

лаборатории JPL. Средние значения СКО разностей (O-C) по обеим координатам находятся в диапазоне (0.1–0.2) " для наблюдений в Николаеве и (0.3–0.4) " для наблюдений в Залиссах.
Ключевые слова: астероиды, ПЗС-наблюдения.

N. Maigurova, Ph. D., A. Pomazan, Junior Researcher,
Research Institute "Mykolaiv Astronomical Observatory"
O. Kozhuhov, Ph. D. Center of Special Information Receiving and Processing and Navigating Field Control,
National Center Of Space Facilities Control And Test, State Space Agency of Ukraine

RESULTS FROM OPTICAL CCD OBSERVATIONS OF ASTEROID 2014 JO25 DURING ITS CLOSE APPROACH TO THE EARTH ON APRIL 19, 2017

Astrometric observations play a key role in ensuring that moving objects first detected remain recoverable after their discovery. The asteroid 2014 JO25 qualified as Potentially Hazardous Asteroid was discovered in May 2014 by astronomers at the Catalina Sky Survey, Arizona. We present the results of the optical CCD-observations of the asteroid 2014 JO25 obtained during its close approach to the Earth April 19, 2017. The observations of the asteroid were carried out at telescope KT-50 (Mobitel complex) of Nikolaev Astronomical Observatory and short-focus 0.30-m Zonnefeld telescope equipped CMOS camera of Center of Special Information Receiving and Processing and Navigating Field Control. The observations series during three nights were obtained (April 19, 24, 25). The observations were reduced with the Astrometrica software, using the USNO CCD Astrograph Catalogue 4 (UCAC-4) as a reference. We have made the comparison of observed topocentric positions (O) with the calculated ephemeris (C) provided by online service HORIZONS and have calculated the residuals (O-C) in both coordinates. The RMS errors of the differences (O-C) were within (0.1-0.2) " and (0.3 – 0.4) ", for Nikolaev and Zalitsy observations respectively. To estimate external accuracy of our observations and to compare our results with other observatories from open data-base NEODyS-2 was used.

Keywords: asteroids, CCD-observations.

УДК 524.7

О. Александров, канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
Астрономічна обсерваторія
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ, ЩО ХАРАКТЕРИЗУЮТЬ ГРАВІТАЦІЙНУ ЛІНЗУ ЧАНГ – РЕФСДАЛА

На прикладі лінзи Чанг – Рефсдала розвинено новий підхід до поглибленого дослідження моделей гравітаційних лінз. У комплексному формулюванні теорії гравітаційного лінзування визначено ряд векторних полів на площинах джерел і зображень. Розглянуто відображення векторних полів із кожної з цих площин на іншу, а також елементи якісного аналізу асоційованих із ними динамічних систем. Для лінзи Чанг – Рефсдала на обох площинах вивчені лінії постійного значення якобіана лінзового відображення, також отримано зображення сітки полярних координат площини джерел.

Ключові слова: гравітаційне лінзування.

Астрономічні застосування теорії гравітаційного лінзування спираються на використання ряду лінзових моделей, отриманих із певних астрофізичних міркувань. Разом із тим, хотілось би мати детальніше уявлення про математичні властивості цих моделей, зокрема, про розподіл різноманітних характеристик як на площині зображень так і на площині джерел. Метою цієї публікації є розробка відповідного апарата і його демонстрація на прикладі лінзи Чанг – Рефсдала (ЛЧР).

1. Вихідні співвідношення. Комплексний формалізм у теорії гравітаційного лінзування. Рівняння гравітаційного лінзування в нормованих змінних має такий вигляд [1, 2]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \nabla \Psi(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Тут $\mathbf{y}$ – двовимірний вектор положення точкового джерела, $\mathbf{x}$ – відповідне положення зображення, $\Psi(\mathbf{x})$ – потенціал лінзування, який задовольняє рівняння

$$\Psi_{,11} + \Psi_{,22} = 2\kappa,$$

де $\kappa(\mathbf{x})$ – нормована густина маси гравітаційної лінзи. Кажуть також, що формула (1) задає лінзове відображення площини зображень на площину джерел. Вважаємо, що функція Ψ визначена і гладка в деякій області D площини зображень, яка відображається рівнянням (1) на область $\tilde{D}$ площини джерел. В окремих точках модельний потенціал або його перші і другі похідні можуть бути сингулярними. Вважаємо, що такі точки виключено з D .

Ряд фундаментальних величин і співвідношень теорії гравітаційного лінзування більш компактно формулюються на мові комплексних величин [1, 3, 5]. Для цього вводяться комплексні координати джерела $\zeta = y_1 + iy_2$ і зображення $z = x_1 + ix_2$. Операцію комплексного спряження величини позначаємо рискою над нею.

Для порівняння векторного й комплексного представлень лінзових рівнянь випишемо зв'язок між похідними за дійсними та комплексними змінними, а також відповідне перетворення якобіана лінзового відображення:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \quad (2)$$

Далі, неважко перевірити, що

$$J = \left| \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)} \right| = \left| \frac{D(\zeta, \bar{\zeta})}{D(z, \bar{z})} \right|.$$

Рівняння гравітаційного лінзування (1) у комплексному представленні набуває вигляду:

$$\zeta = z - 2\Psi_{,\bar{z}}. \quad (3)$$

З огляду на те, що в літературі зі слабкого лінзування зустрічається інша система позначень, зазначимо, що тут і далі комою ми позначаємо частинні похідні саме за вказаними комплексними змінними.

Рівняння для потенціалу має такий вигляд:

$$2\Psi_{,zz} = \kappa(z, \bar{z}). \quad (4)$$

Треба зауважити, що потенціал Ψ і густина κ дійсні функції.

