Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2021, № 2 (136) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85

MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

TWO-LEVEL PROBLEMS AND TWO-STAGE PROXIMAL ALGORITHM

V. V. Semenov, Ya. I. Vedel, S. V. Denisov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: {volodya.semenov, yana.vedel, sireukr}@gmail.com

ДВОРІВНЕВІ ЗАДАЧІ ТА ДВОЕТАПНИЙ ПРОКСИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ

В. В. Семенов, Я. І. Ведель, С. В. Денисов

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: {volodya.semenov, yana.vedel, sireukr}@gmail.com

Abstract. In this paper, a two-level problem is considered: a variational inequality on the set of solutions to the equilibrium problem. An example of such a problem is the search for the normal Nash equilibrium. To solve this problem, two algorithms are proposed. The first combines the ideas of a two-step proximal method and iterative regularization. And the second algorithm is an adaptive version of the first with a parameter update rule that does not use the values of the Lipschitz constants of the bifunction. Theorems on strong convergence of algorithms are proved for monotone bifunctions of Lipschitz type and strongly monotone Lipschitz operators. It is shown that the proposed algorithms can be applied to monotone two-level variational inequalities in Hilbert spaces.
Keywords: variational inequality, equilibrium problem, two-level problem, two-stage proximal method, convergence.

Анотація. У даній роботі розглянуто дворівневу задачу: варіаційну нерівність на множині розв'язків задачі про рівновагу. Прикладом такої задачі є пошук нормальної рівноваги Неша. Для розв'язання даної задачі запропоновано два алгоритми. Перший суміщає у собі ідеї двоетапного проксимального методу та ітеративної регуляризації. А другий алгоритм є адаптивним варіантом першого з правилом оновлення параметрів, що не використовує значень ліпшицевих констант біфункції. Для монотонних біфункцій ліпшицевого типу та сильно монотонних ліпшицевих операторів доведено теореми про сильну збіжність алгоритмів. Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до монотонних дворівневих варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.
Ключові слова: варіаційна нерівність, задача про рівновагу, дворівнева задача, двоетапний проксимальний метод, збіжність.

Вступ

В дослідженні операцій виникають задачі оптимізації за послідовно заданими критеріями (лексикографічна, послідовна оптимізація) [1, 2]. Дворівневі варіаційні нерівності виникли як природне узагальнення задач лексикографічної оптимізації з двома критеріями, а також при аналізі звичайних оптимізаційних задач з обмеженнями у формі варіаційної нерівності. Як самостійний математичний об'єкт, дворівнева варіаційна нерівність у скінченновимірному випадку розглядалась у [3]. Розв'язності більш загальних n-рівневих варіаційних нерівностей та побудові одноетапних алгоритмів їх розв'язання присвячено роботи [4, 5]. У [6] розглядалась варіаційна нерівність на множині розв'язків задачі про рівновагу.

Алгоритми для варіаційних нерівностей на множині розв'язків задачі про рівновагу та дворівневих варіаційних нерівностей розглядались у роботах [6–10]. Зокрема, в [6] для варіаційних нерівностей на множині розв'язків задачі про рівновагу був запропонований сильно збіжний алгоритм, який використовував операцію обчислення значення резольвенти біфункції. Останнє істотно збільшувало трудомісткість алгоритму.

У даній роботі розглянуто дворівневу задачу: варіаційну нерівність на множині розв'язків задачі про рівновагу. Прикладом такої задачі є пошук нормальної рівноваги Неша. Для розв'язання даної задачі запропоновано два алгоритми. Перший суміщає у собі ідеї двоетапного проксимального методу [11, 12] та ітеративної регуляризації [13, 14]. А другий алгоритм є адаптивним варіантом першого з правилом оновлення параметрів, що не використовує значень ліпшицевих констант біфункції. Для монотонних біфункцій ліпшицевого типу та сильно монотонних ліпшицевих операторів доведено теореми про сильну збіжність алгоритмів. Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до монотонних дворівневих варіаційних нерівностей в гільбертових просторах. Попередні результати опубліковано в роботах [15, 16].

