УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/4.11

Чечельницький О.А.., к.ф.-м.н., доцент

Властивості моделі обслуговування паралельної структури/

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Академіка Глушкова 4д,
e-mail: achechelnitski@gmail.com

O.A. Chechelnitsky, PhD, Associate Professor.

The properties of the queuing model with the parallel structure.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: achechelnitski@gmail.com

В статті розглянута багатоканальна модель обслуговування паралельної структури.. Це означає, що ми розглядаємо модель, яка складається з двох паралельно функціонуючих систем обслуговування з нескінченою кількістю обслуговуючих приладів. Час обслуговування на кожній системі має довільний розподіл. Вивчення моделі ускладнюється тим, що її стохастична динаміка не може бути описана ланцюгом Маркова. Крім того, ми передбачаємо, що вимоги надходять до моделі згідно з двовимірним потоком Пуассона. Цей потік характеризується тим,що вимоги з нього можуть надходити парами одночасно. Вивчається стохастичний процес числа вимог у системах моделі. Отримано генератрису граничного розподілу цього процесу. Це дозволило виписати в явному вигляді вирази для математичного сподівання, дисперсії та кореляції числа вимог, які є на обслуговуванні.

Ключові слова: паралельна модель обслуговування, двовимірний вхідний потік, стаціонарний розподіл.

*The present article is devoted to research the multi-channelk model with the parallel structure. It means that we consider the model which consists of two infinite-server queues.
The service time in the each system has general function of distribution. In this case the stochastic dynamic of our model cannot be defined by Markov chain. As a result, analysis of such models is much more difficult than that of the corresponding Markovian queueing models .Besides we assume that customers arrive to our model according a bivariate Poisson input flow. This input process is characterized by the fact that customers arrive according to a bivariate Poisson flow simultaneously. We consider the number of customers in the systems at time t. This stochastic process describes the state of our model. In present paper we find the limit joint distribution of the number of customers in the systems. In a general way (by differentiating the corresponding generating function.) we obtain the main characteristics of this distribution, such as the expected number of customers in the nodes, its variance and correlation . In the case when parameters of our model dependent on the parameter n (number of series) the limit normal distribution was obtained for the service process in the stationary regime.*

Key Words: network model, bivariate input flow, stationary distribution

Статтю представила д.ф.-м. н. Розора І.В.

1. Стаціонарні характеристики моделі.

Особливості реальних комп'ютерних мереж та мереж зв'язку вимагають застосуванням паралельного функціонування об'єктів різного типу. Це пов'язано з тим , що паралельність обробки масивів інформації, запитів, паралельність обчислень та інших операції, які виконуються в сучасних мережевих системах, дозволяють досягати найбільшої швидкості роботи та економії часу. Ось чому, велике значення має аналіз властивостей математичних моделей мережевих структур з паралельно функціонуючими елементами різних типів. У даній статті ми розглянемо модель паралельної структури, елементами якої є дві системи масового обслуговування типу $M/G/\infty$ з двовимірним вхідним потоком вимог Пуассона $(\nu_1(t),\nu_2(t))$ з параметрами $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $b>0$. Вимоги з потоку $\nu_1(t)$ прибувають на першу систему, а вимоги з потоку $\nu_2(t)$ прибувають на другу систему обслуговування. Нехай ξ_1 і ξ_2 випадкові інтервали часу обслуговування в системах з функціями розподілу $G_1(t),G_2(t)$ відповідно, $\overline{G}_i(t)=1-G_i(t)$, $M\xi_i<+\infty$, $a_i=(M\xi_i)^{-1}, i=1,2$. Позначимо також через $X_1(t)$ число вимог, які обслуговуються в першій системі в момент часу t, а через $X_2(t)$- число вимог у другій системі в момент часу t. Кожна вимога обслуговується тільки на одній системі обслуговування.

Однією з ключових проблем, яка розв'язується в рамках теорії масового обслуговування, є дослідження стаціонарних характеристик моделі. Очевидно, що найбільш повним успіхом на цьому шляху є випадки, коли вдається знайти стаціонарний розподіл процесу обслуговування $(X_1(t),X_2(t))$. В зв'язку з цим має місце наступна теорема.

