

**ВПЛИВ ЕЛІПТИЧНОСТІ ДЖЕРЕЛА НА КРИВІ БЛИСКУ В ПОЗАГАЛАКТИЧНИХ  
ГРАВІТАЦІЙНО-ЛІНЗОВИХ СИСТЕМАХ**

*Розглянуто статистичні ефекти еліптичності джерела, які можливо виявити по кривих блиску у позагалактичній гравітаційно-лінзовій системі за наявності багатьох подій перетину каустики. Як перше наближення для оцінювання ефекту розглянуто спрощений варіант задачі в межах наближення лінійної каустики, коли еліптичне джерело з гауссівським розподілом яскравості перетинають каустики різних орієнтацій, причому система мікролінз є ізотропною.*

*Ключові слова: гравітаційні лінзи, каустика-складка, мікролінзування, еліптичне джерело, криві блиску.*

**Вступ.** У позагалактичних гравітаційно-лінзових системах (ГЛС) спостерігають декілька макроскопічних зображень віддаленого джерела (квазара), які виникають завдяки усередненому гравітаційному полю галактики лінзи на передньому плані [1]. Але завдяки внеску окремих зір гравітаційне поле на промені зору кожного макрозображення сильно неоднорідне і змінне в часі, що приводить до ефектів мікролінзування – відносно швидких (з тривалістю порядку місяців) змін блиску. Зміни блиску різних зображень можна вважати незкорельованими – на відміну від власних коливань яскравості квазара, що повторюються у кожному зображенні з урахуванням часу відносної затримки; це дає змогу відокремити ефекти мікролінзування. Виділення варіацій спостережуваного потоку за рахунок мікролінзування в окремому макрозображенні – це складна спостережна задача, але у принципі вона є розв'язною за достатньої фотометричної точності та достатньої кількості спостережень.

У переважній більшості робіт під час моделювання ефектів мікролінзування у ГЛС припускають, що джерело є центрально-симетричним (див., напр., огляди [2, 3]), що обумовлено обмеженими можливостями спостережень. З іншого боку, цілком зрозуміло, що реальні джерела в ГЛС значно відрізняються від центрально-симетричних, хоча відрізнити це досить важко навіть у подіях з великим підсиленням, які асоціюють із перетинами джерела каустиками. Ретельний аналіз джерела в системі "Хрест Ейнштейна" проведено в роботі [4], де оцінено нахил акреційного диска навколо квазара. Безпосередньо процеси мікролінзування еліптичних джерел у подіях із великим підсиленням розглядалися в роботах [5–7]. В окремих подіях ефекти еліптичності у кривих блиску проявляють себе лише у пост-лінійних наближеннях для коефіцієнта підсилення [7] і зазвичай є досить малими. Але фотометрична точність зростає, а збільшення кількості засобів спостережень дозволяє сподіватися на збільшення можливостей для моніторингу ГЛС. Тому цікаво оцінити ефекти еліптичності за наявності багатьох подій перетину каустики. Повний аналіз пов'язаної із цим задачі з великою кількістю зір-мікролінз вимагає значних витрат обчислювального часу для побудови великої кількості модельних кривих блиску (див., напр., [4, 8, 9]). Отже, як перший крок для оцінювання ефекту, у цій роботі розглянуто спрощений варіант задачі. Припускаємо, що еліптичне джерело має гауссівський розподіл яскравості. Використовуючи систему відліку, пов'язану із джерелом, вважаємо, що його перетинають каустики-складки різних орієнтацій. У цьому разі застосовуємо наближення лінійної каустики і припускаємо, що система мікролінз є ізотропною, тобто всі орієнтації каустик відносно джерела та напрямки їхньої швидкості рівномірні.

**Модель джерела та коефіцієнт підсилення.** Розглянемо еліптичне джерело, яке у проєкції на картинну площину має гауссівський розподіл яскравості (нормований на одиницю):

$$B(\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{\pi ab} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\tilde{y}_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{\tilde{y}_2}{b} \right)^2 \right] \right\}, \quad b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad (1)$$

тут  $\varepsilon$  – ексцентриситет.

Повертаючи систему координат на кут  $\theta \in [0, 2\pi]$ , маємо  $\tilde{y}_1 = y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta$ ;  $\tilde{y}_2 = y_1 \sin \theta - y_2 \cos \theta$ , відповідно

$$B(\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi ab} \exp \left\{ - \frac{1}{a^2(1-\varepsilon^2)} \left[ y_1^2 \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta} + (1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta) \left( y_2 - y_1 \frac{\varepsilon^2 \sin \theta \cos \theta}{1-\varepsilon^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \right] \right\}. \quad (2)$$

Формула (2) записана у системі, де центр джерела  $\mathbf{y} = 0$  є нерухомим.

