

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Виділення контуру у зображенні зі згладжуванням

студента 4 курсу
Карпенка Кирила Костянтиновича

Науковий керівник:
доцент, кандидат фізико-математичних наук
Матвієнко В.Т.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та
рекомендована до захисту, протокол № __ від __ _____ 2021 р.

Завідувач кафедри МСС
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2021

Зміст

Вступ	3
Розділ 1. Перетворення Фур'є та оператор згортки	4
1.1. Перетворення Фур'є	4
1.2. Оператор згортки	6
1.3. Швидке перетворення Фур'є	8
Розділ 2. Згладжування зображення	10
2.1. Фільтр Гауса	10
2.2. Медіанний фільтр	13
Розділ 3. Виділення контуру за допомогою диференціальних операторів	16
3.1. Найпростіший диференціальний оператор	16
3.2. Оператор Робертса	17
3.3. Оператор Превіта	18
3.4. Оператор Собеля	18
3.5. Оператор Лапласа	19
3.6. Порогова функція	21
3.7. Нормалізація зображення	22
Розділ 4. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків	23
4.1. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею першого порядку	23
4.2. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею другого порядку	24
Розділ 5. Чисельний експеримент методу виділення контурів зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків	25
5.1. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею першого порядку	25
5.2. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею другого порядку	28
Висновки	31
Література	32

Вступ

Завдяки швидкому розвитку комп'ютерних технологій, почали з'являтися і також швидко розвиватись багато інших технологій, серед яких не стала виключенням і цифрова обробка зображень. На теперішній час цифрова обробка зображень стала невід'ємною частиною нашого життя, так як потужність та доступність цифрових пристроїв, які її використовують, безупинно збільшується.

Однією з найбільш важливих проблем цифрової обробки зображення є виділення контурів, так як контур зазвичай є найінформативнішим елементом будь-якого об'єкту, тому його виділення може спростити деякі задачі. В медицині воно допомагає лікарям знаходити проблеми зі здоров'ям у пацієнтів при застосуванні комп'ютерної томографії або рентгену. В системах відеонагляду виділення контурів використовується штучним інтелектом для розпізнавання об'єктів, наприклад автомобільних номерів для фіксування правопорушень. Виділення контурів поступово знаходить своє призначення у транспортних засобах з автоматичним керуванням, де воно також використовується у парі зі штучним інтелектом для розпізнавання об'єктів. Такий підхід розпізнавання образів за допомогою штучного інтелекту називають комп'ютерним зором.

Так як всі вище згадані області застосування є такими, від яких залежить життя та здоров'я людей, то вони потребують максимальну точність за будь-яких обставин, тому і методи виділення контурів мають бути максимально точними. Але сучасні методи виділення контурів і досі мають деякі недоліки, тому розробка більш досконалих алгоритмів є актуальною проблемою і буде такою ще довгий час.

В даній роботі будуть розглянуті деякі фундаментальні поняття в області цифрової обробки зображень, основні методи згладжування зображень, які використовуються для зменшення впливу шумів, та виділення контурів. Також буде розглянутий метод виділення контурів у зображенні зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків та проведений чисельний експеримент над даним алгоритмом.

Розділ 1. Перетворення Фур'є та оператор згортки

У даному розділі будуть розглянуті деякі фундаментальні поняття у цифровій обробці зображень, такі як перетворення Фур'є та згортка, які будуть часто використовуватись у даній роботі та необхідні для загального розуміння.

1.1. Перетворення Фур'є

Одним із фундаментальних понять у багатьох наукових сферах є перетворення Фур'є. Конкретно для цифрової обробки зображень, воно дозволяє перетворювати функцію, яка визначена в просторовій області, в функцію, яка буде визначеною в частотній області, і навпаки. Так як деякі задачі в частотній області спрощуються порівняно з задачами в просторовій області, що буде показано в цьому розділі, пряме та обернене перетворення Фур'є є дуже корисним в задачах цифрової обробки зображень.

Пряме перетворення Фур'є, або фур'є-образ, неперервної функції однієї змінної $f(x)$ задається рівністю:

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi iux} dx. \quad (1.1)$$

Функція $f(x)$ може бути знайдена по заданому фур'є-образу $F(u)$ за допомогою оберненого перетворення Фур'є [9], яке має вигляд:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)e^{2\pi iux} du. \quad (1.2)$$

Для неперервної функції двох змінних пряме перетворення Фур'є буде задаватись таким чином:

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(ux+vy)} dx dy. \quad (1.3)$$

Аналогічно одновимірному випадку, функція $f(x, y)$ може бути знайдена по заданому фур'є-образу $F(u, v)$ за допомогою оберненого перетворення Фур'є [9], яке має вигляд:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{2\pi i(ux+vy)} du dv. \quad (1.4)$$

Так як функція $f(x, y)$ в нашому випадку представляє собою зображення розмірами $M \times N$, яке по своїй суті є двовимірною дискретною функцією, то введемо означення дискретного перетворення Фур'є для функції двох змінних. Пряме дискретне перетворення Фур'є функції двох змінних задається виразом:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}, \quad (1.5)$$

$$u = 0, \dots, M - 1 \text{ та } v = 0, \dots, N - 1.$$

Як і в неперервному випадку, функція $f(x, y)$ може бути знайдена по заданому фур'є-образу $F(u, v)$ за допомогою оберненого дискретного перетворення Фур'є, яке буде мати вигляд:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{2\pi i\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}, \quad (1.6)$$

$$x = 0, \dots, M - 1 \text{ та } y = 0, \dots, N - 1.$$

Двовимірне дискретне перетворення Фур'є можна розділити на два одновимірних [7]. Пряме та обернене дискретні перетворення Фур'є будуть мати відповідно такий вигляд:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-\frac{2\pi i u x}{M}} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i v y}{N}} = \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-\frac{2\pi i u x}{M}}, \quad (1.7)$$