1. Постановка задачі

Нехай H — дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та породженою нормою $\|\cdot\|$. Для оператора $A : H \to H$, множини $M \subseteq H$ та біфункції $F : H \times H \to \mathbb{R}$ позначимо $VI(A, M)$ та $EP(F, M)$ множини

$$\{x \in M : \ (Ax, y - x) \geqslant 0 \ \ \forall\, y \in M\} \ \text{ та } \ \{x \in M : \ F(x, y) \geqslant 0 \ \ \forall\, y \in M\},$$

відповідно.

Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq H$ розглянемо дворівневу задачу:

$$\text{знайти } \ x \in VI(A, EP(F, C)). \tag{1}$$

Будемо припускати, що виконуються такі умови:

(A1) $F(x, x) = 0$ для всіх $x \in C$;
(A2) $F(x, y) + F(y, x) \leqslant 0$ для всіх x, $y \in C$ (монотонність);
(A3) для всіх $x \in C$ функція $F(x, \cdot)$ напівнеперервна знизу та опукла на множині C;

(A4) для всіх $y \in C$ функція $F(\cdot, y)$ слабко напівнеперервна зверху на множині C;

(A5) для всіх x, y, $z \in C$ має місце

$$F(x,y) \leqslant F(x,z) + F(z,y) + a\|x-z\|^2 + b\|z-y\|^2,$$

де a, b — додатні константи (ліпшицевість).

(A6) $EP(F,C) \neq \emptyset$.

(A7) $A : C \to H$ — μ–сильно монотонний та L–ліпшицевий оператор.

За цих умов множина $EP(F,C)$ опукла та замкнена [17], а задача (1) має єдиний розв'язок $x^* \in H$ [18].

Зауважимо, що біфункція $F(x,y) = (Ax, y-x)$ з ліпшицевим оператором $A : C \to H$ задовольняє (A5) з $a = \frac{L\varepsilon}{2}$, $b = \frac{L}{2\varepsilon}$, де $\varepsilon > 0$.

Зауваження 1. Найвідомішим окремим випадком (1) є задача пошуку нормального розв'язку варіаційної нерівності (при $Ax = 2x$, $F(x,y) = (Bx, y-x)$, де $B : C \to H$):

$$\|x\|^2 \to \min, \quad x \in C : (Bx, y-x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C.$$

Апроксимуємо задачу (1) однорівневою та більш регулярною задачею про рівновагу.

2. Апроксимація Тихонова–Браудера

Розглянемо допоміжну задачу про рівновагу:

$$\text{знайти } \; x \in C : \quad F(x,y) + \varepsilon(Ax, y-x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C, \tag{2}$$

де $\varepsilon > 0$.

Наслідуючи А. Б. Бакушинському [13], назвемо задачу (2) апроксимацією Тихонова–Браудера дворівневої задачі (1).

Зауваження 2. Для розв'язання екстремальних задач подібна апроксимація була запропонована А. М. Тихоновим для побудови регуляризуючих алгоритмів, а пізніше F. Browder [19,20] застосував подібну схему для стійкої апроксимації нормального розв'язку варіаційної нерівності або проекції заданої точки на множину нерухомих точок нерозтягуючих операторів.

З результатів [17] випливає існування та єдиність розв'язку $x_\varepsilon \in C$ задачі (2) для довільного $\varepsilon > 0$.

Елементи $x_\varepsilon \in C$ мають декілька важливих властивостей.