Використаємо наближення, де каустика є прямою  $y_1 = d$  ( $d$  – функція часу) і рухається паралельно осі  $y_2$ , перетинаючи джерело (рис. 1). У подіях із великим підсиленням під час перетину довільної точки джерела  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  простою каустикою з'являються чи зникають два додаткові зображення цієї точки (їх називають критичними, для реальної каустики виникнення чи зникнення цих зображень залежить від напрямку кривини каустики). Це приведе до збільшення чи зменшення спостережуваного потоку від джерела.

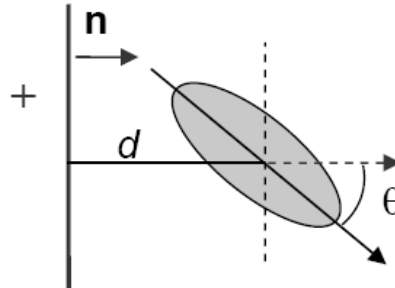
Розглядаючи окремі події, припускаємо, що вибір системи координат зроблено так, що критичні зображення виникають, якщо каустика перетинає джерело зліва направо, і зникають, якщо навпаки, тобто область, де виникають критичні зображення, розташована ліворуч від лінії  $y_1 = d$ . У наближенні лінійної каустики – для цієї орієнтації системи координат – залежність сумарного потоку випромінювання від критичних зображень від часу для джерела з вихідним розподілом яскравості  $B(\mathbf{y})$  має такий вигляд [1–3]:

$$J = \iint dy_1 dy_2 K(\mathbf{y}) B(\mathbf{y}), \quad (3)$$

де

$$K(\mathbf{y}) = A \frac{H(d - y_1)}{\sqrt{d - y_1}}, \quad (4)$$

тут  $H$  – функція Гевісайда, коефіцієнт  $A$  називають силою каустики,  $d$  – відстань від каустики до центра джерела. Використання (4) припускає, що розмір джерела значно менший радіуса кривини каустики. Точніші, пост-лінійні, наближення можна знайти в [10, 11]. Параметр  $d$  зазвичай вважають лінійною функцією від часу  $d = V_n t$ ,  $V_n$  – нормальна компонента швидкості каустики відносно джерела (у цьому разі це – проекція швидкості на вісь  $y_1$ ).



**Рис. 1.** Каустика (вертикальна суцільна лінія) у системі джерела. Знак плюс ліворуч від каустики вказує на область, де існують критичні зображення;  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до цієї області й до каустики. Після перетину джерела каустикою критичні зображення з'являються, якщо  $V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} > 0$ , чи зникають при  $V_n < 0$

За формулами (3) і (4) отримуємо зміни потоку від мікролінзованого зображення залежно від  $d$  :

$$J(d, \theta, \varepsilon) = \frac{A}{a \sqrt{\pi(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)}} \int_0^\infty \frac{dy_1}{\sqrt{y_1}} \exp \left\{ -\frac{(y_1 - d)^2}{a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta)} \right\}. \quad (5)$$

**Прояви еліптичності джерела у статистиці кривих блиску.** Перейдемо до статистичного розгляду ефекту еліптичності джерела, досліджуючи багато подій із великим підсиленням. Зауважимо, що формула (5) включає як випадки, коли зі зростанням часу  $t$  критичні зображення кожної точки зникають після перетину каустики ( $V_n < 0$  (див. рис. 1), так і коли ці зображення з'являються ( $V_n > 0$ ). У системі, де каустика є нерухомою, джерело може рухатися відносно каустики під різними кутами до нормалі. Тому в системі джерела запишемо  $V_n = V_0 \cos \theta$ . Далі вважаємо  $V_n$ , а також силу каустики  $A$  фіксованими (характерними) значеннями. Можливість цього неочевидна й вимагає обґрунтування; але тут ми обмежимося цими припущеннями для грубого оцінювання. Коли джерело міститься далеко від каустики ( $d \gg a$ ), його можна вважати точковим, тоді потік від критичних зображень залежить від часу як  $A/\sqrt{|V_n t|}$  за досить великих  $t > 0$  за умови  $V_n > 0$  (коли додаткові зображення кожної точки виникають після перетину каустики) або за досить великих  $(-t) > 0$  за умови  $V_n < 0$  (коли додаткові зображення зникають). Тому можливо дати спостережну оцінку  $A/\sqrt{|V_n|}$  і зафіксувати зі спостережень, наприклад  $A$ , або, еквівалентно, віднормувати відповідним чином (5). Однак це зауваження стосується лише принципової можливості, тоді як у реальних спостереженнях така можливість виглядає малоімовірною навіть у випадку достатнього віддалення каустики, що розглядається, від інших каустик.

