_n)-F(y_n,z_n))}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (55)$$

Покласти $n := n+1$ та перейти на ***1***.

Зауваження 13. Наведений алгоритм є регуляризованим варіантом адаптивного екстрапроксимального методу, що досліджувався у попередньому розділі (див. також [24, 25]). Для регуляризації базової адаптивної екстрапроксимальної схеми використана класична схема Гальперна [38], варіант якої для простору Адамара вивчено в [18]. Доведення збіжності грунтується на використанні фейєрівської властивості екстрапроксимального методу відносно множини розв'язків та відомих результатів про збіжність методів типу схеми Гальперна [7, 18, 39–41].

Зауваження 14. Послідовність (λ_n) незростаюча та обмежена знизу числом

$$\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a,b\}}\right\}.$$

З результатів розділу 5 випливає

Лема 10. *Для послідовностей (x_n), (y_n) та (z_n), породжених алгоритмом 6, має місце нерівність*

$$d^2\left(z_n, z\right) \le d^2\left(x_n, z\right) - \\ - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2\left(z_n, y_n\right) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2\left(y_n, x_n\right), \quad (56)$$

де $z \in S$.

Має місце

Лема 11. *Для послідовностей (x_n), (y_n) та (z_n), породжених алгоритмом 6, має місце нерівність*

$$d^2\left(x_{n+1}, z\right) - \left(1-\alpha_n\right) d^2\left(x_n, z\right) + \\ + \left(1-\alpha_n\right)\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2\left(z_n, y_n\right) + \left(1-\alpha_n\right)\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2\left(y_n, x_n\right) \le \\ \le \alpha_n d^2\left(a, z\right) - \alpha_n\left(1-\alpha_n\right) d^2\left(a, z_n\right), \quad (57)$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. З рівності $x_{n+1} = \alpha_n a \oplus (1-\alpha_n) z_n$ та нерівності сильної опуклості (5) випливає оцінка

$$d^2(x_{n+1}, z) \le \alpha_n d^2(a, z) + (1-\alpha_n) d^2(z_n, z) - \alpha_n (1-\alpha_n) d^2(a, z_n).$$

Для оцінки зверху виразу $d^2(z_n, z)$ використаємо лему 10 та отримаємо нерівність (57). □

Доведемо обмеженість породжених алгоритмом послідовностей.

Лема 12. *Породжені алгоритмом 6 послідовності (x_n), (y_n) та (z_n) обмежені.*

Доведення. Нехай $z \in S$. Маємо

$$d(x_{n+1}, z) = d(\alpha_n a \oplus (1-\alpha_n) z_n, z) \le \alpha_n d(a, z) + (1-\alpha_n) d(z_n, z).$$

Оскільки існує $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0,1) \text{ при } n \to \infty.$$

Скориставшись нерівністю леми 11, отримаємо

$$d(x_{n+1}, z) \le \alpha_n d(a, z) + (1-\alpha_n) d(x_n, z) \le \max\{d(a, z), d(x_n, z)\}$$

для всіх $n \ge n_0$.

Отже,

$$d(x_{n+1}, z) \le \max\{d(a, z), d(x_{n_0}, z)\} \quad \forall n \ge n_0.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена.

Обмеженість послідовностей (y_n) та (z_n) випливає з обмеженості (x_n) та леми 11. □

Перейдемо до основного результату.

Теорема 6. *Нехай (X, d) — метричний простір Адамара, C — непорожня опукла замкнена множина простору X, біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ задовольняє умови (A1)–(A5) та $S \ne \emptyset$. Тоді породжені алгоритмом 6 послідовності (x_n), (y_n) та (z_n) збігаються до елемента $P_S a$.*

Доведення. Розглянемо елемент $z_0 = P_S a$. З леми 12 випливає існування такого числа $M > 0$, що

$$\left| d^2(a, z_0) - (1-\alpha_n) d^2(a, z_n) \right| \le M \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Тоді з нерівності леми 11 отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} d^2(x_{n+1}, z_0) - (1-\alpha_n) d^2(x_n, z_0) + \\ + (1-\alpha_n)\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) + \\ + (1-\alpha_n)\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) \le \alpha_n M. \quad (58) \end{aligned}$$