Лема 1. *Справедливі такі нерівності:*

(i) $\|x_\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{\mu}\|Ax^*\| + \|x^*\|$ *для всіх* $\varepsilon > 0$;

(ii) $\|x_\varepsilon - x_\delta\| \leqslant \frac{|\varepsilon-\delta|}{\varepsilon}\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{L}{\mu}\right)\|Ax^*\|$ *для всіх* ε, $\delta > 0$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 0$. Для x_ε — розв'язку задачі (2) та довільного елементу $\hat{x} \in EP(F,C)$ маємо

$$F(x_\varepsilon, \hat{x}) + \varepsilon(Ax_\varepsilon, \hat{x} - x_\varepsilon) \geqslant 0 \;\text{ и }\; F(\hat{x}, x_\varepsilon) \geqslant 0.$$

Склавши нерівності та скориставшись монотонністю біфункції F, отримаємо

$$(Ax_\varepsilon, \hat{x} - x_\varepsilon) \geqslant 0,$$

тобто,

$$(Ax_\varepsilon - A\hat{x}, x_\varepsilon - \hat{x}) \leqslant (A\hat{x}, \hat{x} - x_\varepsilon).$$

Сильна монотонність оператора A та нерівність Шварца дають

$$\mu\|x_\varepsilon - \hat{x}\| \leqslant \|A\hat{x}\|, \tag{3}$$

звідки і випливає (i).

Доведемо (ii). Нехай x_ε та x_δ — розв'язки задачі (2) з $\varepsilon > 0$ та $\delta > 0$, відповідно. Маємо

$$F(x_\varepsilon, x_\delta) + \varepsilon(Ax_\varepsilon, x_\delta - x_\varepsilon) \geqslant 0 \text{ та } F(x_\delta, x_\varepsilon) + \delta(Ax_\delta, x_\varepsilon - x_\delta) \geqslant 0.$$

Склавши нерівності та скориставшись монотонністю біфункції F, отримаємо

$$\varepsilon(Ax_\varepsilon, x_\delta - x_\varepsilon) + \delta(Ax_\delta, x_\varepsilon - x_\delta) \geqslant 0.$$

Перепишемо останню нерівність у вигляді

$$\varepsilon(Ax_\varepsilon - Ax_\delta, x_\varepsilon - x_\delta) \leqslant (\delta - \varepsilon)(Ax_\delta, x_\varepsilon - x_\delta).$$

Скориставшись сильною монотонністю оператора A, отримаємо

$$\varepsilon\mu\|x_\varepsilon - x_\delta\|^2 \leqslant |\delta - \varepsilon|\|Ax_\delta\|\|x_\varepsilon - x_\delta\|,$$

тобто,

$$\|x_\varepsilon - x_\delta\| \leqslant \frac{|\delta - \varepsilon|}{\varepsilon\mu}\|Ax_\delta\|. \tag{4}$$

Оцінимо зверху за допомогою (3) норму $\|Ax_\delta\|$

$$\|Ax_\delta\| \leqslant \|Ax^*\| + \|Ax_\delta - Ax^*\| \leqslant \\ \leqslant \|Ax^*\| + L\|x_\delta - x^*\| \leqslant \left(1 + \frac{L}{\mu}\right)\|Ax^*\|. \tag{5}$$

Використавши оцінку (5) в (4) приходимо до (ii). □

При прямуванні малого додатнього параметру ε до нуля елементи x_ε сильно збігаються до розв'язку задачі (1).

Лема 2. *Нехай виконуються умови (A1)–(A4) та (A6), (A7). Тоді*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|x_\varepsilon - x^*\| = 0.$$

Доведення. В силу (i) леми 1 з $\{x_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ можна виділити слабко збіжну до $w \in C$ послідовність (x_{ε_n}) $(\varepsilon_n \to 0)$. Скориставшись слабкою напівнеперервністю зверху функції $F(\cdot, y)$, перейдемо до границі в

$$F(x_{\varepsilon_n}, y) + \varepsilon_n(Ax_{\varepsilon_n}, y - x_{\varepsilon_n}) \geqslant 0 \quad \forall y \in C.$$

Отримаємо

$$F(w, y) \geqslant 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто, $w \in EP(F, C)$. А перейшовши в нерівності

$$(A\hat{x}, \hat{x} - x_{\varepsilon_n}) \geqslant (Ax_{\varepsilon_n}, \hat{x} - x_{\varepsilon_n}) \geqslant 0 \quad \forall \hat{x} \in EP(F, C)$$