Вводяться також такі позначення $\Psi_{,11} - \Psi_{,22} = 2\gamma_1$, $\Psi_{,12} = \gamma_2$. Комплексну функцію $\Gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ називають комплексним зсувом (shear), а її модуль $\gamma = |\Gamma| = +\sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ – просто зсувом. Далі знаходимо:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\Psi_{,11} - \Psi_{,22}) = \Psi_{,zz} + \Psi_{,\bar{z}\bar{z}}, \quad (5)$$

$$\gamma_2 = \Psi_{,12} = i(\Psi_{,z\bar{z}} - \Psi_{,\bar{z}z}), \quad (6)$$

$$\Gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2 = 2\Psi_{,z\bar{z}}. \quad (7)$$

Маємо таке співвідношення:

$$\Gamma_{,z} = 2\Psi_{,zzz} = \kappa_{,z} \quad (8)$$

Матриця Якобі комплексного відображення (3) має такий вигляд:

$$\frac{D(\zeta, \bar{\zeta})}{D(z, \bar{z})} = \begin{bmatrix} 1 - \kappa & -\bar{\Gamma} \\ -\Gamma & 1 - \kappa \end{bmatrix}.$$

Для якобіана J знаходимо:

$$J = (1 - \kappa)^2 - \gamma^2. \quad (9)$$

Якобіан може мати як додатне так і від'ємне значення, але, як бачимо з формули (9), він обмежений зверху $J \leq (1 - \kappa)^2$. Удалині від мас $\Psi = 0 \Rightarrow \kappa = \gamma = 0$ і $J = 1$.

Власні значення матриці Якобі дорівнюють $\lambda_1 = 1 - \kappa + \gamma$ і $\lambda_2 = 1 - \kappa - \gamma$. Нехай тепер точка $\mathbf{x}$ є критичною, $J(\mathbf{x}) = 0$. У цій точці одне з власних значень дорівнює нулю, при цьому друге власне значення дорівнює $\lambda = 2(1 - \kappa)$. Далі для спрощення формул уведемо позначення $1 - \kappa = \sigma$. У загальному випадку критичні точки утворюють критичні криві. Їх образи при лінзовому відображенні – це каустики. Множину критичних точок позначимо як K^c .

2. Векторні поля й динамічні системи на площинах джерел і зображень. Нехай в області $D \subset R^2$ площини з координатами (u, v) визначені дві дійсні функції $U(u, v)$ і $V(u, v)$. Вони задають на D векторне поле. Те ж саме поле може бути задане комплекснозначною функцією $W(w, \bar{w}) = U + iV$ комплексної змінної $w = u + iv$ (її спряженої). Із кожним векторним полем тісно пов'язана автономна динамічна система

$$\frac{dw}{dt} = W(w, \bar{w}), \quad (10)$$

де t – допоміжний параметр.

Якісною поведінкою системи (10) називають якісну (зокрема, топологічну) структуру сукупності траєкторій цієї системи. Важливо, що нас цікавлять траєкторії рівняння (10) як (упорядковані й орієнтовані) точкові множини, безвідносно до вибору параметризації. Шляхом заміни параметру можна внести як множник у праву частину рівняння (10) (або прибрати з неї) довільну додатну функцію координат [4]. Тобто йдеться про сукупність інтегральних кривих рівняння $U(u, v)dv - V(u, v)du = 0$, а параметр t відіграє допоміжну роль. Зокрема, він задає певну орієнтацію цих кривих, яка буває важливою, наприклад, коли векторне поле моделює швидкість потоку частинок.

Важливими елементами топологічної структури є особливі точки (ті значення w , для яких $W(w, \bar{w}) = 0$) і періодичні траєкторії (для яких $w(t + T) = w(t)$ при деякому T і всіх t).

Особливі точки також називають нерухомими точками, стаціонарними точками, точками спокою або положеннями рівноваги. Кожна стаціонарна точка є цілою траєкторією. Поведінка траєкторій в околах особливих точок, яка значною мірою обумовлює якісну поведінку траєкторій загалом, визначається похідними поля W у цих точках. Відповідну класифікацію, яку за звичай формулюють у термінах дійсних змінних, неважко перекласти на комплексну мову. Нехай $w_0 = u_0 + iv_0$ – особлива точка, і поле $W(w, \bar{w})$ у деякому її околі має таку структуру:

$$W = \alpha \Delta w + \beta \Delta \bar{w} + o(|\Delta w|) = (a\Delta u + b\Delta v) + i(c\Delta u + d\Delta v) + o(|\Delta u| + |\Delta v|).$$

Тут, $\alpha = \partial W / \partial w|_{w=w_0}$, $\beta = \partial W / \partial \bar{w}|_{w=w_0}$, символ $o(g)$ позначає функцію вищого порядку малості ніж g .

Уведемо такі позначення $s(w_0) = \alpha + \bar{\alpha} \equiv a + d$ і $j(w_0) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \equiv ad - bc$. Коли $j \neq 0$, особлива точка w_0 називається простою. Класифікація простих особливих точок лінійного наближення подана в табл. 1 [4]. Відомо, що у випадках 1) – 3) урахування нелінійних доданків у формулі для W не змінює характер особливої точки. У випадку 4)

особлива точка поля W може мати характер центру, або фокусу. Зауважимо також, що у випадку 1), коли виконується рівність $s^2 - 4j = 0$, вузли мають характерні особливості, але ми на цьому не будемо зупинятися.

Таблиця 1

Класифікація простих особливих точок лінійного наближення динамічної системи

Умови		Характер особливої точки
1)	$j > 0, s^2 - 4j \geq 0$	$s < 0$ Стійкий вузол
		$s > 0$ Нестійкий вузол
2)	$j < 0$	Сідло
3)	$j > 0, s^2 - 4j < 0, s \neq 0$	$s < 0$ Стійкий фокус
		$s > 0$ Нестійкий фокус
4)	$j > 0, s = 0$	Центр

Маючи на меті дослідження деякої дійсної функції $f(w, \bar{w})$ доцільно вивчити поведінку двох векторних полів, пов'язаних із f . Перше з них – це градієнт $\nabla f = 2f_{,w}$, інше – це поле дотичне до ліній $f = \text{const}$. Диференціюючи останню рівність, знаходимо умову того, що вектор dw є дотичним: $f_{,w} dw + f_{,\bar{w}} d\bar{w} = 0$. Ця рівність, звичайно, визначає лише напрям вектора dw . Аби задовольнити цю умову достатньо покласти

$$dw/dt = if_{,w} \quad (11)$$

Очевидно, що цей вектор перпендикулярний до градієнта.

