Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

Випускна кваліфікаційна робота магістра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

«Багатопараметричні деформації канонічних антикомутаційних співвідношень»

Виконавець:

Студентка 2 курсу магістратури

кафедри дослідження операцій

Зюбіна Анна Володимирівна

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, доцент

Проскурін Данило Павлович

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри дослідження операцій від «__» ________ 2021 року, протокол № ___ .

Завідувач кафедри проф. Іксанов О.М. ___________
(підпис)

Київ 2021

Зміст

Вступ

Теорія зображень *-алгебр є важливим розділом сучасного аналізу. Це обумовлено зв'язком цієї дисципліни з математичної фізикою, теорією ймовірностей, теорією квантової інформації, тощо.

Дипломна робота присвячена опису незвідних зображень деформації віківського аналізу канонічних антикомутаційних співвідношень квантової механіки.

Мета роботи: описати незвідні *-зображення деформації віківського аналізу канонічних антикомутаційних співвідношень квантової механіки з точністю до унітарної еквівалентності.

Означення. Гільбертів простір є нескінченновимірним простором зі скалярним добутком, який є повним відносно метрики

$$p(x,y)=||x-y||,\ де\ ||x||=\sqrt{(x,x)}.$$

Означення. Зображення алгебри C на скінченновимірному унітарному Гільбертовому просторі H є гомоморфізмом π алгебри C в алгебру $L(H)$ лінійних перетворень на H.

Означення. $*$ -Зображення $*$ -алгебри C є $*$ - гомоморфізм π з алгебри в $*$ -алгебру

$L(H)$ обмежених операторів на сепарабельному гільбертовому просторі H.

Якщо $F(\cdot) = P_n(\cdot)$ є многочленом, то пара операторів X, X^*, що задовольняє співвідношенню, є зображенням $*$ -алгебри C породженої елементами x, x^*, що задовольняють співвідношенню $xx^* = P_n(x^*x)$.

Означення. Зображення C, π на H та π_1 на H_1 є еквівалентними, якщо існує обертовний оператор $C_1\colon H \to H_1$, який переплітає зображення π та π_1, тобто,

$$C_1\pi(x) = \pi_1(x)\, C_1,\ \forall x \in C.$$

Означення. $*$ -Зображення алгебри C, π на H та π_1 на H_1, називаються унітарно еквівалентними, якщо існує унітарний оператор $U\colon H \to H_1$ такий, що

$$U\pi(x) = \pi_1(x)\, U,\ \forall x \in C.$$

До кожної $*$ -алгебри C можна віднести категорію $*$ -$RepC$, об'єктами якої є $*$-зображення C, що розглядаються з точністю до унітарної еквівалентності, а її морфізми є операторами, що переплітають зображення.

Лема.

Будь-які два скінченновимірні $*$-зображення $*$-алгебри C є еквівалентними тоді і лише тоді, коли вони унітарно еквівалентні.

Доведення.

Доведемо, що еквівалентність $*$-зображень π на H та π_1 на H_1 веде також до унітарної еквівалентності.

Нехай $A\colon H \to H_1$ - обертовний оператор, $A\pi (x) = \pi_1 (x) A,\ \forall x \in C.$

Розглянемо полярний розклад A, $A = UC$, де $C = (AA^*)^{1/2}$ – обертовний оператор на H, а U - унітарний оператор з H до H_1 $(U^{-1} = U^*)$.

Тоді

$$\pi (x) = C^{-1}U^{-1}\pi_1 (x)\, UC,\ \forall x \in C.$$

$$\pi_1 (x) = UC^{-1}\pi (x)\, CU^{-1},\ \forall x \in C.$$

$$C^2\pi (x) = CU^{-1}\pi_1 (x)\, UC = CU^{-1}UC^{-1}\pi (x)\, CU^{-1}UC = \pi (x)\, C^2.$$

Оскільки C є додатним оператором, $C^2\pi (x) = \pi (x)\, C^2$, $x \in C$, і $C\pi (x) = \pi (x)\, C$ для будь-якого $x \in C$.

Тому:

$$U\pi (x)\, C = UC\pi (x) = \pi_1 (x)\, UC,$$

оскільки C є обертовним, $U\pi (x) = \pi_1 (x)\, U,\ \forall x \in C.$

Отже, маємо унітарну еквівалентність зображень π на H та π_1 на H_1.

■

Означення. Зображення $\pi\colon C \to L(H)$ є незвідним, якщо не існує нетривіального підпростору інваріантного відносно всіх операторів $\pi (x)$, $x \in C$.

Означення. Зображення $\pi: C \to L(H)$ є нерозкладним, якщо не існує розкладу

$H = H_1 \oplus H_2$ на суму двох нетривіальних підпросторів, які є інваріантними відносно всіх операторів $\pi(x)$ $x \in C$, і $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Будь-яке незвідне зображення є нерозкладним.

Лема.

$*$ -зображення π не розкладається тоді і лише тоді, коли воно є незвідним.

Доведення.

Доведемо, що будь-яка нерозкладне $*$ -зображення є незвідним. Розглянемо від супротивного: нехай нерозкладне зображення є звідним, тоді існує підпростір H_1 в H, інваріантний відносно всіх $\pi(x)$, $x \in C$.

■

Підпростір $\mathrm{H}_1^{\perp} = \{y \in H: (y, k) = 0, \ \forall k \in H_1\}$ нетривіальний та інваріантний щодо всіх

$\pi(x)$, $x \in C$.

Доказ. Якщо $y \in \mathrm{H}_1^{\perp}$, то $(\pi(x)\, y, k) = (y, \pi(x^*)\, k) = 0$ для всіх $k \in H_1$, тобто $\pi(x)\, y \in \mathrm{H}_1^{\perp}$.

■

Розглянемо лему Шура, яка доведе еквівалентну умови незвідності.

Лема.

$*$ -Зображення $\pi(\cdot)$ незвідне тоді і лише тоді, коли будь-який обмежений оператор $A \in L(H)$ такий, що

$$A\pi(x) = \pi(x)\, A, \ \forall x \in C, \ A = a\mathbf{1}, \ a \in \mathbb{C}.$$

Доведення. Якщо $C = C^*$ замість $\pi(\cdot)$: $C\pi(x) = \pi(x)\, C, \ \forall x \in C$, тоді

$E_C(\Delta)\, \pi(x) = \pi(x)\, E_C(\Delta)$ для всіх множин $x \in C$ та $\Delta \subset R^1$, де $E_C(\Delta)$ – розклад одиниці, пов'язаний з оператором C. У цьому випадку $H_\Delta = E_C(\Delta)\, H$ - інваріантний підпростір у H.

Якщо зображення π незвідне , тоді всі H_Δ є або $\{0\}$, або H, тобто спектральна міра $E_C(\cdot)$ зосереджена в одній точці $c \in R_1$, тобто $C = c\mathbf{1}$.