до границі, отримаємо

$$(A\hat{x}, \hat{x} - w) \geqslant 0 \quad \forall \hat{x} \in EP(F, C),$$

тобто, $w = x^*$. Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\varepsilon_n} - x^*\| = 0.$$

Це випливає з нерівності

$$\mu\|x_{\varepsilon_n} - x^*\|^2 \leqslant (Ax_{\varepsilon_n} - Ax^*, x_{\varepsilon_n} - x^*) \leqslant (Ax^*, x^* - x_{\varepsilon_n}).$$

З єдиності елемента x^* отримуємо $\lim_{\varepsilon\to 0} \|x_\varepsilon - x^*\| = 0$. □

Перейдемо до опису алгоритму розв'язання дворівневої задачі (1).

3. Двоетапний проксимальний алгоритм

У роботі [11] для апроксимації елементів множини $EP(F, C)$ був запропонований двоетапний проксимальний алгоритм вигляду

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} x_n, \end{cases} \tag{6}$$

де $\lambda_n > 0$. Відштовхуючись від схеми (6), для розв'язання дворівневої задачі (1) в [11] запропоновано такий алгоритм.

Алгоритм 1 (Ведель–Денисов–Семенов, [11])**.** Для $x_1, y_0 \in C$ генерируємо послідовність елементів $x_n, y_n \in C$ за допомогою ітераційної схеми

$$\begin{cases} z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n, \\ y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} z_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2} \|y - z_n\|^2 \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} z_n = \operatorname{argmin}_{y \in C} \left(\lambda_n F(y_n, y) + \frac{1}{2} \|y - z_n\|^2 \right), \end{cases}$$

де $\lambda_n > 0$, $\alpha_n > 0$.

На кожному кроці алгоритму 1 слід розв'язати дві опуклі задачі мінімізації з сильно опуклими функціями.

Відносно параметрів алгоритму 1 будемо припускати, що виконані такі умови:

(B1) $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a+b)}\right)$;
(B2) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;
(B3) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
(B4) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n^2} = 0$.

Зауваження 3. В якості допустимої послідовності (α_n) можна обрати таку: $\alpha_n = n^{-p}$, $p \in (0, 1)$.

Зауваження 4. Якщо $F(x, y) = (Bx, y - x)$, то алгоритм 1 набуває вигляду:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \ y_0 \in C, \\ z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n, \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_n B y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_C(z_n - \lambda_n B y_n), \end{cases}$$

де P_C — оператор метричного проектування на множину C. Даний метод при $A = I$ був досліджений в [14]. А частинний випадок схеми

$$\begin{cases} y_n = P_C(z_n - \lambda_n B y_{n-1}), \\ x_{n+1} = P_C(z_n - \lambda_n B y_n), \end{cases}$$

запропоновано в [21] для пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій, що задані в скінченновимірному евклідовому просторі. У статті [22] доведено збіжність цього алгоритму для варіаційних нерівностей з монотонними та ліпшицевими операторами, що діють в нескінченновимірному гільбертовому просторі, а також запропонована його економна модифікація. У роботах [23–26] досліджені варіанти методу з використання брегманівської дивергенції замість евклідової відстані.

Зауваження 5. В [10] для дворівневої варіаційної нерівності був запропонований та обгрунтований близький алгоритм:

$$\begin{cases} x_1 \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n B x_n), \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_n B y_n), \\ x_{n+1} = z_n - \alpha_n A z_n. \end{cases}$$

Алгоритм 1 поєднує у собі ідеї двоетапного проксимального методу [11, 12, 27] та ітеративної регуляризації [13]. Доведення його сильної збіжності проведемо за такою схемою. Нехай x_{α_n} — розв'язок задачі (2) при $\varepsilon = \alpha_n$. Оскільки $\|x_n - x^*\| \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\| + \|x_{\alpha_n} - x^*\|$, $\lim_{n\to\infty} \|x_{\alpha_n} - x^*\| = 0$, то достатньо показати, що породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) має властивість $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{\alpha_n}\| = 0$.

4. Доведення збіжності

Доведення збіжності алгоритму 1 почнемо з доведення важливої нерівності для згенерованих ним послідовностей (x_n), (y_n) та елементів x_{α_n}.

