

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Дослідження математичної моделі
міжкультурних взаємодій

студента 4 курсу
Антонюка Євгена Романовича

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пічкур В.В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту, протокол № – від – травня 2021 р.

Завідувач кафедри МСС
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2021

Зміст

Вступ	2
1 СИСТЕМНО-ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ	4
1.1 Означення основних понять	4
1.2 Опис математичної моделі міжкультурної взаємодії .	5
1.3 Аналіз поведінки моделі міжкультурної взаємодії . .	9
2 ТЕОРЕТИКО-ІГРОВИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ	18
2.1 Побудова матричної гри на базі моделі взаємодії куль- тур	18
2.2 Опис можливих стратегій матричної гри на базі мо- делі взаємодії культур	20
3 ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ ТОЧОК РІВНОВАГИ МОДЕЛІ	23
3.1 Фазові портрети	23
4 АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛІ	31
4.1 Матриця чутливості	31
4.2 Алгоритм побудови матриці чутливості	34
4.3 Побудова матриць чутливості	35
Висновки	45
Список літератури	46

ВСТУП

Події останніх років в Східній Європі, Америці та навіть в Україні показали необхідність вивчення взаємодії різних культур між собою. Теперішній стан їх контактування чекає на покращення вже багато років, потрібно створити нові ідеї, шаблони, правила, інакше не всі представителі різноманітних спільнот матимуть шанси на виживання.

Спектр думок на обговорювану проблему дуже широкий, від “вченого”, котре наполягає на вирішенні проблеми шляхом підвищення толерантності до різних культур, до “базарного”, яке наполягає на вирішенні всіх проблем більш радикальними та варварськими методами. Саме тому постала задача побудови чіткої математичної моделі, яка б давала змогу поєднати всі чинники (або найважливіші), які впливають тим чи іншим способом на життя певної культури [1, 2].

Для досягнення по справжньому наукової точки зору на поставлену проблему потрібно визначити основні тенденції розвитку досліджуваного явища, виділення сприятливих і небажаних тенденцій та виявлення вдалих управлінських рішень.

В цій роботі ми розглянемо математичну модель взаємодії різних культур, опишемо особливості їх взаємодії, якими вони бувають, до чого призводять і розглянемо деякий інструмент, який допомагає позбутися конфліктних ситуацій.

Метою цього дослідження є:

1. Означення основних понять математичної моделі міжкультурної взаємодії та визначення предмету дослідження.
2. Опис математичної моделі міжкультурних взаємодій
3. Проаналізувати математичну модель міжкультурних взаємодій та визначити особливості такої моделі.

4. Побудувати матричну гру математичної моделі міжкультурних взаємодій.
5. Здійснити опис всіх можливих стратегій поведінки матричної гри на базі моделі міжкультурних взаємодій.
6. Знайти точки рівноваги і побудувати фазові портрети математичної моделі міжкультурних взаємодій в точках рівноваги
7. Побудувати матриці чутливості на точках рівноваги та зробити висновки щодо отриманих результатів.

1 СИСТЕМНО-ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ

1.1 Означення основних понять

Математика накопичила величезний досвід створення та дослідження моделей різноманітних явищ, в основі якого лежить вивчення кількісних зв'язків між різними величинами, які характеризують явище, та виявлення законів зміни цих характеристик на основі маючих місце зв'язків між ними [1,2]. Складність застосування цього досвіду в гуманітарних областях полягає в тому, що не всі характеристики, які ми зустрічаємо в нашому житті, ми можемо вимірювати та виражати числом.

Наприклад, ми не в змозі описати диференціальними рівняннями таке складне явище як взаємодія культур у всьому його різноманітті. Однак, спробуємо спростити задачу, обмежившись розглядом культури на “побутовому” її рівні, де вона має вигляд засвоєних з дитинства стандартних реакцій на стандартні ситуації та, якщо це необхідно, стандартних дій, викликаних цими стандартними ситуаціями.

Якщо можливо представити собі досить повний опис явища, названого “взаємодією культур”, частиною якого є аналізована нами “побутова культура”, то такий опис можна трактувати як декомпозицію такого явища. Адже окрім “побутової культури” в цьому повному описі фігуруватимуть ще якісь частини разом з взаємозв'язками між ними. Серед них можуть бути і такі, серед яких немає тих, які ми називали б “побутовою культурою”. Кожна декомпозиція складного явища відповідає деякій точці зору на нього, яка відповідає цілям дослідження. Таким чином, ми “нав'язуємо” свою декомпозицію досліджуваної нами міжкультурної взаємодії, виокремлюючи її частину, яку ми називаємо “побутовою культурою”.

Для подальшої роботи, треба ще більш спростити об'єкт дослідження: із множини аспектів такого складного явища як побутова

культура, оберемо лиш два протилежних – толерантність та нетерпимість у відношенні до інших культур. Тепер можна остаточно визначити предмет нашого дослідження:

1. Будемо розрізняти дві множини зі своїми початковими даними, здатністю до покращення цих даних та характеристиками їх приросту. Природа елементів множин нам не важлива.
2. Представникам кожної з множин доведеться вступати в конкурентні відносини щодо деякого обмеженого, але життєво важливого ресурсу, природа якого на даному рівні абстракції нас не цікавить, як з представниками своєї, так і з представниками чужої множини.
3. В ході таких конкурентних відносин може виявитись, що конкуренція з представниками своєї множини запекліша, ніж з представниками чужого, і тоді ми будемо говорити про толерантне відношення до чужої множини. Якщо ж конкуренція з представниками чужої множини запекліша, ніж всередині своєї, ми будемо говорити про нетерпимість по відношенню до чужої множини. Таким чином, коли сторони не проявляють ні толерантності, ні нетерпимості в сенсі нашого визначення, а відносяться до представителів своєї множини як і до представителів чужої множини, матимемо справу з відносинами без упереджень. Будемо також розрізняти випадок, коли замість конкуренції з представниками чужої множини має місце, навпаки, допомога. При цьому конкуренція з представниками своєї множини залишається. Таке відношення ми називатимемо надтолерантність.

1.2 Опис математичної моделі міжкультурної взаємодії

Диференціальні рівняння, якими можна описати визначену вище словесну модель, добре відомі і добре досліджені [1,2,3,4]. Це рів-

няння конкурентної взаємодії двох популяцій з чисельностями N і M відповідно:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \alpha N - aN^2 - eMN, \\ \frac{dM}{dt} &= \beta M - bM^2 - cMN,\end{aligned}\tag{1}$$

де $t \in [0; \infty)$; α, β – коефіцієнти приросту популяцій.

Відомо декілька типів розв'язків системи (1). Наприклад, з часом чисельності популяцій можуть зрівнятися або, навпаки, одна з популяцій може повністю вимерти, а інша – ні. При цьому сенс параметрів a, b, c та e в предметній області не дуже зрозумілий, проте зрозуміло, що a та b зв'язані з внутрішньою, а c та e з зовнішньою конкуренцією.

Проте для успішного моделювання системи важливо не тільки виявити якісні особливості поведінки системи модельних рівнянь, але і знайти набір параметрів, які мають прозорий сенс в предметній області моделі, від яких залежить її поведінка, виділити ряд ключових значень параметрів, при підстановці яких якісно змінюється поведінка системи.

Такими параметрами в нашій моделі виступатимуть коефіцієнти нетерпимості – характерні саме для цієї моделі, котрі ми визначимо трохи пізніше.

Отже, переписавши систему так, щоб її коефіцієнти отримали достатньо прозорий сенс, ми отримали наступне:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \alpha N \left(1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*}\right), \\ \frac{dM}{dt} &= \beta M \left(1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*}\right),\end{aligned}\tag{2}$$

де $N^* = \frac{\alpha}{a}$; $M^* = \frac{\beta}{b}$; $m = e \frac{M^*}{\alpha}$; $n = c \frac{N^*}{\beta}$; $t \in [0; \infty]$; α, β – коефіцієнти приросту.

Числа N^* та M^* називають місткістю середовищ по відношенню до популяцій відповідного виду. Для кожної популяції, у випадку відсутності іншої, вони постають у сенсі граничної чисельності популяції, котру ще здатне “витримати” середовище проживання. При перевищенні граничної чисельності починається “вимирання”

відповідних популяцій. Відношення N/N^* та M/M^* визначають силу внутрішньовидової конкуренції. Числа n та m визначають силу міжвидової конкуренції порівняно з внутрішньовидовою. Наприклад, при рівності цих чисел одиниці можна сказати, що міжвидова конкуренція настільки ж сильна як і внутрішньовидова, при $n > 1$, $m > 1$ міжвидова конкуренція сильніше, а при $n < 1$, $m < 1$ – навпаки, внутрішньовидова сильніше. Саме тому можна назвати числа n та m коефіцієнтами нетерпимості при міжвидовій конкуренції популяцій. Так, наприклад, при $n < 1$ конкуренція популяції N з M більш слабка, ніж внутрішньовидова конкуренція в N , тому можна говорити про толерантне відношення популяції N до M . І навпаки, при $n > 1$, конкуренція між популяціями N та M сильніша, ніж внутрішньовидова конкуренція в N , тому можна говорити про нетерпиме відношення популяції N до M . При значеннях коефіцієнта нетерпимості в межах півінтервалу $[0;1)$ має місце толерантність, якщо він дорівнює 1 – мають місце відносини без упереджень, та при значеннях з інтервалу $(1, \infty)$ має місце нетерпимість. Також будемо розглядати і від’ємні значення коефіцієнтів нетерпимості, $-\infty < n, m < 0$. При таких значеннях коефіцієнтів замість конкуренції матимемо допомогу одного виду іншому, такі відносини називатимемо надтолерантність.

Якісна поведінка системи (1) добре відома. Вона завжди має 3 стаціонарні точки:

$$(N = 0, M = 0) , (N = N^*, M = 0) , (N = 0, M = M^*) ,$$

з яких нестійкий вузол $(N = 0, M = 0)$ нам не цікавий через свою беззмістовність в предметній області, тому в подальшому згадуватись не буде. Також стаціонарними точками будуть розв’язки системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*} = 0, \quad (3)$$

$$1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*} = 0, \quad (4)$$

де $n, m \in \mathbb{R}$; N, M – початкові чисельності популяцій; N^*, M^* – місткість середовищ проживання.

При $n = m = 1$ таких розв’язків буде нескінченно багато, а саме вся пряма

$$N = N^* - \frac{N^*}{M^*}M, \quad (5)$$

де N, M – початкові чисельності популяцій; N^*, M^* – місткість середовищ проживання.

При $n \neq 1$, але $nm = 1$ – розв’язків немає. В решті випадків розв’язок єдиний і знаходиться по формулі:

$$\bar{N} = N^* \frac{1 - m}{1 - nm}, \bar{M} = M^* \frac{1 - n}{1 - nm}, \quad (6)$$

де N^*, M^* – місткість середовищ проживання; n, m – коефіцієнти нетерпимості і $n, m \in \mathbb{R}$;

Якісна поведінка системи (2) залежить від існування і розташування точки (6) відносно відрізка прямої (5), який лежить в першій координатній четверті. Опишемо цю поведінку в залежності від значень коефіцієнтів нетерпимості n та m сторін N та M .



Рис. 1.1 Области фазової площини [1]

Будемо називати пряму (5) границею толерантності, область першої координатної четверті, яка лежить вище цією прямою і при цьому не вище прямої $N = N^*$ і не правіше прямої $M = M^*$ - областю толерантності, а область першої координатної четверті, яка лежить нижче границі толерантності – областю нетерпимості. Область першої координатної четверті, розташовану вище прямої $N = N^*$, будемо називати областю надтолерантності популяції M , область правіше прямої $M = M^*$ - областю надтолерантності популяції N , та, врешті-решт, область вище прямої $N = N^*$ та правіше $M = M^*$ - областю взаємної надтолерантності (рис 1.1).

1.3 Аналіз поведінки моделі міжкультурної взаємодії

Тепер, коли ми зазначили особливості моделі міжкультурної взаємодії, можна приступати безпосередньо до аналізу поведінки моделі [1,3,4].