$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-\frac{2\pi i v y}{N}};$$

$$F(u, v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{\frac{2\pi i u x}{M}} \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{\frac{2\pi i v y}{N}} = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{\frac{2\pi i u x}{M}}, \quad (1.8)$$

$$F(x, v) = \frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{\frac{2\pi i v y}{N}}.$$

1.2. Оператор згортки

Ще одним із фундаментальних понять в цифровій обробці зображень, яке буде часто використовуватись у даній роботі – це згортка. У неперервному випадку згорткою функцій однієї змінної називається вираз такого вигляду:

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)h(x-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)h(s)ds. \quad (1.9)$$

Як можна бачити, згортка є комутативною операцією [5]. Для неперервних функцій двох змінних згортка буде задаватися таким виразом:

$$f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t)h(x-s, y-t)dsdt. \quad (1.10)$$

Знову ж таки, так як функція $f(x, y)$ в нашому випадку представляє собою зображення розмірами $M \times N$, яке по своїй суті є двовимірною дискретною функцією, то введемо означення згортки для дискретних функцій двох змінних. Дискретний аналог згортки для функцій двох змінних буде мати вигляд:

$$f(x, y) * h(x, y) = \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{t=0}^{N-1} f(s, t)h(x - s, y - t) , \quad (1.11)$$

$$x = 0, \dots, M - 1 \text{ та } y = 0, \dots, N - 1 .$$

Це визначення згортки підходить для функцій $f(x, y)$ та $h(x, y)$ одного розміру – $M \times N$, але для операцій згладжування та виділення контурів, які ми будемо використовувати у даній роботі, зображення буде згортатись з функціями набагато менших розмірів, зазвичай 3×3 , які називаються маскою згортки. Для цього введемо означення згортки зображення $f(x, y)$ з маскою згортки $h(x, y)$ розміром $m \times n$ (для зручності будемо вважати, що m та n – непарні):

$$f(x, y) * h(x, y) = \sum_{s=-a}^a \sum_{t=-b}^b h(s, t)f(x - s, y - t) , \quad (1.12)$$

$$a = \frac{m - 1}{2} \text{ та } b = \frac{n - 1}{2} .$$

Якщо знайти перетворення Фур'є від згортки двох функцій, то можна отримати такий результат [5]:

$$\mathcal{F}\{f(x, y) * h(x, y)\} = H(u, v)F(u, v) . \quad (1.13)$$

Даний результат є твердженням так званої теореми про згортку і записується у вигляді:

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v)F(u, v) . \quad (1.14)$$

Позначення \Leftrightarrow означає, що вираз в правій частині є перетворенням Фур'є виразу в лівій частині, і навпаки, вираз в лівій частині є оберненим перетворенням Фур'є виразу в правій частині. Виконуючи аналогічні перетворення, можна отримати обернений результат:

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow H(u, v) * F(u, v) . \quad (1.15)$$

Таким чином, теорема про згортку говорить про те, що операція згортки в просторовій області буде еквівалентною операції множення в частотній області, та навпаки, операція згортки в частотній області буде еквівалентною операції множення в просторовій області. За допомогою теореми про згортку ми можемо обчислити згортку двох функцій шляхом знаходження фур'є-образів цих функцій за допомогою прямого перетворення Фур'є, їх множення та знаходження оберненого перетворення Фур'є цього добутку.

Хоча такий підхід звучить складно, насправді він може заощадити багато обчислювальних ресурсів. Оскільки обчислення згортки у просторовій області потребує обчислення подвійної суми, складність алгоритму стає квадратичною, тобто $O(N^2)$. У частотній області потрібно виконати лише просте множення, що дорівнює лінійній складності, тобто $O(N)$. Однак, перетворення Фур'є має також квадратичну складність, але вона може бути зменшена до $O(N \log(N))$ за допомогою швидкого перетворення Фур'є.

1.3. Швидке перетворення Фур'є

Так як вже відомо, що двовимірне дискретне перетворення Фур'є може бути розкладене на два одновимірних, то буде достатньо сфокусуватись на швидкому перетворенні Фур'є в одновимірному випадку. Один із найпростіших алгоритмів M -точкового швидкого перетворення Фур'є (для спрощення припускається, що M є степінню двійки) має такий вигляд:

$$F(u) = \sum_{x=0}^{\frac{M}{2}-1} f(2x)e^{-\frac{2\pi i u x}{M}} + e^{-\frac{2\pi i u}{M}} \sum_{x=0}^{\frac{M}{2}-1} f(2x+1)e^{-\frac{2\pi i u x}{M}}, \quad (1.16)$$

$$u = 0, \dots, \frac{M}{2} - 1,$$

$$F\left(u + \frac{M}{2}\right) = \sum_{x=0}^{\frac{M}{2}-1} f(2x)e^{-\frac{2\pi i u x}{\frac{M}{2}}} - e^{-\frac{2\pi i u}{M}} \sum_{x=0}^{\frac{M}{2}-1} f(2x+1)e^{-\frac{2\pi i u x}{\frac{M}{2}}}, \quad (1.17)$$

$$u = \frac{M}{2}, \dots, M-1.$$

За допомогою цих виразів дискретне перетворення Фур'є для M точок може бути обчислене шляхом розкладу на дві половини. Перша половина підраховує два $\frac{M}{2}$ -точкових перетворення для $u = 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$, а друга половина – для $u = \frac{M}{2}, \dots, M - 1$. Таким чином, отримане перетворення буде аналогічне звичайному дискретному перетворенню Фур'є, але буде вимагати значно меншого числа операцій при роботі з реальними зображеннями [7].

Як було показано, фільтрація в частотній області може заощадити обчислювальні ресурси, та відповідно час, що є основним критерієм при роботі з обмеженими ресурсами. Але обмеженість ресурсів не буде першочерговою проблемою у даній роботі. До того ж, обробка зображень в частотній області не є такою ж інтуїтивно зрозумілою, як в просторовій області, тому у даній роботі будуть розглянуті лише такі методи, які використовуються в просторовій області, хоча деякі з них можуть бути переведені в частотні аналоги, про що буде сказано.

