

С. Парновский, д-р физ.-мат. наук
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

ВЛИЯНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ НА ВЕЛИЧИНУ ПОСТОЯННОЙ ХАББЛА, ОПРЕДЕЛЕННОЙ ПО СКОРОСТЯМ ГАЛАКТИК

При обработке данных о скоростях галактик и независимых от них оценок расстояний до них на основе любой статистической зависимости возникает эффект, родственный известному эффекту Малквиста. Он приводит к занижению величины постоянной Хаббла, полученной обычно применяемым при этом методом наименьших квадратов. Уменьшение составляет около 5 % при погрешности оценки расстояний 20 % и около 9 % при ошибке в 30 %. Этим нельзя объяснить обнаруженное недавно противоречие между значениями постоянной Хаббла, полученными в ранней и современной Вселенной, поскольку занижается большая из этих величин.

Ключевые слова: постоянная Хаббла, расстояния до галактик, статистические методы обработки данных.

S. Parnovsky, Dr Hab.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

IMPACT OF THE STATISTICAL EFFECTS ON THE HUBBLE CONSTANT VALUE OBTAINED FROM VELOCITIES OF GALAXIES

We can obtain the Hubble constant value for the late Universe from the sample of radial velocities of galaxies and independent estimations of distances to them based on any statistical relation such as Cepheid variables, Tully-Fisher relation etc. Usually, the method of least squares is used when processing such data. However, the value of the Hubble constant is somewhat underestimated due to a statistical effect similar to the well-known Malmquist bias. The main source of underestimation is associated with the deviation of the distances determined from the statistical dependence from their true values. The decrease of obtained Hubble constant value is about 5% for an error in the distance estimation of 20% and about 9% with an error of 30%.

This impact cannot explain the recently discovered tensions between the values of Hubble constant obtained from the early and the late Universe. The estimation $H_0 = 67.4$ km/s/Mpc obtained from observations in the recombination era account for about 92% of the average of the estimations based on observations of not very distant objects $H_0 = 73.3$ km/s/Mpc. Indeed, the described effect leads to underestimation of the largest of these values.

Key words: Hubble constant, distances to galaxies, statistical methods of data processing.

УДК 524.8

В. Жданов, д-р физ.-мат. наук, проф.,
О. Сташко, асп.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПАРАМЕТР ГАББЛА В $f(R)$ -ГРАВИТАЦІЇ

Вивчено умови на лагранжіани модифікованої гравітації, що імітують спостережувані величини стандартної космологічної моделі. А саме, розглянуто питання про вибір лагранжіана $f(R)$ -гравітації на основі діаграми Габбла. Отримано рівняння для $f(R)$, які, для заданого параметра Габбла $H(z)$, дозволяють визначати цю величину. Також розглянуто обернену задачу знаходження $H(z)$ для заданої функції $f(R)$, яка мало відрізняється від виразу загальної теорії відносності; знайдено загальний наближений вираз для $H(z)$.

Ключові слова: космологія, параметр Габбла, $f(R)$ -гравітація.

Вступ. Проблема "Hubble constant tension" стимулювала розробку розширень стандартної космологічної моделі, націлених на те, щоб отримати відмінну від Λ CDM залежність параметра Габбла H від червоного зміщення z і використати це для узгодження значень "ранньої" і "пізньої" сталої Габбла [1]. Із цією метою можна використовувати так звану $f(R)$ -гравітацію, яка модифікує загальну теорію відносності (ЗТВ) шляхом ускладнення гравітаційного лагранжіана за допомогою нелінійних степенів скалярної кривини (див., напр., [2] та посилання у цій роботі). Відповідна дія є

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (1)$$

Рівняння поля, що відповідають виразу (1), мають вигляд як у [2]

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) - \nabla_\mu \nabla_\nu f' + \square f' g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

де $R_{\mu\nu}$ – тензор Річчі, $R = g_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$; $f' \equiv df/dR$; $T_{\mu\nu}$ – стандартний тензор енергії імпульсу, який визначається з лагранжіана негравітаційних полів. У ЗТВ $f(R) = f_{GR}(R) \equiv R$, де адитивна константа в лагранжіані, яка відповідає внеску космологічної сталої в рівняннях Ейнштейна, далі буде врахована шляхом введення доданка $\varepsilon_\Lambda g_{\mu\nu}$ в $T_{\mu\nu}$.