Розглянемо числову послідовність $(d(x_n, z_0))$. Можливі два варіанти:

a) існує такий номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$, що

$$d(x_{n+1}, z_0) \le d(x_n, z_0) \ \text{ для всіх } \ n \ge \bar{n};$$

b) існує така зростаюча послідовність номерів (n_k), що

$$d(x_{n_k+1}, z_0) > d(x_{n_k}, z_0) \ \text{ для всіх } \ k \in \mathbb{N}.$$

Спочатку розглянемо варіант a). У цьому випадку існує границя

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_0) \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $d^2(x_{n+1}, z_0) - d^2(x_n, z_0) \to 0$, $\alpha_n \to 0$ та $1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0,1)$, то при $n \to \infty$ маємо

$$d(x_n, y_n) \to 0, \tag{59}$$

$$d(z_n, y_n) \to 0. \tag{60}$$

З обмеженості (x_n) випливає існування підпослідовності (x_{n_k}), що слабко збігається до точки $w \in X$. Тоді з (59), (60) випливає, що (y_{n_k}) та (z_{n_k}) слабко збігаються до w. Очевидно, що $w \in C$. Покажемо, що обов'язково $w \in S$. Маємо

$$\begin{aligned}
F(y_{n_k}, y) &\ge \\
&\ge F(y_{n_k}, z_{n_k}) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)\right) \ge \\
&\ge F(x_{n_k}, z_{n_k}) - F(x_{n_k}, y_{n_k}) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(z_{n_k}, y_{n_k})\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)\right) \ge \\
&\ge -\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(z_{n_k}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) - d^2(y_{n_k}, z_{n_k})\right) - \\
&\quad - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(z_{n_k}, y_{n_k})\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)\right) \quad \forall y \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Здійснивши граничний перехід в (61) з урахуванням (59), (60) та слабкої напівнеперервності зверху функції $F(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$, отримуємо

$$F(z, y) \ge \limsup_{k\to\infty} F(y_{n_k}, y) \ge 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто, $z \in S$.

Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty}\left(d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_n)\, d^2(a, z_n)\right) \le 0. \tag{62}$$

Розглянемо таку підпослідовність (z_{n_k}), що

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left(d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_{n_k})\, d^2(a, z_{n_k})\right) = \\
&\qquad = \limsup_{n\to\infty}\left(d^2(a, z_0) - (1 - \alpha_n)\, d^2(a, z_n)\right).
\end{aligned}$$

Додатково можна вважати, що $z_{n_k} \to w \in S$ слабко. Тоді, скориставшись слабкою напівнеперервністю знизу функції $d^2(a,\cdot)$, отримуємо

$$\lim_{k\to\infty} \left(d^2(a,z_0) - (1-\alpha_{n_k}) d^2(a,z_{n_k}) \right) \le d^2(a,z_0) - d^2(a,w). \qquad (63)$$

Оскільки $z_0 = P_S a = \operatorname{argmin}_{w\in S} d(a,w)$, то з (63) випливає (62).

Тепер з (62), нерівності

$$d^2(x_{n+1},z_0) \le (1-\alpha_n) d^2(x_n,z_0) + \alpha_n \left(d^2(a,z_0) - (1-\alpha_n) d^2(a,z_n) \right),$$

яка має місце для достатньо великих n, та леми 8 робимо висновок, що $d(x_n,z_0) \to 0$. З (59), (60) отримуємо $d(y_n,z_0) \to 0$ та $d(z_n,z_0) \to 0$.

Вивчимо варіант b). У цьому випадку розглянемо послідовність номерів (m_k) з властивістю (лема 9):

i) $m_k \nearrow +\infty$;
ii) $d(x_{m_k+1},z_0) \ge d(x_{m_k},z_0)$ для всіх $k \ge n_1$;
iii) $d(x_{m_k+1},z_0) \ge d(x_k,z_0)$ для всіх $k \ge n_1$.

З нерівності леми 11 та ii) випливає

$$\alpha_{m_k} d^2(x_{m_k},z_0) + (1-\alpha_{m_k}) \left(1 - \tau \frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}} \right) d^2(z_{m_k},y_{m_k}) +$$
$$+ (1-\alpha_{m_k}) \left(1 - \tau \frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}} \right) d^2(y_{m_k},x_{m_k}) \le$$
$$\le \alpha_{m_k} d^2(a,z_0) - \alpha_{m_k}(1-\alpha_{m_k}) d^2(a,z_{m_k}) \le \alpha_{m_k} M.$$

Звідки

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m_k},y_{m_k}) = \lim_{k\to\infty} d(z_{m_k},y_{m_k}) = 0.$$

Міркуваннями, подібними вищевикладеним, показуємо, що часткові слабкі границі послідовностей (x_{m_k}), (y_{m_k}) та (z_{m_k}) належать множині S. Як і раніше отримуємо

$$\limsup_{k\to\infty} \left(d^2(a,z_0) - (1-\alpha_{m_k}) d^2(a,z_{m_k}) \right) \le 0.$$