Розділ 2. Згладжування зображення

В просторовій області зображення представляє собою функцію, значеннями якої є рівень яскравості. Перепади значень яскравості між двома сусідніми пікселями можуть відповідати як і контурам, які треба виділити, так і деяким шумам. Так як виділення контурів в просторовій області базується саме на підкресленні перепадів яскравості, то шуми також можуть бути виділені, що по своїй суті буде помилковим контуром [1]. Тому перед виділенням контурів треба згладити зображення, тобто зменшити вплив шумів шляхом зменшення перепадів яскравості.

В даному розділі буде розглянутий фільтр Гауса та медіанний фільтр і буде порівняно принципи їх роботи.

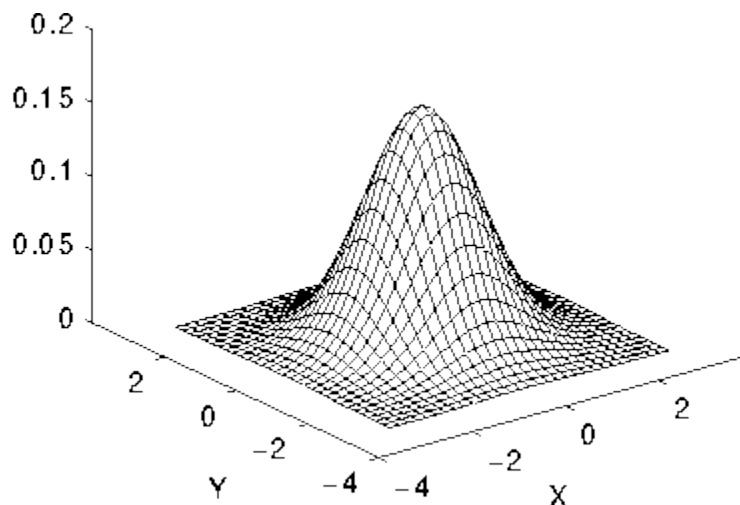
2.1. Фільтр Гауса

Одним зі способів згладжування зображення в просторовій області є згортка зображення з деякими фільтрами. Такі фільтри називають лінійними, а сам процес називається лінійною фільтрацією зображення, так як згортка по своїй суті є лінійною операцією. Основна суть лінійних фільтрів полягає в усередненні значення яскравості пікселів в області дії маски згортки цього фільтра. Так як звичний нам шум зазвичай характеризується не настільки великими перепадами яскравості, то такі маски будуть добре з ним справлятися. Негативною стороною даного підходу є те, що для задач виділення контурів, де контур також представляє собою перепад рівня яскравості, подібні фільтри будуть згладжувати і їх. Таким чином контури зображення будуть менш чіткі. Також, будь-який лінійний фільтр можна перевести в частотний аналог, так як він використовує згортку для фільтрації в просторовій області. Тому, за теоремою про згортку, його фур'є-образ можна використовувати для множення з фур'є-образом зображення, що і буде еквівалентно згортці цих двох функцій [8].

Одним з основних методів згладжування зображення за допомогою лінійної фільтрації в просторовій області є згортка зображення з фільтром Гауса. Фільтром Гауса називається функція, значеннями якої є значення нормального розподілу із нульовим математичним сподіванням [1]. У двовимірному випадку функція фільтру Гауса буде мати такий вигляд:

$$h(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.1)$$

де σ є середньоквадратичним відхиленням відповідного розподілу. Як можна бачити на малюнку 1, графік функції фільтру має вигляд колоколу. Параметр σ відповідає за ширину цього колоколу. При його збільшенні, ширина колоколу збільшується, тим самим збільшуючи степінь розфокусування. При зменшенні ж параметру, колокол навпаки буде менш широким, що дасть менше розфокусування зображення.



Малюнок 1. Графік двовимірного фільтру Гауса із середнім $(0, 0)$ та $\sigma = 1$.

Так як розподіл є ненульовий усюди, то в теорії необхідний нескінченно великий фільтр, але завдяки правилу трьох сігм, достатнім розміром фільтра буде $6 \cdot \sigma$, так як ми маємо справу з двовимірною функцією. Але, зазвичай, розміри фільтра є ще меншими, наприклад 3×3 при $\sigma = 1$. Для формування маски фільтра Гауса беруться значення її функції навколо початку координат. Наприклад, для маски згортки розміру 3×3 такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_4 & w_5 & w_6 \\ w_7 & w_8 & w_9 \end{bmatrix}$$

будуть братися такі значення функції фільтра Гауса:

$$w_1 = h(-1, -1), w_2 = h(-1, 0), \dots, w_9 = h(1, 1).$$

Маска фільтра Гауса розмірами $m \times n$ (будемо вважати, що m та n - непарні) буде формуватись аналогічним чином. Після чого, отримана маска при згортці з зображенням буде його згладжувати. Приклад роботи фільтра зображений на малюнку 2.



Малюнок 2. (а) Вхідне зображення під впливом деякого шуму; (б) Результат роботи фільтра Гауса з параметром $\sigma = 1$; (в) Результат роботи фільтра Гауса з параметром $\sigma = 2$; (г) Результат роботи фільтра Гауса з параметром $\sigma = 4$.

2.2. Медіанний фільтр

Фільтр Гауса досить добре справляється з шумами, значення яскравостей яких вписуються в нормальний розподіл. До речі, такі шуми називають також гаусовими. Але якщо шум має імпульсний характер, котрий характеризується заміною окремих пікселів на чорні або білі, то він не зможе до кінця згладити такі шуми. Наприклад, на малюнку 3 можна побачити, що фільтр Гауса з параметром $\sigma = 2$ достатньо сильно згладив зображення, але вплив імпульсного шуму все одно досить великий.