Теорема 1. Процес обслуговування $(X_1(t),X_2(t))$ в моделі $(M/G/\infty)^2$ з паралельною структурою та двовимірним пуассонівським потоком вимог $(\nu_1(t),\nu_2(t))$ має ергодичний розподіл з генератрисою наступного вигляду:

$$\varphi(z_1,z_2)=Mz_1^{X_1}z_2^{X_2}=$$

$$=\exp\left\{-\left(\frac{\lambda_1}{a_1}+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min(\xi_1,\xi_2)\right)\right)(1-z_1)-\right.$$

$$-\left(\frac{\lambda_2}{a_2}+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min(\xi_1,\xi_2)\right)\right)(1-z_2)-$$

$$\left.-bM\min(\xi_1,\xi_2)(1-z_1z_2)\right\}.$$

Доведення. В даній статті ми запропонуємо підхід, який базується на конструктивному представленні стохастичного процесу $(X_1(t),X_2(t))$ через суми індикаторних випадкових величин на вхідних пуассонівських потоках, кожна з яких буде описувати процес обслуговування окремо розглянутої вимоги. Введемо до розгляду три сімейства незалежних двовимірних випадкових величин з наступними розподілами . Двовимірна випадкова величина $\chi_k^1(t)$ нехай приймає значення $(1,0)$ з ймовірністю $1-G_1(t)=\overline{G}_1(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G_1(t)$. Випадкова величина $\chi_k^2(t)$ приймає значення $(0,1)$ з ймовірністю $1-G_2(t)=\overline{G}_2(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G_2(t)$. В свою чергу випадкова величина $\chi_k^3(t)$ приймає значення $(1,1)$ з ймовірністю $\overline{G}_1(t)\overline{G}_2(t)$, значення $(1,0)$ з ймовірністю $\overline{G}_1(t)G_2(t)$, значення $(0,1)$ з ймовірністю $G_1(t)\overline{G}_2(t)$ та значення $(0,0)$ з ймовірністю $G_1(t)G_2(t)$.

Тоді з ймовірністю 1 для двовимірного процесу обслуговування має місце наступне представлення:

$$(X_1(t),X_2(t))=\sum_{k=1}^{m_1}\chi_k^1(t)+\sum_{k=1}^{m_2}\chi_k^2(t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{y_1(t)}\chi_k^1(t-t_k^1)+\sum_{k=1}^{y_2(t)}\chi_k^2(t-t_k^2)+\sum_{k=1}^{y_3(t)}\chi_k^3(t-t_k^3),$$

де $y_1(t),y_2(t),y_3(t)$ є незалежними пуассонівськими потоками з параметрами λ_1,λ_2,b відповідно і такими що, $\nu_1(t)=y_1(t)+y_3(t)$, $\nu_2(t)=y_2(t)+y_3(t)$, $t_k^i, i=1,2,3; k=1,2,...$ є моментами приходу вимог відповідно з потоку $y_i(t), i=1,2,3.$ У подальшому, не обмежуючи загальності, вважаємо $m_i=0, i=1,2$. Введемо до розгляду двовимірну генератрису величини

$(X_1(t), X_2(t))$: $\varphi(z_1, z_2, t) = Mz_1^{X_1(t)} z_2^{X_2(t)}$.

Використовуючи властивості умовного математичного сподівання, можемо записати: $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M\left\{M\left\{z_1^{X_1(t)} z_1^{X_2(t)} / t_1^i, \ldots, t_{y_i(t)}^i, i = 1,2,3\right\}\right\} =$$

$$= M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}\left(G_1\left(t-t_k^1\right)+z_1\overline{G}_1\left(t-t_k^1\right)\right)\times\right.$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_2(t)}\left(\left(G_2\left(t-t_k^2\right)\right)+z_2\overline{G}_2\left(t-t_k^2\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_3(t)}\left\{G_1\left(t-t_k^3\right)G_2\left(t-t_k^3\right)+z_1\overline{G}_1\left(t-t_k^3\right)\times\right.$$

$$\times G_2\left(t-t_k^3\right)+z_2\overline{G}_2\left(t-t_k^3\right)G_1\left(t-t_k^3\right)+$$

$$\left.\left.+z_1z_2\overline{G}_1\left(t-t_k^3\right)\overline{G}_2\left(t-t_k^3\right)\right\}\right\}.$$