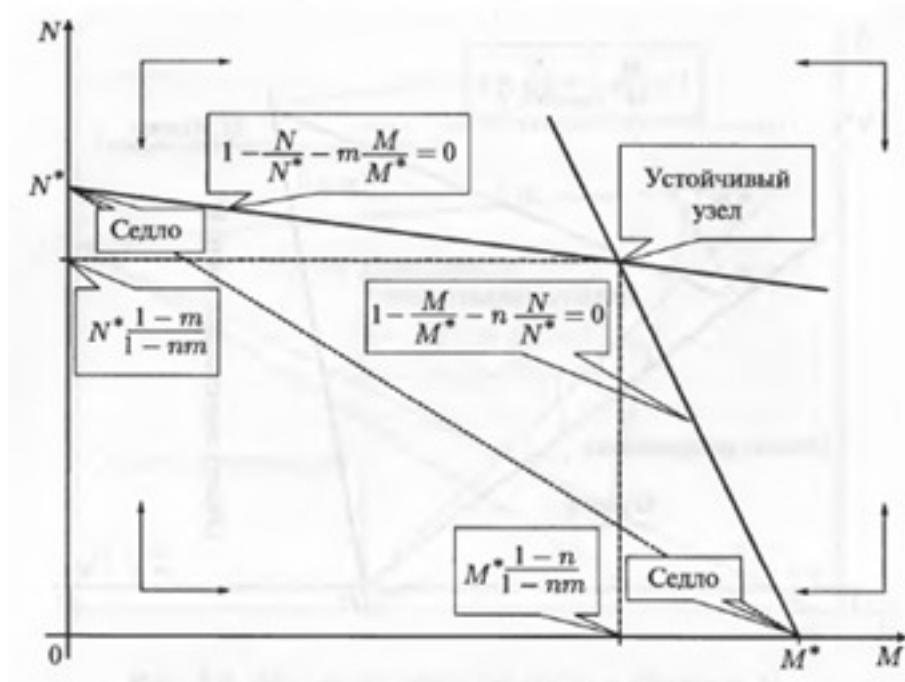


Рис. 1.2 Обидві сторони толерантні [1]

Перший випадок. Нехай обидві сторони толерантно відносяться один до одного.

Тоді розв'язок системи (3)-(4), точка (6), лежить в області толерантності і є стійким вузлом системи, а стаціонарні точки

$$(N = N^* , M = 0) , (N = 0 , M = M^*)$$

є сідлами. В такому випадку, з часом, незалежно від початкових чисельностей популяції і коефіцієнтів народжуваності, система наближається до стійкого стану, в якому представлені обидва види, граничні чисельності яких визначаються формулою (6). На рисунку (2) прямими, що виходять з точок N^* та M^* показані напрямки зміни чисельностей популяцій.

Звернемо увагу, що при фіксованому значенні коефіцієнта нетерпимості однієї з сторін, наприклад $n = \text{const}$, і при зменшенні нетерпимості іншою стороною M її гранична чисельність (6) також зменшується, а гранична чисельність першої сторони N (6), навпаки, збільшується. Таким чином, якщо розмовляти про збільшення граничної чисельності як про користь, то можна сказати, що в умовах взаємної толерантності одностороннє збільшення толерантності однієї з популяцій шкідливо для неї самої і корисно для її супротивника, а одностороннє збільшення нетерпимості, навпаки, корисно для сторони, яка стала трохи більш нетерпимою і шкідливо для її супротивника.

Другий випадок. Нехай одна із сторін надтолерантна, а інша толерантна або надтолерантна, тобто розглядаємо випадок, коли $n, m > -1$. В данному випадку прямі (3), (4) перетинаються в області надтолерантності першої координатної четверті, та ще й точка їх перетину (6) як і в першому випадку є стійким вузлом, а точки $(N=N^*, M=0)$ та $(N=0, M=M^*)$ є сідлами.

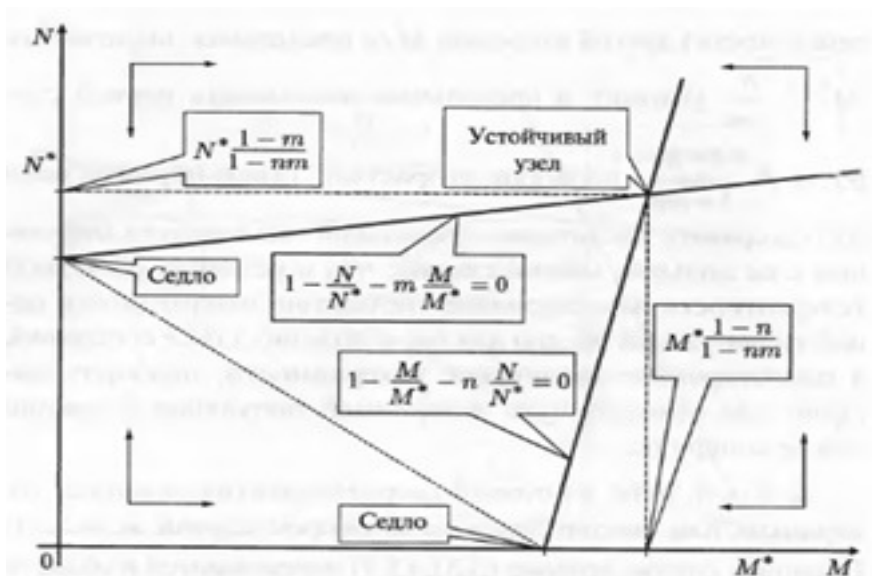


Рис. 1.3 Обидві сторони надтолерантні [1]

На рисунку 1.3 показана взаємна надтолерантність. Як слідує з (6) – якщо обидві сторони надтолерантні, то подальше зменшення коефіцієнта нетерпимості будь-якої із сторін стає корисним не тільки супротивнику, але ж і їй самій. При цьому гранична чисельність надтолерантної популяції стає більше ємності середовища проживання для неї, а при $n, m < 0, nm \geq 1$ прямі (3), (4) перестають перетинатись в першій координатній четверті, що означає необмежений ріст обох популяцій за нескінченний час. Якщо ж надтолерантна тільки одна з сторін, а інші просто толерантна, то просто толерантній стороні вигідно збільшувати свою толерантність, надтолерантній стороні ж не вигідно збільшувати свою толерантність допоки її партнер також не стане надтолерантним.

Третій випадок. Нехай обидві сторони нетерпимі одна до одної. Тоді стаціонарна точка (6) лежить в області нетерпимості і є сідлом, а стаціонарні точки $(N=N^*, M=0)$ та $(N=0, M=M^*)$ є стійкими вузлами системи. В такому випадку система з часом, в залежності від початкових умов, приходить в один чи в інший стійкий вузол, тобто одна з популяцій повністю зникає. Залишається та, до вузла якої на фазовій діаграмі тяжіє точка початкових чисельностей популяції (N_0, M_0) . В цьому випадку є пряма, яка у випадку

коли коефіцієнти прироста популяцій рівні $\gamma = \alpha = \beta$, допомагає зрозуміти до якого стійкого вузла тяжіє точка початкових чисельностей:

$$N = \frac{N^*(1-m)}{M^*(1-n)}M, \quad (7)$$

де n, m – коефіцієнти нетерпимості; N, M – початкові чисельності популяцій; N^*, M^* – місткість середовищ проживання.

Ця пряма розділяє області тяжіння точки початкових чисельностей. Якщо ця точка лежить нижче прямої (7), то траєкторія на нескінченності перейде в точку $(0, M^*)$, якщо вище прямої (7) – в точку $(N^*, 0)$, якщо ж на самій прямій, то траєкторія прийде в сідлову точку (6).

Можна також відмітити, що при фіксованій нетерпимості однієї з сторін і нескінченно зростаючій нетерпимості іншої, ймовірність попадання точки початкових чисельностей в першу координатну четверть в область, яка тяжіє до вузла менш нетерпимої популяції – збігається до нуля, а в область більш нетерпимої популяції – до одиниці.

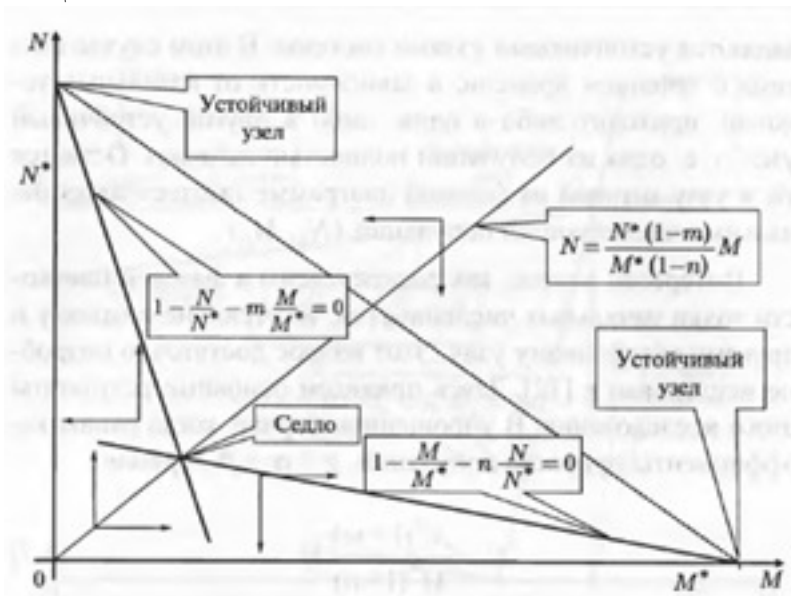


Рис. 1.4 Обидві сторони нетерпимі [1]

Слід також відмітити, що при збільшенні взаємної нетерпимості більшість точок першої координатної четверті опиняються в області :

$$N, M: \begin{cases} 1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*} < 0, \\ 1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*} < 0, \end{cases} \quad (8)$$

де N, M – початкові чисельності популяцій; N^*, M^* – місткість середовищ проживання; n, m – коефіцієнти нетерпимості.

В цій області похідні рівнянь (2) від’ємні, тому в цій області великий коефіцієнт приросту стає не перевагою, а недоліком, зменшуючи чисельність більш плодовитої популяції.

Тепер введемо деяку “третю силу”, яка вмикається коли траєкторія системи попадає в небезпечну зону фазової площини Ω , яка загрожує попаданням на один з двох стійких вузлів:

$$W = \left\{ N, M : \begin{cases} 1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*} > 0 \\ 1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*} < 0 \end{cases} \right\} \cup \left\{ N, M : \begin{cases} 1 - \frac{N}{N^*} - m \frac{M}{M^*} < 0 \\ 1 - \frac{M}{M^*} - n \frac{N}{N^*} > 0 \end{cases} \right\}, \quad (9)$$

де N, M – початкові чисельності популяцій; N^*, M^* – місткість середовищ проживання; n, m – коефіцієнти нетерпимості.

Ця сила з’явилась для допомоги стороні, де похідна від’ємна, і для перешкоди стороні, де похідна додатня в області W фазової площини системи. Сила діє за наступним правилом: якщо існує хоча б одна нетерпима популяція, то вона “карає” за перетин траєкторії системи (2) з областю W фазової площини зміною знака коефіцієнтів обох популяцій на від’ємний. Тобто ця третя сторона діє за наступною формулою :

$$\alpha(N, M) = \begin{cases} \alpha, \{N, M\} \notin W \\ -\alpha, \{N, M\} \in W \end{cases},$$

$$\beta(N, M) = \begin{cases} \beta, \{N, M\} \notin W \\ -\beta, \{N, M\} \in W \end{cases}, \quad (10)$$

де N, M – початкові чисельності популяцій; n, m – коефіцієнти нетерпимості.

Таким чином, при фіксованій нетерпимості однієї з сторін, наприклад $m = \text{const}$, зменшення нетерпимості n іншої сторони, призводить до збільшення граничної чисельності останньої та зменшує граничну чисельність першої. Отже, існування описаної вище “третьої сили” повинно з часом “виштовхнути” ці дві популяції із області нетерпимості, так як сторона, яка буде наполягати на своїй нетерпимості в умовах того, що її супротивник зменшує свій коефіцієнт нетерпимості буде з часом зменшувати свою чисельність, а може і взагалі зникнути.

Четвертий випадок. Нехай сторона M нетерпима до N ($1 < m < \infty$), а коефіцієнт нетерпимості N змінюється $-\infty < n \leq 1$, що означає, що сторона N відноситься до M або без упереджень, або толерантно, або надтолерантно. Тоді або система (3)-(4) не має рішення, або її рішення знаходиться не в першій чверті системи координат. Точка $(N = N^*, M = 0)$ – сідло, а точка $(N = 0, M = M^*)$ – стійкий вузол системи. В такому випадку, з часом, незалежно від початкових умов і значень коефіцієнтів приросту, повністю зникає толерантна сторона N і залишається нетерпима сторона M .