Малюнок 3. (а) Вхідне зображення під впливом імпульсного шуму; (б) Зображення згладжене фільтром Гауса.

Медіанний фільтр, як буде показано пізніше, добре справляється з таким видом шумів, що є його перевагою над лінійними алгоритмами, хоча він не згладжує зображення, як фільтр Гауса, а просто видаляє шуми імпульсного характеру. По суті він є евристичним методом обробки інформації та не представляє собою математичний розв'язок строго сформульованої задачі, що і є його головним недоліком.

Як відомо, медіаною набору чисел є таке число ξ , що одна половина чисел з набору менша або рівна за ξ , а друга половина — більша або рівна за ξ при впорядкуванні чисел у зростаючому або спадному порядку. Для медіанної фільтрації найчастіше застосовується маска з непарним числом пікселів у вигляді хреста або квадрату [6], наприклад, як на малюнку 4. Елементи цієї маски сортуються за зростанням або

спаданням, тоді центральний елемент цієї маски та буде медіаною, на яку і заміниться минулий центральний елемент.



Малюнок 4. Приклад масок для медіанного фільтру.

Нехай для деякого зображення ми застосуємо медіанний фільтр з маскою 3×3 .
Нехай маска в деякому околі зображення буде мати вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Як можна бачити, значення яскравості центрального пікселя дуже відрізняється від сусідніх значень, що може свідчити про наявність імпульсного шуму. Тому за допомогою медіанного фільтра, ми можемо позбутися шумів такого виду. Очевидно, що медіаною цієї маски буде число 0, яке і буде підставлене замість числа 255. На малюнку 5(б) медіанний фільтр видалив усі імпульсні шуми, при тому, зберігши чіткість зображення, що є його додатковою перевагою над фільтром Гауса.

На відміну від лінійних фільтрів, які використовують лінійну операцію згортки з деякою маскою, медіанний фільтр просто виконує операцію пошуку медіанного значення над деяким околом зображення, що очевидно не є лінійною операцією. Таким чином, медіанний фільтр відносять до представників нелінійної фільтрації. Так як нелінійні фільтри не використовують згортку для фільтрації в просторовій області, то теорема про згортку не розповсюджується на такий вид фільтрів, тобто вони не можуть бути переведені в частотний аналог для множення з фур'є-образом зображення [8].



Малюнок 5. (а) Вхідне зображення під впливом імпульсного шуму; (б) Результат роботи медіанного фільтра.

Розділ 3. Виділення контуру за допомогою диференціальних операторів

Після згладжування зображення може бути виконана операція виділення контурів. Оскільки в просторовій області контури відповідають різким перепадам яскравості, то тепер потрібно підкреслити їх та додатково зменшити вплив областей з менш різким перепадом, так як вони не будуть відповідати контурами [3].

В просторовій області підкреслення перепадів яскравості може бути зроблено за допомогою диференціальних операторів. Так як похідна характеризує швидкість зміни функції, то різкі перепади яскравості будуть мати велике значення похідної, а місця з постійною яскравістю будуть мати похідну близьку до 0. Таким чином, контури зображення будуть виділені.

Розглянемо декілька методів виділення контурів у зображенні за допомогою диференціальних операторів та порівняємо їх.

3.1. Найпростіший диференціальний оператор

Один з найпростіших підходів підкреслення перепадів яскравості використовує наближене обчислення частинних похідних в точці (x, y) . Для околу вигляду:

$$\begin{pmatrix} f(x-1, y-1) & f(x-1, y) \\ f(x, y-1) & f(x, y) \end{pmatrix}$$

значення частинних похідних буде мати такий вигляд:

$$G_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f(x, y) - f(x-1, y); \quad (3.1)$$

$$G_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y) - f(x, y-1). \quad (3.2)$$

Після чого ці частинні похідні використовуються для розрахунку величини градієнта, основні функції для розрахунку яких мають такий вигляд:

$$\nabla f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^2}; \quad (3.3)$$

$$\nabla f(x, y) = \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|; \quad (3.4)$$

$$\nabla f(x, y) = \max\left\{\left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|\right\}. \quad (3.5)$$

Таким чином, нульові перепади яскравості в обох напрямках будуть мати градієнт рівний 0, а різкі перепади яскравості будуть мати великі значення градієнту, що і буде свідчити про наявність контуру [4].

3.2. Оператор Робертса

У випадку коли розглядаються 4 сусідні точки вигляду:

$$\begin{pmatrix} f(x, y) & f(x, y + 1) \\ f(x + 1, y) & f(x + 1, y + 1) \end{pmatrix},$$

та шукається перепад значень яскравості в діагональних напрямках, то такий оператор називається оператором Робертса [2-4], градієнт в точці (x, y) якого апроксимується наступними функціями:

$$G_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f(x + 1, y + 1) - f(x, y), \quad (3.6)$$

$$G_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y + 1) - f(x + 1, y). \quad (3.7)$$

Ці похідні можуть бути реалізовані шляхом згортки зображення з масками розміру 2×2 такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.3. Оператор Превіта

Маски 2×2 концептуально прості, але не настільки зручні для визначення напрямку перепадів яскравості, як маски, які є симетричними відносно центрального елемента. Такі маски враховують значення з обох сторін від центральної точки і тому дають більше інформації про напрямок перепаду яскравості. Мінімальні розміри таких масок дорівнюють 3×3 [2-4]. Для околу 3×3 вигляду:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & f(x, y) & e \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

найпростіше дискретне наближення частинних похідних буде задаватись виразами такого виду:

$$G_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = (g + h + i) - (a + b + c), \quad (3.9)$$

$$G_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = (c + e + i) - (a + d + g). \quad (3.10)$$

Даний оператор називається оператором Превіта. Він може бути заданий за допомогою масок 3×3 такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