Знову скористаємося умовним математичним сподіванням стосовно величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$. Тоді $\varphi(z_1, z_2, t) =$

$$= M\left\{M\left\{\prod_{k=1}^{y_1(t)}\left(G_1\left(t-t_k^1\right)+z_1\overline{G}\left(t-t_k^1\right)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_2(t)}\left(G_2\left(t-t_k^2\right)+z_2\overline{G}_2\left(t-t_k^2\right)\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{y_3(t)}\left\{G_1\left(t-t_k^3\right)G_2\left(t-t_k^3\right)+z_1\overline{G_1}\left(t-t_k^3\right)\times\right.$$

$$\times G_2\left(t-t_k^3\right)+z_2\overline{G}_2\left(t-t_k^3\right)G_1\left(t-t_k^3\right)+$$

$$\left.\left.\left.+z_1z_2\overline{G}_1\left(t-t_k^3\right)\overline{G}_2\left(t-t_k^3\right)/\, y_i(t), i=1,2,3\right\}\right\}\right\}.$$

Підрахуємо умовне математичне сподівання в останньому виразі. Тоді ми отримаємо:

$\varphi(z_1, z_2, t) = M\{A_1(z_1, t)\}^{y_1(t)} M\{A_2(z_2, t)\}^{y_2(t)} \times$
$\times M\{A_3(z_1, z_2, t)\}^{y_3(t)}$, де вирази $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$, $A_3(z_1, z_2, t)$ мають наступний вигляд:

$$A_1(z_1, t) = = \frac{1}{t}\int_0^t\left(G_1(t-u)+z_1\overline{G}_1(t-u)\right)du;$$

$$A_2(z_2, t) = = \frac{1}{t}\int_0^t\left(G_2(t-u)+z_2\overline{G}_2(t-u)\right)du;$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = \frac{1}{t}\int_0^t G_1(t-u)G_2(t-u)+$$

$$+\overline{G}_1(t-u)G_2(t-u)z_1+G_1(t-u)\overline{G}_2(t-u)z_2+$$

$$\left.+\overline{G}_1(t-u)\overline{G}_2(t-u)z_1z_2\right)du$$

В останніх виразах для $A_1(z_1, t)$, $A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ коефіцієнт $\frac{1}{t}$ є щільністю рівномірного на проміжку $[0,1]$ розподілу.

Остаточно, генератриси $A_1(z_1, t), A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ будуть мати наступний вигляд :

$$A_1(z_1, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1-\overline{G}_1(t-u)(1-z_1)\right)du;$$

$$A_2(z_1, t) = \frac{1}{t}\int_0^t\left(1-\overline{G}_2(t-u)(1-z_2)\right)du;$$

$$A_3(z_1, z_2, t) = 1-\frac{1}{t}\int_0^t\overline{G}_1(t-u)G_2(t-u)du(1-z_1)-$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^t\overline{G_2}(t-u)G_1(t-u)du(1-z_2)-$$

$$-\frac{1}{t}\int_0^t\overline{G}_1(t-u)\overline{G}_2(t-u)du(1-z_1z_2)$$

Підставивши генератриси $A_1(z_1, t), A_2(z_2, t)$ та $A_3(z_1, z_2, t)$ в генератриси величин $y_1(t), y_2(t)$ та $y_3(t)$, отримаємо явний вираз генератриси $\varphi(z_1, z_2, t)$:

$\phi(z_1, z_2, t) =$

$$= \exp\left\{-\left(\lambda_1\int_0^t\overline{G}_1(u)du+b\int_0^t\overline{G_1}G_2(u)du\right)\times\right.$$

$$\times(1-z_1)-\left(\lambda_2\int_0^t\overline{G}_2(u)du+b\int_0^t\overline{G}_2G_1(u)du\right)(1-z_2)-$$

$$\left.-b\int_0^t\overline{G}_1\overline{G}_2(u)du(1-z_1z_2)\right\}.$$

Перейшовши в останньому виразі до границі при $t \to \infty$, ми отримаємо:

$\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(z_1, z_2, t) = \varphi(z_1, z_2) =$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{\lambda_1}{a_1}+b\left(\frac{1}{a_1}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)\right)(1-z_1)-\right.$$

$$-\left(\frac{\lambda_2}{a_2}+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)\right)\left(1-z_2\right)-$$
$$-bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\left(1-z_1z_2\right)\Big\}.$$

Теорема доведена.

Висновки.