Нас цікавитимуть векторні поля, що визначені на площинах джерел і зображень. На площині зображень визначено всі функції, які задають модель лінзи. Із ними пов'язані векторні поля, що характеризують їх рельєф у вище вказаний спосіб. Поля, які задаються на площині джерел, характеризують форму й рух джерел.

Розглянемо як пов'язані між собою динамічні системи на площинах джерел і зображень. Якби лінзове відображення було дифеоморфним у всій області, що розглядається, то відповідні системи мали би однакову якісну поведінку. Однак наявність критичних кривих (а також сингулярних точок потенціалу) суттєво змінює картину.

Спочатку нехай заданим є векторне поле $Z(z, \bar{z}) = dz/dt$, визначене в області D площини зображень. Рівняння (3) задає відображення області D на область площини джерел $\tilde{D}$. Диференціюючи рівняння (3) і позначаючи точкою похідну за t , отримуємо:

$$\dot{\zeta} = \dot{z} - 2\Psi_{,z\bar{z}} \dot{z} - 2\Psi_{,\bar{z}\bar{z}} \dot{\bar{z}} = \sigma Z - \Gamma \bar{Z} \quad (12)$$

Отже, разом рівняння (3) і (12) співставляють точці $z \in D$ і вектору $Z(z, \bar{z})$ точку ζ області $\tilde{D}$ і вектор $\tilde{Z} = \sigma Z - \Gamma \bar{Z}$. Це можна розглядати як параметричне задання поля $\tilde{Z}(\zeta, \bar{\zeta})$ на $\tilde{D}$, де параметрами є компоненти вектора z . Необхідно підкреслити, що, оскільки в одну точку ζ можуть відображатися кілька точок $z^{(i)}$, у загальному випадку ми отримаємо стільки ж значень $\tilde{Z}^i$ поля $\tilde{Z}(\zeta, \bar{\zeta})$. Як відомо, каустики відокремлюють ті області площини джерел, точки ζ яких мають різну кількість зображень $z^{(i)}$. Отже, саме каустики є границями областей з різною кількістю полів $\tilde{Z}^i$.

Із формули (12) очевидно, що при відображенні (3) диференційовані криві відображаються в диференційовані, періодичні траєкторії в періодичні, стаціонарні точки переходять у стаціонарні. Прирівняємо праву частину рівняння (12) до нуля і винесемо спільний множник $|Z|$. Доходимо до такого висновку.

Образ $\tilde{Z}(\zeta, \bar{\zeta}) = \sigma Z - \Gamma \bar{Z}$ довільного поля Z має крім тих нерухомих точок, що є образами нерухомих точок поля Z , інші нерухомі точки лише на каустиці; останні є образами критичних точок, для яких, крім умови $\sigma = \gamma$ (або $\sigma = -\gamma$), виконується рівність $2\arg(Z) = \arg(\Gamma) \pm 2\pi$ (або відповідно $2\arg(Z) = \arg(\Gamma) \pm (2n+1)\pi$).

Тепер нехай заданим в області $\tilde{D}$ є поле

$$\Pi(\zeta, \bar{\zeta}) = \dot{\zeta} \quad (13)$$

Підставимо (13) в (12) і розв'яжемо отримане рівняння відносно Z . Знаходимо:

$$Z = J^{-1}(\sigma \Pi + \Gamma \bar{\Pi}) \quad (14)$$

Окрім як у сингулярних точках функцій $\sigma(z, \bar{z})$ і $\Gamma(z, \bar{z})$ (які ми виключили з області визначеності) поле Z є невизначеним у критичних точках відображення (3), у яких $J = 0$. Пересвідчимося, що попри існування кількох зображень поле $\dot{z} = Z(z, \bar{z})$ визначається в інших точках формулою (14) за полем $\Pi(\zeta, \bar{\zeta})$ однозначно. Справді, для кожного z формули (3, 4, 9) однозначно визначають ζ і J , і отже, праву частину рівності (14). Таким чином поле Π , задане в області $\tilde{D}$, породжує поле Z в області $D' = D \setminus K^c$. Нерухома точка ζ_s поля Π відображається

в нерухомі точки z_s^i поля Z , якщо вони не є критичними. Періодична траєкторія $\zeta_p(t)$ поля Π відображається також в періодичні $z_p^i(t)$, якщо останні не перетинаються з критичною кривою.

Якісна поведінка траєкторій системи (14) може бути проаналізована і в околі критичних точок. Для цього за загальною метою в рівнянні (14) переходимо до нового параметру τ , такого, що

$$dz/d\tau = (\sigma\Pi + \Gamma\bar{\Pi}). \quad (15)$$

В області D' траєкторії динамічних систем (14) і (15) збігаються як точкові множини, але відрізняються напрямком руху на тих ділянках, де $J < 0$. Поле (15) на відміну від (14) є неперервним і диференційованим у D ; періодичні траєкторії поля Π відображаються в періодичні траєкторії поля (15). Поле (15) може мати додаткові стаціонарні точки, які відмінні від нерухомих точок поля (14) і не є образами стаціонарних точок поля Π . Це має місце за умови одночасного виконання умов $\gamma = \sigma$ і $2\arg(\Pi) = \arg(\Gamma) \pm (2n+1)\pi$, або $\gamma = -\sigma$ і $2\arg(\Pi) = \arg(\Gamma) \pm 2\pi n$. Приклад такої ситуації подано нижче (див. рис. 7 і відповідне обговорення).