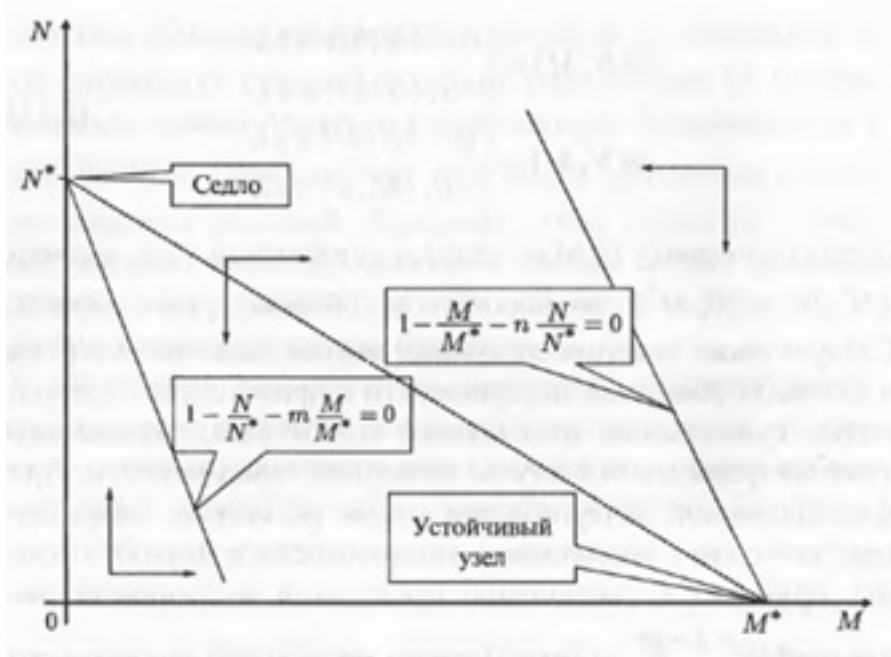


Рис. 1.5 Сторона N толерантна, сторона M нетерпима [1]

Можна, як і у випадку взаємної нетерпимості запропонувати “третю силу”, яка б функціонувала за формулою (10). Однак, ніяка “третя сила” не в змозі зберегти обидві популяції. “Третя сила” змінює сідло толерантної сторони в стійкий вузол, а стійкий вузол нетерпимої сторони в сідло. При існуванні такої “третьої сили” нетерпимій стороні не залишиться нічого, окрім, під загрозою повного зникнення, перейти до толерантності.

П’ятий випадок. Нехай сторона N нетерпима до M ($1 < n < \infty$), а коефіцієнт нетерпимості M змінюється $-\infty < m \leq 1$, що означає, що сторона M відноситься до N або без упереджень, або толерантно, або надтолерантно. Тоді точка $(N = N^*, M = 0)$ – стійкий вузол, а точка $(N = 0, M = M^*)$ – сідло. Цей випадок є зеркальним до четвертого, тому висновок нічим не відрізняється – незалежно від початкових умов і значень коефіцієнтів приросту, повністю зникає толерантна сторона і залишається нетерпима сторона.

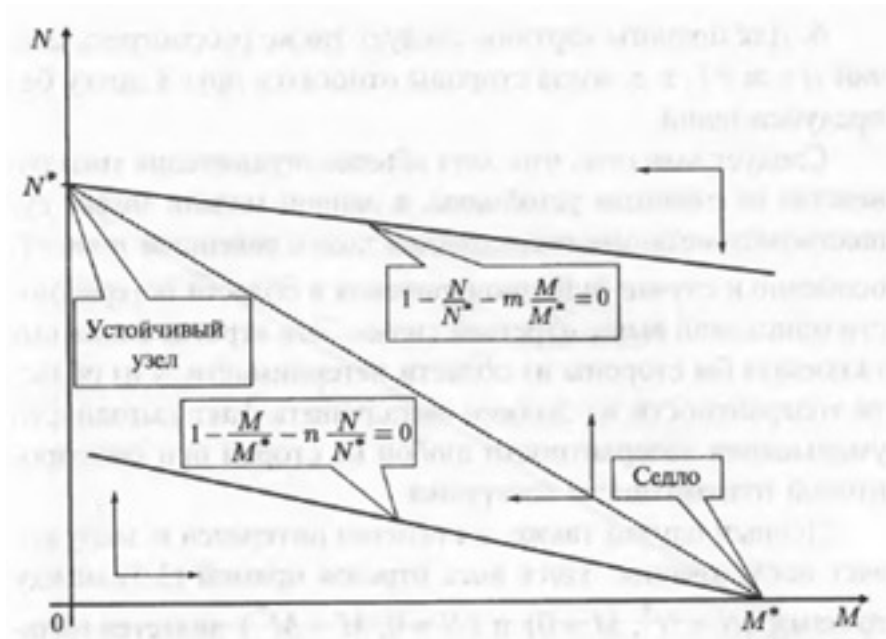


Рис. 1.6 Сторона M толерантна, сторона N нетерпима [1]

Шостий випадок. Тепер розглянемо випадок $n = m = 1$, тобто сторони відносяться одна до одної без упереджень. Потрібно відмі-

титу, що хоча обмеження типу рівність є не дуже стійкими, в даній моделі може існувати механізм, який би підтримував рівність $n = m = 1$. Це та сама “третя сила”, яка б виштовхувала сторони із зони нетерпимості, а із зони толерантності їх би виштовхував той факт, що вигідно зменшувати рівень толерантності при фіксованій толерантності супротивника.

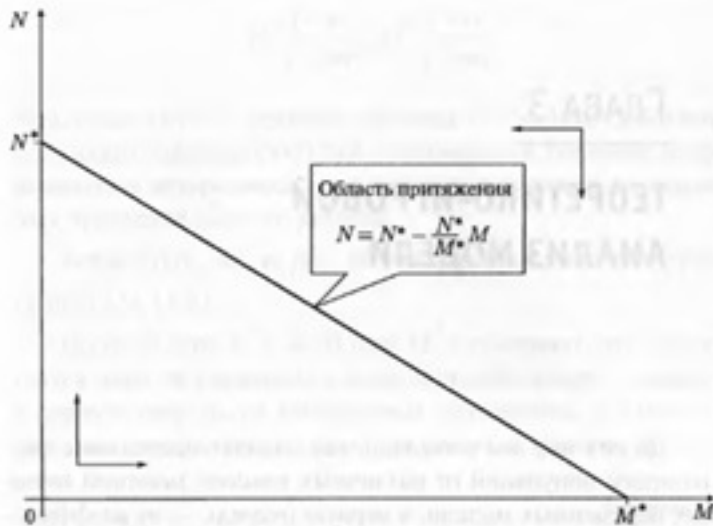


Рис. 1.7 Взаємні відносини без упереджень [1]

Тут весь відрізок (5) між точками $(N = N^*, M = 0)$ та $(N = 0, M = M^*)$ є областю тяжіння траєкторій. Щоб зрозуміти, до якої з точок прямої зображеної на рисунку (7) прийде система, розділимо перше з рівнянь (2) на друге (при $n = m = 1$) і отримаємо:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{\alpha N}{\beta M},$$

звідки:

$$N^\beta = \frac{N_0^\beta}{M_0^\alpha} M^\alpha \quad (11)$$

де N_0, M_0 – початкові чисельності популяцій; α, β – коефіцієнти приросту популяцій.

Знайдена точка буде розв'язком системи рівнянь (5), (11). В цьому випадку, з часом, система прямує до стану рівноваги, в якому представлені обидві популяції, при чому їх численності залежать від початкових численностей і коефіцієнтів народжуваності.

2 ТЕОРЕТИКО-ІГРОВИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛІ

2.1 Побудова матричної гри на базі моделі взаємодії культур

Постало питання – якими будуть тенденції зміни граничних чисельностей, якщо сторонам надати можливість цілеспрямовано керувати своїми коефіцієнтами нетерпимості, а також, в деяких випадках, і іншими зовнішніми змінними моделі [1,3,5]. Будемо говорити про коефіцієнти нетерпимості в (2) як про керування сторін, тобто сторона N керує коефіцієнтом n , а сторона M – коефіцієнтом m . Будемо вважати, що сторони грають в ігру, де стратегіями є задання надтолерантних, толерантних, без упереджень або нетерпимих керувань n та m , а виграшом – граничне значення популяції при таких керуваннях.

Отримуємо біматричну гру з непротилежними інтересами. Випишемо матриці виграшів обох сторін:

Таблиця 2.1 Виграш сторони N

Стратегії	N надтоле- рантна	N толеран- тна	N без упе- реджень	N нетерпи- ма
M надтоле- рантна	$\infty, nm \geq 1;$ $N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $nm < 1;$ $(> N^*)$	$N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $(> N^*)$	N^*	N^*
M толеран- тна	$N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $(< N^*)$	$N^* \frac{1-m}{1-nm},$ $(< N^*)$	N^*	N^*
M без упе- реджень	0	0	$N(N_0, M_0, \alpha, \beta)N^*$ $(< N^*)$	
M нетерпи- ма	0	0	0	0 або N^*

Таблиця 2.2 Виграш сторони М

Стратегії	N надтоле- рантна	N толеран- тна	N без упе- реджень	N нетерпи- ма
М надтоле- рантна	$\infty, nm \geq 1;$ $M^* \frac{1-m}{1-nm},$ $nm < 1;$ $(> M^*)$	$M^* \frac{1-n}{1-nm},$ $(\leq M^*)$	0	0
М толеран- тна	$M^* \frac{1-n}{1-nm},$ $(> M^*)$	$M^* \frac{1-n}{1-nm},$ $(\leq M^*)$	0	0
М без упе- реджень	M^*	M^*	$M(N_0, M_0, \alpha, \beta),$ $(< M^*)$	
М нетерпи- ма	M^*	M^*	M^*	0 або M^*

В скобках приводяться порівняння отриманого виграшу з ємністю середовища проживання для відповідної популяції. Тут

$$N = N^* \frac{1-t}{1-nm}, M = M^* \frac{1-n}{1-nm},$$

де N^*, M^* - місткість середовищ проживання; n, m - коефіцієнти нетерпимості.

Це точка (6) - розв'язок системи (3)-(4). Власне, аналіз залежності розв'язку (6) від значень коефіцієнтів нетерпимості n та m і є нашою метою. Точка $N(N_0, M_0, \alpha, \beta), M^*$ є розв'язком системи рівнянь (5), (11).

Поля "0 або N^* " та "0 або M^* " означають, що досягається одне з вказаних значень, яке саме - залежить від обраних керувань, а також зовнішніх змінних моделі, при чому, якщо точка початкових значень не лежить на осях координат, то завжди існують керування, які приводять систему як в перший так і в другий стійкий вузол.

2.2 Опис можливих стратегій матричної гри на базі моделі взаємодії культур

Видно, що гарантувати позитивний результат гри при будь-яких діях супротивника не може жодна із стратегій [1,5]. Найбільш універсальною виявляється стратегія нетерпимості, вона дає вигравш в об'ємі ємності середовища проживання популяції, допоки не зустрічає ще більшу нетерпимість. В цьому випадку від керувань гравців залежить до якого зі стійких вузлів прийде система. У будь-якому випадку, взаємна нетерпимість призводить до зберігання лише однієї популяції.

Якщо розглядати ситуацію з позиції “стійкого розвитку”, який виступає за збереження всього різновиду існуючих у природі видів культур, то слід приділити свою увагу стратегіям толерантності та надтолерантності, які дають таку можливість.

Отже, почнемо розгляд можливих стратегій зі стану взаємної надтолерантності. Такі відносини, якщо їх вдається досягнути, гарні тим, що цей стан стійкий відносно дій гравців, спрямованих на збільшення свого виграшу. В цьому стані кожен гравець отримує вигравш більший, ніж ємність його середовища проживання, зменшення нетерпимості збільшує вигравш для кожного з гравців, а збільшення нетерпимості зменшує вигравш, так як

$$N^* \frac{1-m}{1-nm} < N^* \frac{1-m}{1-n'm'}, \quad M^* \frac{1-n}{1-nm} < M^* \frac{1-n}{1-nm'}$$

при виконанні умов $-\infty < n' < n < 0$, $-\infty < m' < m < 0$, $n'm, nm' < 1$. Збільшувати свою толерантність стає вигідним, більш того, при $nm \geq 1$ вигравш сторін стає нескінченним.

Стан надтолерантності одного партнера та толерантність іншого є своєрідним “гамбітом” надтолерантної сторони. Дійсно, при переході в стан надтолерантності із звичайної толерантності, вона неминуче втрачає частину свого виграшу.

Наприклад,

$$N^* \frac{1-m}{1-nm} > N^* \frac{1-m}{1-n'm'}$$

при $0 < n, m < 1$, а $n' < 0$. Однак при цьому надтолерантна сторона сподівається на те, що її супротивник почне збільшувати свою толерантність, так як при надтолерантному партнері йому це вигідно – його виграш збільшується. Продовжуючи приклад,

$$M^* \frac{1-n}{1-nm} < M^* \frac{1-n}{1-nm'},$$

при $n < 0, m < 1, m' < m$ та $nm' < 1$. Врешті-решт, бажання збільшити свій виграш повинно привести толерантну сторону до надтолерантності, де і окупається жертва гамбіта. Помітимо, що сторона, яка виступає в ролі гамбіта не повинна перестаратись з розміром жертви, так як

$$N^* \frac{1-m}{1-nm} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0, \quad M^* \frac{1-n}{1-nm} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \frac{M^*}{m},$$

при $n < 0, 0 < m < 1$.