Якщо $A = C + iB$ $(C = C^*, B = B^* \in L(H))$ переплітає оператори незвідної$*$ -алгебри C, тоді оператори C, B комутують з $\pi(\cdot)$, отже

$$A = c\mathbf{1} + ib\mathbf{1} = (c + ib)\,\mathbf{1};\ c, b \in R.$$

І навпаки, якщо зображення $\pi(\cdot)$ звідне, H_1 є підпростором інваріантим щодо

$\pi(x), x \in C$, тоді за $H_\perp^1$ також інваріантний. Тоді оператор A розкладається в ортогональну суму:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 I_{H1} & 0 \\ 0 & A_2 I_{H_\perp^1} \end{pmatrix},\ a_1 \neq a_2,\ a_1, a_2 \in A.$$

■

Сімейство самоспряжених операторів $C_n = \int_R \lambda_n dE_n(\lambda_n)$, $n = 1, . . . , m$, незвідне, якщо в Н-інваріанті нетривіального підпростору всіх операторів $E_n(\Delta)$, $n = 1, ..., m$; $\Delta \in A(R_1)$.

Якщо оператори сімейства обмежені, тоді в H не існує нетривіального підпростору, інваріантного щодо всіх операторів сімейства $(C_n)_{n=1}^m$.

Для одного обмеженого самоспряженого оператора $C = C^*$ його незвідність означає, що $\dim H = 1$, і цей оператор є множенням на константу, $C = \lambda, \lambda \in R$.

Пари комутуючих обмежених самоспряжених операторів $A = A^*$, $B = B^*$, $AB = BA$, мають лише одновимірні незвідні зображення, $\dim H = 1$, $A = \lambda_1$, $B = \lambda_2$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in R_2$.

Означення. Нехай C це $*$ -алгебра. Пару $(C_1; \varphi: C \to C_1)$, де C_1 - $*$ -алгебра, а

φ - $*$ -гомоморфізм, називають обгортуючою $*$ -алгеброю алгебри C, якщо для

будь-якого $*$ -зображення $\pi: C \to L(H)$ алгебри C $*$-зображення $\pi_1: C_1 \to L(H)$ таке, що

$$\pi(x)=(\pi\bullet\varphi)(x),\ \forall x\in\mathbb{C}.$$

Означення. π_1 є неперервним $*$ -гомоморфізмом від C^* -алгебри C_1 до C^*-алгебри

$L\ (H)$. У цьому випадку пару (C_1, φ) називають обгортуючою C^* -алгеброю алгебри С.

Означення. $*$ -алгебру С називають $*$ -обмеженою, якщо для будь-якого $x\in C$ існує число $C_x<\infty$ таке, що $\|\pi\ (x)\ \|\leq C_x$ для будь-якого з його $*$ -зображень $\pi_1\colon C_1\rightarrow L\ (H)$.

Якщо $*$ -алгебра $C = C\ \langle x_1,\ldots, x_n\rangle / K$ не є $*$ -обмеженою, тоді вона не має обгортуючої C^* *-алгебри*, $C^*\ (x_1,\ldots, x_n; K)$.

До будь-якому $*$ -зображенню скінченно породженої $*$ -алгебри

$$C = C\ \langle x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots, x_n^* \mid K_j\ (x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots, x_n^*) = 0, j = 1, \ldots, n\rangle$$

обмеженим операторам відповідає сімейство обмежених операторів

$$\{Xi\ =\ \pi\ (x_i), \mathrm{X}_\mathrm{i}^*\ =\ \pi\ (x_i)^*\ =\ \pi\ (x_i^*)\}_{i=1}^{m} \text{ таких, що}$$

$$K_j\ (X_1, \ldots, X_n, \mathrm{X}_1^*, \ldots, \mathrm{X}_n^*) = 0, j = 1, \ldots, m.$$

Оператор X, що задовольняє разом з X^* алгебраїчне відношення виду

$XX^* = F\ (X^*X)$, де $F\ (\cdot)\colon R\rightarrow R$ - відображення, яке можна виміряти σ-алгеброю Бореля.

Нехай X обмежений. Для полярного розкладу оператора X маємо $X = UA$, *де* $A = A^* = (X^*X)^{1/2}$, U - часткова ізометрія, а $kerU = kerA = kerX$, U^*U є ортогональна проекція на $(kerA)^{\perp}$:

$$UA^2U^* = F(A^2),\ UA^2 = F(A^2)U,\ A^2U^*= U^*F\ (A^2).$$

Оператор U - це центрована часткова ізометрія. В незвідному поданні з неунітарним U пара U, U^* незвідна. В унітарному випадку виникають два класи зображень: в яких U діє як зсув в l_2 (у цьому випадку спектр C_2 лежить на одній орбіті), і що відповідають нетривіальним ергодичним мірам.

Розділ 1. Алгебра Віка. Деформації канонічних антикомутаційних співвідношень з двома твірними.

В цьому розділі ми будемо розглядати алгебру Віка [2] канонічних антикомутаційних співвідношень, та деформації канонічних антикомутаційних співвідношень з двома твірними.

Алгебра канонічних антикомутаційних співвідношень породжується елементами $a_i, a_i^*, i = 1, \dots, k$ що задовольняють співвідношенням:

$$a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1, a_i^2 = 0,$$
$$a_i^* a_j = -a_j a_i^*, a_j a_i = -a_i a_j, i < j.$$

Віківська деформація канонічних антикомутаційних співвідношень розглядалася як розширення алгебри канонічних антикомутаційних співвідношень. А саме за визначенням ця * -алгебра, породжена лише співвідношеннями

$$a_i^* a_i + a_i a_i^* = 1, a_i^* a_j = -a_j a_i^* \qquad i \leq j.$$

Зауважимо, що кожне зображення канонічних антикомутаційних співвідношень є обмеженим. Було показано, що для будь-якого незвідного зображення інсує пара *(i, j)*, $i<j$, а також існує $\sigma_{ij} \in \mathbb{C}$: $a_j a_i + a_i a_j = \sigma_{ij} \mathbf{1}$.

Окрім того в [1] доведено, що для будь-якої симетричної матриці $K=(\sigma_{ij})$, $||K||\leq 1$, існує два не еквівалетних *x* зображень канонічних антикомутаційних співвідношень, що задовольняють співвідношення $a_j a_i + a_i a_j = \sigma_{ij} \mathbf{1}$.

Деформації канонічних антикомутаційних співвідношень з двома твірними мають такий вигляд:

$$a_i^* a_i = 1 - a_i a_i^*, \ i=1,2 \tag{1}$$
$$a_1^* a_2 = -\lambda a_2 a_1^*, \ \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda|=1,$$

де відповідна *-алгебра буде позначена як W_λ.

W_λ можна розглядати як аналог Віка граничної версії узагальнених співвідношень В. Марсінека [9]. Останні співвідношення роглядалися як інтерполяція між канонічною комутацією та антикомутаційними співвідношеннями. Квонічні співвідношення мають такий вигляд:

$$a_i^* a_i - q_i a_i a_i^* = 1, i = 1 \dots d,$$
$$a_i^* a_j = \lambda_{ij} a_j a_i^*, a_j a_i = \lambda_{ij} a_i a_j, i < j,$$

де $-1 < q_i < 1$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$, $|\lambda_{ij}| = 1$.