Зазначимо ще такі очевидні властивості рівняння (3). Нехай z_0 є критичною точкою лінзового потенціалу, тобто в цій точці $\nabla\Psi \equiv 2\Psi_{,z}(z_0, \bar{z}_0) = 0$. Тоді z_0 є нерухомою точкою лінзового відображення: $\zeta(z_0, \bar{z}_0) = z_0$. Далі, нехай $\{z_i\}$ – сукупність стаціонарних точок правої частини рівняння (3). Тоді $\{z_i\}$ – множина зображень початку координат $\zeta = 0$ площини джерел.

3. Лінза Чанг – Рефсдала. Застосуємо намічений вище підхід до вивчення моделі гравітаційної лінзи Чанг – Рефсдала [5]. Ця модель описує лінзу, що створена одиничною точковою масою і припливною дією зовнішніх мас, яка характеризується параметром γ_{ex} . Початок координат обирають у точці, де знаходиться точкова маса.

Потенціал цієї моделі дається такими виразами

$$\Psi(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} \ln(z\bar{z}) + \frac{\gamma_{ex}}{4} (z^2 + \bar{z}^2) = \frac{1}{2} \left[\ln(x_1^2 + x_2^2) + \gamma_{ex} (x_1^2 - x_2^2) \right]. \quad (16)$$

Очевидно, що модель симетрична відносно заміни $x_1 \rightarrow -x_1$ і $x_2 \rightarrow -x_2$. Крім того, заміна $\gamma_{ex} \rightarrow -\gamma_{ex}$ еквівалентна заміні $x_1 \leftrightarrow x_2$, то ж достатньо розглянути випадок $\gamma_{ex} > 0$.

Рівняння (3) набуває вигляду

$$\zeta = z - \gamma_{ex} \bar{z} - \frac{1}{z}. \quad (17)$$

Далі маємо: $\kappa = 2\Psi_{,z\bar{z}} = 0$, $\sigma \equiv 1$,

$$\Gamma = 2\Psi_{,z\bar{z}} = \left(\gamma_{ex} - \frac{1}{\bar{z}^2} \right), \quad (18)$$

$$J = 1 - \gamma_{ex}^2, \quad (19)$$

$$\gamma^2 = \left(\gamma_{ex} - \frac{1}{z^2} \right) \left(\gamma_{ex} - \frac{1}{\bar{z}^2} \right). \quad (20)$$

Критичні криві й лінії сталого значення Якобіана на площині зображень. З огляду на важливість критичних кривих і каустик почнемо аналіз властивостей моделі з розгляду кривих $J = const$. Із формули (19) очевидно, що це також криві $\gamma^2 = const$.

У роботі [6] Вітт запропонував застосувати як параметр уздовж критичної кривої фазу функції Γ . Ця параметризація узагальнюється на всі криві $J = const$. [7]. Ураховуючи (19), покладемо

$$\Gamma = -\sqrt{1 - J} e^{2i\varphi}. \quad (21)$$

Тепер із формули (18) знаходимо рівняння цих кривих у явному вигляді

$$z(J, \varphi) = \pm \sqrt{\frac{1}{\gamma_{ex} + \sqrt{1 - J} e^{-2i\varphi}}}. \quad (22)$$

Ця явна формула дозволяє отримати багато важливої інформації. Зокрема, знайдемо точки перетину цих кривих з осями координат. Крива $z(J, \varphi)$ за умови

$$J < 1 - \gamma_{ex}^2 \quad (23)$$

перетинає вісь ординат у точках $x_{2J}^{\pm} = \pm 1/\sqrt{\sqrt{1 - J} - \gamma_{ex}}$ при $2\varphi = \pi$. Та сама крива перетинає вісь абсцис у точках $x_{1J}^{\pm} = \pm 1/\sqrt{\sqrt{1 - J} + \gamma_{ex}}$ при $\varphi = 0$. Зокрема, у випадку критичної кривої при $\gamma_{ex} < 1$ маємо $x_{2c}^{\pm} = \pm 1/\sqrt{1 - \gamma_{ex}}$, $x_{1c}^{\pm} = \pm 1/\sqrt{1 + \gamma_{ex}}$.

Коли ж виконується протилежна умова,

$$J > 1 - \gamma_{ex}^2, \quad (24)$$

то формула (22) описує дві замкнені криві (що відповідають двом знакам перед коренем), які не перетинаються з віссю ординат (див. рис. 1). Та, що лежить у додатній півплощині, перетинає вісь абсцис у точках $\pm x_{1J} = 1/\sqrt{\gamma_{ex} \pm \sqrt{1-J}}$. Зокрема, при $\gamma_{ex} > 1$ для правої критичної кривої маємо $\pm x_{1c} = 1/\sqrt{\gamma_{ex} \pm 1}$.

Також із формули (22) шляхом розкладу в ряд Тейлора не важко показати, що криві $z(J, \varphi)$ є періодичними. За умови (23) період дорівнює 2π , а при виконанні (24) він дорівнює π [7]. Ці дві множини відокремлюються кривими

$$z_s(\varphi) = \pm \frac{e^{i\varphi/2}}{\sqrt{2\gamma_{ex} \cos \varphi}}, \quad (25)$$

які при $\varphi \rightarrow \pm\pi/2$ прямують у нескінченність під кутами $\pm\pi/4$.

Помножуючи формулу (22) на $\sqrt{\gamma_{ex}}$, знаходимо, що в координатах $X + iY = z\sqrt{\gamma_{ex}}$ сімейство кривих (22) має універсальний вид і залежить від параметра $p = \sqrt{1-J}/\gamma_{ex}$ (рис. 1). Криві (25) відповідають значенню $p = 1$, а критичні криві – $p = 1/\gamma_{ex}$.

Щоби отримати додаткову інформацію доцільно дослідити векторне поле дотичне до цих кривих. Диференціюючи рівність (21), урахувавши (18) і те, що $\kappa = 0$, маємо

$$dz/d\varphi = -iz(\gamma_{ex}z^2 - 1). \quad (26)$$

Більш безпосередній шлях отримання рівняння (26) полягає в тому, щоби з (20) знайти за формулою (11) $dz/dt = 2(z\bar{z})^{-3} dz/d\varphi$ і відкинути додатний множник $2(z\bar{z})^{-3}$.