Стан взаємної толерантності, навіть якщо про нього можна було б якимось чином домовитись, нестійкий з теоретико-ігрової точки зору: кожному гравцю для отримання найбільшого виграшу вигідно бути як можна менш толерантним, адже чим нижчий рівень толерантності, тим більший виграш для певного гравця. Дійсно, якщо при взаємній толерантності толерантність сторони М рівна m , то виграш сторони N, згідно з формулою (6) наближається до максимуму при $n \rightarrow 1$ і досягає його при переході сторони N від толерантності до відносин без упереджень. Подібні міркування застосовні і до сторони М.

Таким чином, прослідковується правило: при взаємній толерантності кожному гравцю вигідніше бути менш толерантним, ніж він є в даний момент часу. Зрештою, це правило повинно “виштовхати” гравців із області толерантності: або вони перейдуть до відносин без упереджень, або один із них прийме “гамбітну” жертву – перейде до надтолерантності в надії, що його партнер збільшить свою толерантність і з часом, прийде до надтолерантності, тим самим окупивши жертву.

Взаємні відносини без упереджень також збережуть обидві популяції, однак слід очікувати його нестійкості в предметній області, так як зазвичай сувору рівність підтримувати складніше ніж нерівність. Зверху стійкість цієї рівності забезпечує нестійкість стану взаємної толерантності, яку було згадані вище. Механізму підтримки рівності знизу – немає, але ми можемо придумати деякий зовнішній механізм – наприклад, згадану вище “третю силу”, яка керувала б коефіцієнтами приросту так, що гравці “виштовхуються” із області нетерпимості. Тоді взаємні відносини без упереджень стають стійкими. Це рішення може бути привабливим через свою залежність від початкових умов, тобто певним збереженням початкового статусу, з елементами нівелювання початкової нерівності сторін за рахунок степеневі залежності в (11).

Стан толерантності до нетерпимого партнера, як слідує з матриць ігор, завжди фатальна для толерантної сторони. При чому, ніякої другої перспективи, окрім повного вимирання, у толерантної сторони просто немає. Ситуацію хоч якось може змінити тільки “третя сила”, хоч сама по собі вона нездатна зберегти обидві популяції, вона може стимулювати нетерпиму сторону під загрозою повного зникнення перейти від нетерпимості до відносин без упереджень або толерантності.

Врешті-решт, маємо стан взаємної нетерпимості. В цій ситуації, як було виявлено, найбільш нетерпимий конкурент отримує все (а саме – граничну чисельність популяції, яка дорівнює ємності середовища для неї). Якщо сторони починають рефлексувати, тобто відповідати на нетерпимість конкурента ще більшою нетерпимістю, то сідлова точка (б), а з нею і деякі траєкторії системи (2) на своєму шляху до одного з стійких вузлів все ближче будуть прямувати до початку координат, що в свою чергу через недосконалість моделі (наприклад, той факт, що реальні численності популяцій – дискретні, а не неперервні величини) може призвести до того, що залишиться ні переможців, ні переможених.

3 ФАЗОВІ ПОРТРЕТИ ТОЧОК РІВНОВАГИ МОДЕЛІ

В роботі вже було описано досліджувану математичну модель (2) та здійснено аналіз поведінки системи в залежності від значень параметрів: α , β , a , b , c та e . Метою цього розділу буде: визначити що таке фазовий портрет, побудувати фазові портрети точок рівноваги для кожної з проаналізованих ситуацій наведених у другому розділі. Також, потрібно здійснити аналіз кожної з точок рівноваги для кожної ситуації.

3.1 Фазові портрети

Що ж таке фазовий портрет? Фазовим портретом диференціальної системи (2) є двовимірна фігура, яка показує якісну поведінку системи і визначає як функції N та M залежать від часу t . За допомогою належної кількості зображених траєкторій фазовий портрет повинен показати як виглядає і де закінчується кожна траєкторія для будь-яких початкових умов. Траєкторією вважаємо представлення розв'язку системи диференціальних рівнянь (2) на фазовій площині.

В цій роботі фазовий портрет будується за наступним алгоритмом[3]:

1. Визначаємо коефіцієнти системи (1) $\alpha, a, e, \beta, b, c$
2. Задаємо набір початкових параметрів $N_0 = \overline{0, n}$, $M_0 = \overline{0, m}$
3. Знаходимо розв'язок системи (1) у вигляді $F(t, N, M)$ для кожного набору початкових параметрів
4. Ілюструємо кожен розв'язок (траєкторію) на графіку

За наступними формулами були визначені місткості середовищ N^* , M^* та коефіцієнти толерантності n , m :

$$N^* = \frac{\alpha}{a}; \quad M^* = \frac{\beta}{b};$$

$$m = e \frac{M^*}{\alpha}; \quad n = c \frac{N^*}{\beta}$$

Всі графіки були побудовані за допомогою мови Python та бібліотек matplotlib, numpy та scipy.

Перший випадок. В першому випадку обидві сторони відносяться толерантно один до одного. При попередньому аналізі було сказано, що точка (6) є стійким вузлом системи, а стаціонарні точки

$$(N = N^*, M = 0), (N = 0, M = M^*)$$

є сідлами. Подивимось на фазові портрети цих стаціонарних точок.

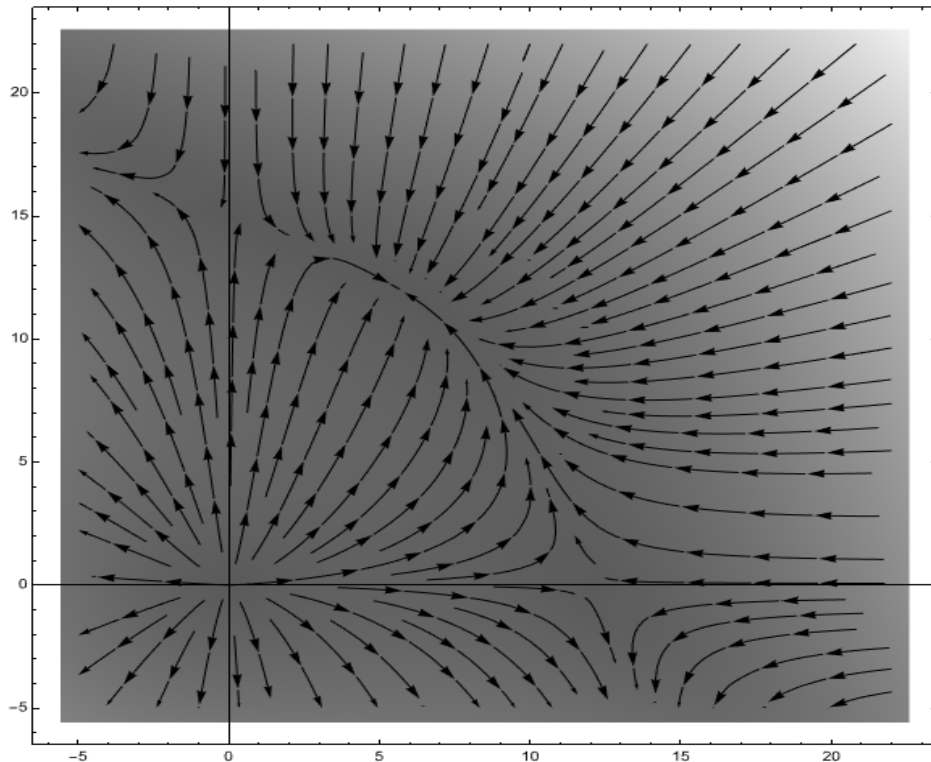


Рис. 2.1 Обидві сторони толерантні [3, 4]

Для побудови такого фазового портрету (рис. 2.1) було використано наступні коефіцієнти: $\alpha = 3$, $a = 0.25$, $e = 0.13$, $\beta = 4$, $b = 0.265$, $c = 0.145$. В нашому випадку $N^* = 12.0$, $M^* = 15.1$, $n = 0.4349$, $m = 0.6540$.

Проаналізуємо точку $(N = N^*, M = 0)$: побудуємо яacobіан системи (2) з вищевказаними коефіцієнтами: $\begin{pmatrix} -6 & -1.56 \\ 0 & 1.74 \end{pmatrix}$

Вирішивши квадратне рівняння, знайдемо λ_1 та λ_2 [3, 4]. У випадку з нашою точкою: $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 1.74$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є сідлом.

Проаналізуємо точку $(N = 0, M = M^*)$. Яacobіан: $\begin{pmatrix} -1.96 & 0 \\ -2.19 & 8 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -1.96$, $\lambda_2 = 8$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є сідлом.

Проаналізуємо точку (6). Яacobіан: $\begin{pmatrix} -4.93 & -0.91 \\ -1.59 & -6.85 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -4.34$, $\lambda_2 = -7.42$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

Другий випадок. У другому випадку обидві сторони відносяться надтолерантно один до одного, тобто розглядаємо випадок, коли $n, m < 0$. Як і в попередньому випадку, точка (6) є стійким вузлом системи, а стаціонарні точки

$$(N = N^*, M = 0), (N = 0, M = M^*)$$

є сідлами. Подивимось на фазові портрети цих стаціонарних точок. Для побудови фазового портрету (рис. 2.2) було використано наступні коефіцієнти: $\alpha = 3$, $a = 0.25$, $e = -0.13$, $\beta = 4$, $b = 0.265$, $c = -0.145$. В нашому випадку $N^* = 12.0$, $M^* = 15.1$, $n = -0.4349$, $m = -0.6540$

Проаналізуємо точку $(N = N^*, M = 0)$. Яacobіан: $\begin{pmatrix} -6 & 1.56 \\ 0 & 1.74 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 1.74$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є сідлом.

Проаналізуємо точку $(N = 0, M = M^*)$. Яacobіан: $\begin{pmatrix} -1.96 & 0 \\ 2.19 & 8 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -1.96$, $\lambda_2 = 8$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є сідлом.

Проаналізуємо точку (6). Яacobіан: $\begin{pmatrix} -9.25 & 3.25 \\ 3.625 & -9.625 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -12.875$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

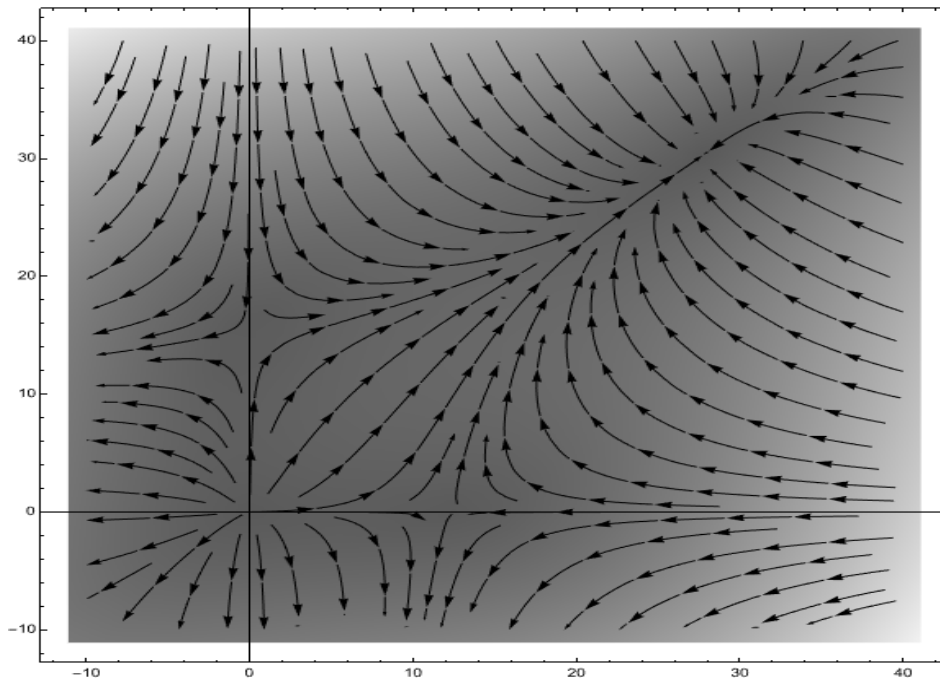


Рис. 2.2 Обидві сторони надтолерантні [3, 4]

Третій випадок. В третьому випадку обидві сторони відносяться нетерпимо один до одного. При попередньому аналізі було сказано, що точка (6) лежить в області нетерпимості і є сідлом, а стаціонарні точні точки

$$(N = N^* , M = 0) , (N = 0 , M = M^*)$$

є стійкими вузлами системи. Побудуємо та подивимось на фазові портрети цих стаціонарних точок.