3.4. Оператор Собеля

Невелика видозміна оператора Превіта полягає у зміні коефіцієнтів для центральних елементів і буде задаватись виразами такого виду:

$$G_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = (g + 2h + i) - (a + 2b + c), \quad (3.12)$$

$$G_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = (c + 2e + i) - (a + 2d + g). \quad (3.13)$$

Даний оператор називається оператором Собеля. Ці коефіцієнти використовуються для зменшення ефекту згладжування зображення за рахунок надання більшого значення для центральних елементів [2-4]. Аналогічно оператору Превіта, оператор Собеля задається за допомогою масок 3×3 такого вигляду:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

3.5. Оператор Лапласа

Також для підкреслення перепадів яскравості у зображенні можуть використовуватись похідні другого порядку. Найпростіший диференціальний оператор другого порядку використовує функцію Лапласа (Лапласіан) [2], яка має вигляд:

$$L(f(x, y)) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}. \quad (3.15)$$

Апроксимація другої похідної для дискретної функції має вигляд:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x} = f(x + 1, y) - 2f(x, y) + f(x - 1, y), \quad (3.16)$$

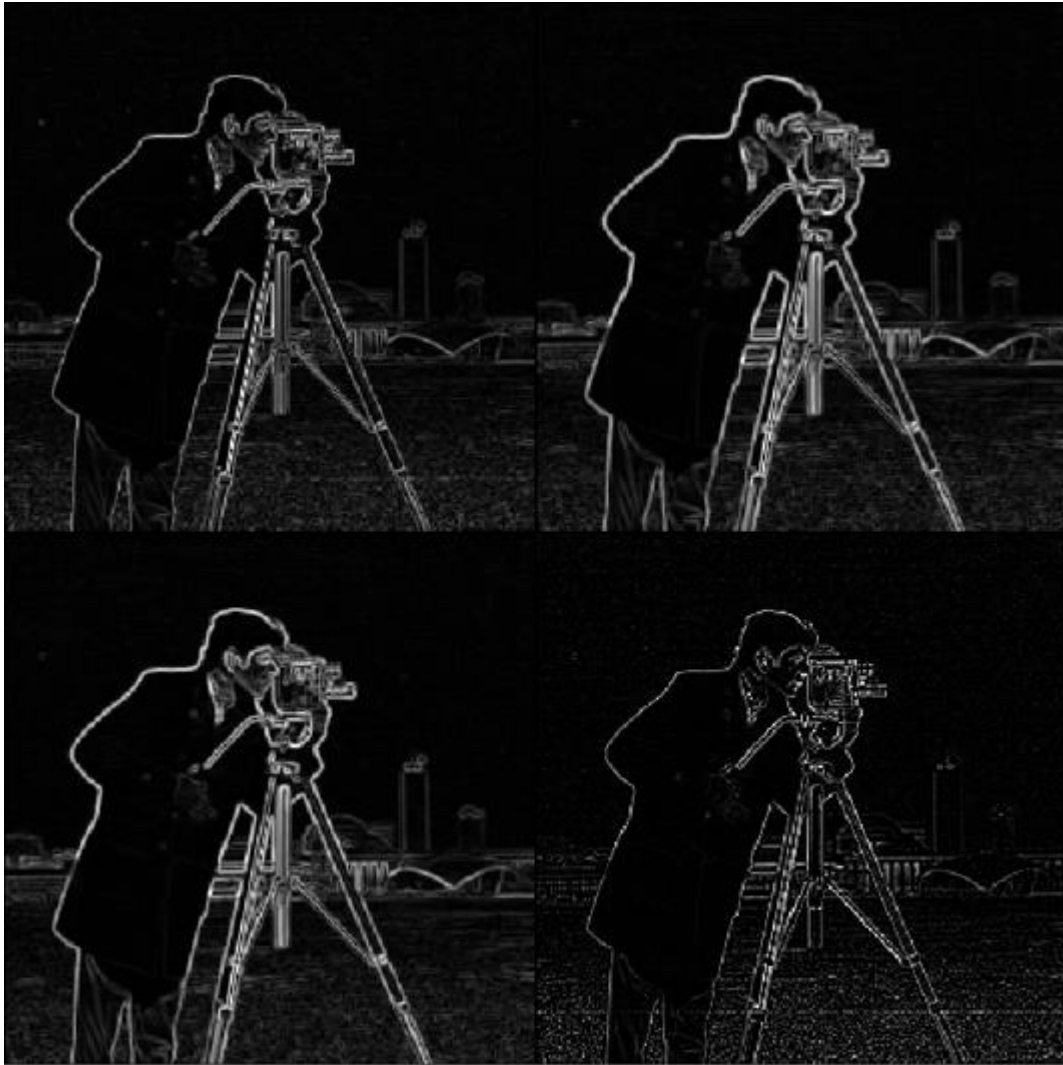
$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y} = f(x, y + 1) - 2f(x, y) + f(x, y - 1). \quad (3.17)$$

Тоді, дискретна апроксимація Лапласіана буде мати вигляд:

$$L(f(x, y)) = f(x + 1, y) + f(x - 1, y) + f(x, y + 1) + f(x, y - 1) - 4f(x, y). \quad (3.18)$$

Відповідна маска оператора Лапласа матиме вигляд:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$



Малюнок 6. Результат роботи диференціальних операторів. (а) Робертса; (б) Превіта; (в) Собеля; (г) Лапласа.

Оператори Робертса, Превіта та Собеля не будуть лінійними, так як вони використовують нелінійні операції при обчисленні значень градієнту: піднесення в степінь, пошук кореня чи абсолютного значення. На відміну від диференціальних операторів першого порядку, Лапласіан не використовує нелінійні операції для обчислення значення градієнту, тому, завдяки теоремі про згортку, він може бути переведений в частотний аналог для множення з фур'є-образом зображення, що буде еквівалентно згортці цих функцій в просторовій області [3].