Далі припустимо, що система мікролінз ізотропна, тобто всі орієнтації каустик, задані кутом  $\theta$ , та напрямки їх швидкостей еквівалентні. Усереднення кривої підсилення по  $\theta$  у багатьох подіях перетину каустик дасть

$$I(d, \varepsilon) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi d\theta J(d, \theta, \varepsilon). \quad (6)$$

Для розрахунків покладемо  $V_0 = 1$ ,  $A = 1$ ,  $a = 1$ , що відповідає певному вибору одиниць для цих величин.

Оцінимо відносні зміни цієї залежності для різних  $\varepsilon$  порівняно з  $\varepsilon = 0$  :

$$\delta(d, \varepsilon) = \frac{I(d, \varepsilon) - I(d, 0)}{I(d, 0)}. \quad (7)$$

Результат обчислень цієї величини показано на рис. 2 для декількох значень ексцентриситету  $\varepsilon$ .

Максимальні значення  $\delta_{\max}(\varepsilon)$  для декількох значень ексцентриситету наведено в таблиці

**Таблиця**

Максимальні значення відносного додаткового підсилення (7) для різних значень ексцентриситету

$\varepsilon$	0.3	0.5	0.7	0.9	0.99
$\delta_{\max}$	0.01	0.04	0.08	0.20	0.43

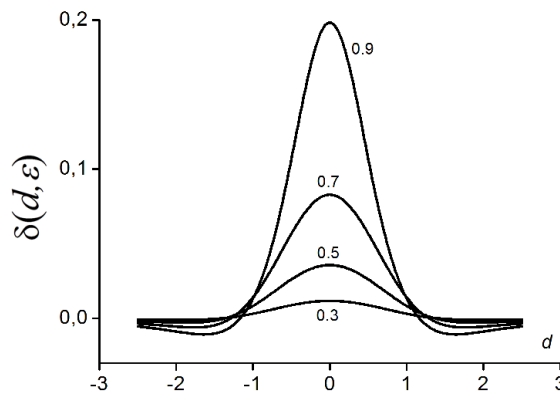


Рис. 2. Усереднені криві відносного додаткового підсилення (7), пов'язаного з появою критичних зображень, для різних значень ексцентриситету  $\varepsilon = 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$

Як видно, наявність ненульового ексцентриситету впливає на форму усередненої кривої підсилення, причому в межах використаних наближень ефект значний для досить великих еліптичностей ( $\delta_{max} > 0.08$  при  $\varepsilon > 0.7$ ). Це зрозуміло: наприклад, якщо каустика паралельна малій осі еліпса, час перетину джерела і ширина кривої блиску будуть більшими, а максимум буде менший, ніж коли каустика паралельна великій осі. У результаті наявність еліптичності приведе до зміни розподілу кривих блиску по  $\theta$ , тоді як для центрально-симетричного джерела ( $\varepsilon = 0$ ) усі орієнтації еліпса відносно каустики дадуть однаковий внесок. Зазначимо, що за умови  $1 - \varepsilon \ll 1$  збільшення яскравості зображення для реалізацій із  $\theta \approx \pi/2$  буде короточасним і відбуватиметься більш різко, ніж при  $\varepsilon \approx 0$ ; це веде до різкішого максимуму в центрі усередненої кривої. Але розкид нормальних швидкостей  $V_n$  впливатиме на характерний час події мікролінзування. Щодо максимального підсилення яскравості протяжного джерела, то на залежність розподілу цієї величини від еліптичності буде накладатися розподіл коефіцієнтів  $A$ . Вплив останнього, однак, можна зменшити, якщо певним чином віднормувати функції (5), наприклад, замінивши їх на

$$J_m(t, \theta, \varepsilon) \approx \frac{J(t, \theta, \varepsilon)}{N_m(\theta, \varepsilon)}, \quad N_m(\theta, \varepsilon) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt [J(t, \theta, \varepsilon)]^m \right\}^{1/m}, \quad (8)$$

де введення  $m = 4, 5, \dots$  з огляду на асимптотичну поведінку (5) забезпечує збіжність інтеграла при  $t \rightarrow \infty$ .