Для побудови фазового портрету (рис. 2.3) було використано наступні коефіцієнти: $\alpha = 3$, $a = 0.25$, $e = 0.500$, $\beta = 4$, $b = 0.260$, $c = 0.520$. В нашому випадку $N^* = 12.0$, $M^* = 15.3$, $n = 1.56$, $m = 2.56$

Проаналізуємо точку $(N = N^*, M = 0)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 0 & -6.24 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -6.24$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

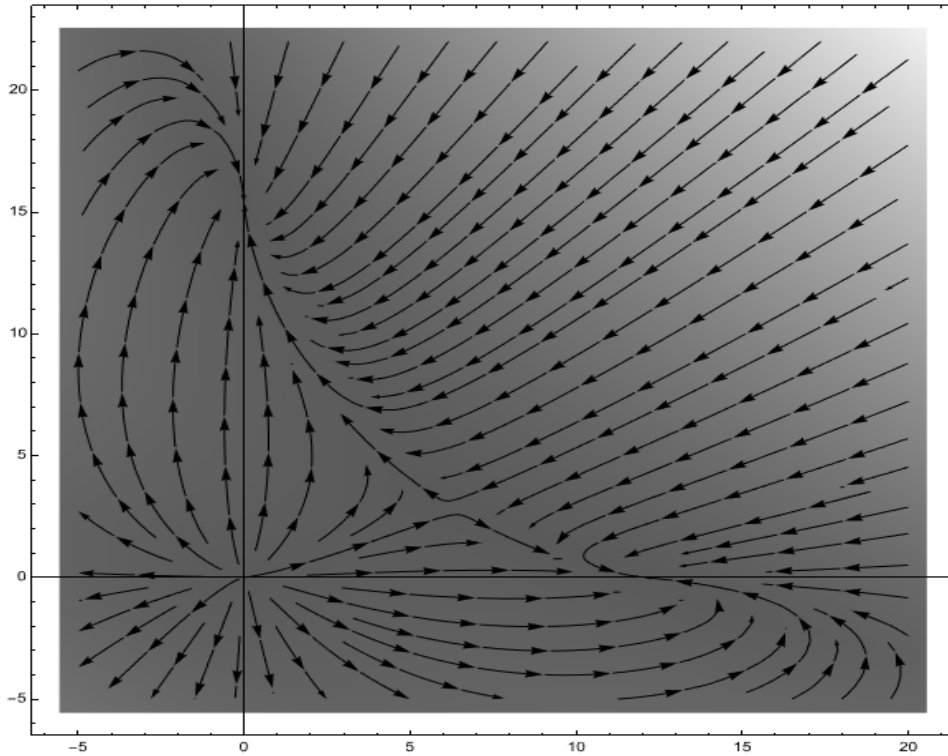


Рис. 2.3 Обидві сторони нетерпимі [3, 4]

Проаналізуємо точку $(N = 0, M = M^*)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -7.65 & 0 \\ -7.96 & -7.96 \end{pmatrix}$
 $\lambda_1 = -7.65$, $\lambda_2 = -7.96$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

Проаналізуємо точку (6). Якобіан: $\begin{pmatrix} -4.35 & 3.1 \\ -1.3 & 4.524 \end{pmatrix}$
 $\lambda_1 = -2.43$, $\lambda_2 = 6.45$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є сідлом.

Четвертий випадок. В четвертому випадку M нетерпима до N ($1 < n < \infty$), а коефіцієнт нетерпимості N змінюється $-\infty < m \leq 1$, що означає, що сторона N відноситься до M або без упереджень, або толерантно, або надтолерантно. Тоді або система (3)-(4) не має рішення, або її рішення знаходиться не в першій чверті системи координат. Точка $(N = N^*, M = 0)$ – сідло, а точка $(N = 0, M =$

M^*) – стійкий вузол системи. Подивимось на фазові портрети цих стаціонарних точок.

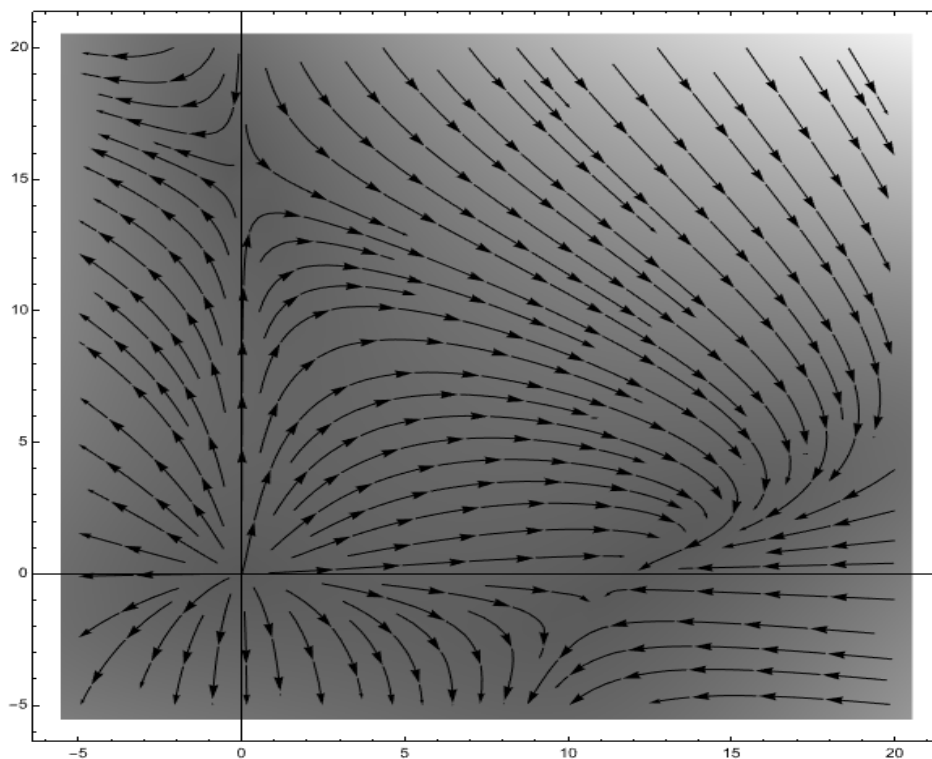


Рис. 2.4 Сторона N надтолерантна, сторона M нетерпима [3, 4]

Для побудови такого фазового портрету (рис. 2.4) було використано наступні коефіцієнти: $\alpha = 3$, $a = 0.25$, $e = 0.3$, $\beta = 4$, $b = 0.265$, $c = -0.245$. В нашому випадку $N^* = 12.0$, $M^* = 15.1$, $n = -0.735$, $m = 1.51$

Проаналізуємо точку $(N = N^*, M = 0)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} 6 & -3.6 \\ 0 & -2.94 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2.94$, $\lambda_2 = 6$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є сідлом.

Проаналізуємо точку $(N = 0, M = M^*)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -4.53 & 0 \\ 3.67 & -8 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -4.53$, $\lambda_2 = -8$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

П'ятий випадок(зеркальний до четвертого). В п'ятому випадку сторона N нетерпима до M ($1 < n < \infty$), а коефіцієнт нетерпимості M змінюється $-\infty < m \leq 1$, що означає, що сторона M відноситься до N або без упереджень, або толерантно, або надтолерантно. Тоді точка $(N = N^*, M = 0)$ – стійкий вузол, а точка $(N = 0, M = M^*)$ – сідло. Подивимось на фазові портрети цих стаціонарних точок.

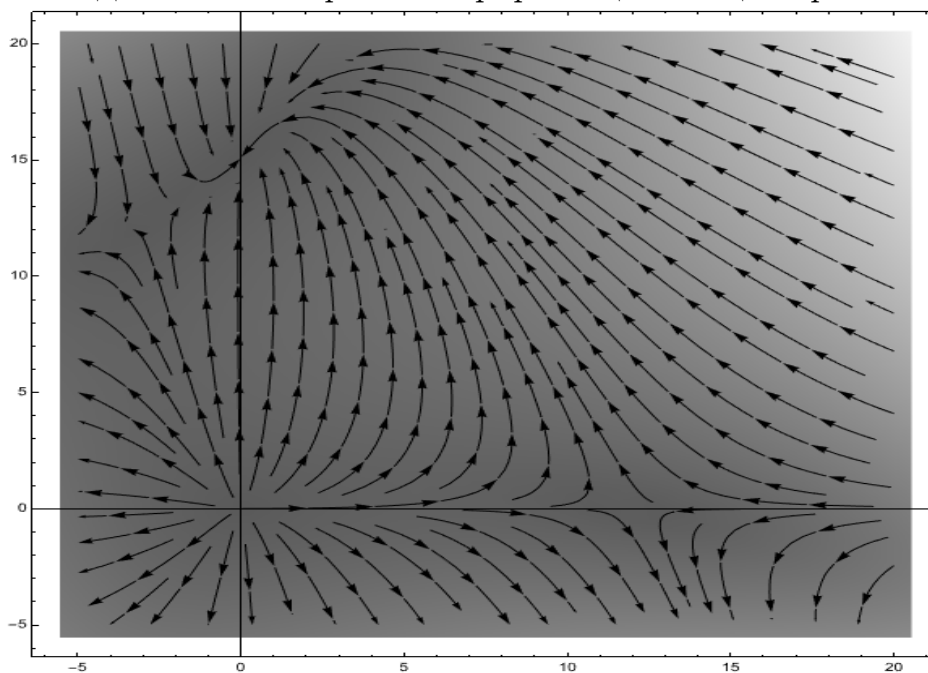


Рис. 2.5 Сторона M толерантна, сторона N нетерпима [3, 4]

Для побудови такого фазового портрету (рис. 2.5) було використано наступні коефіцієнти: $\alpha = 3$, $a = 0.25$, $e = -0.285$, $\beta = 3$, $b = 0.265$, $c = 0.345$. В нашому випадку $N^* = 12.0$, $M^* = 11.3$, $n = -1.07$, $m = 1.38$

Проаналізуємо точку $(N = N^*, M = 0)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -6 & 3.42 \\ 0 & -4.14 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -4.14$, $\lambda_2 = -6$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

Проаналізуємо точку $(N = 0, M = M^*)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -3.22 & 0 \\ -3.89 & 5.99 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -3.22$, $\lambda_2 = 5.99$, що вказує на те, що точка рівноваги – сідло.

Шостий випадок. Тепер розглянемо випадок $n = m = 1$, тобто сторони відносяться одна до одної без упереджень. Тут весь відрізок (5) між точками $(N = N^*, M = 0)$ та $(N = 0, M = M^*)$ є областю тяжіння траєкторій. Подивимось на фазовий портрет такої системи.

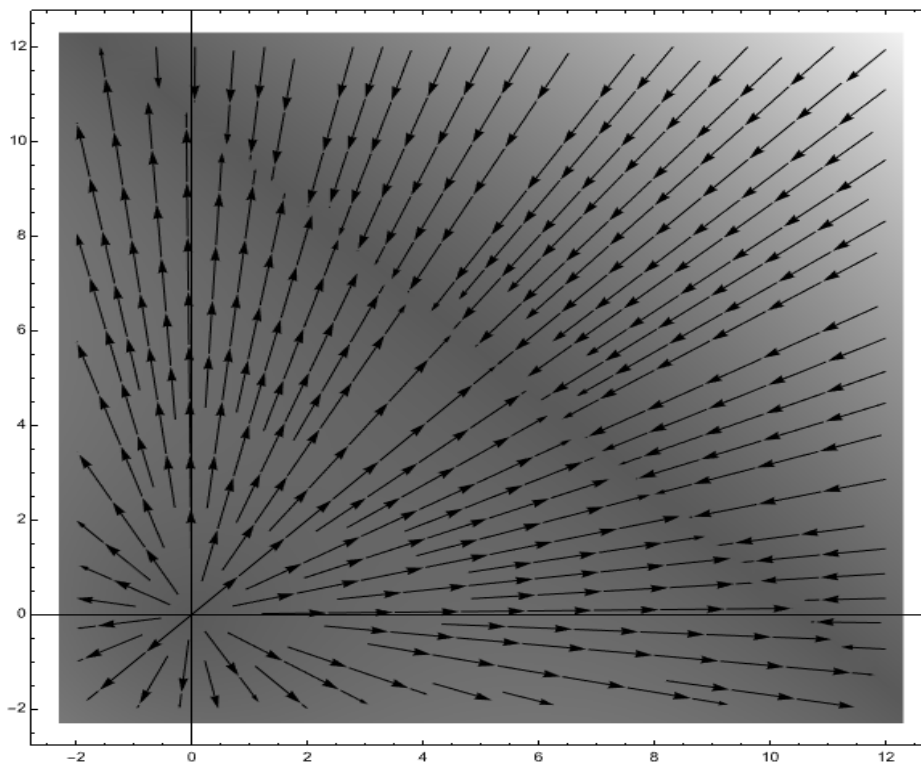


Рис. 2.6 Взаємні відносини без упереджень [3, 4]

Для побудови такого фазового портрету (рис. 2.6) було використано наступні коефіцієнти: $\alpha = 3$, $a = 0.285$, $e = 0.285$, $\beta = 3$, $b = 0.285$, $c = 0.285$. В нашому випадку $N^* = 10.5$, $M^* = 10.5$, $n = 1$, $m = 1$

Проаналізуємо точку $(N = N^*, M = 0)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -5.99 & -2.99 \\ 0 & -4.04 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -4.04$, $\lambda_2 = -5.98$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

Проаналізуємо точку $(N = 0, M = M^*)$. Якобіан: $\begin{pmatrix} -2.99 & 0 \\ -4.04 & -5.98 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = -2.99$, $\lambda_2 = -5.99$, що вказує на те, що ця точка рівноваги є стійким вузлом.

