

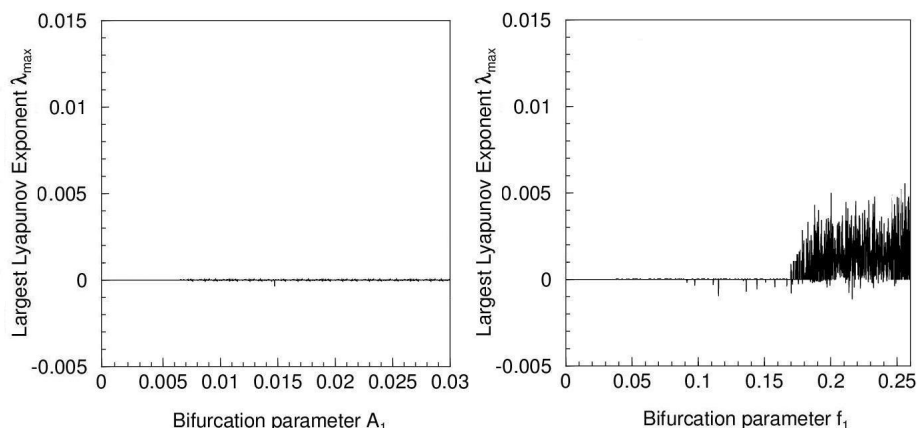


Рис. 1 Старший показник Ляпунова а) – системи (2)-(3), б) – системи(2)-(4)

2. Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем.

Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем, досліджувана в роботах [1] і [3], є системою дискретних відображень, що описують еволюцію характеристик стану кардіоінтервалу від удару до удару. Модель містить такі фізіологічні характеристики стану як систолічний тиск S , діастолічний тиск D , кардіоінтервал I (RR - інтервал), час артеріального загасання T . В рамках цієї моделі функції аорти моделюються за допомогою аортальної компресійної камери (Windkessel), закон Франка-Старлінга використано для моделювання міокарду. Враховано барорефлекторний механізм керування частотою серцевих скорочень (ЧСС) та периферічним опором. Вплив респіраторної системи на серцево-судинну обмежується лише механічною складовою і моделюється введенням відповідної адитивної добавки. Барорецепторний механізм керування рівнем артеріального тиску моделюється через введення так званого ефективного систолічного тиску $\hat{S}$. Згідно із загальноприйнятими фізіологічними нормами, в усталеному режимі $S_0 = 120$ мм рт. ст., $D_0 = 80$ мм рт. ст., $I_0 = 800$ мс, $T_0 = 1500$ мс. Після обезразмірювання по характерних величинах S_0 і T_0 , отримують наступну систему дискретних відображень [1,3]:

$$\begin{cases} D'_i = c_1 S'_{i-1} \exp(-I'_{i-1} / T'_{i-1}) \\ S'_i = D'_i + \gamma \frac{T_0}{S_0} I'_{i-1} + \frac{A}{S_0} \sin(2\pi f T_0 t_i) + \frac{c_2}{S_0} \\ I'_i = G_v \frac{S_0}{T_0} \hat{S}'_{i-\tau_v} + G_\beta \frac{S_0}{T_0} F(\hat{S}', \tau_\beta) + \frac{c_3}{T_0} \\ T'_i = 1 + G_\alpha S_0 / T_0 - G_\alpha S_0 / T_0 F(\hat{S}', \tau_\alpha) \\ \hat{S}'_i = 1 + 18 / S_0 \arctan(S_0 (S'_i - 1) / 18) \end{cases}, \quad (1)$$

де $i \geq 1$, $D' = D / S_0$, $S' = S / S_0$, $\hat{S}' = \hat{S} / S_0$,

$$I' = I / T_0, \quad T' = T / T_0, \quad c_1 = \frac{D_0}{S_0} \exp\left(\frac{I_0}{T_0}\right),$$

$$c_2 = S_0 - D_0 - \gamma I_0, \quad c_3 = I_0 - S_0 (G_v + G_\beta),$$

$$G_\alpha = 18 \text{ мс/мм рт.ст.}, \quad G_\beta = G_v = 9 \text{ мс/мм рт.ст.},$$