Модифікації $f(R)$ природним чином впливатимуть на поведінку залежності $H(z)$, яку можна порівнювати з експериментальними даними. У цій роботі ми розглянемо і пряму задачу визначення обмежень на $f(R)$ на основі $H(z)$, і запропонуємо загальний наближений вираз для $H(z)$ за умови малих відхилень від ейнштейнівської $f(R)$.

Космологічні рівняння. Розглянемо метрику однорідного ізотропного Всесвіту й обмежимося просторово-плоским випадком:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 [d\chi^2 + \chi^2 dO^2],$$

де $a(t)$ – масштабний фактор. У цьому разі можна покласти $a(t_0) = 1$ без впливу на результати обчислення фізичних величин. Усі скалярні величини залежать лише від космологічного часу t , тому в "00"-компоненті рівняння (2) залишається лише перша похідна від $f \equiv f(R)$:

$$3H \frac{df'}{dt} + f' R_{00} - \frac{1}{2} f = \kappa T_{00}. \quad (3)$$

Можна показати, що у процесі виконання рівняння (3) також буде виконуватися рівняння для компоненти "00" за умови виконання коваріантного закону збереження для $T_{\mu\nu}$.

Перейдемо від змінної t до червоного зміщення $z = 1/a(t) - 1$;

$$dz = -\frac{1}{[a(t)]^2} \dot{a}(t) dt = -(1+z)H dt,$$

де $H = \frac{da}{adt}$ – параметр Габбла.

Виразимо всі необхідні величини через H та його похідні. Зокрема,

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} = 3\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz} - H^2\right), \quad R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + H^2\right) = 6\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz} - 2H^2\right). \quad (4)$$

З урахуванням (4) рівняння (3) набуде вигляду

$$-3(z+1)H^2 \frac{df'}{dz} + 3\left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz} - H^2\right)f' - \frac{1}{2}f = \kappa T_{00}. \quad (5)$$

Диференціюючи (5), отримуємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку відносно f' :

$$(z+1)H^2 \frac{d^2 f'}{dz^2} + \left(\frac{1+z}{2}\frac{dH^2}{dz} + 2H^2\right) \frac{df'}{dz} - f' \frac{dH^2}{dz} = -\frac{\kappa}{3} \frac{dT_{00}}{dz}, \quad (6)$$

яке дає змогу визначити f' у параметричному вигляді, якщо відомі T_{00} та $H(z)$ з певних фізичних або спостережних міркувань.

Довільність у визначенні $f(R)$. Нехай T_{00} відповідає певній космологічній моделі, для якої розв'язок у межах ЗТВ дає відоме рівняння Фрідмана $H = H_{GR}(z) = \frac{\kappa}{3} T_{00}$ при $f(R) \equiv R$. Явний вигляд $H_{GR}(z)$ залежить від внеску різних типів матерії. Покладемо $f(R) = R + \phi(z)$, де скалярна кривина R пов'язана з параметром Габбла відповідно до (4) при $H = H_{GR}(z)$. Згідно з (5) для $\phi(z)$ маємо

$$(z+1)H_{GR}^2 \frac{d^2 \phi'}{dz^2} + \left(\frac{1+z}{2}\frac{dH_{GR}^2}{dz} + 2H_{GR}^2\right) \frac{d\phi'}{dz} - \phi' \frac{dH_{GR}^2}{dz} = 0 \quad (7)$$

– однорідне диференціальне рівняння другого порядку, яке, очевидно, може мати ненульові розв'язки.