3.6. Порогова функція

Після обчислення градієнта для кожної точки зображення, можна прибрати незначні перепади яскравості, котрі не були до кінця згладжені. Для цього використовують порогову функцію, яка має вигляд:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & \nabla f(x, y) > T \\ 0, & \nabla f(x, y) \leq T \end{cases} \quad (3.21)$$

Також можна використати порогову функцію для частинних похідних до обчислення градієнта, яка буде мати такий вигляд:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1, & |G_x| \geq \Delta \text{ або } |G_y| \geq \Delta \\ 0, & |G_x| < \Delta \text{ та } |G_y| < \Delta \end{cases} \quad (3.22)$$

Таким чином, в місцях, в яких значення градієнту або значення частинних похідних нижчі за деяку константу, значення градієнту будуть прирівняні до 0. Це дозволяє видалити незначні контури, які через невелике значення градієнту скоріш за все не будуть важливими, та зберегти контури, які є більш інформативні [2].



Малюнок 7. Результат роботи фільтру Лапласа.
(а) без порогової функції; (б) з пороговою функцією (3.21), де $T = 100$.

3.7. Нормалізація зображення

Як вже було сказано, зображення в просторовій області представляє собою функцію значень яскравостей. Зазвичай, в комп'ютерній обробці зображень, мінімальним значенням яскравості кожного пікселя є 0, що відповідає мінімальній яскравості, а максимальним – 255, що відповідає максимальній яскравості. Іноді після виділення контурів, значення яскравості в деяких пікселях може перевищувати максимальне значення, тому потрібно нормалізувати значення яскравостей цих пікселів до початкового діапазону значень. Це може бути зроблено за допомогою наступної формули, яка є загальною для будь-якого діапазону значень яскравості:

$$g(x, y) = (f(x, y) - \min\{f(x, y)\}) \frac{newMax - newMin}{\max\{f(x, y)\} - \min\{f(x, y)\}} + newMin, \quad (3.23)$$

де $f(x, y)$ – значення яскравості в точці (x, y) , $\min\{f(x, y)\}$ – мінімальне значення яскравості в усьому зображенні $\max\{f(x, y)\}$ – максимальне, $[newMin; newMax]$ – новий діапазон значень яскравості, в яке буде переведено зображення.

Якщо треба нормалізувати зображення у вищезгаданий діапазон значень яскравостей – $[0; 255]$, то формула (3.23) буде мати такий вигляд:

$$g(x, y) = \frac{255(f(x, y) - \min\{f(x, y)\})}{\max\{f(x, y)\} - \min\{f(x, y)\}}. \quad (3.24)$$

Розділ 4. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків

Описані до цього методи виділення контурів потребували попереднього згладжування для зменшення впливу шумів. В даному розділі буде розглянутий метод виділення контуру у зображенні з одночасним згладжуванням за допомогою поверхонь першого та другого порядків.

4.3. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею першого порядку

Розглянемо метод виділення контурів зі згладжуванням поверхнею першого порядку для маски 2×2 вигляду:

$$\begin{bmatrix} f(x-1, y-1) & f(x-1, y) \\ f(x, y-1) & f(x, y) \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Для елементів цієї маски побудуємо апроксимуючу площину вигляду:

$$\hat{f}(x, y) = ax + by + c. \quad (4.2)$$

Якщо площина побудована, тобто відомі a, b, c , то можна знайти частинні похідні цієї площини:

$$\frac{\partial \hat{f}(x, y)}{\partial x} = a, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \hat{f}(x, y)}{\partial y} = b. \quad (4.4)$$

І тоді ці частинні похідні можна використати для розрахунку величини градієнта:

$$\nabla \hat{f}(x, y) = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (4.5)$$

Значення цього градієнту, як і у випадку зі значеннями градієнту диференціальних операторів, будуть свідчити про наявність контурів.

4.4. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею другого порядку

Розглянемо метод виділення контурів зі згладжуванням поверхнею другого порядку для маски 3×3 вигляду:

$$\begin{bmatrix} f(x-1, y-1) & f(x-1, y) & f(x-1, y+1) \\ f(x, y-1) & f(x, y) & f(x, y+1) \\ f(x+1, y-1) & f(x+1, y) & f(x+1, y+1) \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Аналогічно, побудуємо апроксимуючу площину такого вигляду:

$$\hat{f}(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + \alpha x + \beta y + \gamma. \quad (4.13)$$

Якщо площина побудована, тобто відомі $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, то можна знайти частинні похідні цієї площини:

$$\frac{\partial \hat{f}(x, y)}{\partial x} = 2ax + cy + \alpha, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \hat{f}(x, y)}{\partial y} = 2by + cy + \beta. \quad (4.15)$$

І тоді ці частинні похідні можна використати для розрахунку величини градієнта:

$$\nabla \hat{f}(x, y) = \sqrt{\left(\frac{\partial \hat{f}(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{f}(x, y)}{\partial y}\right)^2}. \quad (4.18)$$

Як і у випадку виділення контуру зі згладжуванням поверхнею першого порядку, значення цього градієнту будуть свідчити про наявність контурів.

Розділ 5. Чисельний експеримент методу виділення контурів зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків

Для чисельного експерименту був обраний метод виділення контурів у зображенні зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків, який був описаний в минулому розділі. В якості інструменту для чисельного експерименту над алгоритмом було обране середовище MatLab. Вхідними даними алгоритму буде деяке зображення, вихідними ж даними – оброблене вхідне зображення з виділеними контурами. Також, після виділення контуру буде додатково використовуватись алгоритми порогової функції та нормалізації зображення, які описані в розділах 3.6 та 3.7 відповідно.