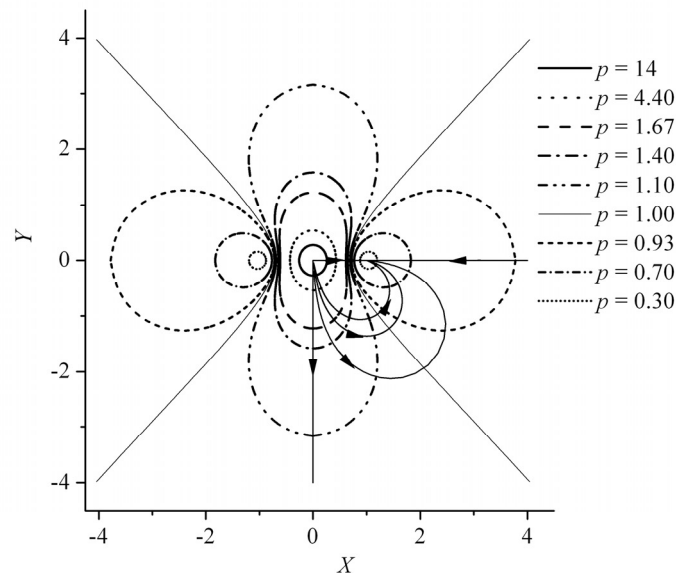


Рис. 1. Криві постійного значення якобіана лінзового відображення для лінзи Чанг – Рефсдала та лінії його градієнта

Стационарними є точки $z = 0$ і $z = \pm 1/\sqrt{\gamma_{ex}}$. Щоби визначити їхній тип треба лінеаризувати рівняння (26) в околі кожної з них. При $z = 0$ маємо $dz/d\varphi = iz$. Покладаючи $z = (\pm 1/\sqrt{\gamma_{ex}}) + \omega$, знаходимо $d\omega/d\varphi = -2i\omega$. Бачимо, що в лінійному наближенні всі три точки є центрами, і що траєкторії біля точок $z = \pm 1/\sqrt{\gamma_{ex}}$ спрямовані протилежно траєкторіям біля $z = 0$, а частота їхнього обертання вдвічі вища.

На рис. 1 у четвертому квадранті окрім кривих постійного якобіана показані лінії його градієнта (суцільні лінії зі стрілками). Із формул (19, 20) знаходимо, що $grad(J) = -4i(z\bar{z})^{-3} dz/d\varphi$. Нерухомі точки поля $(z\bar{z})^3 \cdot grad(J)$ ті ж самі, що і у поля $dz/d\varphi$. Урахувавши множник $-4i$, доходимо висновку, що для останнього поля ці точки є вузлами: точка $z = 0$ – нестійкий вузол, точки $z = \pm 1/\sqrt{\gamma_{ex}}$ – стійкі. Із тих самих формул бачимо, що при $z \rightarrow 0$ маємо $J \rightarrow -\infty$, при великих значеннях $|z|$ якобіан прямує до константи $J \rightarrow 1 - \gamma_{ex}^2$. А в точках $z = \pm 1/\sqrt{\gamma_{ex}}$ якобіан досягає максимального значення $J = 1$.

Підсумуємо розгляд траєкторій рівняння (26). Усі вони за винятком трьох нерухомих точок і кривих (25) є гладкими простими замкненими (періодичними за параметром) кривими.

Каустики. Розглянемо тепер каустики ЛЧР. Як було показано вище, кожна з кривих

$$z(p, \varphi) = \pm (1 + p e^{-2i\varphi})^{-1/2} \quad (27)$$

(коли $p \neq 1$) можна розглядати як критичну криву ЛЧР із $\gamma_{ex} = 1/p$. Застосовуючи рівняння (17) для кожної з них із своїм γ_{ex} , отримуємо відповідні каустики (рис. 2).

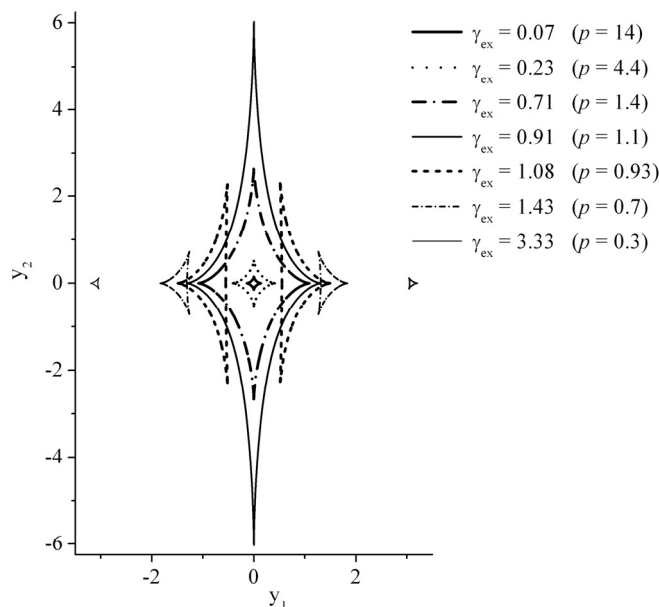


Рис. 2. Каустики моделей Чанг – Рефсдала з різними γ_{ex}

Лінії сталого значення Якобіана на площині джерел. Перш ніж розглядати який вид мають лінії $J = const.$ на площині джерел, зробимо кілька зауважень стосовно відображення (17). Звичайно, при застосуванні моделі ЛЧР із розгляду видаляється малий безпосередній окіл початку координат і також він обмежується деякою скінченною областю. Однак із загального погляду важлива і асимптотична поведінка моделі як при малих так і при великих $|z|$. Отже, по-перше, при відображенні (17) дійсна вісь відображається на дійсну, і уявна – на уявну. По-друге, точка $z = 0$ відображається в нескінченно віддалену точку $|\zeta| \xrightarrow{|z| \rightarrow 0} \infty$. Однак також і $|\zeta| \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} \infty$. При цьому точки $z = \pm i/\sqrt{\gamma_{ex}}$ є нерухомими.