$\gamma = 0.016$ мм рт.ст./мс, $A = 3$ мм рт.ст. - амплітуда зміни тиску систоли, обумовлена рухом грудної клітки під час дихання, $f = 0.25$ Гц - частота

дихання, $t_i = \sum_{k=0}^{i-1} I_k$ - момент часу серцевого скорочення,

$$F = \frac{1}{9} (\hat{S}_{i-\tau-2} + 2\hat{S}_{i-\tau-1} + 3\hat{S}_{i-\tau} + 2\hat{S}_{i-\tau+1} + \hat{S}_{i-\tau+2}),$$

$\tau_\alpha = \tau_\beta = 4$, $\tau_v = 0$, якщо ЧСС менше за 75 удар/хв і $\tau_v = 1$, якщо ЧСС більше ніж 75 удар/хв.

Систему (1), після виключення залежних змінних, можна звести до системи трьох дискретних відображень з шістьма запізнюваннями по змінній S' , наступного вигляду:

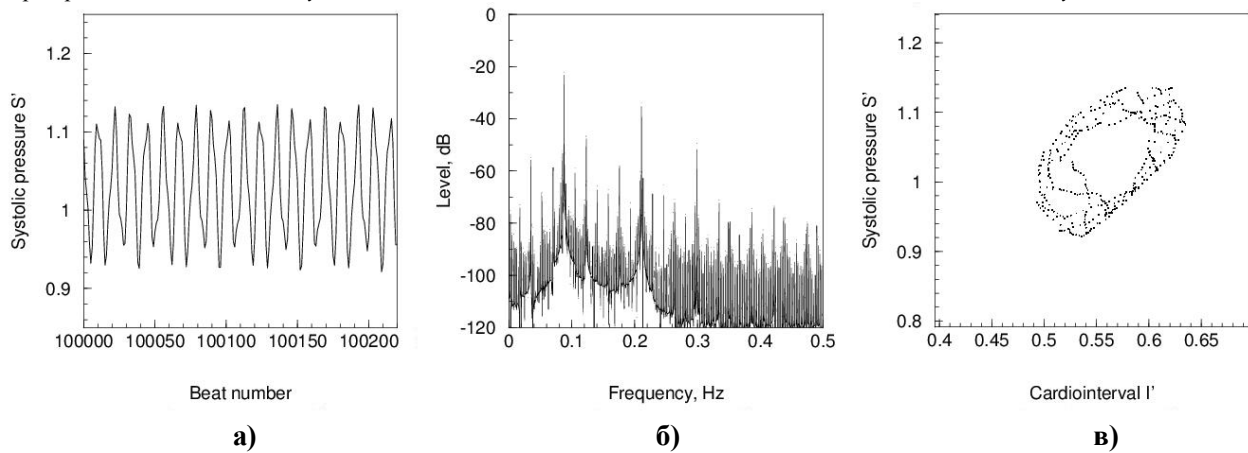


Рис. 2 Характеристики квазіперіодичного стану системи (2), без врахування зворотного зв'язку: а) – часова реалізація, б) – спектр потужності, в) – проекція фазового простору