4 АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ МОДЕЛІ

Метою цього розділу буде ознайомлення з важливими визначеннями та теоремами пов'язаними з матрицями чутливості та рівняннями чутливості, опис алгоритму побудови матриць чутливості та побудова декількох матриць чутливості для диференціальної системи (2).

4.1 Матриця чутливості

Що ж собою являє матриця чутливості? Спробуємо дати визначення.

Теорема 1.[7] Нехай $x(t, x_0, t_0)$ є розв'язком задачі Коші [3, 4]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (12)$$

що визначений на інтервалі $t \in [a, b]$, $t_0 \in [a, b]$, функція $f(t, x)$ є неперервною за t і неперервно диференційованою за x в області $D \subset R^{n+1}$, $(t_0, x_0) \in D$ [6]. Тоді розв'язок $x(t, x_0, t_0)$ має неперервні частинні похідні за компонентами вектора x_0 і

$$\frac{dU(t, x_0)}{dt} = \frac{f(t, x(t, x_0, t_0))}{dx} U(t, x_0), \quad (13)$$

$$U(t_0, x_0) = I, \quad t \in [a, b], \quad (14)$$

де

$$U(t, x_0) = \frac{x(t, x_0, t_0)}{dx_0}$$

Розглянемо (12) у вигляді інтегрального рівняння

$$x(t, x_0, t_0) = \int_{t_0}^t f(r, x(r, x_0, t_0)) dr + x_0,$$
$$x(t, x_0 + se_i, t_0) = \int_{t_0}^t f(r, x(r, x_0 + se_i, t_0)) dr + x_0 + se_i, \quad t \in [a, b].$$

Тоді, позначивши

$$y(t, s) = \frac{1}{s}(x(t, x_0 + se_i, t_0) - x(t, x_0, t_0)),$$

одержимо

$$y(t, s) = \frac{1}{s} \int_{t_0}^t f(r, x(r, x_0 + se_i, t_0)) - f(r, x(r, x_0, t_0)) dr + e_i, \quad (15)$$

де $t \in [a, b]$

За лемою Адамара [3]

$$\begin{aligned} f(r, x(r, x_0 + se_i, t_0)) - f(r, x(r, x_0, t_0)) = \\ = G(r, x(r, x_0 + se_i, t_0), x(r, x_0, t_0))(x(r, x_0 + se_i, t_0) - \\ - x(r, x_0, t_0)), \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$G(r, y_0, z_0) = \int_0^1 \frac{df(r, \sigma y_0 + (1-\sigma)z_0)}{dx} d\sigma$$

- неперервна матриця за r, y_0, z_0 . З (15), (16) випливає

$$y(t, s) = \int_{t_0}^t A(r, s)y(r, s) dr + e_i, \quad t \in [a, b], \quad (17)$$

де $A(r, s) = G(r, x(r, x_0 + se_i, t_0), x(r, x_0, t_0))$ - неперервна матриця за r, s
З інтегрального рівняння (17) маємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial x_{0i}} = A_0(t) \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial x_{0i}} \quad (18)$$

$$\frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial x_{0i}} = e_i, \quad t \in [a, b], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

де $A_0(t) = \frac{\partial f(t, x(t, x_0, t_0))}{\partial x}$. Має місце (13), (14). Розв'язок (18), (19) є неперервною функцією за (t, x_0, t_0) .

Отже, система рівнянь (18), (19) називається системою рівнянь у варіаціях відносно початкових умов [4]. Матриця

$$U(t, x_0) = \frac{\partial x(t, x_0, t_0)}{\partial x_0}$$

називається матрицею чутливості (12) відносно початкових умов. Матричне рівняння (13), (14) називається матричним рівнянням чутливості відносно початкових умов [6].

Теорема 2.[7] Нехай $x(t, x_0, t_0, p)$ є розв'язком задачі Коші [3, 4]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, p), x(t_0) = x_0, (t_0, x_0) \in D, \quad (20)$$

який визначений на інтервалі $t \in [a, b], t_0 \in [a, b]. f(t, x, p) \in D, p \in M, D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область, $M \subset \mathbb{R}^m$ – область. Тоді розв'язок $x(t, x_0, t_0, p)$ має неперервні частинні похідні за p і $x_0, t \in [a, b]$ [6].

Теорема 3.[7] Нехай $x(t, t_0, p)$ є розв'язком задачі Коші [3, 4]

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, p), x(t_0) = x_0(p), \quad (21)$$

який визначений на інтервалі $[a, b]$. Тут функція $f(t, x, p)$ є неперервною за t і неперервно диференційованою за x та $p, x_0(\cdot) \in C^1(M, \mathbb{R}^n), (t, x) \in D, p \in M, D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – область, $M \subset \mathbb{R}^m$ – область[6, 7]. Тоді $x(t, t_0, p)$ має неперервні частинні похідні за компонентами вектора p , при цьому [3]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x(t, t_0, p)}{\partial p_i} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, p), p)}{\partial x} * \frac{\partial x(t, t_0, p)}{\partial p_i} + \frac{\partial f(t, x(t, t_0, p), p)}{\partial p_i}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial x(t_0, t_0, p)}{\partial p_i} = \frac{\partial x_0(p)}{\partial p_i}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (23)$$

Система (22) – (23) називається системою рівнянь у варіаціях за параметром p [6]. Матриця

$$U(t, p) = \frac{\partial x(t, t_0, p)}{\partial p}$$

називається матрицею чутливості (21) за параметром p . З (22) – (23) випливає, що має місце матричне рівняння чутливості за параметром p , яке має вигляд

$$\frac{dU(t, p)}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t, t_0, p), p)}{\partial x} U(t, p) + \frac{\partial f(t, x(t, t_0, p), p)}{\partial p}, \quad (24)$$

де $U(t_0, p) = \frac{\partial x_0(p)}{\partial p}$ [6].

4.2 Алгоритм побудови матриці чутливості

Алгоритм був створений на базі вищезгаданих теорем та визначень, але для системи (1) [6,7]. Сам алгоритм складається з наступних кроків:

1. Визначити коефіцієнти системи (1) $\alpha, a, e, \beta, b, c$
2. Задати набір початкових параметрів $N_0 = \overline{0, n}$, $M_0 = \overline{0, m}$
3. Знаходимо розв'язок системи (1) у вигляді $F(t, N, M)$ для набору початкових параметрів
4. Складаємо якобіан системи (1) і отримуємо $A(t)$
 - (а) Знаходимо похідні системи (1), а саме: $\frac{\partial F_1(N, M)}{\partial N}$, $\frac{\partial F_1(N, M)}{\partial M}$, $\frac{\partial F_2(N, M)}{\partial N}$, $\frac{\partial F_2(N, M)}{\partial M}$
 - (б) Ставимо відповідні складові на відповідні місця матриці у такому порядку, як вони перераховані вище
5. Вирішити задачу Коші для матричного диференціального рівняння $\frac{dU}{dt} = A(t)U$ при $U(0) = I$ та знайти відповідні матриці $U(t)$

4.3 Побудова матриць чутливості

Так як ми вже описували всі можливі випадки поведінки системи (1) в залежності від коефіцієнтів $\alpha, a, e, \beta, b, c$ та більш складних так званих коефіцієнтів толерантності n, m , описували точки рівноваги (6) та

$$(N = N^* , M = 0) , (N = 0 , M = M^*)$$

побудували фазові портрети цих точок, то і матриці чутливості ми також будемо шукати саме в цих точках.

Перший випадок. В першому випадку обидві сторони відносяться толерантно один до одного. При цьому було сказано, що точка (6) є стійким вузлом системи, а стаціонарні точки

$$(N = N^* , M = 0) , (N = 0 , M = M^*)$$

є сідлами. Побудуємо матриці чутливості в цих точках.

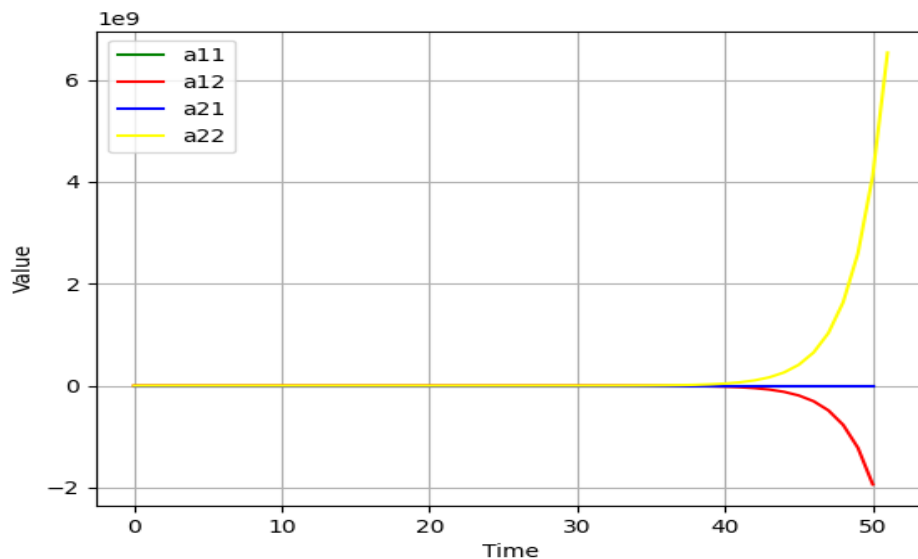


Рис. 3.1 Обидві сторони толерантні, точка $(N = N^*, M = 0)$ [6, 7]

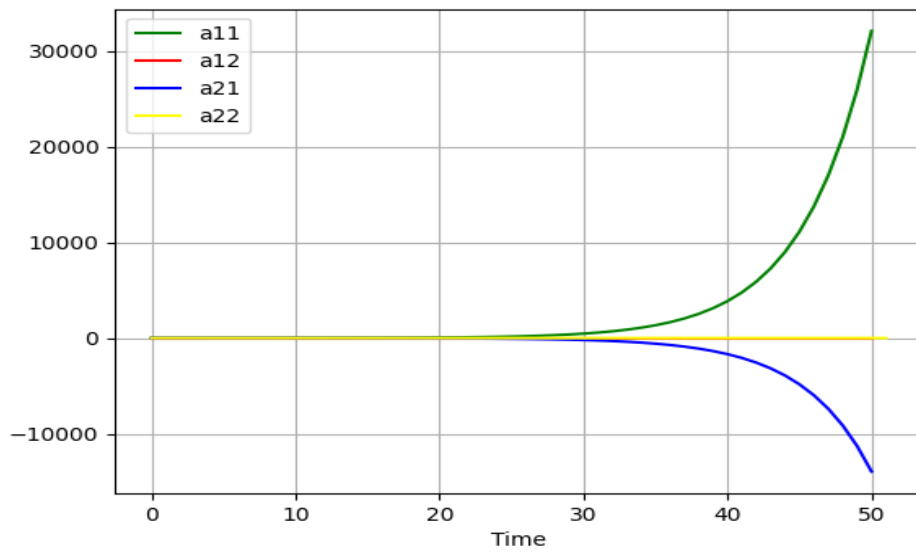


Рис. 3.2 Обидві сторони толерантні, точка $(N = 0, M = M^*)$ [6,7]

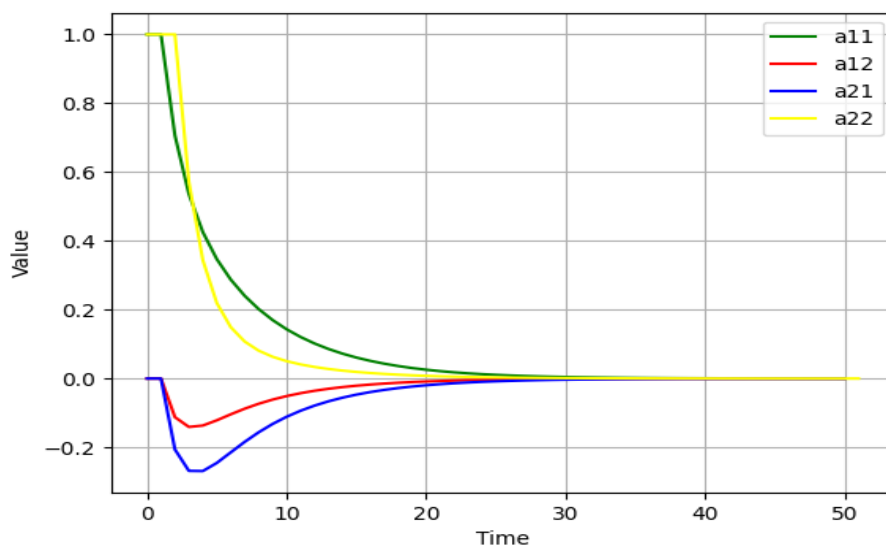


Рис. 3.3 Обидві сторони толерантні, точка (6) [6,7]

Висновком з цих рисунків є наступне: так як в точках $(N = N^*, M = 0), (N = 0, M = M^*)$ значення γ доволі швидко зростає, то в цих точках система більш чутлива. Проте точка (6) не виходить за межі $[-0.3, 1]$ на всьому $t \in [0, 50]$, що говорить про її низьку чутливість.