Проілюструємо це в межах моделі Всесвіту, заповненого темною енергією з густиною $\varepsilon_\Lambda = \text{const}$ та холодною речовиною з густиною енергії ε_c (з нульовим тиском). У цьому разі, з урахуванням вимог однорідності й ізотропії, $T_{00} = \varepsilon_c(t) + \varepsilon_\Lambda$, $T_{ij} = -\varepsilon_\Lambda g_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). З рівняння збереження $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ отримуємо рівняння гідродинаміки, звідки одержуємо звичайне співвідношення $\varepsilon_c(z) = \varepsilon_c(t_0)(1+z)^3$; відповідно

$$H_{GR}^2 = H_0^2 h^2(z), \quad h^2(z) = \Omega_c(z+1)^3 + \Omega_\Lambda, \quad H_0 = \frac{\kappa}{3} \varepsilon_{tot}. \quad (8)$$

де $\Omega_c = \frac{\varepsilon_c(t_0)}{\varepsilon_{tot}}$, $\Omega_\Lambda = \frac{\varepsilon_\Lambda}{\varepsilon_{tot}}$, $\varepsilon_{tot} = \varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_\Lambda$.

Зауважимо, що в пострекомбінаційний період в ε_c можна включити звичайну баріонну матерію та холодну темну матерію. Тоді (7) зводиться до

$$(z+1)\left[\Omega_c(z+1)^3 + \Omega_\Lambda\right] \frac{d^2 \phi'}{dz^2} + \left(\frac{7}{2}(1+z)^3 \Omega_c + 2\Omega_\Lambda\right) \frac{d\phi'}{dz} - 3\Omega_c(1+z)^2 \phi' = 0. \quad (9)$$

При $\Omega_\Lambda = 0$, $\Omega_c = 1$ це рівняння допускає точні (степеневі) розв'язки. Вони відповідають асимптотичі розв'язків (9) за великих z ($R \rightarrow -\infty$), $z+1 \approx (-R/3)^{1/3}$:

$$(z+1)^2 \frac{d^2 \phi'}{dz^2} + \frac{7}{2}(1+z) \frac{d\phi'}{dz} - 3\phi' = 0, \quad \phi'(R) \approx C_1(-R)^{\frac{1}{12}(\sqrt{73}-5)} + C_2(-R)^{\frac{1}{12}(5+\sqrt{73})}.$$

Відповідно, нехтуючи константою інтегрування, маємо

$$f(R) = f_{GR}(R) + \tilde{C}_1(-R)^{\beta_1} + \tilde{C}_2(-R)^{\beta_2}, \quad \beta_1 = \frac{\sqrt{73}+7}{12}, \quad \beta_2 = \frac{-\sqrt{73}+7}{12},$$

де домінуючим компонентом за великих R та z , що відповідають близькості до моменту рекомбінації водню є перший доданок $f(R) \approx f_{GR}(R) + \tilde{C}_1(-R)^{\beta_1}$. Отже, залишається довільність вибору однієї константи, для визначення

якої потрібна додаткова інформація. Зазначимо, що є певні свідчення [3] щодо відмінності діаграми Габбла від результатів стандартної моделі, але ці результати ще вимагають ретельної перевірки.

Наближені розв'язки динамічних рівнянь для заданого $f(R)$. Розглянемо тепер обернену задачу визначення $H(z)$, якщо відомо $f(R)$. Природно припустити, що внесок функції $\phi(z) = f(R) - R$, яка відрізняє рівняння модифікованої гравітації від ЗТВ, досить малий у сучасну епоху та для певного періоду в минулому. Це дає змогу досить просто будувати наближені розв'язки для $H(z)$. З рівняння (6) маємо, з урахуванням (4),

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} T_{00} - (z+1)H^2\phi'' \frac{dR}{dz} + \phi' \left(\frac{1+z}{2} \frac{dH^2}{dz} - H^2 \right) - \frac{\phi}{6}. \quad (10)$$

Розглянемо тензор $T_{\alpha\beta}$ відповідно до Λ CDM, а також нульове наближення для параметра Габбла згідно з (8). Тоді з (10) маємо аналітичний, але наближений, розв'язок для

$$H^2(z) = \frac{\kappa}{3} \varepsilon_{tot} [\Omega_c(1+z)^3 + \Omega_\Lambda] + 9H_0^4\Omega_c(1+z)^3 [\Omega_c(z+1)^3 + \Omega_\Lambda] \phi''(R_{GR}) + \\ + \frac{1}{2} \phi'(R_{GR}) H_0^2 (\Omega_c(z+1)^3 - 2\Omega_\Lambda) - \frac{\phi(R_{GR})}{6}, \quad (11)$$

де R_{GR} виражається явно через z у силу (4), (8).