Оскільки зображення W_λ обмежені, існує обгортуюча С*-алгебра, $\varepsilon_2(\lambda)$, породжена W_λ. Використовуючи означення незвідних зображень опишемо С*-алгебру, $\varepsilon_2(\lambda, y)$, як

$$\varepsilon_2(\lambda, y) = \varepsilon_2(\lambda) / < (\mathrm{A} - y)(\mathrm{A} - \lambda y) \dots (\mathrm{A} - \lambda^{n-1} y) >$$

Нехай А -*алгебра з принаймні одним нетривіальним представленням. Тоді пара (A_1, p) з С * -алгебри А та гомоморфізм p:А→ A_1 називається обволаківаючою парою для А, якщо кожне незвідне зображення π: А→ $B(H)$ тоді існує унікальне незвідне зображення π_1 алгебри A_1, що задовольняє $\pi_1 \bullet p = \pi$. С * -алгебра А називається обгортуючою для А. Обгортуюча С * - алгебра для a, *-алгебри А є унікальною і існує тільки якщо набір обмежених зображень алгебри А не є порожнім і А є *-обмеженою, тобто для будь-якого a∈А може знайти $C_a > 0$ такий, що для будь-якого обмеженого зображення π, $\| \pi(a) \| \leq C_a$.

Теорема 1.

Нехай Y- Хаусдорфів компактний топологічний простір, а $C \subseteq B$ – підалгебри з $\mathrm{A} = \mathrm{C}(Y, M_n(\mathbb{C}))$. Для кожної пари $x_1, x_2 \in Y$ визначається В $(x_1, x_2)($ та відповідно $\mathrm{C}(x_1, x_2)$. Тоді

$$\mathrm{B}\,(x_1, x_2) := \{(f(x_1), f(x_2)) \in M_n(\mathbb{C})\ x\ M_n(\mathbb{C}) | f \in B\},$$

звідси

$$B = C \leftrightarrow \mathrm{B}\,(y_1, y_2) = C(y_1, y_2), \forall\, y_1, y_2 \in Y.$$

Для зображень π_1, π_2 з *-алгебри А на Гільбертовому просторі $\mathrm{H}(\pi_1)$ та $\mathrm{H}(\pi_2)$ (відповідно) , нехай $\mathrm{C}(\pi_1, \pi_2)$ буде простором сплітаючих операторів

$$\mathrm{C}(\pi_1, \pi_2) = \{\mathrm{c} \in \mathrm{B}(\mathrm{H}(\pi_2), \mathrm{H}(\pi_1)) | \pi_1(\mathrm{a})\mathrm{c} = \mathrm{c}\,\pi_2(\mathrm{a}), \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$$

*-Алгебру А⊂ В(Н) будемо позначати як комутативну A_1

$$A_1 = \{c \in B(H) | ca = ac, a \in A\}.$$

Далі ми будемо через $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ *з* $\mathbb{C}^{nm}$ виражати $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ *та* B $M_m(\mathbb{C})$ матриці $A \otimes \mathrm{B}$,яка еквівалентна до $(a_{ij}, \mathrm{B}) \in M_{nm}(\mathbb{C})$.

Розділ 2. Зображення алгебри ε2(λ, y).

У цьому розділі ми будемо розглядати зображення (1) через a_i-зображення генераторів ε2(λ). Оскільки a_i, $i=1,2,$ визначається як відповідне унітарне зображення ε2(λ), ми будемо розглядати його як сімейство $\{a_i, a_i^*\}_{i=1}^2$.

Лема 1.

Якщо $\lambda^n = 1, n = 2k+1,$ тоді в незвідному зображенні (1)

$$a_1^{2n} = r_1 e^{i\varphi 1}\mathbf{1}, 0 \leq r_1, \varphi_1 \in [0, 2\pi).$$

Доведення.

$a_2^* a_1^2 = \lambda^{-2} a_1^2 a_2^*$ та за теоремою Фуглида-Путнама [3], $a_1^2 a_2 = \lambda^{-2} a_2 a_1^2$.

Якщо n=2k+1 $\Rightarrow a_1^{2n} a_i = a_i a_1^{2n}, a_1^{2n} a_1^* = a_1^* a_1^{2n}, i = 1,2.$

За лемою Шура: $a_1^{2n} = r_1 e^{i\varphi 1}\mathbf{1}.$

■

Лема 2.

У довільному незвідному зображенні (1) $ker a_1 = ker a_1^* = \{0\}$ або $a_1^2 = 0$.

Доведення.

$ker a_1^2 = ker\ (a_1^*)^2$ є інваріантним підпростором, тому в довільному незвідному зображенні $a_1^2 = (a_1^*)^2 = 0$ або $ker a_1^2 = ker\ (a_1^*)^2 = \{0\}$. Оскільки $ker a_1^2 \neq \{0\}$ та $ker a_1 \neq \{0\}$, твердження леми є правдивим.

■

Лема 3. Нехай у незвідному зображенні *ε2(λ,y)* ми маємо $a_1^2 \neq 0$.

$a_1 = U_1 C_1$ буде полярним розкладом, тоді $U_1^{2n} = e^{i\varphi 1}\mathbf{1}, C_1^2(\mathbf{1} - C_1^2) = r_1^{\frac{2}{n}}\mathbf{1}.$

Доведення.

Відношення $a_1^* a_1 + a_1\, a_1^* = 1$ еквівалентне $C_1 U_1 = U_1(1 - C_1^2)$ та $C_1 U_1 = U_1\sqrt{1 - C_1^2}$,

$$U_1 C_1 = \sqrt{1 - C_1^2}\, U_1.$$

$$a_1^{2n} = U_1^{2n} C_1^n \left(\sqrt{1 - C_1^2}^{\,2}\right) = r_1\, e^{i\varphi 1}\mathbf{1}.$$

За лемою 2, $ker a_1 = ker a_1^* = \{0\}, U_1$ є унітарним і $0 < C_1 \leq 1$.

$C_1^n(\sqrt{1 - C_1^2}^{\,n}) \geq 0$ маємо полярний розклад $U_1^{2n} = e^{i\varphi 1}\mathbf{1}$ *та* $C_1^n(\sqrt{1 - C_1^2}^{\,n}) = r_1\mathbf{1}$

■

Розділ 3: Зображення з умовою $a_1^2 \neq 0$.

У цьому розділі ми дамо класифікацію для незвідних зображень ε2(λ) з $a_1^2 \neq 0$.

Розглянемо нормальний оператор $A = a_2 a_1 + \lambda a_2 a_1$, та випадок коли $A \neq 0$.

Лема 4.

Нехай $\{a_i, a_i^*\}_{i=1}^2$ є незвідним зображенням ε2(λ) таким, що $a_1^2 \neq 0$ та $A \neq 0$.

Тоді δ(A)={y, λy, … , $\lambda^{n-1} y$} і всі власні значення мають однакову кратність.

Доведення.

A є нормальним оператором та $a_1^* A = \lambda A a_1^*$ за теоремою Фуглида-Путнама [3], тоді

$$Aa_1 = \lambda a_1 \text{ та } AU_1 = \lambda U_1 A.$$

Звідси,

$$q \in \delta(A),\ \lambda q \in \delta(A).$$

Окрім того, через те що

$$a_2^* A = \lambda' A a_2^*, Aa_2 = \lambda' a_2 A \text{ та } \{a_i, a_i^*\}_{i=1}^2$$

є незвідним, δ(A) не точно попадає на орбіту t→ λt [4]. Кратності власних значень маємо з унітарності U_1.