Розглянемо інший критерій еліптичності. Очевидно, що в разі центрально-симетричного джерела максимальний коефіцієнт підсилення на кривій блиску буде однаковий при перетинах каустик із різними нахилами. Навпаки, для джерела із суттєвим ексцентриситетом слід очікувати, що максимальне значення на кривій блиску відрізнятиметься для каустик із різними орієнтаціями. Уведемо функцію  $\mu(\theta, \varepsilon) = \max_t \{J_m(t, \theta, \varepsilon)\}$ , яка відповідає максимуму підсилення на заданій кривій блиску для фіксованої відносної орієнтації каустики та джерела. У межах наближення лінійної каустики, яке реалізується для малого джерела, величина  $\mu(\theta, \varepsilon)$  не залежатиме від сили каустики. Для різних  $\theta$ , які у спостереженнях невідомі, отримаємо різні значення  $\mu(\theta, \varepsilon)$ . Проте максимальне і мінімальне значення  $\mu$ , що відповідатимуть кутам  $\theta = 0, \theta = \pi/2$ , залежатимуть лише від  $\varepsilon$ . Відповідно, функція

$$\Delta\mu(\varepsilon) = \frac{\max_{\theta} [\mu(\theta, \varepsilon)] - \min_{\theta} [\mu(\theta, \varepsilon)]}{\max_{\theta} [\mu(\theta, \varepsilon)] + \min_{\theta} [\mu(\theta, \varepsilon)]} \quad (9)$$

характеризує стиснення джерела. Залежність  $\Delta\mu(\varepsilon)$  для моделі (1) у наближенні лінійної каустики показано на рис. 3 для  $m = 4$ .

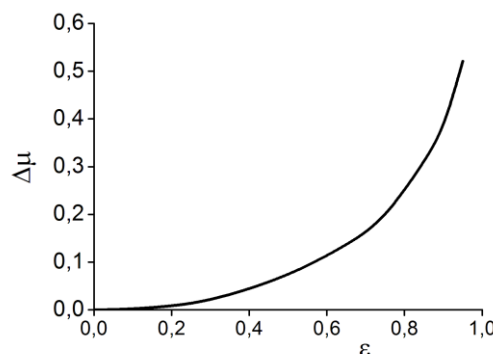


Рис. 3. Характеристика стиснення еліпса  $\Delta\mu(\varepsilon)$  залежно від ексцентриситету джерела ( $m = 4$ )

**Висновки.** Отримані результати ілюструють вплив еліптичності на криві блиску мікролінзованого джерела у спрощеній моделі (1). Це легко пояснити, якщо врахувати, що підсилення в окремій події сильного мікролінзування, обумовлене проходженням каустики по джерелу у картинній площині, залежить від його орієнтації. У випадку центрально-симетричного джерела крива блиску є однаковою для всіх орієнтацій каустики, тоді як для стиснутого джерела вона буде різною для різних відносних орієнтацій, в результаті чого матимемо певний розподіл максимальних коефіцієнтів підсилення в подіях перетину каустики. Розглядаючи велику кількість кривих блиску в подіях із великим підсиленням, можна оцінити еліптичність джерела за умови значних ексцентриситетів  $\varepsilon > 0,7$ . Зрозуміло, що отримані вище результати мають якісний характер, однак вони дозволяють принаймні оцінити порядки внесків еліптичності в статистику кривих блиску.

Більш послідовний аналіз має враховувати відмінності форми каустик у реальній багаточастинковій задачі, що вимагатиме трудомістких обчислень з урахуванням розподілу швидкостей і мас мікролінз, що впливатиме на формування нестационарної сітки рухомих каустик. Припущення ізотропії в задачі є першим наближенням, і для більш послідовного аналізу необхідно розглянути різні варіанти розподілу швидкостей зір-мікролінз на фоні колективного руху лінзової галактики в ГЛС, як цілого. Нарешті, зі спостережної точки зору можливість зафіксувати ефект пов'язана з необхідністю мати значну кількість спостережень подій із великим підсиленням на достатньому рівні точності.