5.1. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею першого порядку

Для побудови площини (4.2) скористаємось методом найменших квадратів. При пошуку коефіцієнтів a, b, c будемо мінімізувати величину

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & \left(\hat{f}(x, y) - f(x, y) \right)^2 + \left(\hat{f}(x - 1, y) - f(x - 1, y) \right)^2 + \\ & + \left(\hat{f}(x, y - 1) - f(x, y - 1) \right)^2 + \left(\hat{f}(x - 1, y - 1) - f(x - 1, y - 1) \right)^2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & (ax + by + c - f(x, y))^2 \\ & + (a(x - 1) + by + c - f(x - 1, y))^2 + \\ & + (ax + b(y - 1) + c - f(x, y - 1))^2 + \\ & + (a(x - 1) + b(y - 1) + c - f(x - 1, y - 1))^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

З необхідних умов мінімуму (5.2) отримаємо:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} = 0; \quad \frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c} = 0. \quad (5.3)$$

Тобто:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial a} &= 2x(ax + by + c - f(x, y)) + & (5.4) \\
&+ 2(x - 1)(a(x - 1) + by + c - f(x - 1, y)) + \\
&+ 2x(ax + b(y - 1) + c - f(x, y - 1)) + \\
&+ 2(x - 1)(a(x - 1) + b(y - 1) + c - f(x - 1, y - 1)) = 0 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial b} &= 2y(ax + by + c - f(x, y)) + & (5.5) \\
&+ 2y(a(x - 1) + by + c - f(x - 1, y)) + \\
&+ 2(y - 1)(ax + b(y - 1) + c - f(x, y - 1)) + \\
&+ 2(y - 1)(a(x - 1) + b(y - 1) + c - f(x - 1, y - 1)) = 0 .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial c} &= 2(ax + by + c - f(x, y)) + & (5.6) \\
&+ 2(a(x - 1) + by + c - f(x - 1, y)) + \\
&+ 2(ax + b(y - 1) + c - f(x, y - 1)) + \\
&+ 2(a(x - 1) + b(y - 1) + c - f(x - 1, y - 1)) = 0 .
\end{aligned}$$

Для простоти обчислень невідомих коефіцієнтів розглянемо маску (4.1) при $x = 1$ та $y = 1$, тобто:

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) \\ f(1,0) & f(1,1) \end{bmatrix} . \quad (5.7)$$

Для виразів (5.4) – (5.6) також припустимо, що $x = 1$ та $y = 1$, тоді відповідно до них отримаємо такі вирази:

$$2a + b + 2c = f(1,1) + f(1,0) , \quad (5.8)$$

$$a + 2b + 2c = f(1,1) + f(0,1) , \quad (5.9)$$

$$a + b + 2c = \frac{f(1,1) + f(0,1) + f(1,0) + f(0,0)}{2} . \quad (5.10)$$

З виразів (5.8) – (5.10) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a, b, c . Розв'язком даної системи буде:

$$a = \frac{f(1,1) + f(1,0) - f(0,1) - f(0,0)}{2}, \quad (5.11)$$

$$b = \frac{f(1,1) + f(0,1) - f(1,0) - f(0,0)}{2}, \quad (5.12)$$

$$c = \frac{-f(1,1) + f(0,1) + f(1,0) + 3f(0,0)}{4}. \quad (5.13)$$

Спробуємо виділити контури у зображенні за допомогою знайдених значень a , b , c . Також, після виділення контурів, нормалізуємо зображення та застосуємо порогову функцію для значення градієнту 50. Програмний код у середовищі MatLab буде виглядати наступним чином:

```
function output_image=approx1()
    a=imread('cameraman.tif');
    f=double(a);
    [m,n]=size(f);
    gx=zeros(m,n);

    for i=2:m
        for j=2:n
            a=(f(i,j)+f(i,j-1)-f(i-1,j)-f(i-1,j-1))/2;
            b=(f(i,j)+f(i-1,j)-f(i,j-1)-f(i-1,j-1))/2;
            gx(i,j)=sqrt(a^2+b^2);
        end
    end

    m1=max(max(gx));
    m2=min(min(gx));
    ss=255*(gx-m2)/(m1-m2);

    for i=1:m
        for j=1:n
            if ss(i,j)<50
                ss(i,j)=0;
            else
                ss(i,j)=255;
            end
        end
    end

    output_image=uint8(ss);
end
```

5.2. Виділення контуру зі згладжуванням поверхнею другого порядку

Для методу виділення контурів у зображенні зі згладжуванням поверхнею другого порядку також для спрощення розглянемо маску (4.12) при $x = 1$ та $y = 1$, тобто:

$$\begin{bmatrix} f(0,0) & f(1,0) & f(2,0) \\ f(0,1) & f(1,1) & f(2,1) \\ f(0,2) & f(1,2) & f(2,2) \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

Коефіцієнти $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ площини (4.13) будуть також знаходитись за допомогою мінімізації квадратичної похибки:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = & \left(f(0,0) - \hat{f}(0,0)\right)^2 + \left(f(0,1) - \hat{f}(0,1)\right)^2 + \left(f(0,2) - \hat{f}(0,2)\right)^2 + \\ & + \left(f(1,0) - \hat{f}(1,0)\right)^2 + \left(f(1,1) - \hat{f}(1,1)\right)^2 + \left(f(1,2) - \hat{f}(1,2)\right)^2 + \\ & + \left(f(2,0) - \hat{f}(2,0)\right)^2 + \left(f(2,1) - \hat{f}(2,1)\right)^2 + \left(f(2,2) - \hat{f}(2,2)\right)^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Це приводить до системи лінійних рівнянь $Ax = b$, де:

$$A = \begin{bmatrix} 51 & 25 & 27 & 27 & 15 & 15 \\ 25 & 51 & 27 & 15 & 27 & 15 \\ 27 & 27 & 25 & 15 & 15 & 9 \\ 27 & 15 & 15 & 15 & 9 & 9 \\ 15 & 27 & 15 & 9 & 15 & 9 \\ 15 & 15 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{bmatrix};$$

$$b^T = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6),$$

$$b_1 = f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + 4(f(0,2) + f(1,2) + f(2,2)),$$