Другий випадок. Обидві сторони відносяться надтолерантно один до одного, тобто $n, m < 0$. Як і в попередньому випадку, точка (6) є стійким вузлом системи, а стаціонарні точки

$$(N = N^* , M = 0) , (N = 0 , M = M^*)$$

є сідлами. Побудуємо матриці чутливості в цих точках.

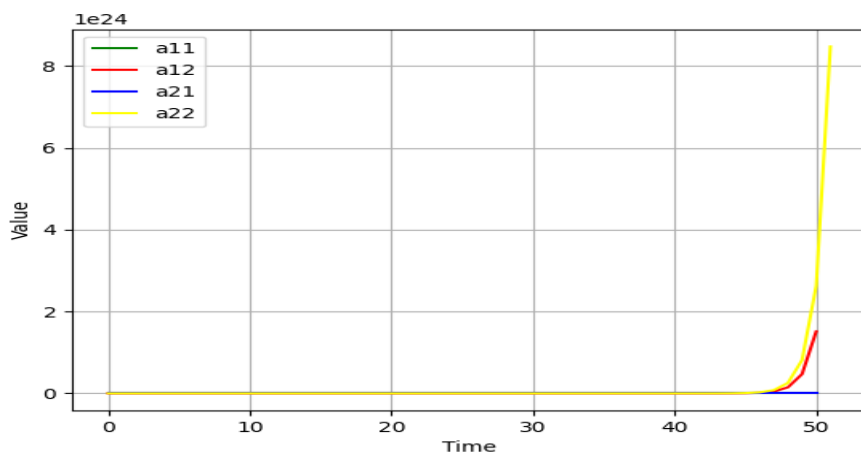


Рис. 3.4 Обидві сторони надтолерантні, точка $(N = N^* , M = 0)$
[6,7]

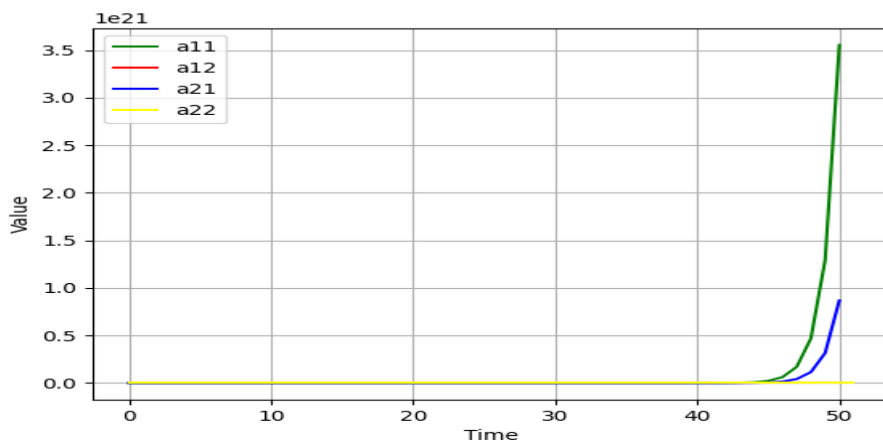


Рис. 3.5 Обидві сторони надтолерантні, точка $(N = 0 , M = M^*)$
[6,7]

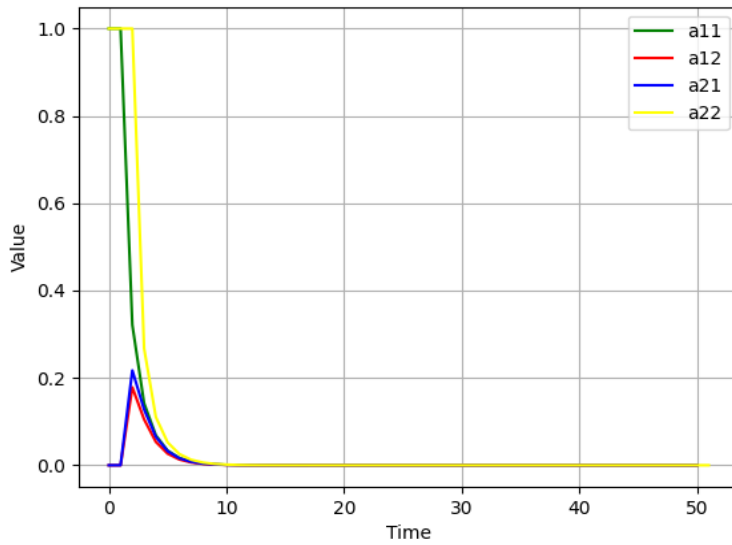


Рис. 3.6 Обидві сторони надтолерантні, точка (6) [6,7]

Висновки доволі схожі до висновків першого випадку через те, що точки рівноваги мають ті ж самі характеристики, як і в попередньому випадку. Тобто в точках $(N = N^*, M = 0)$, $(N = 0, M = M^*)$ значення γ доволі швидко зростає, що означає високу чутливість системи в цих точках. А от точка (6) прямує до нуля на всьому проміжку $t \in [0, 50]$, з чого робимо висновок про низьку чутливість системи.

Третій випадок. В третьому випадку обидві сторони відносяться нетерпимо один до одного. При попередньому аналізі було сказано, що точка (6) лежить в області нетерпимості і є сідлом, а стаціонарні точки

$$(N = N^* , M = 0) , (N = 0 , M = M^*)$$

є стійкими вузлами системи. Побудуємо матриці чутливості в цих точках.

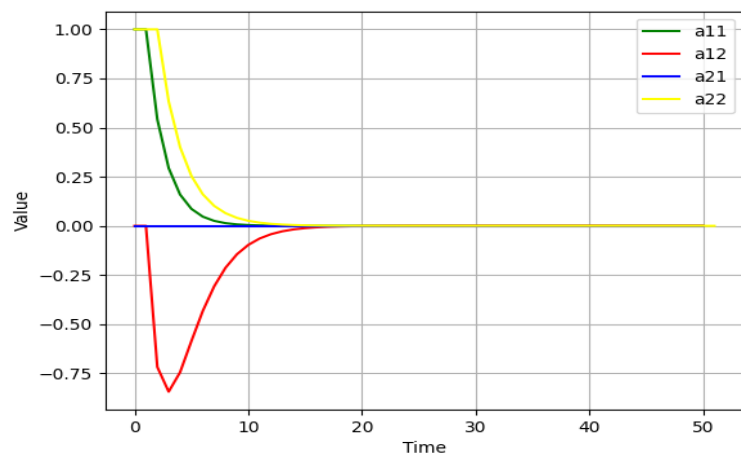


Рис. 3.7 Обидві сторони нетерпимі, точка $(N = N^*, M = 0)$ [6,7]

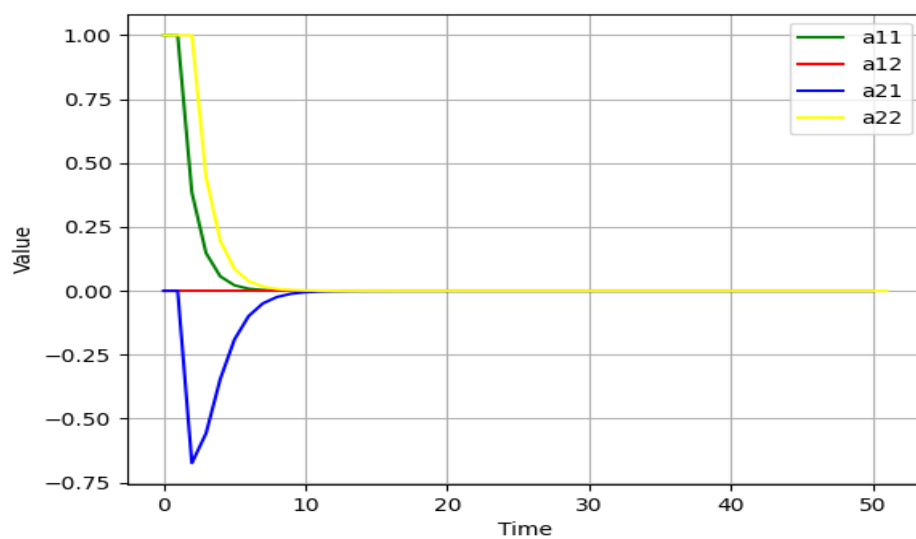


Рис. 3.8 Обидві сторони нетерпимі, точка $(N = 0, M = M^*)$ [6,7]

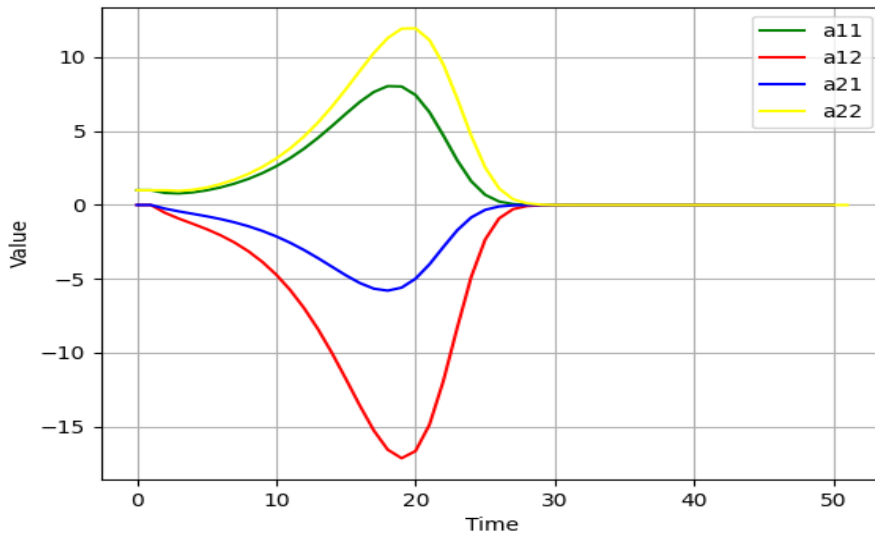


Рис. 3.9 Обидві сторони нетерпимі, точка (6) [6,7]

Висновок щодо точок $(N = N^*, M = 0)$, $(N = 0, M = M^*)$ є доволі очевидним - γ стрімко прямує до нуля, що говорить про майже нульову чутливість. А от дивлячись на рисунок 3.9 все не так очевидно. За попередніми дослідженнями ми знаємо, що точка (6) є сідлом, проте на графіку зміни γ , рисунку 3.9, видно, що γ збільшується лише на деякому проміжку, приблизно $t \in [0, 20]$. Після цього γ починає різко спадати і, врешті-решт, прямує до нуля, з чого маємо цікаві висновки. Точка (6) в цьому випадку є доволі чутливою на проміжку $t \in [0, 24]$, потім γ прямує до 0, що говорить про низьку стійкість системи на проміжку $t \in [24, 50]$

Четвертий випадок. В четвертому випадку M нетерпима до N ($1 < n < \infty$), а коефіцієнт нетерпимості N змінюється $-\infty < m \leq 1$, що означає, що сторона N відноситься до M або без упереджень, або толерантно, або надтолерантно. Тоді або система (3)-(4) не має рішення, або її рішення знаходиться не в першій чверті системи координат. Точка $(N = N^*, M = 0)$ – сідло, а точка $(N = 0, M = M^*)$ – стійкий вузол системи. Побудуємо матриці чутливості в цих точках.