Далі, для достатньо великих номерів k маємо

$$d^2(x_{m_k+1},z_0) \le (1-\alpha_{m_k}) d^2(x_{m_k},z_0) +$$
$$+ \alpha_{m_k} \left(d^2(a,z_0) - (1-\alpha_{m_k}) d^2(a,z_{m_k}) \right) \le$$
$$\le (1-\alpha_{m_k}) d^2(x_{m_k+1},z_0) + \alpha_{m_k} \left(d^2(a,z_0) - (1-\alpha_{m_k}) d^2(a,z_{m_k}) \right).$$

Звідки, врахувавши умову iii), отримуємо

$$d^2(x_k,z_0) \le d^2(x_{m_k+1},z_0) \le d^2(a,z_0) - (1-\alpha_{m_k}) d^2(a,z_{m_k}).$$

Таким чином,

$$\limsup_{k\to\infty} d^2(x_k,z_0) \le \limsup_{k\to\infty} \left(d^2(a,z_0) - (1-\alpha_{m_k}) d^2(a,z_{m_k}) \right) \le 0.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,z_0) = 0$$

та, в свою чергу, $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n,z_0) = 0$. □

Зауваження 15. Якщо біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ має таку властивість ліпшицевого типу:

$$\exists\, A > 0 : \quad F(x,y) \le F(x,z) + F(z,y) + Ad(x,z)\, d(z,y) \quad \forall x,y,z \in C,$$

то замість (55) в алгоритмі 6 можна використати правило:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \ \text{якщо} \ F(x_n,z_n) - F(x_n,y_n) - F(y_n,z_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \tau\frac{d(x_n,y_n)d(z_n,y_n)}{(F(x_n,z_n)-F(x_n,y_n)-F(y_n,z_n))}\right\}, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

Для отриманого такою модифікацією алгоритму буде справедливий аналогічний теоремі 6 результат про збіжність.

Для варіаційної нерівності (54) алгоритм 6 приймає такий вигляд.

Алгоритм 7.

Обираємо елементи $a \in C$, $x_1 \in C$, числа $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$ та таку послідовність (α_n), що $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. Покладаємо $n = 1$.

1: *Обчислити*

$$y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right).$$

2: *Обчислити*

$$z_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_n\right).$$

3: *Обчислити*

$$x_{n+1} = \alpha_n a + (1-\alpha_n)\, z_n.$$

4: *Обчислити*

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \ \text{якщо} \ (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \le 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \frac{\tau}{2}\frac{\|x_n-y_n\|^2+\|z_n-y_n\|^2}{(Ax_n-Ay_n,z_n-y_n)}\right\}, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

*Покласти $n := n+1$ та перейти на **1**.*

Зауваження 16. Спираючись на результат [42], можна побудувати більш економну в обчислювальному відношенні модифікацію алгоритму 7. Слід змінити крок 2, поклавши

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n),$$

де

$$T_n = \left\{ z \in H : \ (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \le 0 \right\}.$$

З теореми 6 випливає такий результат.

Теорема 7. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ – непорожня опукла замкнена множина, оператор $A : C \to H$ псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабко неперервний та існують розв'язки* (54). *Тоді породжені алгоритмом 7 послідовності (x_n), (y_n) та (z_n) сильно збігаються до проекції елемента a на множину розв'язків варіаційної нерівності* (54).

Зауваження 17. Якщо оператор A монотонний, то результат теореми 7 справедливий без припущення про його секвенційну слабку неперервність.

Заключні зауваження

В роботі розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара.

Отримана теорема про слабку збіжність двоетапного проксимального алгоритму для псевдомонотонних задач рівноважного програмування в просторах Адамара. Запропоновано адаптивний двоетапний проксимальний алгоритм для задач в метричних просторах Адамара. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшицевих констант біфункції та на відміну від правил типу лінійного пошуку не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведена теорема про слабку збіжність породжених алгоритмом послідовностей. Запропоновано та теоретично обгрунтовано адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Запропоновано та теоретично обгрунтовано регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм. Для регуляризації базової екстрапроксимальної схеми було використано класичну схему Гальперна. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теорему про збіжність.

Показано, що запропоновані алгоритм можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Для підготовки статті використано результати робіт [22–26].

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026) та НАН України (проєкт «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162).