$$b_2 = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) + 4(f(2,0) + f(2,1) + f(2,2)),$$

$$b_3 = f(1,1) + 2f(2,1) + f(1,2) + 4f(2,2),$$

$$b_4 = f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + 2(f(0,2) + f(1,2) + f(2,2)),$$

$$b_5 = f(1,0) + f(1,1) + f(1,2) + 2(f(2,0) + f(2,1) + f(2,2)),$$

$$b_6 = f(0,0) + f(1,0) + f(2,0) + f(0,1) + f(1,1) + f(2,1) + f(0,2) + f(1,2) + f(2,2);$$

$$x^T = (a, b, c, \alpha, \beta, \gamma).$$

Тоді коефіцієнти апроксимуючої поверхні другого порядку наступні:

$$x = A^{-1}b.$$

Спробуємо виділити контури у зображенні за допомогою знайдених значень $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$. Також, після виділення контурів, нормалізуємо зображення та застосуємо порогову функцію для значення градієнту 50. Програмний код у середовищі MatLab буде виглядати наступним чином:

```
function output_image=approx2()
    a=imread('cameraman.tif');
    f=double(a);
    [m,n]=size(f);
    gx=zeros(m,n);

    A(1,:)=[51,25,27,27,15,15];
    A(2,:)=[25,51,27,15,27,15];
    A(3,:)=[27,27,25,15,15,9];
    A(4,:)=[27,15,15,15,9,9];
    A(5,:)=[15,27,15,9,15,9];
    A(6,:)=[15,15,9,9,9,9];
    A1=inv(A);

    for i=2:m-1
        for j=2:n-1
            b(1,1)=f(i,j-1)+f(i,j)+f(i,j+1)+4*(f(i+1,j-1)+f(i+1,j)+f(i+1,j+1));
            b(2,1)=f(i-1,j)+f(i,j)+f(i+1,j)+4*(f(i-1,j+1)+f(i,j+1)+f(i+1,j+1));
            b(3,1)=f(i,j)+2*f(i,j+1)+2*f(i+1,j)+4*f(i+1,j+1);
            b(4,1)=f(i,j-1)+f(i,j)+f(i,j+1)+2*(f(i+1,j-1)+f(i+1,j)+f(i+1,j+1));
            b(5,1)=f(i-1,j)+f(i,j)+f(i+1,j)+2*(f(i-1,j+1)+f(i,j+1)+f(i+1,j+1));
            b(6,1)=f(i-1,j-1)+f(i-1,j)+f(i-1,j+1)+f(i,j-1)+f(i,j)+...
                +f(i,j+1)+f(i+1,j-1)+f(i+1,j)+f(i+1,j+1);

            x=A1*b;
            gx(i,j)=sqrt((2*x(1)+x(3)+x(4))^2+(2*x(2)+x(3)+x(5))^2);
        end
    end

    m1=max(max(gx));
    m2=min(min(gx));
    ss=255*(gx-m2)/(m1-m2);

    for i=1:m
        for j=1:n
            if ss(i,j)<50
                ss(i,j)=0;
            end
        end
    end
end
```

```
    else
        ss(i,j)=255;
    end
end
end
end

output_image=uint8(ss);
end
```

Результати роботи методів виділення контурів зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків зображені на малюнках 8(а) та 8(б) відповідно. Як можна бачити, вони є кращими ніж результати роботи методів, які використовують диференціальні оператори, які описані у розділі 3, до того ж запропонований алгоритм не потребує попереднього згладжування, що і є його головною перевагою.



Малюнок 8. Результат реалізації алгоритмів виділення контуру у зображенні зі згладжуванням. (а) поверхнею першого порядку; (б) поверхнею другого порядку. (порогова функція не застосовувалась)

Висновки

У даній роботі були описані основні фундаментальні поняття в області цифрової обробки зображень, такі як перетворення Фур'є та оператор згортки. Також був описаний алгоритм швидкого перетворення Фур'є.

Була розглянута проблема впливу шумів на виділення контурів та були описані основні методи для зменшення їх впливу, а саме фільтр Гауса та медіанний фільтр. Були продемонстровані приклади роботи цих фільтрів та проведено порівняння їх роботи з різними видами шумів.

Також були розглянуті методи виділення контурів у зображенні, які базуються на обчисленні частинних похідних, а саме диференціальні оператори Робертса, Превіта, Собеля та Лапласа. Були продемонстровані приклади роботи даних операторів та проведено їх порівняння.

Був запропонований метод виділення контурів у зображенні зі згладжуванням поверхнями першого та другого порядків та був проведений чисельний експеримент над даним алгоритмом за допомогою середовища MatLab, результати якого були також продемонстровані.

Література

1. Шапиро Л. Компьютерное зрение / Л. Шапиро, Д. Стокман. – Москва: Бином, 2006. – 752 с. – ISBN 5-94774-384-1.
2. Яне Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. – Москва: Техносфера, 2007. – 584 с. – ISBN 978-5-94836-122-2.
3. Гонсалес Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – Москва: Техносфера, 2012. – 1104 с. – ISBN 978-5-94836-331-8.
4. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, Р. Харт. – Москва: Мир, 1976. – 511 с.
5. Прэтт У. Цифровая обработка изображений : в 2 кн. / У. Прэтт. – Москва: Мир, 1982. – Кн. 1. – 312 с.
6. Прэтт У. Цифровая обработка изображений : в 2 кн. / У. Прэтт. – Москва: Мир, 1982. – Кн. 2. – 480 с.
7. Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов / Р. Отнес, Л. Эноксон. – Москва: Мир, 1982. – 428 с.
8. Основы цифровой обработки сигналов : учеб. пособие / В. Г. Коберниченко ; М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2018. – 150 с. – ISBN 978-5-7996-2464-4.
9. Bracewell R. The Fourier Transform and Its Applications / R. Bracewell. – New York: McGraw-Hill, 2000. – 616 с. – ISBN 0-07-303938-1.