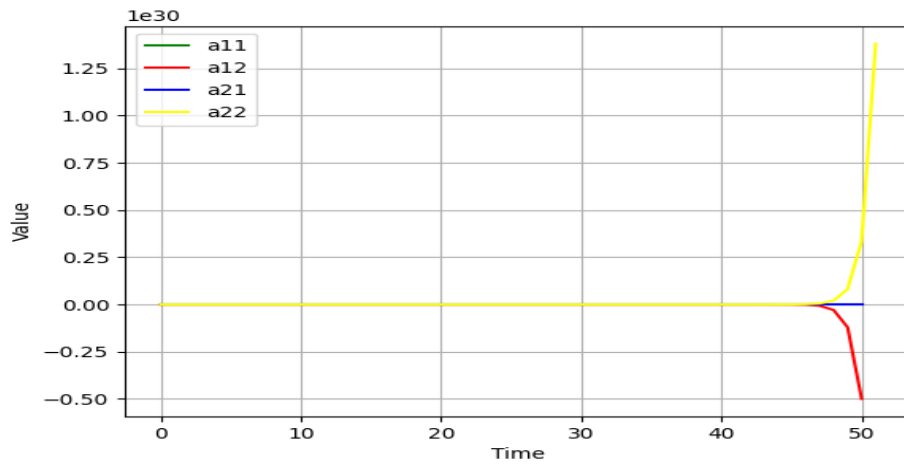


Рис. 3.10 Сторона N надтолерантна, сторона M нетерпима, точка $(N = N^*, M = 0)$ [6,7]

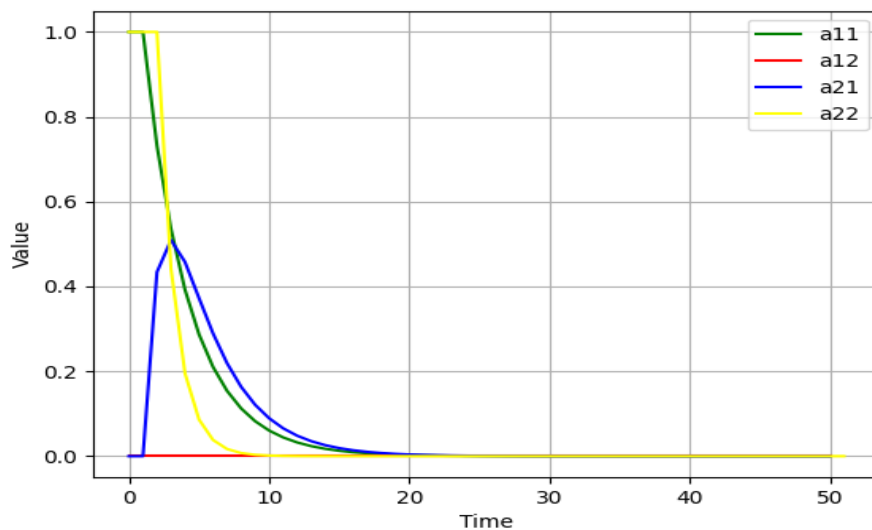


Рис. 3.11 Сторона N надтолерантна, сторона M нетерпима, точка $(N = 0, M = M^*)$ [6,7]

Як бачимо з рисунків 3.10 та 3.11, висновком может бути низька чутливість в точці $(N = 0, M = M^*)$. Також, можна сказати про великі значення γ в точці $(N = N^*, M = 0)$, що говорить про надзвичайну чутливість в цій точці.

П'ятий випадок(зеркальний до четвертого). В п'ятому випадку сторона N нетерпима до M ($1 < n < \infty$), а коефіцієнт нетерпимості M змінюється $-\infty < m \leq 1$, що означає, що сторона M відноситься до N або без упереджень, або толерантно, або надтолерантно. Тоді точка $(N = N^*, M = 0)$ – стійкий вузол, а точка $(N = 0, M = M^*)$ – сідло. Побудуємо матриці чутливості в цих точках.

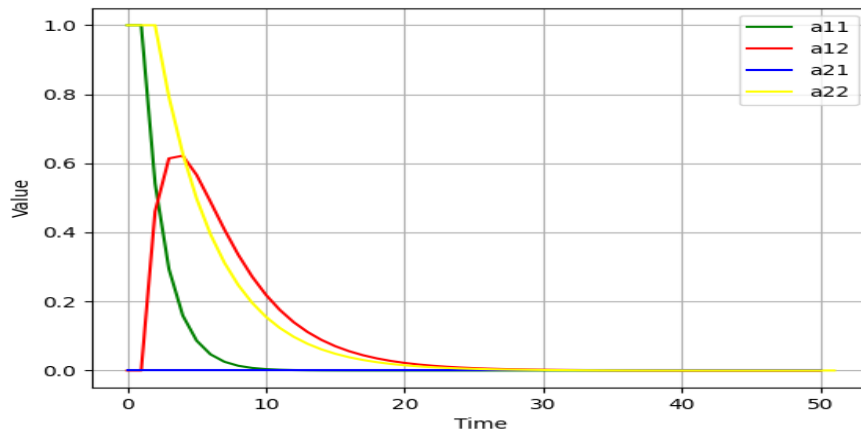


Рис. 3.12 Сторона M надтолерантна, сторона N нетерпима, точка $(N = N^*, M = 0)$ [6,7]

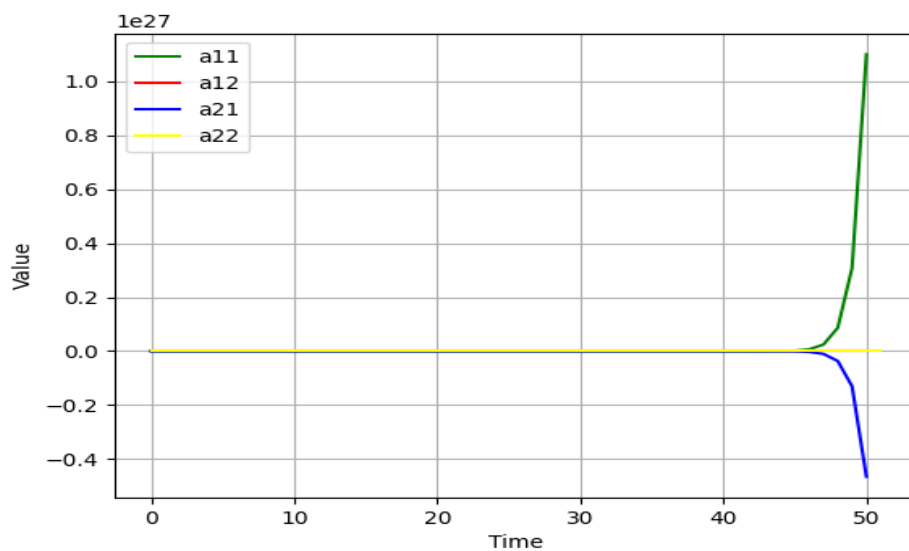


Рис. 3.13 Сторона M надтолерантна, сторона N нетерпима, точка $(N = 0, M = M^*)$ [6,7]

Висновок з рисунків 3.12, 3.13 є зеркальним до висновку в четвертому випадку, а саме низьку чутливість в точці $(N = N^*, M = 0)$ та високу чутливість в точці $(N = 0, M = M^*)$.

Шостий випадок. Тепер розглянемо випадок $n = m = 1$, тобто сторони відносяться одна до одної без упереджень. Тут весь відрізок (5) між точками $(N = N^*, M = 0)$ та $(N = 0, M = M^*)$ є областю тяжіння траєкторій. Побудуємо матриці чутливості в цих точках.

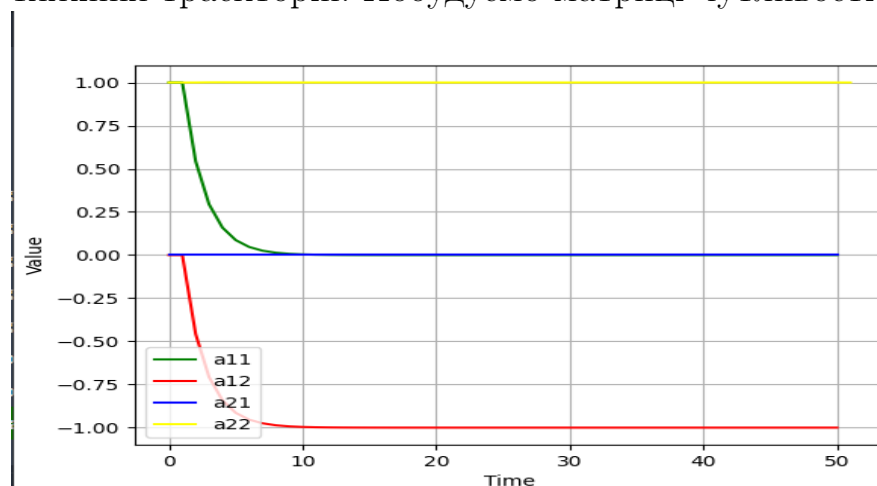


Рис. 3.14 Взаємні відносини без упереджень , точка $(N = N^*, M = 0)$ [6,7]

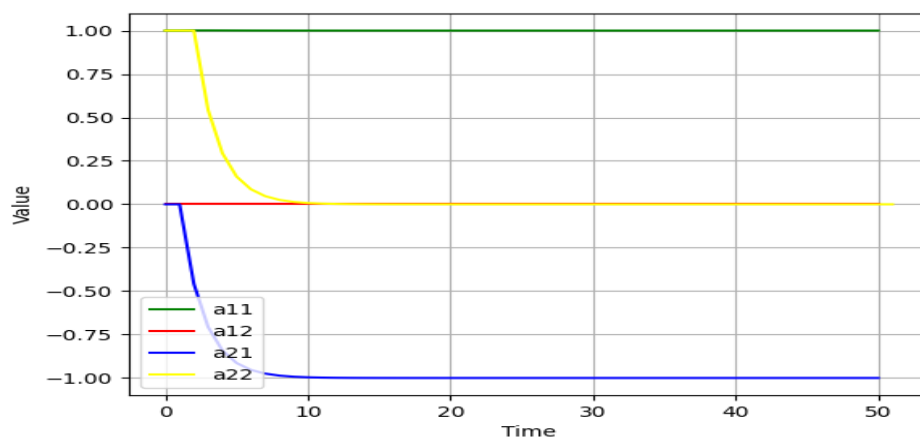


Рис. 3.15 Взаємні відносини без упереджень , точка $(N = 0, M = M^*)$ [6,7]

Як і говорилося спочатку, вся пряма між точками $(N = N^*, M = 0)$ та $(N = 0, M = M^*)$ (11) є областю тяжіння, що означає що вся кожна точка на цій прямій є стійкою. Аналіз чутливості показав, що в певній точці, та в сусідніх до неї має місце низька чутливість. Так як точки на прямій (11) є однаковими, що можна побачити з рисунків 3.14 та 3.15, то можна говорити про низьку чутливість в кожній точці на прямій (11)

Висновки

Дана дипломна робота присвячена дослідженню математичної моделі міжкультурної взаємодії. В ній запропоновано таке:

- Проведено опис математичної моделі міжкультурних взаємодій.
- Проведено аналіз цієї математичної моделі міжкультурних взаємодій, а саме знайдено її точки рівноваги, здійснено їх класифікацію та побудовано відповідні фазові портрети.
- Знайдено матрицю чутливості математичної моделі міжкультурних взаємодій за початковими умовами. Обчислено матрицю чутливості в точках рівноваги.
- Побудовано біматричну гру з протилежними інтересами на базі математичної моделі взаємодії культур. Виходячи з побудованої матричної гри знайдено всі можливі стратегії поведінки двох сторін.
- Створено програму на мові Python для аналізу математичної моделі міжкультурних взаємодій. Проведено обчислювальні експерименти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Белолетов Н. В., Бродський Ю. І., Павловський Ю. Н. Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ. Исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов. – Москва: ЛИБРОКОМ, 2009. – 320 с.
2. Самарський А. А., Михайлов А. П. – Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 321 с.
3. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. – Диференціальні рівняння. – Київ: Либідь, 2003. – 599 с.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1974. – 331 с.
5. Гермейер Ю. Б. – Игры с непротивоположными интересами – Москва: Наука, 1976. – 330 с.
6. Гаращенко Ф. Г., Швець О.Ф. – Вступ до аналізу чутливості параметричних систем: Начальний посібник – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський Університет 2006. – 115 с.
7. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р.М.– Чутливість систем керування – Москва:Наука, Головна редакція фізико-математичної літератури. 1981 – 464 с.