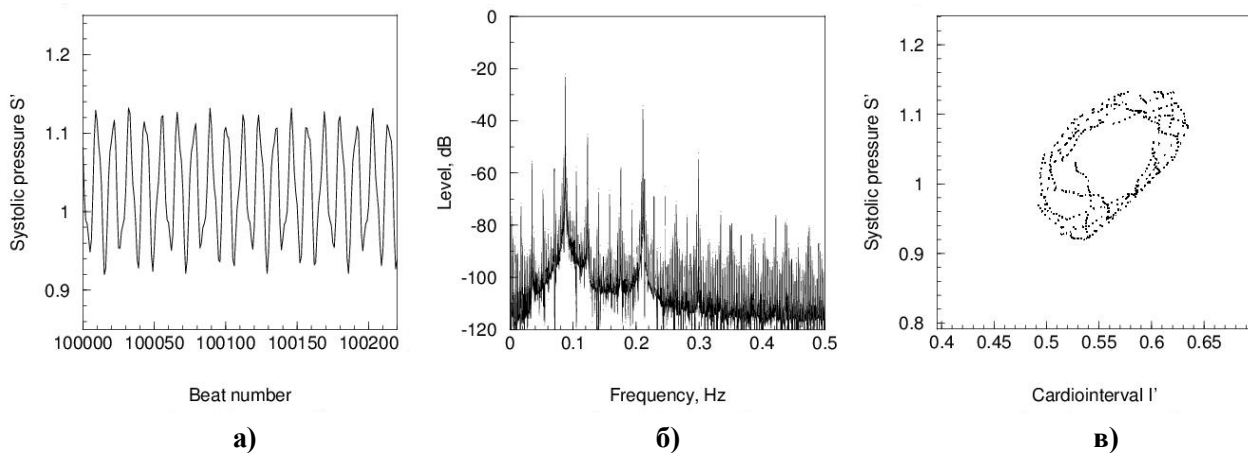


Рис. 3 Характеристики періодичного стану системи (2)-(3), при $A_1 = 0.03$

$$\begin{cases} S'_i = \varphi_1(I'_{i-1}, S'_{i-1}, S'_{i-2}, S'_{i-3}, S'_{i-4}, S'_{i-5}, S'_{i-6}, S'_{i-7}, t_{i-1}) \\ I'_i = \varphi_2(I'_{i-1}, S'_{i-1}, S'_{i-2}, S'_{i-3}, S'_{i-4}, S'_{i-5}, S'_{i-6}) \\ t_i = t_{i-1} + I'_{i-1} \end{cases}, \quad (2)$$

де φ_1 і φ_2 - нелінійні функції. Отримана система (2) зводиться шляхом заміни змінних до нелінійної системи дев'яти дискретних відображень без запізнювання. Таким чином, наявність такої неусувної властивості функціонування серцево-судинної системи людини як запізнювання, призводить до істотного підвищення порядку сукупної системи. Вплив респіраторної системи на серцево-судинну, в рамках даної моделі враховується параметрами A і f . Тому, зворотний вплив кардіосистеми може реалізовуватися шляхом впливу діяльності серця на ці дві характеристики. У даній роботі такий зворотний зв'язок моделюється найбільш простими лінійними зв'язками. Так, амплітуда зміни систолічного тиску, обумовлена рухом грудної клітки під час дихання, припускається залежною від значення тиску систоли на попередньому кардіоінтервалі

згідно із законом:

$$A^i = A_0 - A_1(S_{i-1} - S_0), \quad (3)$$

де $A_0 = A$, $A_1 \geq 0$, що моделює зменшення амплітуди дихання при збільшенні систолічного тиску. Частота дихання припускається залежною від частоти серцевих скорочень згідно залежності:

$$f^i = f_0 + f_1(1/I_{i-1} - 1/I_0), \quad (4)$$

де $f_0 = f$, $f_1 \geq 0$. Таким чином, в даній роботі досліджується система (2), при врахуванні зворотного впливу типу (3) або (4).

3. Усталені режими модифікованої моделі.

Перейдемо до дослідження усталених режимів системи (2). В силу нелінійності даної системи, її розв'язок можна отримати чисельно. Для чисельного моделювання вибираємо наступні початкові значення змінних: $I'[0] = 0.53$, $S'[-j] = 1.08$, $j = 0, \dots, 6$. На рис. 1.а показана залежність старшого показника Ляпунова