#### Список літератури

1. Schneider P. Gravitational Lenses / P. Schneider, J. Ehlers, E. E. Falco. – Berlin : Springer, 1992.
2. Qualitative problems in gravitational microlensing / V. I. Zhdanov, A. N. Alexandrov, E. V. Fedorova, V. M. Sliusar // Dark Matter. Vol. 2. Astrophysical Aspects of the Problem. – K. : Akademperiodyka, 2014. – P. 84–130.
3. Analytical methods in gravitational microlensing / V. I. Zhdanov, A. N. Alexandrov, E. V. Fedorova, V. M. Sliusar // ISRN Astron. Astrophys. – 2012. – Article ID 906951. – 21 p. doi:10.5402/2012/906951.
4. Poindexter S. Microlensing Evidence that a Type 1 Quasar is Viewed Face-On / S. Poindexter, C. S. Kochanek // Astrophys. J. – 2010. – Vol. 712, Is.1. – P. 668–673.
5. Heyrovsky D. Microlensing of an elliptical source by a point mass / D. Heyrovsky, A. Loeb // Astrophys. J., – 1997. – Vol. 490. – P. 38–50.
6. Gaudi B. S. Microlensing of elliptical sources by fold caustics / B. S. Gaudi, Z. Haiman // arXiv:astro-ph/0401035.
7. Alexandrov A. N. Gravitational microlensing of an elliptical source near a fold caustic / A. N. Alexandrov, V. I. Zhdanov, A. V. Kuybarov (in Ukr. ) Гравітаційне мікролінзування еліптичного джерела поблизу каустики-складки // Bull. Taras Shevchenko Nat. Univ. of Kyiv. Astronomy. – 2018. – № 57. – P. 10–15.
8. Vernardos G. Quasar microlensing light curve analysis using deep machine learning / G. Vernardos, G. Tsagkatakis // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2019. – Vol. 486, Is. 2. – P. 1944–1952.
9. Minakov A. A. Statistical analysis of gravitational microlensing / A. A. Minakov and V. G. Vakulik (in Rus. Статистический анализ гравитационного микролинзирования). – K. : Наук. думка. – 2010.
10. Alexandrov A. N. Asymptotic formulas for the magnification of a gravitational lens system near a fold caustic / A. N. Alexandrov, V. I. Zhdanov, E. V. Fedorova // Astron. Lett. – 2010. – Vol. 36. – № 5. – P. 329–337.
11. Alexandrov A. N. Asymptotic expansions and amplification of a gravitational lens near a fold caustic / A. N. Alexandrov, V. I. Zhdanov // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. – 2011. – Vol. 417. – P. 541–554.

Надійшла до редколегії 20.01.2021

В. Жданов, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
 А. Александров, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.  
 Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина

### ВЛИЯНИЕ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ИСТОЧНИКА НА КРИВЫЕ БЛЕСКА ВО ВНЕГАЛАКТИЧЕСКИХ ГРАВИТАЦИОННО-ЛИНЗОВЫХ СИСТЕМАХ

*Рассмотрены статистические эффекты эллиптичности источника, которые можно обнаружить по кривым блеска во внегалактической гравитационно-линзовой системе при наличии многих событий пересечения каустики. Для грубой оценки эффекта рассмотрен упрощенный вариант задачи в рамках приближения линейной каустики, когда эллиптический источник с гауссовским распределением яркости пересекают каустики различных ориентаций, причем система микролинз является изотропной.*

*Ключевые слова: гравитационные линзы, каустика-складка, микролинзирование, эллиптический источник, кривые блеска.*

V. Zhdanov, Dr Hab., Prof.,  
 A. Alexandrov, PhD, Senior Res.  
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

### EFFECT OF THE SOURCE ELLIPTICITY ON LIGHT CURVES IN EXTRAGALACTIC GRAVITATIONAL LENS SYSTEMS

*In extragalactic gravitational lens system (GLS) several macro-images of a remote source (quasar) are observed. Gravitational microlensing leads to uncorrelated brightness variations of the macro-images. These variations can be separated from proper brightness changes of the source, which are repeated in each image with some relative delay. In most papers the gravitational microlensing effects in extragalactic GLS typically deal with centrally symmetric sources, though the real form of the source can be more complicated. In this paper we consider statistical signals of the source ellipticity in light curves of microlensed objects, which arise as a result of observations of many high amplification events. As a first step, we consider a qualitative version of the problem, when an elliptic source with Gaussian brightness distribution is crossed by a number of simple (fold) caustics with different orientations. Also we assume that the caustic network is isotropic, that is all orientations of the caustics and directions of their velocities are equally possible. We use the linear fold caustic approximation for the amplification of a small point source, when two critical images appear/disappear after the caustic crossing. For a rough estimate, the strength and velocity of the caustic are fixed by certain characteristic values. We estimate the averaged light curve after many caustic crossing events and compare maxima of brightness on the light curves for different eccentricities of the source. The ellipticity signal in the light curves is noticeable for a considerable oblateness of the source. Though we expect that the effect will be smeared out after taking into account the distribution of the caustic velocities and caustic strengths. Possible complications of the problem are indicated due to interplay of effects due to velocity distribution of stars in the lensing galaxy and bulk motion of the lensing galaxy as a whole.*

*Keywords: gravitational lenses, fold-caustic, microlensing, elliptical source, light curves.*