Будова граничного процесу обслуговування налічує п'ять незалежних пуассонівських компонент. Це означає, що в стаціонарному режимі одновимірний розподіл процесу обслуговування має наступну будову: $X_1 = x_1 + x_2 + x^*$, $X_2 = x_3 + x_4 + x^*$, де $x_i, i = 1,4$ та x^* незалежні випадкові величини, розподілені за законами Пуассона з параметрами:
$\frac{\lambda_1}{a_1}$ для x_1, $b\left(\frac{1}{a_1}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)$ для x_2, $\frac{\lambda_2}{a_2}$ для x_3, $b\left(\frac{1}{a_2}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)$ для x_4 та $bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)$ для x^*.

Таким чином, в структурі процесу обслуговування з'являється дві додаткові незалежні компоненти x_2 та x_4. З цього можна зробити висновок, що наша модель в процесі свого функціонування послаблює залежність між компонентами потоків вимог. Компоненти x_2 та x_4 описують в побудові процесу обслуговування ті вимоги, які прийшли в парі з потоку $y_3(t)$, але залишилися в нашій моделі на обслуговуванні по одній зі своєї пари. Оскільки інша вимога з пари вже отримала обслуговування і вийшла з системи, пара розпалася, а значить і залежність між компонентами X_1 та X_2 зменшилась на величину залежності, яку вносила до процесу обслуговування дана пара вимог.

Отже, можемо зробити наступні висновки:
1)математичне сподівання та дисперсія загального числа пар вимог, які «розпалися» в результаті обслуговування дорівнює
$b\left(\frac{1}{a_1}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)+b\left(\frac{1}{a_2}-M\min\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)$.
2) математичне сподівання та дисперсія повних пар вимог, які знаходяться на обслуговуванні в нашій моделі, дорівнює $bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)$.
3) коефіцієнт кореляції між компонентами процесу обслуговування вимог у нашій моделі:
$$r\left(X_1,X_2\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X_1,X_2\right)}{\sqrt{DX_1DX_2}}=\sqrt{a_1a_2}\frac{bM\min\left(\xi_1,\xi_2\right)}{\sqrt{\left(\lambda_1+b\right)\left(\lambda_2+b\right)}}.$$

2. Асимптотична нормальність стаціонарного розподілу процесу обслуговування .

В умовах зростання інтенсивностей вхідних потоків отримаємо теорему про слабку збіжність відповідно центрованого та нормованого вектора $\left(X_1,X_2\right)$ до двовимірного нормально розподіленого випадкового вектора $\left(\xi_1,\xi_2\right)$.

Теорема 2. Нехай параметри вхідного пуассонівського потоку залежать від номера серії n наступним чином:
$\lambda_1^{(n)}=\lambda_1 n, \lambda_2^{(n)}=\lambda_2 n, b^{(n)}=bn$, $n\ge 1$.
Тоді має місце слабка збіжність вектора
$$\left(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)}\right)=n^{-1/2}\left(X_1^{(n)}-\alpha_1 n, X_2^{(n)}-\alpha_2 n\right)\underset{n\to\infty}{\Rightarrow}\left(\xi_1,\xi_2\right)$$
Вектор $\left(\xi_1,\xi_2\right)$ має нормальний розподіл з нульовим вектором середніх значень і матрицею коваріацій
$$C=\begin{Vmatrix}\alpha_1 & a_3\\ a_3 & \alpha_2\end{Vmatrix}, \alpha_1=\left(\lambda_1+b\right)/a_1, \alpha_2=\left(\lambda_2+b\right)/a_2$$
.

Список використаних джерел

1. Grifiths R.S. A class of bivariate Poisson process,/ Grifiths R.S.,Milne R.K. // *Journal Multivar. Anul*.– 1978 -Issue 8, - 3 - P.380-396
2. Lebedev E.A. Multi-channel queueing networks with interdependent input flows in heavy traffic,/E.A.Lebedev, A.A. Chechelnitsky ,A.V. Livinska // *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, -2018- Vol. 97 - P.113-125

References

1. GRIFITHS, R.S., MINE R.K (1978). "A class of bivariate Poisson process", *Journal Multivar. Anul.* Issue 8, - 3 – pp.380-396
2. LEBEDEV, E.O., CHECHELNITSKY, A.A., LIVINSKA, A.V.,(2018)"Multi-channel queueing networks with interdependent input flows in heavy traffic". *Theory of Probability and Mathematical Statistics*, vol. 97, pp. 113-125

Надійшла до редакції 05.12.2020