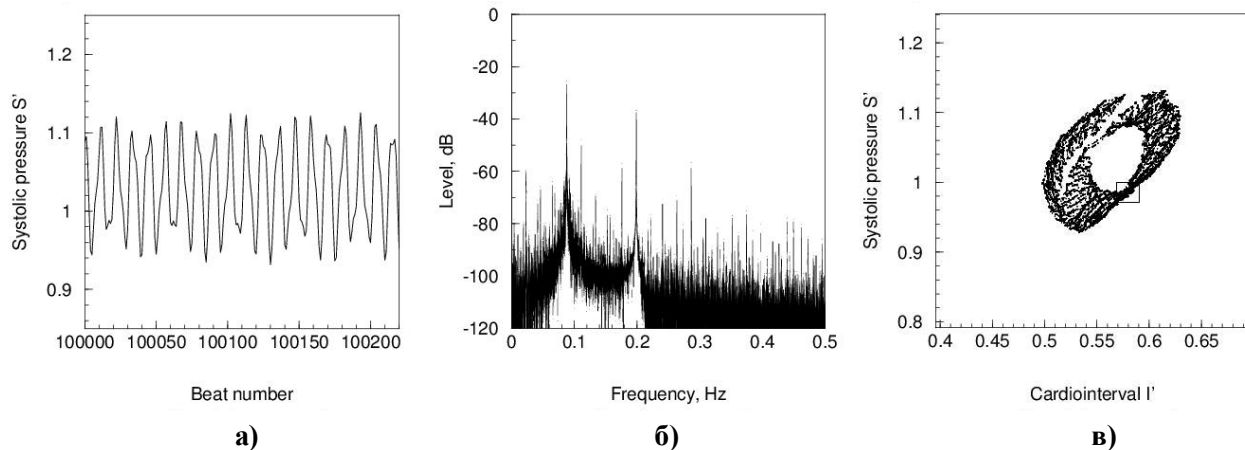


Рис. 4 Характеристики хаотичного стану системи (2)-(3), при $f_1 = 0.22$

системи (2)-(3), на проміжку $0 \leq A_1 \leq 0.03$. При нульовому значенні біфуркаційного параметра модель позбавлена зворотного впливу і характеризується регулярним усталеним режимом (рис. 2а-в.). При збільшенні значення параметра, спостерігається регуляризація усталеного режиму моделі. На рис. 3а-в. представлені характеристики граничного циклу, що реалізовується в системі при $A_1 = 0.03$.

Тепер розглянемо систему (2) із зворотним зв'язком (4) і біфуркаційним параметром f_1 . На рис. 1б. приведена залежність старшого показника Ляпунова моделі (2)-(4) на проміжку $0 \leq f_1 \leq 0.25$. В цьому випадку спостерігається жорсткий стрибок показника в додатну область (рис. 4а-в.). Таким чином, врахування лінійного зворотного зв'язку (4), для моделі (2), веде до моментальної хаотизації усталеного режиму сукупної системи.

Список використаних джерел

1. DeBoer R.W. Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model / R.W. DeBoer, J. M. Karemaker, J. Strakee // Amer. J. Physiol. – 1987. – **253**, – P. H680–H689.
2. Goldberger Ary L. Clinical Electrocardiography: A Simplified Approach, 7th ed. / Ary L. Goldberger. – Philadelphia: Mosby Elsevier, 2006. – 420 p.
3. Гринченко В.Т. Модель взаємодії серцево-судинної і респіраторної систем / В.Т. Гринченко, А.Г. Рудницький // Акустический вестник. – 2006. – **9**, N 3. – С. 16–26.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.

4. Висновки

Дослідження модифікованої моделі серцево-судинної системи, при врахуванні прямого і зворотного впливу респіраторної системи, на основі біфуркаційних кривих старших показників Ляпунова, проекцій фазових портретів, часових реалізацій і частотних спектрів, дозволило виявити регулярні періодичні, а також хаотичні режими; визначити сценарії переходу до хаотичного режиму (перехід до хаосу відбувається через жорсткий стрибок, при врахуванні впливу кардіоінтервала на частоту дихання). Показано, що взаємозв'язок ритмів серця і дихання призводить до різкого переходу до хаосу, характерного для нормальної динаміки кардіосистем.