Якісна поведінка кривих $J = const.$ відрізняється у випадках $\gamma_{ex} < 1$ і $\gamma_{ex} > 1$. Це є очевидним, оскільки каустика є однією з цих кривих, а каустики в цих випадках суттєво відрізняються.

Спершу розглянемо випадок $\gamma_{ex} < 1$ і для визначеності покладемо $\gamma_{ex} = 0.6$. При фіксованому γ_{ex} різними значенням параметра p відповідають різні значення J . Застосовуючи відображення (17) до кривих (27) і згадуючи, що $p = \sqrt{1-J}/\gamma_{ex}$, отримуємо лінії сталого J . Для більшої виразності вони зображені на двох рис. 3 і рис. 4 окремо для від'ємних і додатних значень J .

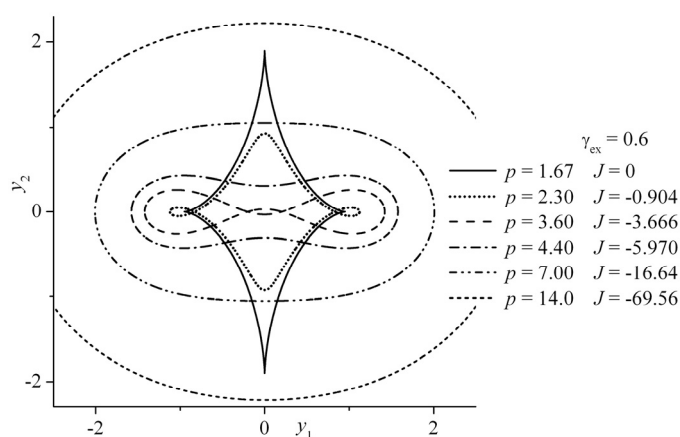


Рис. 3. Криві постійного значення якобіана $J \leq 0$ на площині джерел для ЛЧР

Із цих рисунків неважко зрозуміти, що в кожній точці поза каустикою перетинаються дві криві, одна з $J \leq 0$, інша з $J \geq 0$. У кожній точці усередині каустики перетинаються по дві такі криві. Також, кидається в око різниця в поведінці кривих в околах так званих додатних і від'ємних каспів [8]. Крім того добре помітне відхилення від каустики кривих сталого значення якобіана, навіть дуже близьких до неї. Це наочно демонструє обмеженість так званого наближення прямолінійної каустики, у межах якого підсилення кожного з критичних зображень визначається лише відстанню до каустики.

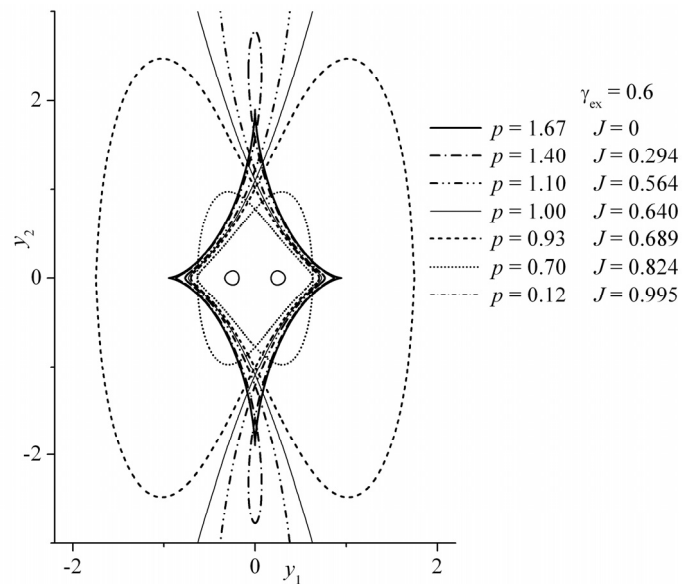


Рис. 4. Криві постійного значення якобіана $J \geq 0$ на площині джерел для ЛЧР

На наступному рис. 5 показано криві сталого значення якобіана на площині джерел у випадку $\gamma_{ex} > 1$; для визначеності ми поклали $\gamma_{ex} = 1.43$.

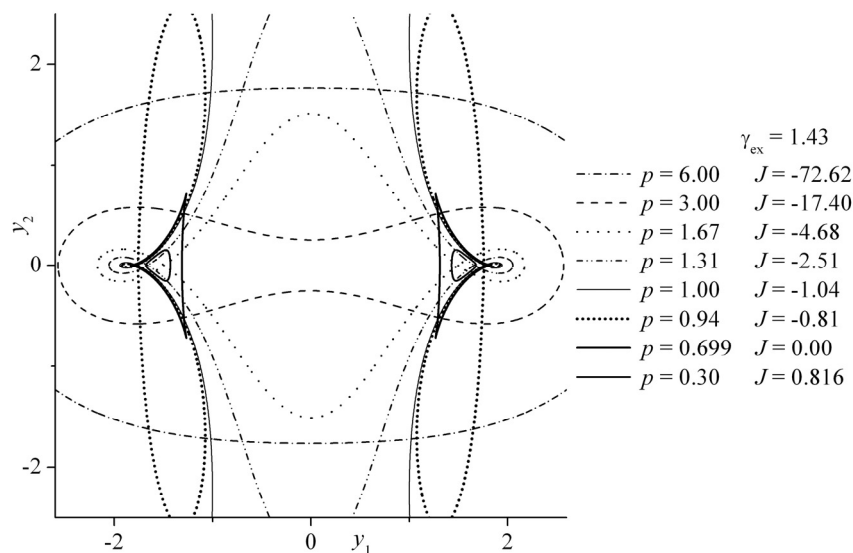


Рис. 5. Криві постійного значення якобіана на площині джерел для ЛЧР із надкритичним значенням γ_{ex}

Зображення полярних координат площини джерел. Далі розглянемо як лінії сітки полярних координат площини джерел відображаються на площині зображень. Аби знайти це відображення безпосередньо було б потрібно мати загальні вирази для розв'язків лінійного рівняння. Хоча у випадку ЛЧР такі вирази теоретично існують, оскільки можуть бути знайдені з алгебраїчного рівняння четвертого порядку [7], однак їхнє практичне застосування надто сумнівне з огляду на їх складність. Замість цього скористаємося формулою (14) для відображення векторних полів, дотичних до координатних ліній, із подальшим чисельним інтегруванням отриманих рівнянь і аналізом інтегральних кривих.