■

Позначимо через H простір для незвідних зображень ε2(λ) (Лема 4). За попередньою лемою ми можемо розкласти H як

$$H = \oplus_{i=1}^{n} H_l$$

та позначити A у такій формі:

$$A = \begin{pmatrix} y\mathbf{1}_{H_1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \lambda y \mathbf{1}_{H_1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \lambda^{n-1} y \mathbf{1}_{H_1} \end{pmatrix}.$$

Далі з $AU_l = \lambda U_l A$, $AC_l = C_l A$ та $C_1^2 U_l = U_l(1 - C_1^2)$ ми отримаємо

$$U_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V_1 \\ \mathbf{1}_{H_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{H_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{1}_{H_1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_1^2 = \begin{pmatrix} T_1^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 - T_1^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 - T_1^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & T_1^2 \end{pmatrix}$$

та $T_1^2 V_1 = V_1(1\text{-}T_1^2)$.

Далі, U_1^{2n}=$e^{i\varphi_1}\mathbf{1}_{H_1}$ та $C_1^2(1\text{-}C_1^2)$=$p_1^{\frac{2}{n}}\mathbf{1}_{H_1}$ будемо мати на увазі:

$$T_1^2(1\text{-}T_1^2)= p_1^{\frac{2}{n}}\mathbf{1}_{H_1}, \qquad V_1^2=e^{i\varphi_1}\mathbf{1}_{H_1}.$$

Тоді вибираючи ортонормований базис H_1 можна припустити, що $H_1=H_2\oplus H_2$ та

$$T_1^2=\begin{pmatrix} \mathbf{x_1}\mathbf{1}_{H_1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{1}-\mathbf{x_1})\mathbf{1}_{H_1}\end{pmatrix}, \qquad V_1=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{H_1} \\ e^{i\varphi_1}\mathbf{1}_{H_1} & 0\end{pmatrix},$$

де $0<x_1<\frac{1}{2}$ є коренем рівняння $t(1\text{-}t)= p_1^{\frac{2}{n}}$. Зауважимо, що $x_1 \neq \frac{1}{2}$ та $a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}U_1$, U_1 унітарне та $a_2a_1+\lambda a_1a_2=0$. З точністю до унітарної еквівалентності, ми маємо

$$H=\oplus_{i=1}^{n} H_1,$$

$H_1=H_2\oplus H_2$ та

$$U_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & V_1 \\ W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & W_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_1^2=\begin{pmatrix} t_1^2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & t_1^2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & t_1^2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & t_1^2 \end{pmatrix}$$

де

$$t_1^2=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \\ 0 & (\mathbf{1}-\boldsymbol{x_1})\mathbf{1}_{H_2}\end{pmatrix}, \qquad W_1=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{H_2} \\ \mathbf{1}_{H_2} & 0\end{pmatrix}.$$

З точністю до унітарної еквівалентності

$$a_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 \\ R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_1 & 0 \end{pmatrix},$$

та

$$R_1=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(\mathbf{1}-\boldsymbol{x_1})}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_1=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(\mathbf{1}-\boldsymbol{x_1})}\mathbf{1}_{H_2} \\ e^{i\varphi_1}\sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі, з $a_2^* A=\lambda' A a_2^*, A a_2=\lambda' a_2 A$ ми отримаємо

$$a_2=\begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{n-1} \\ B_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі $a_1^* a_2$=-$\lambda a_2 a_1^*$ представимо як

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix} B_i=-\lambda B_{i-1}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}, \ i=2,\dots,n-1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix} B_n=-\lambda B_{n-1}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1}\sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}$$

та

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix} B_1=-\lambda B_n\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1}\sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $R_1^2=\sqrt{x_1(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_1}$, маємо

$B_{2i}=-\lambda^{2i-1}(R_1^*)^{-1}B_1R_1^*$, $B_{2i-1}=\lambda^{2i-2}B_1$, $i=1,\dots,k$, $(n=2k+1)$,

$$B_n=\lambda^{2n-1}B_1\begin{pmatrix} \mathbf{1}_{H_2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi_1}\mathbf{1}_{H_2} \end{pmatrix}$$

та B_1 задовольняє наступне співвідношення

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi_1}\sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix} B_1 = - B_1 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ e^{-i\varphi_1}\sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}$$

Далі B_1 набуває наступної форми

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2\sqrt{x_1} \\ b_2\sqrt{(1-x_1)} & -e^{-i\varphi_1}b_1 \end{pmatrix}$$

та для $i=1,\dots,k$ має

$$B_{2i} = \lambda^{2i-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1}b_1 & -b_2\sqrt{x_1} \\ b_2\sqrt{(1-x_1)} & -b_1 \end{pmatrix},\ B_n = \lambda^{n-1}\begin{pmatrix} b_1 & -e^{-i\varphi_1}b_2\sqrt{x_1} \\ b_2\sqrt{(1-x_1)} & -b_1 \end{pmatrix}.$$

Далі співвідношення $a_2a_1 + \lambda\, a_1\, a_2 = A$ означає, що $b_2(1-2x_1) = y\mathbf{1}_{H_2}$,

$$b_2 = \frac{y}{1-2\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2}.$$

Тепер співвідношення $a_2^* a_2 + a_2\, a_2^* = 1$ еквівалентне до

$$b_1^* b_1 + b_1 b_1^* = 1 - \frac{|y|^2}{(1-2\boldsymbol{x_1})^2}. \qquad (3)$$

Зображення (5) існує якщо $\frac{|y|}{1-2\boldsymbol{x_1}} \leq 1$, тобто коли

$$0 < x_1 \leq \frac{1-|y|}{2}.$$

Звідси $0<x<1/2$ ми маємо також $0<|y|<1$.

Нехай

$$\frac{|y|}{1-2\boldsymbol{x_1}} := re^{i\varphi},\ b_1 = \sqrt{1-r_2}\,\hat{b}_1.$$

Далі якщо $0<r<1$ маємо

$$\hat{b}_1^*\hat{b}_1 + \hat{b}_1\hat{b}_1^* = 1,$$

що підтверджує наступне: сім'я $\{a_1, a_2, a_1^*, a_2^*\}$ незвідна якщо сім'я $\{\hat{b}_1^*\hat{b}_1\}$ незвідна, та сім'ї $\{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_1^{*(i)}, a_2^{*(i)}\}$, $i=1,2$ є унітарно еквівалетні якщо відповідні сімейства $\{\hat{b}_1^{*(i)}\hat{b}_1^{(i)}\}$, $i=1,2$ еквіваленті, і якщо $r=1$, тоді $b_1=0$.

Використовуючи опис класів унітарної еквівалентноті незвідних зображень , наприклад [10], ми отримаємо список незвідних зображень (3), *0<r<1.*

Двовимірне зображення

$$b_1=\sqrt{1-r_2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_2} \\ e^{i\varphi_2}\sqrt{x_2} & 0 \end{pmatrix},\ x_2 \in \left[0,\tfrac{1}{2}\right). \quad (6)$$

Одновимірне зображення

$$b_1=\sqrt{\frac{1-r_2}{\mathbf{2}}}\,e^{i\varphi_2}. \qquad (7)$$

Твердження 1.