Проілюструємо це для варіанта $f(R)$ -гравітації, розглянутого О. Старобінським [4] з $f(R) = R + \alpha R^2$, де $\alpha > 0$ – мала константа.

З точністю до першого порядку по α отримуємо з (11)

$$H(z) = H_0^* [\Omega_c(1+z)^3 + \Omega_\Lambda - \alpha^*(1+z)^6]^{1/2}, \quad (12)$$

де $H_0^* = H_0 [1 - \alpha^*]^{-1/2}$, $\alpha^* = \alpha \frac{27}{2} \Omega_c^2 H_0^2 = \frac{27}{2} \Omega_c^2 \mu$. Формула (12) справедлива за умови достатньої мализни параметра $\alpha^* \ll \Omega_c(1+z_{\max})^{-3}$ для $0 \leq z \leq z_{\max}$. Ця формула може бути безпосередньо застосована для обчислення фотометричної відстані й відстані за кутовим діаметром. Знайдемо часову залежність масштабного фактора. З (12) маємо рівняння

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0^* [\Omega_c a^{-3} + \Omega_\Lambda - \alpha^* a^{-6}]^{1/2},$$

яке зводиться до квадратур. Звідси за $t \leq t_0$

$$\frac{a^3 + \frac{\Omega_c}{2\Omega_\Lambda} + \left[a^6 + \frac{\Omega_c}{\Omega_\Lambda} a^3 - \frac{27}{2\Omega_\Lambda} \alpha \Omega_c^2 H_0^2 \right]^{1/2}}{1 + \frac{\Omega_c}{2\Omega_\Lambda} + \left[1 + \frac{\Omega_c}{\Omega_\Lambda} - \frac{27}{2\Omega_\Lambda} \alpha \Omega_c^2 H_0^2 \right]^{1/2}} = \exp \left[3\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0^* (t_0 - t) \right].$$

Якщо покласти $\alpha = 0$, отримаємо звичайний режим Λ CDM-моделі. При $\Omega_\Lambda \rightarrow 0$, $\Omega_c \rightarrow 1$, розкладаючи обидві частини рівняння, отримаємо $a(t) \sim (t_0 - t)^{2/3}$.

Висновки. Ми отримали наближені рівняння для параметра Габбла у випадку загальних, але малих поправок до гравітаційного лагранжіана загальної теорії відносності. Натомість, ми одержали рівняння для визначення лагранжіана $f(R)$ -гравітації через параметр Габбла. Варіанти вибору $f(R)$ за цими рівняннями можуть імітувати звичайні розв'язки Λ CDM, щоб їх відсіяти, необхідна додаткова інформація. Але, як показують приклади, рівняння (7) мають спадну та зростаючу моди, що можна використати для обмеження довільності у розв'язках. Утім урахування додаткових ступенів вільності може допомогти знайти розв'язання відомої проблеми "Hubble tension" за збереження основних припущень щодо складу Всесвіту.

Автори вдячні О. М. Александрову за корисні зауваження. Робота частково підтримана Національним фондом досліджень України за проектом № 2020.02/0073 та програмою "Астрономія та фізика космосу", тема 19БФ023-01.

Список використаних джерел

1. Di Valentino E. Cosmology Intertwined II: The Hubble Constant Tension / E. Di Valentino // arXiv:2008.11284v3 (2020).
2. De Felice A. $f(R)$ theories / A. De Felice, S. Tsujikawa // Living Rev. – Rel. 13, id. 3 (2010).
3. Tension with the flat Λ CDM model from a high-redshift Hubble diagram of supernovae, quasars, and gamma-ray bursts / E. Lusso, E. Piedipalumbo, G. Risaliti et al. // arXiv:1907.07692v4 (2019).
4. Starobinsky A. A. A new type of isotropic cosmological models without singularity / A. A. Starobinsky // Phys. Lett. –1980. – 91B. – P. 99–102.

Надійшла до редколегії 14.10.20