Нехай $\zeta = \rho e^{i\phi}$. Рівняння кіл $\rho = \text{const}$ має вигляд

$$\tilde{\Phi}(\phi) \equiv \frac{d\zeta}{d\phi} = i\zeta, \quad (28)$$

а радіальних прямих –

$$\frac{d\zeta}{d\rho} = e^{i\phi} = \left(\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В останньому рівнянні доцільно перейти до нового параметра $\tau = \ln \rho$, тоді

$$\tilde{T}(\tau) \equiv \frac{d\zeta}{d\tau} = \zeta. \quad (29)$$

Зауважимо, що зображеннями точки $\zeta = 0$ є точки

$$z_1^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\gamma_{ex}}}, \quad z_2^{\pm} = \pm \frac{i}{\sqrt{1+\gamma_{ex}}},$$

які є стаціонарними точками полів, що розглядаються. Отже, насамперед нас цікавить їхня поведінка в околах цих точок.

Зображення $T(\tau)$ поля $\tilde{T}(\tau)$ за формулою (14) подається таким виразом:

$$T(\tau) = J^{-1}[\zeta + \Gamma(z)\bar{\zeta}] = J^{-1} \frac{(1 - z\bar{z})^2 + (1 - \gamma_{ex}z^2)(1 + \gamma_{ex}z^2) - 1}{z\bar{z}^2}. \quad (30)$$

Аналогічно знаходимо зображення $\Phi(\phi)$ поля:

$$\Phi(\phi) = J^{-1}i \left[z - 2\gamma_{ex}\bar{z} - \frac{(1 - \gamma_{ex}z^2)(1 + \gamma_{ex}z^2)}{z\bar{z}^2} \right].$$

При розгляді інтегральних кривих цих полів множник J^{-1} можна відкинути, лише пам'ятаючи про те, що в точках перетину інтегральних кривих із критичною кривою їхні дотичні вектори стають невизначеними, а всередині критичної кривої, де $J < 0$, напрямок отриманих інтегральних кривих треба змінити на зворотний.

На рис. 6 показано зображення сітки полярних координат площини джерел, створене ЛЧР із $\gamma_{ex} < 1$ (для визначеності ми поклали $\gamma_{ex} = 0.4$). Суцільні лінії – це зображення координатних кіл; суцільна більш груба лінія – критична крива; зображення радіальних прямих для спрощення рисунка показані лише у правій половині рис. 6 штриховими лініями; два хрестики на осі $x_1 = 0$ позначають точки $z = \pm i/\sqrt{\gamma_{ex}}$, що є нерухомими точками лінзового відображення (17).

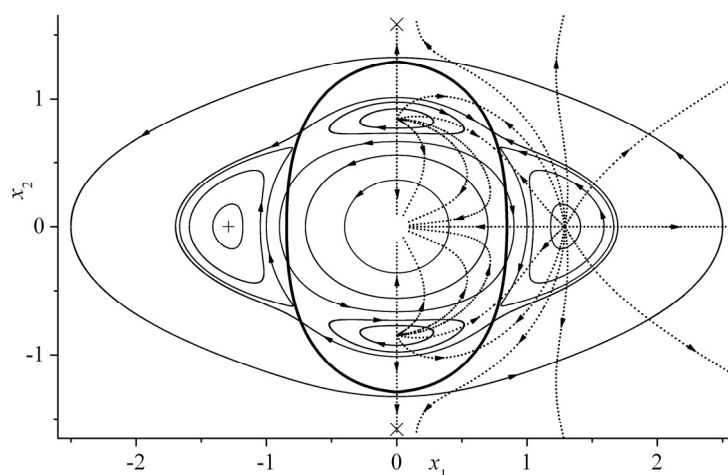


Рис. 6. Зображення сітки полярних координат площини джерел, що створене ЛЧР ($\gamma_{ex} = 0.4$)

Цей рисунок досить наглядно показує, як саме відбувається лінзове відображення (17), при якому окіл точки $z = 0$ вивертається й розтягується до околу нескінченності, чотири центри, що лежать на координатних осях суміщаються, координатні осі не змінюються, критична крива перетворюється на каустику.

Варто звернути увагу, що інтегральні лінії поля, які йдуть уздовж координатних осей (x_1 , x_2) не зазнають, на відміну від інших, зміни напрямку в точках перетину з критичною кривою. Зазначимо, що згадані точки відповідають зборкам на каустиці. На осі $y_2 = 0$ це точки $\zeta = \pm 2\gamma_{ex}/\sqrt{1+\gamma_{ex}}$, при цьому $\Gamma = -1$; а на осі $y_1 = 0$ – $\zeta = \pm 2i\gamma_{ex}/\sqrt{1-\gamma_{ex}}$ і $\Gamma = 1$. Із формули (30) бачимо, що в цих точках поле $JT(\tau)$ дорівнює нулю, тобто, для нього ці точки є стаціонарними.

У випадку ЛЧР з $\gamma_{ex} > 1$ множина критичних точок складається з двох замкнених кривих (див. рис. 1), початок координат на площині джерел лежить поза каустикою й має лише два зображення. Рис. 7 ілюструє, як у цьому випадку виглядає зображення сітки полярних координат, тобто інтегральні криві полів $T(\tau)$ і $\Phi(\phi)$. При цьому позначення такі самі, як і на рис. 6. На осі абсцис хрестиками у кружальцях позначені додаткові стаціонарні точки поля $J\Phi(\phi)$, які не є образами стаціонарних точок поля $\tilde{\Phi}(\phi)$ (28).