Нехай $\{a_i, a_i^*\}_{i=1}^2$ буде незвідним зображення $\varepsilon_2(\lambda)$, таким як $a_1^2 \neq 0$ та

$A = a_2 a_1 + \lambda a_2 a_1 \neq 0$. Тоді зображення простору H можна рокзласти $H=\bigoplus_{i=1}^n H_1$, $H_1=H_2\oplus H_2$ та, відповідно до унітарної еквівалентнсті, $A=\mathrm{diag}\,(y\mathbf{1}_{H_2}, \lambda y\mathbf{1}_{H_2}, \dots, \lambda^{n-1}y\mathbf{1}_{H_2})$, для фіксованого *y,* $|y|<1$ та

$$a_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & S_1 \\ R_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & R_1 & 0 \end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & B_{n-1} \\ B_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

де

$$R_1=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(\mathbf{1}-\boldsymbol{x_1})}\mathbf{1}_{H_2} \\ \sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_1=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{(\mathbf{1}-\boldsymbol{x_1})}\mathbf{1}_{H_2} \\ e^{i\varphi_1}\sqrt{\boldsymbol{x_1}}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$B_1=\begin{pmatrix} b_1 & -re^{i\varphi}\sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ re^{i\varphi}\sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & -e^{-i\varphi_1}b_1 \end{pmatrix},\ x_1 \in \left(0, \tfrac{1-|y|}{2}\right]$$

та для *i=1,…,k,* є $B_{2i-1}=\lambda^{2i-2}B_1$.

$$B_{2i}=\lambda^{2i-1}\begin{pmatrix} e^{i\varphi_1}b_1 & -re^{i\varphi}\sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ re^{i\varphi}\sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & -b_1 \end{pmatrix},$$

$$B_n = \lambda^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & -re^{i\varphi}e^{-i\varphi_1}b_2\sqrt{x_1}\mathbf{1}_{H_2} \\ re^{i\varphi}\sqrt{(1-x_1)}\mathbf{1}_{H_2} & -b_1 \end{pmatrix}$$

Тут, якщо, $0<x_1<1-|y|/2$, тоді $H_2=\mathbb{C}^2$ і b_1 визначається як (6) або $H=\mathbb{C}$ і b_1 визначається як (7). Коли $x_1=1-|y|/2$ ми маємо $H_2=\mathbb{C}$ і $b_1=0$.

■

Далі нам буде зручніше представити генератори $\varepsilon_2(\lambda)$ у формі відмінній від (8). Спершу ми введемо позначення. Нехай

$$E_1(\varphi_1)=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & e^{\frac{i\varphi_1}{2}} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_1(\varphi_1, \lambda) = \begin{pmatrix} \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-2}e^{-\frac{i\varphi_1}{2}} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Нехай $T(\varphi_1):H\to H$ буде визначатися як

$$T(\varphi_1) = \begin{pmatrix} V_1(\varphi_1) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & V_2(\varphi_1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & V_2(\varphi_1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & V_1(\varphi_1) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$V_1(\varphi_1), V_2(\varphi_1): H_1\to H_1$, $V_1(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{H_2} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi_1}{2}}\mathbf{1}_{H_2} \end{pmatrix}$, $V_2(\varphi_1) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi_1}{2}}\mathbf{1}_{H_2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_{H_2} \end{pmatrix}$.

Твердження 2.

1) Нехай a_1,a_2 будуть визначені як (8) , $0<x_1<(1-|y|)/2$ і нехай b_1 буде визначене як (8), $0\le x_2<1/2$. Тоді $H=\mathbb{C}^n\otimes\mathbb{C}^2\otimes\mathbb{C}^2$ і

$T^*(\varphi_1)a_1(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\, T(\varphi_1) := \pi_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_1) = E_1(\varphi_1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_1} \otimes \mathbf{1}_2 \\ \sqrt{x_1} & 0 \end{pmatrix},$

$T^*(\varphi_1)a_2(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\, T(\varphi_1) := \pi_{x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2}(a_2) =$ (11)

$$re^{i\varphi}\, E_2(\varphi_1, \lambda) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{x_1} \\ \sqrt{1-x_1} & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2 +$$

$$+\, e^{\frac{i\varphi_1}{2}} \sqrt{1-r^2}\, E_2(\varphi_1, \lambda) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_2} \\ e^{i\varphi_2}\sqrt{x_2} & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2 \,.$$

2) Якщо a_1, a_2 визначені (10) з $0 < x_1 < (1-|y|)/2$ та b_1 визначається (9), тоді $H = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$ і

$$T^*(\varphi_1)a_1(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\, T(\varphi_1) := p_{x_1,\varphi_1,\varphi_2}(a_1) = E_1(\varphi_1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_1} \\ \sqrt{x_1} & 0 \end{pmatrix}$$

$T^*(\varphi_1)a_2(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\, T(\varphi_1) := p_{x_1,\varphi_1,\varphi_2}(a_2) =$ (12)

$$= re^{i\varphi}\, E_2(\varphi_1, \lambda) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{x_1} \\ \sqrt{1-x_1} & 0 \end{pmatrix} + e^{\frac{i\varphi_1}{2}} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{2}}\, E_2(\varphi_1, \lambda) \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

3) Якщо a_1, a_2 визначені (10) з $x_1 = (1-|y|)/2$ та $b_1 = 0$ тоді $H = \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^2$ і

$$T^*(\varphi_1)a_1((1-|y|/2), \varphi_1)\, T(\varphi_1) := \sigma_{\varphi_1}(a_1) = E_1(\varphi_1) \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1+|y|/2} \\ \sqrt{1-|y|/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$T^*(\varphi_1)a_2((1-|y|/2), \varphi_1)\,)\, T(\varphi_1) := \sigma_{\varphi_1}(a_2) =$ (13)

$$= e^{i\varphi}\, E_2(\varphi_1, \lambda) \otimes \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{1-|y|/2} \\ \sqrt{1+|y|/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Розділ 4. Зображення з умовою $a_1^2 = 0$

У цьому розділі ми розглянемо усі незвідні зображення ε2(λ) на H з $a_1^2 \neq 0$

1) Нехай $a_2^2 \neq 0$. *Тоді* $\delta(a_2 a_1 + \lambda a_1 a_2) = \{y, \lambda y, \dots, \lambda^{n-1} y\}$, $y = re^{i\varphi}$, $0<r<\mathbf{1}$,

   $H = A^n \oplus A^2 \oplus H_2$.

Лема 5.

Якщо незвідне зображення ε2(λ), $a_1^2 = 0, a_2^2 \neq 0$ та

$\delta(a_2 a_1 + \lambda a_1 a_2) = \{y, \lambda y, \dots, \lambda^{n-1} y\}$, $0<|y|<1$, тоді $((a_2^*)^2 a_2^2)^{\frac{1}{2}} = r_2, 0 < r_2 \leq \frac{(1-|y|^2)}{2}$.

Доведення.

Нехай ми маємо

$$T^*(\varphi_1)\, a_2\left(\frac{(1-|y|)}{2}, \varphi_1\right) T(\varphi_1) := \delta_{\varphi 1}(a_2) = e^{i\varphi} E_2(\varphi_1, \lambda) \oplus \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{(1-|y|)}{2}} \\ \sqrt{\frac{(1+|y|)}{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Якщо переробити формулу (2) то можна переконатися що у незвідному зображенні $l_1 = \left(\frac{(1-|y|)}{2}\right), a_1^2 \neq 0$.