Література

1. Kassay G., Radulescu V. D. Equilibrium Problems and Applications. London: Academic Press, 2019. xx + 419 p.
2. Nikaido H., Isoda K. Note on noncooperative convex games. *Pacific Journal of Mathematics.* 1955. Vol. 5. P. 807–815.
3. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Stud.* 1994. 63. P. 123–145.
4. Muu L. D. and Oettli W. Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Anal. TMA.* 1992. 18. P. 1159–1166.
5. Lions J. L., Stampacchia G. Variational inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.* 1967. Vol. XX. P. 493–519.
6. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
7. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. Vol. 6. P. 117–136.
8. Quoc T. D., Muu L. D., Hien N. V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization.* 2008. Vol. 57. P. 749–776.
9. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2011. 408 p.

10. Van N. T. T., Strodiot J. J., Nguyen V.H. A bundle method for solving equilibrium problems. *Math. Program.* 2009. 116 (1–2), Ser. B. P. 529–552.
11. Anh P. N. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and Ky Fan inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* 2012. 154. P. 303–320.
12. Vuong P. T., Strodiot J. J, Nguyen V. H. Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalities and fixed point problems. *J. Optim. Theory Appl.* 2012. 155. P. 605–627.
13. Quoc T. D., Anh P. N., Muu L. D. Dual extragradient algorithms to equilibrium problems. *J. Glob. Optim.* 2012. 53. P. 139–159.
14. Vuong P. T., Strodiot J. J., Nguyen V. H. On extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space. *Optimization.* 2015. 64 (2). P. 429–451. https://doi.org/10.1080/02331934.2012.759327
15. Anh P. N., Hai T. N., Tuan P. M. On Ergodic Algorithms for Equilibrium Problems. *J. Glob. Optim.* 2016. 64 (1). P. 179–195.
16. Nguyen T. P. D., Strodiot J. J., Nguyen V. H., Nguyen T. T. V. A family of extragradient methods for solving equilibrium problems. *J. Ind. Manag. Optim.* 2015. 11. P. 619–630.
17. Zykina A. V., Melenchuk N. V. Finite number of iterations in the two-step extragradient method. *Russian Mathematics.* 2014. Volume 58. Issue 9. P. 62–65.
18. Bacak M. Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.
19. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2012. Vol. 388. P. 61–77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
20. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society.* 2019. P. 1–23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041
21. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes.* 2019. Vol. 20. No. 1. P. 281–297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
22. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of a Two-Stage Proximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 5. P. 784–792.
23. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V. An Adaptive Two-Stage Proximal Algorithm for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 6. P. 978–989.
24. Vedel Y. I., Golubeva E. N., Semenov V. V., Chabak L. M. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in the Hadamard Spaces. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. Vol. 52. Issue 8. P. 46–58.
25. Vedel Y., Semenov V. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. In: Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12422. Springer, Cham, 2020. P 287–300.
26. Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. Regularized Adaptive Extra-Proximal Algorithm for Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. Vol. 52. Issue 9. P. 12–26.
27. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092

28. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8
29. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: B. Goldengorin (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham, 2016. P. 315–325.
30. Vedel Y. I., Semenov V. V. A new two-phase proximal method of solving the problem of equilibrium programming. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2015. № 1 (118). P. 15–23.
31. Vedel Y. I., Semenov V. V., Chabak L. M. About the two-stage proximal method for solving of equilibrium problems. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2019. № 2 (131). P. 23–31. https://doi.org/10.17721/2706-9699.2019.2.03
32. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A New Non-Euclidean Proximal Method for Equilibrium Problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 836. Springer, Cham, 2019. P. 50–58.
33. Semenov V. V., Vedel Ya. I., Denisov S. V. Convergence of adaptive extra-proximal algorithms for equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2022. № 1. P. 62–82.
34. Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham: Springer, 2014. xii+173 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10927-5
35. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 33. Providence: AMS, 2001. xiv+415 p.
36. Denisov S. V., Semenov V. V., Stetsyuk P. I. Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55. Issue 3. P. 377–383.
37. Denisov S.V., Nomirovskii D. A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of Extragradient Algorithm with Monotone Step Size Strategy for Variational Inequalities and Operator Equations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51. Issue 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20
38. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. P. 957–961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
39. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis.* 2008. Vol. 16. P. 899–912. https://doi.org/10.1007/s11228-008-0102-z
40. Semenov V. V. Two methods of approximation of the fixed point of the Fejer operator. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2013. № 1 (111). P. 46–56.
41. Apostol R. Ya., Grynenko A. A., Semenov V. V. Iterative algorithms for monotone two-level variational inequalities. *Journal of Numerical and Applied Mathematics.* 2012. № 1 (107). P. 3–14.
42. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. Vol. 47. Issue 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1

Надійшла: 22.02.2024 / Прийнята: 28.10.2024