References

1. DEBOER, R.W., KAREMAKER, J. M. and STRAKEE, J. (1987). Hemodynamic fluctuations and baroreflex sensitivity in humans: A beat-to-beat model. *Amer. J. Physiol.*, 253, p.H680–H689.
2. GOLDBERGER, ARY L. (2006) *Clinical Electro-cardiography: A Simplified Approach*, 7th ed. Philadelphia: Mosby Elsevier.
3. GRINCHENKO, V.T. and RUDNITSKY A.G. (2006) Model' vzaimodeistvia serdechno-sosudistoi i respiratornoi sistem. *Akusticheskii vestnik*, 9(3). p.16–26.
4. KUZNETSOV, S.P. (2001) *Dinamicheskii chaos*. Moskva: Phismatlit.

Надійшла до редколегії 26.10.18

УДК 519.962, 517.98

О.А. Лагода¹, к.ф.-м.н., доцент
А.В. Чайковський², д.ф.-м.н., доцент

**Повільно зростаючі розв'язки лінійного
різницевого рівняння загального
вигляду на напівосі з початковими
умовами**

¹Київський національний університет
технологій і дизайну, 01011, Київ, вул.
Немировича-Данченка, 2.

²Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, 01033, Київ, вул. Воло-
димирська, 64.

e-mail: ¹oksala@ukr.net, ²chaikovskiyav@ukr.net

O. A. Lahoda¹, Ph.D., Associate Professor
A. V. Chaikovs'kyi², Doctor of science,
Associate Professor

**Slowly growing solutions of general linear
difference equation on a half-axis with
initial conditions**

¹ Kyiv National University of Technologi-
es and Design, 01011, Kyiv, 2 Nemyrovycha-
Danchenka st.

²Taras Shevchenko National University of Kyiv,
01033, Kyiv, 64 Volodymyrska st.

e-mail: ¹oksala@ukr.net, ²chaikovskiyav@ukr.net

У роботі розглянуто лінійне неоднорідне різницеве рівняння на напівосі з початковими умовами відносно елементів комплексного банахового простору. Класичні результати щодо рівнянь такого типу містять умови існування та єдиності обмежених та періодичних розв'язків. Отримано узагальнення відомих результатів на випадок повільно зростаючих розв'язків наведеного рівняння, тобто розв'язків, що за нормою можуть зростати лише повільніше довільної зростаючої показникової функції. Зокрема, одержано достатні умови в термінах операторно-значної генератрисы розглянутого рівняння.

Ключові слова: повільно зростаючий розв'язок, лінійне різницеве рівняння, банахів простір.

The general linear non-homogeneous difference equation on a half-axis with initial conditions where variables belong to a complex Banach space is considered in the paper. The coefficients of equation are bounded operators in the Banach space. Classical results about such equations are conditions of existence and uniqueness of bounded and periodic solutions. The problem is to investigate other classes of sequences, that contain solutions of the equation and find sufficient conditions for operator coefficients for existence of solution.

In the paper generalization of known results is obtained for the case of slowly growing solutions. Solution is called slowly growing iff it's norm is growing more slowly than any growing exponent function. Sufficient conditions are obtained for sequence of bounded operator coefficients for existence of slowly growing solution. Conditions are formulated in terms of generating function for given difference equation.

Key Words: slowly growing solution, linear difference equation, Banach space.

Communicated by Prof. Perestyuk M.O.

1 Introduction

Let's denote by B complex Banach space with norm $\|\cdot\|$ and zero element $\vec{0}$, by $L(B)$ – Banach space of linear bounded operators, which are mapping B to B , with norm, which we denote $\|\cdot\|$ too, I – identity operator, O – zero operator in $L(B)$, $\sigma(A)$ – spectrum of operator A from $L(B)$.

In the paper we consider difference equation

on half-axis with initial conditions

$$\begin{cases} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} A_k x_{n-k} + y_n, & n \geq 1, \\ x_n = \alpha_n, & n \leq 0, \end{cases} \quad (1)$$

with respect to a sequence $\{x_n : n \geq 1\} \subset B$ for given sequences of elements $\{y_n : n \geq 1\} \subset B$, $\{\alpha_n : n \leq 0\} \subset B$ and operators $\{A_n : n \geq 1\} \subset L(B)$.

The important for applications question is to find conditions, under which solutions of equation (1) have special properties such as boundedness