Тому розглянемо:

$$a_2 = E_1(\varphi_2) \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_2} \\ \sqrt{x_2} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{I_2},\ 0 < x_2 < \frac{(1-|y|)}{2}, \quad (3)$$

$$a_1 = qe^{i\varphi} E_2(\varphi_2, \lambda') \oplus \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{x_2} \\ \sqrt{1-x_2} & 0 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{I_2} +$$

$$e^{\frac{i\varphi 2}{2}} \sqrt{1-q^2}\, E_2(\varphi_2, \lambda') \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_1} \\ e^{i\varphi 1}\sqrt{x_1} & 0 \end{pmatrix}),\ q = \frac{|y|}{1-2x_2}.$$

та

$$a_2 = E_1(\varphi_2) \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-x_2} \\ \sqrt{x_2} & 0 \end{pmatrix},\ 0 < x_2 < \frac{(1-|y|)}{2}, \quad (4)$$

$$a_1 = qe^{i\varphi} E_2(\varphi_2, \lambda') \oplus \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{x_2} \\ \sqrt{1 - x_2} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$e^{\frac{i\varphi 2}{2}} \sqrt{1 - q^2}\, E_2(\varphi_2, \lambda') \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1 - x_1} \\ e^{i\varphi 1}\sqrt{x_1} & 0 \end{pmatrix},\ q = \frac{|y|}{1-2x_2}.$$

В (4) $a_1^2 = 0$:

$$q^2 e^{i\varphi_2} \sqrt{x_2(1 - x_2)} = (1 - q^2)\, e^{i\varphi_2}\, e^{i\varphi_1} \sqrt{x_1(1 - x_1)}$$

В (5) $a_1^2 = 0$:

$$q^2 e^{i\varphi_2} \sqrt{x_2(1 - x_2)} = \frac{(1 - q^2)\, e^{i\varphi 2}\, e^{i\varphi 1}}{2}$$

Тож, ми отримаємо що $a_1^2 = 0$ в (4):

$\sqrt{x_1(1 - x_1)} = \frac{q^2}{1-q^2} \sqrt{x_2(1 - x_2)},\ \varphi_1 = 2\varphi - \varphi_1(|2\pi|)$.

В (5):

$\sqrt{x_1(1 - x_1)} = \frac{q^2}{1-q^2} = \frac{1}{2}, 2\varphi_1 = 2\varphi - \varphi_2(|2\pi|)$.

Звідси $0 \le x_1(1 - x_1) \le \frac{1}{2}$, тому $a_1^2 = 0$ для x_2, $0 < x_2 \le \frac{(1-|y|)}{2}$, що задовольняє

$$0 < \frac{q^2}{1-q^2} \sqrt{x_2(1 - x_2)} \le \frac{1}{2}.$$

Остання нерівність еквівалентна наступній

$$0 < x_2 \le \frac{(1-|y|)\sqrt{2-|y|^2}}{2}$$

Тож для x_2 , що задовольняє попередню нерівність маємо: $(a_2^*)^2 a_2^2 = x_2(1 - x_2) = q_2^2$ та

$$0 < q_2 \le \frac{1-|y|^2}{2}.$$

■

Твердження 3.

Нехай $y \in \mathbb{C}$, $|y|<1$. Нехай $\forall p_2$, $0<p_2<(1-|y|^2)/2$, $\varphi_2 \in [0,2\pi)$ тоді існує незвідне зображення $\varepsilon_2(\lambda)$ з $\sigma(a_2a_1+\lambda a_1a_2)=\{y,\lambda y,\ldots,\lambda^{n-1}y\}$, $a_1^2=0$, $(a_2^*)^2a_2^2=p_2^2$ і $a_2^{2n}=p_2^n e^{i\varphi_2}$.

Для $p_2=(1-|y|^2)/2$ і $\forall\varphi_2 \in [0,2\pi)$ існує два не еквівалентних незвідних зображення з $\sigma(a_2a_1+\lambda a_1a_2)=\{y,\lambda y,\ldots,\lambda^{n-1}y\}$, $a_1^2=0$, $(a_2^*)^2a_2^2=p_2^2$ і $a_2^{2n}=p_2^n e^{i\varphi_2}$.

Твердження 4.

Довільно незвідне зображення $\varepsilon_2(\lambda)$, $a_1^2=0$, $a_2^2\neq 0$ та $\sigma(a_2a_1+\lambda a_1a_2)=\{y,\lambda y,\ldots,\lambda^{n-1}y\}$, $|y|<1$ є унітарно еквівалентним до одного з наступних:

1) 4-вимірні зображення

$$a_1=E_1(0)\otimes\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}_2 .$$

$$a_2=|y|e^{i\varphi}E_2(0,\lambda)\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes\mathbf{1}_2 +$$

$$+\sqrt{1-|y|^2}\,E_2(0,\lambda)\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}0&\sqrt{(1-x_2)}\\e^{i\varphi_2}\sqrt{x_2}&0\end{pmatrix},$$

$0<x_2<1/2$, $0\leq\varphi_2<\frac{2\pi}{n}$.

2) 2-вимірні зображення

$$a_1=E_1(0)\otimes\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} .$$

$$a_2=|y|e^{i\varphi}E_2(0,\lambda)\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} +$$

$$+\sqrt{1-|y|^2}\,\frac{e^{i\varphi_2}}{\sqrt{2}}E_2(0,\lambda)\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad 0\leq\varphi_2<\frac{2\pi}{n}.$$

Розділ 5. Зображення з умовами $\varepsilon_2(\lambda)$, $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$, $A \neq 0$.

У цьому розділі ми розглянемо зображення $\varepsilon_2(\lambda)$ з $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$ і $A \neq 0$.

Твердження 5.

Незвідне зображення $\varepsilon_2(\lambda)$ з $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$ і $A \neq 0$, відповідно є унітарно еквівалентним до одного з наступних:

1) $a_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1}_2$

$$a_2=\sqrt{1-r^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\lambda} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+re^{i\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\ 0<r<1,\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

2) $a_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a_2=e^{i\varphi}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Доведення.

Відповідно до Фоківського зображення з $a_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є унітарним, відповідно до

унітарної еквівалентності, незвідне зображення співвідношення

$$a^*a+aa^*=1,\ a^2=0.$$

Оскільки $a_1^2 = 0$ ми можемо зробити висновок, що зображення Фока може припустити що простір H задовольняє розклад на суми $H=H_1 \oplus H_1$ і

$$a_1=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_{H_1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Далі з $a_1^*a_2 = -\lambda a_2 a_1^*$ ми отримуємо

$$a_1=\begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & -\bar{\lambda}c_1 \end{pmatrix}$$

Далі $a_2^*a_2 + a_2a_2^*=\mathbf{1}_H$ передбачає

$$c_1^*c_1 + c_1c_1^* + c_2c_2^* = \mathbf{1}_H$$
$$c_1^*c_1 + c_1c_1^* + c_2^*c_2 = \mathbf{1}_H$$
$$c_1^*c_2 = \bar{\lambda}c_2c_1^*$$

та з $a_2^2 = 0$ ми додатково маємо $c_1^2 = 0, c_2c_1 = \bar{\lambda}c_1c_2$. Більш того, сімейство $\{a_i^*, a_i, i = 1,2\}$ незвідне якщо $\{c_i, c_i^*, i = 1,2\}$ незвідне і дві сім'ї $\{a_i^{*(j)}, a_i^{(j)}, i = 1,2\}$, j=1,2 є унітарно еквівалентними якщо відповідні сім'ї $\{c_i^{(j)}, c_i^{*(j)}, i = 1,2\}$, j=1,2 є унітарно еквівалентними.