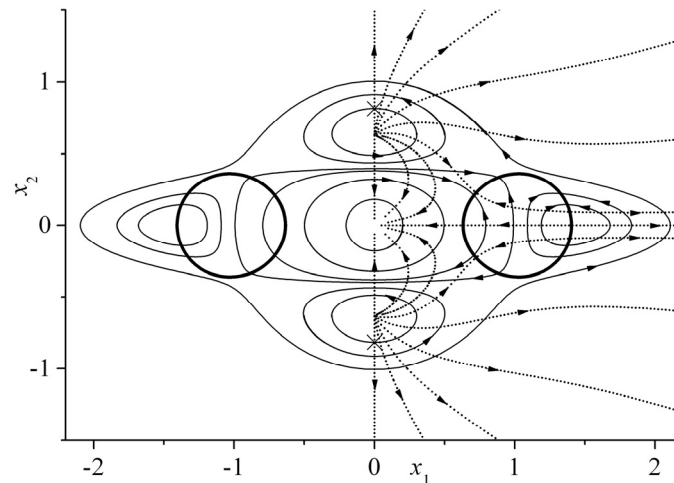


Рис. 7. Зображення сітки полярних координат площини джерел, що створене ЛЧР ($\gamma_{ex} = 1.5$)

4. Висновки. Розроблений підхід до поглибленого вивчення властивостей моделей гравітаційних лінз застосовує аналіз векторних полів і відповідних динамічних систем, які визначаються на площинах джерел і зображень гравітаційно-лінзової системи. Співвідношення (12, 14) встановлюють зв'язки між полями на цих двох площинах. Цікаво, що, на протилежність відображенню точок, поле, визначене на площині джерел, однозначно відображається на площину зображень, і, навпаки, поле на площині зображень індукує стільки полів у точках площини джерел, скільки зображень мають ці точки. Також проаналізований зв'язок елементів якісної поведінки динамічних систем на обох площинах. Показано, що, на протилежність відображенню точок, поле, визначене на площині джерел, однозначно відображається на площину зображень, і, навпаки, поле на площині зображень індукує стільки полів у точках площини джерел, скільки зображень мають ці точки. Також проаналізовано зв'язок елементів якісної поведінки динамічних систем на обох площинах. Цей підхід дозволяє детально вивчати розподіли різноманітних характеристик як самої гравітаційної лінзи так і зображень протяжних джерел. Деякі його застосування продемонстровані на прикладі лінзи Чанг – Рефсдала, для якої знайдено вид кривих постійного значення якобіана лінзового відображення й інтегральних кривих його градієнта, і зображення сітки полярних координат площини джерел.

Список використаних джерел

1. Schneider P., Ehlers J., Falco E. E. Gravitational Lenses / P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco. – Berlin: Springer, 1992.
2. Александров О., Жданов В. Часова затримка критичних зображень точкового джерела поблизу каустики-складки гравітаційно-лінзової системи / О. Александров, В. Жданов // Вісн. Київ. ун-ту імені Тараса Шевченка. Астрономія. – 2016. – Т. 53. – С. 6–11.
3. Александров О. Аналітична теорія гравітаційного лінзування: асимптотичні формули в околі каустики і квадратичне наближення / О. Александров // Вісн. Київ. ун-ту імені Тараса Шевченка. Астрономія. – 2007. – Т. 44. – С. 21–29.
4. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М.: Наука, 1978.
5. Chang K., Refsdal S. Star disturbances in gravitational lens galaxies / K. Chang, S. Refsdal // Astron Astrophys. – 1984. – Vol. 132. – P. 168–178.
6. Witt H. J. Investigation of high amplification events in light curves of gravitationally lensed quasars / H. J. Witt // Astron Astrophys. – 1990. – Vol. 236. – P. 311–322.
7. An J. H., Evans N. W. The Chang-Refsdal lens revisited / J. H. An, N. W. Evans // MNRAS – 2006. – Vol. 369(1). – P. 317–334.
8. Petters A. O., Levine H., Wambsganss J. Singularity theory and gravitational lensing / A. O. Petters, H. Levine, J. Wambsganss. – Boston: Birkhäuser, 2001.

Надійшла до редколегії 18.09.17

Alexandrov A. N., PhD, researcher,
Astronomical observatory
of the Taras Shevchenko National University of Kyiv

DYNAMIC SYSTEMS THAT DESCRIBE CHANG-REFSDAL GRAVITATIONAL LENS

On the example of Chang-Refsdal lens, a new approach to in-depth study of gravitational lens models is developed. In the complex formulation of the theory of gravitational lensing, a number of vector fields are defined on the source and image planes. The mapping of vector fields from each of these planes to another is considered, as well as elements of qualitative analysis of dynamical systems associated with them. For the Chang-Refsdal lens the lines of the constant value of the lens mapping Jacobian are studied on both planes, and an image view of the polar coordinates grid of the source plane is obtained.

Key words: gravitational lensing.

Александров А., канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
Астрономическая обсерватория
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИЕ ГРАВИТАЦИОННУЮ ЛИНЗУ ЧАНГ – РЕФСДАЛА

На примере линзы Чанг – Рефсдала развит новый подход к углубленному исследованию моделей гравитационных линз. В комплексной формулировке теории гравитационного линзирования определен ряд векторных полей на плоскостях источников и изображений. Рассмотрены отображения векторных полей с каждой из этих плоскостей на другую, а также элементы качественного анализа ассоциированных с ними динамических систем. Для линзы Чанг – Рефсдала на обеих плоскостях изучены линии постоянного значения якобиана лінзового отображения, а также получено изображение сетки полярных координат плоскости источников.

Ключевые слова: гравитационное линзирование.

UDC 524.7