Звідси $c_2^*c_2 = c_2c_2^*$ і за лемою Шура маємо що в незвідному зображенні

$$c_2^*c_2 = r^2\,\mathbf{1}_{H_1}, 0 \le r \le 1 \text{ і}$$

$$c_1^*c_1 + c_1c_1^* = (1 - r^2)\mathbf{1}_{H_1},\ c_1^2 = 0,\ c_2 = ru_2, c_1u_2 = u_2c_1\lambda,$$

де u_2 це унітарний оператор.

Тож, якщо $0 < r < 1$, тоді $H_1 = \mathbb{C}^2$ і ми маємо сімейство попарно не еквівалетних незвідних зображень визначених як

$$c_1 = \sqrt{1 - r^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ c_2 = re^{i\varphi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

і для r=1 , $H_1 = \mathbb{C}$,

$$c_1 = 0,\ c_2 = e^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi).$$

■

Розділ 6. Зображення $\varepsilon_2(\lambda, y)$ з умовою $y \neq 0$

Розглянемо С*-алгебру $\varepsilon_2(\lambda, y)$, $y \neq 0$ і представимо її як

$$\varepsilon_2(\lambda, y) = \varepsilon_2(\lambda) / < (C - y)(C - \lambda y) \dots (C - \lambda^{n-1} y) >$$

За результатами з попередніх розділів ми знаємо що $\varepsilon_2(\lambda, y)$, $y \neq 0$ не нульове якщо $|y| \le 1$.

Теорема 2.

Нехай $|y|=1$, тоді $\varepsilon_2(\lambda, y) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} M_2(\mathbb{C})$.

Доведення.

Можна довести, що $y \in \sigma(A), |y| = 1$, означає $a_1^2 = 0$ і , аналогічно, $a_2^2 = 0$. Згідно твердження 5, ми маємо n попарно не еквівалентних незвідних зображень з $\sigma(A) \subset \{y, \lambda y, \dots, \lambda^{n-1} y\}$, а саме $\delta_y, \delta_{\lambda y}, \dots, \delta_{\lambda^{n-1} y}$. Оскільки ці зображення є двовимірними, ми отримаємо $\varepsilon_2(\lambda, y) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} M_2(\mathbb{C})$.

■

Для $0<|y|<1$, $\varepsilon_2(\lambda, y)$ збігається з С*-підалгеброю С*-алгебри неперервних матричних функцій і визначається компактом:

$$D_y = \{(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2) \mid x_1 \in [0, 1 - \tfrac{1-|y|}{2}],\ x_2 \in [0, \tfrac{1}{2}],\ \varphi_i \in [0, 2\pi]\}$$

та має значення $M_n(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) = M_{4n}(\mathbb{C})$.

Теорема 3.

Для будь-якого $y \in \mathbb{C}$, $0 < |y| < 1$, $\varepsilon_2(\lambda, y) \simeq C^*(a_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\ i = 1,2)$, де

$$a_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2) := \pi_{x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2}(a_i).$$

Доведення.

Позначимо через A – С*-алгебру породжену $(a_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)\ i = 1,2$. Оскільки матричні-функції $a_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)$ задовольнують комутативне співвідношення (1), універсальна властивість $\varepsilon_2(\lambda, y)$ забезпечує існування гомоморфізму

$$\theta: \varepsilon_2(\lambda, y) \to A,$$

що визначається як $\theta(a_i) = a_i(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2)$. Для того, щоб довести, що θ це ізоморфізм, треба показати, що для будь-якого незвідного зображення π з $\varepsilon_2(\lambda, y)$ існує унікальне незвідне зображення $\hat{\pi}$ з A, яке задовольняє рівність $\hat{\pi}\,\theta = \pi$.

Оскільки A$\subset$ $C(D_y, M_{4n}(\mathbb{C}))$,будь-яке незвідне зображення $\hat{\pi}$ з A відповідає деякому фіксованому , $(x_1^0, x_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ $\in D_y$,тобто

$$\tilde{\pi}\ (a_i(x_1,x_2,\ \varphi_1, \varphi_2)) := a_i(x_1^0, x_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0),\ i=1,2,$$

або є прямим доданком такого зображення.

1) Нехай $\pi = \pi_{x_1^0 x_2^0 \varphi_1^0 \varphi_2^0}$ для фіксанованих $(x_1^0, x_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ $\in D_y$. Тоді необхідне $\hat{\pi}$ визначажться як

$$\hat{\pi}(f) \coloneqq f(x_1^0, x_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0).$$

2) Нехай $\pi = p_{x_1^0 \varphi_1^0 \varphi_2^0}$, тоді

$(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes W^*(2\varphi_2^0))a_i\ (x_1^0, 1/2, \varphi_1^0, 2\varphi_2^0)\ (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes W^*(2\varphi_2^0)) =$

$p_{x_1^0 \varphi_1^0 \varphi_2^0}\ (a_i) \oplus p_{x_1^0 \varphi_1^0 \varphi_2^0 + \pi}\ (a_i)$ і відповідне $\hat{\pi}$ $-$це просто обмеження зображення визначеного як

$a_i(x_1,x_2, \varphi_1, \varphi_2) \rightarrow (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes W^*(2\varphi_2^0))a_i\ (x_1^0, 1/2, \varphi_1^0, 2\varphi_2^0)\ (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes W^*(2\varphi_2^0)) =$

на інваріантному підпросторі, що відповідає $p_{x_1^0 \varphi_1^0 \varphi_2^0}\ (a_i)$.

∎

Як наслідок з теореми ми маємо опис $\varepsilon_2(\lambda, y)$, $0 < |y| < 1$, як C*-алгебру неперервних матричних функцій, що задовольняють певним граничним умовам.

Теорема 4.

Нехай $0 < |y| < 1$ тоді $\varepsilon_2(\lambda, y)$ є ізоморфізмом до C*-алгебри $\mathcal{B} \subset C(D_y, M_n \oplus M_2 \oplus M_2)$ та визначається наступним чином:

f$\in \mathcal{B}$ якщо

$$f(x_1,0,\ \varphi_1, \varphi_2) = f(x_1,0,\ \varphi_1, 0),$$

$$U^*(\varphi_1) f\ (0,x_2,\ \varphi_1, \varphi_2)\ U(\varphi_1) = f(0,x_2,\ \tfrac{(n-1)\varphi_1}{n} + \varphi_2),$$

$$\hat{U}^* f(0,x_2,\ 0, \varphi_2 + 2\pi/n) = f\ (0,x_2,\ 0, \varphi_2),$$

$$f(x_1,x_2,\ \varphi_1, 2\pi) = f(x_1,x_2,\ \varphi_1, 0),$$

$$V f(x_1,x_2, 2\pi, \varphi_2) V = f(x_1,x_2, 0, \varphi_2),$$

$$f(\tfrac{1-|y|}{2},\ x_2,\ \varphi_1, \varphi_2) = f(\tfrac{1-|y|}{2},\ 0,\ \varphi_1, 0) \in M_n \otimes M_2 \otimes \mathbf{1}_2,$$

$$(\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes W^*(\boldsymbol{\varphi_2^0}))a_i\ (x_1, 1/2, \varphi_1, \varphi_2)\ (\mathbf{1}_n \otimes \mathbf{1}_2 \otimes W(\boldsymbol{\varphi_2})) \in M_n(\mathbb{C}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \otimes (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$$

$$\hat{V}^*(\lambda,y) f(0,0,0,0)\ \hat{V}(\lambda,y) \in \oplus_{i=1}^{n} M_4(\mathbb{C}),$$

Доведення.

За теоремою 3 ми маємо:

$$\varepsilon_2(\lambda, y) = A \subset \mathcal{B}.$$

Для того, щоб довести рівність A$=\mathcal{B}$ ми скористаємся Теоремою 1.

Нам потрібно показати, що будь-які $t_i=(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \varphi_1^{(i)} \varphi_2^{(i)}) \in \mathrm{D}_y$, i=1,2,

$$\mathcal{B}(t_1,t_2)=A(t_1,t_2).$$

Звідси для фіксованих $t_1,t_2 \in D_y$, C*-алгебра $\mathcal{B}(t_1,t_2)$ і $A(t_1,t_2)$ скінчененновимірна та $A(t_1,t_2) \subset \mathcal{B}(t_1,t_2)$, щоб довести попереднє рівняння достатньо показати рівність відповідного комутативного співвідношення:

$$A'(t_1,t_2)= \mathcal{B}'(t_1,t_2).$$

Якщо $t_1 \nsim t_2$ тоді зображення A задані t_1 та t_2 є непересічними. Отже, якщо $t_1 \nsim t_2$ тоді

$$A'(t_1,t_2)= \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \Lambda_i \in A'(t_i),\ i=1,2 \right\},$$

де під A(t) ми розуміємо C*-алгебру

$$A(t)=\{f(t),\ t \in A\}.$$

Тоді з включення $\mathcal{B}'(t_1,t_2) \subset A'(t_1,t_2)$ ми маємо

$$\mathcal{B}'(t_1,t_2)= \left\{ \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; \Lambda_i \in \mathcal{B}'(t_i),\ i=1,2 \right\},$$

Якщо $t_1 \sim t_2$, то існує унітарна матриця $U \in M_{4n}(\mathbb{C})$, така що $a_i(t_2)=U^* a_i(t_1)U,\ i=1,2;$ і $U^*f(t_2)U= f(t_1)$ для будь-яких $f \in \mathcal{B}$. Отже

$$A(t_1,t_2)= \mathbb{C}\left\langle \begin{pmatrix} a_i(t_1) & 0 \\ 0 & a_i(t_2) \end{pmatrix},\ i=1,2 \right\rangle = \mathbb{C}\left\langle \begin{pmatrix} a_i(t_1) & 0 \\ 0 & U^*a_i(t_1)U \end{pmatrix},\ i=1,2 \right\rangle$$

Звідси:

$$A'(t_1,t_2)= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{4n} & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{4n} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \;\middle|\; \Lambda_{ij} \in A'(t_1) \right\},$$

$$\mathcal{B}'(t_1,t_2)=\left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{4n} & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{4n} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \;\middle|\; \Lambda_{ij} \in \mathcal{B}'(t_1) \right\},$$

Отже, щоб довести, що $A'(t_1,t_2)=\mathcal{B}'(t_1,t_2)$ справедливе для будь-якого $t_1,t_2 \in D_y$, досить показати, що $A'(t)=\mathcal{B}'(t)$ для будь-якого $t \in D_y$.

1) Нехай $t=(x_1,x_2,\varphi_1,\varphi_2)$, $0< x_2 <1/2$, $0< x_1 <(1-|y|)/2$;

   або $t=(0,x_2,\varphi_1,\varphi_2)$, $0< x_2 <1/2$;

   або $t=(x_1,0,\varphi_1,\varphi_2)$ $0< x_1 <(1-|y|)/2$.

   Далі з зображення A заданому через t , незвідному, маємо

$$A'(t)=\mathcal{B}'(t)=\{z\mathbf{1}_{4n},\ z\in\mathbb{C}\}.$$

2) *Нехай $t=(0,0,0,0)$.* Тоді зображення A, $t=\vec{0}$ еквівалетно сумі n попарно нерівних незвідних зображень розмірності 4. Отже

$$A'(\vec{0})=\{\hat{V}(\lambda,y)diag(\lambda_1\mathbf{1}_4,\dots,\lambda_n\mathbf{1}_n)\hat{V}^*(\lambda,y) \mid \lambda_i\in\mathbb{C},\ i=1,\dots,n\},$$

   де під $\mathrm{diag}(A_1,\dots,A_n)$ маємо на увазі блочно-діагональну матрицю, що має матриці A_i як відповідні діагональні елементи. Однак, з граничної умови при $t=\vec{0}$ випливає, що

$$\mathcal{B}'(\vec{0})=\{\hat{V}(\lambda,y)diag(\lambda_1\mathbf{1}_4,\dots,\lambda_n\mathbf{1}_n)\hat{V}^*(\lambda,y) \mid \lambda_i\in\mathbb{C},\ i=1,\dots,n\}=A'.$$

3) Якщо $t=((1-|y|)/2,x_2,\varphi_1,\varphi_2)$, $0\le x_2\le 1/2$, тоді

$$A'(t)=\mathcal{B}'(t)=\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{1}_2\otimes M_2(\mathbb{C}).$$

4) Якщо $t=(x_1,1/2,\varphi_1,\varphi_2),$), $0\le x_1\le 1-|y|/2$, тоді

$$A'(t)=\{((\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{1}_2\otimes W(\varphi_2))diag(\lambda_1\mathbf{1}_{2n},\lambda_2\mathbf{1}_{2n})(\mathbf{1}_n\otimes\mathbf{1}_2\otimes W(\varphi_2)) \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}\}=\mathcal{B}'(t).$$

■

Висновок.

В дипломній роботі вивчено зображення деформації віківського аналогу алгебри канонічних антикомутаційних співвідношень з двома твірними та описано відповідну універсальну обгортуючу C*-алгебру. Основні результати зосереджені в Твердженнях 1,2,3,4,5 та Теоремах 2,3.

Джерела

[1] P. E. T. Jrgensen and R. F. Werner: *Coherent states of the q -canonical commutайon relations,* arXiv.- funct-an/9303002.

[2] P. E. T. Jrgensen, L. M. Schmitt and R. EWerner: Positive representations of general commutation relations allowing Wick ordering, J. Funct. Anal. 134 (1995), 33-99.

[3] W. Rudin: Functional analysis, Mc Graw-Hill, New York 1973.

[4] V. Ostrovsky~ and Yu. Samo~enko: Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented *-Algebras, I: Representations by Bounded Operators, The Gordon and Breach Publishing Group, London

[5] A. J. Macfarlane, On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group SU(2)q, J. Phys. A. 22 (1989), 4581-4588.

[6] W. Rudin: Functional analysis, Mc Graw-Hill, New York 1973.

[7] J. Tomiyama and M. Takesaki: Application of fibre bundles to certain class of C*-algebras, Tohoku Math. Journ. 13, (1961), no. 3, 498-522.

[8] N. Vasil'ev: C*-algebras with finite dimensional irreducible representations, Uspehi mat. nauk. (in Russian) XXI. no. 1 (1966), 136-154, translated in Russian Math. Surveys 21 no. 1 (1966), 137-155 .

[9] W. Marcinek: On commutation relations for quons, Rep. Math. Phys. 41 (1998), 155-172.

[10] V. Ostrovsky~ and Yu. Samo~enko: Introduction to the Theory of Representations of Finitely Presented *-Algebras, I: Representations by Bounded Operators, The Gordon and Breach Publishing Group, London 1999.