Лема 3. *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (y_n) та елементів x_{α_n} виконується нерівність*

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n \lambda_n \mu) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \left(1 - 4\lambda_n a - \alpha_n \lambda_n \frac{L^2}{\mu}\right) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - 2\lambda_n b) \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 4\lambda_n a \|y_{n-1} - x_n\|^2 . \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 = \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}) = \\ = \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 - \\ - 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}) . \end{aligned} \tag{8}$$

З визначення точок x_{n+1} та y_n випливає

$$\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) - \lambda_n F(y_n, x_{n+1}) \geqslant (x_{n+1} - x_n + \alpha_n \lambda_n A x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}), \tag{9}$$

$$\lambda_n F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda_n F(y_{n-1}, y_n) \geqslant -(x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n - y_n, y_n - x_{n+1}). \quad (10)$$

Використовуючи нерівності (9), (10) для оцінки скалярних добутків в (8), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\lambda_n \{F(y_n, x_{\alpha_n}) - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)\} + \\ + 2\alpha_n \lambda_n (A x_n, x_{\alpha_n} - y_n). \quad (11) \end{aligned}$$

Ліпшицевість біфункції F гарантує виконання нерівності

$$\begin{aligned} - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) \leqslant \\ \leqslant a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + b \|y_n - x_{n+1}\|^2 . \end{aligned}$$

Використавши вищенаведену оцінку в (11), отримуємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\lambda_n a \|y_{n-1} - y_n\|^2 + 2\lambda_n b \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\alpha_n \lambda_n (A x_n, x_{\alpha_n} - y_n) + 2\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}). \quad (12) \end{aligned}$$

Член $\|y_{n-1} - y_n\|^2$ оцінимо таким чином

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leqslant 2 \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2 \|y_n - x_n\|^2 .$$

Маємо

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 4\lambda_n a \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 4\lambda_n a \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n b \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\alpha_n \lambda_n (A x_n, x_{\alpha_n} - y_n) + 2\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}). \quad (13) \end{aligned}$$

З монотонності біфункції F випливає

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) \leqslant -F(x_{\alpha_n}, y_n),$$

звідки

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) - \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) \leqslant -F(x_{\alpha_n}, y_n) - \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Оскільки

$$F(x_{\alpha_n}, y_n) + \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) \geqslant 0,$$

то

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) \leqslant \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Урахувавши останню оцінку в (13), приходимо до нерівності

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 4\lambda_n a \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 4\lambda_n a \|y_n - x_n\|^2 + 2\lambda_n b \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\alpha_n \lambda_n (A x_n - A x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n). \quad (14) \end{aligned}$$

Оцінимо зверху член $(Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n)$. Маємо

$$(Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n) = (Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x_n) + \\ + (Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_n - y_n) \leqslant -\mu \|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + L \|x_n - x_{\alpha_n}\| \|x_n - y_n\| \leqslant \\ \leqslant -\mu \|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + \frac{\mu}{2} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{L^2}{2\mu} \|x_n - y_n\|^2 = \\ = -\frac{\mu}{2} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{L^2}{2\mu} \|x_n - y_n\|^2 . \quad (15)$$

З нерівностей (14) та (15) отримуємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n \lambda_n \mu) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \left(1 - 4\lambda_n a - \alpha_n \lambda_n \frac{L^2}{\mu}\right) \|x_n - y_n\|^2 - (1 - 2\lambda_n b) \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 4\lambda_n a \|y_{n-1} - x_n\|^2 .$$

що й було потрібно. □

Отримаємо важливу оцінку з якої випливає збіжність до нуля послідовностей $(\|x_n - x_{\alpha_n}\|)$ та $(\|y_{n-1} - x_n\|)$.

Лема 4. *Для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (y_n) та елементів x_{α_n} при великих n виконується нерівність*

$$\left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 + \frac{4\lambda_{n+1} a}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu} \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leqslant \\ \leqslant \left(1 - \frac{\alpha_n \lambda_n \mu}{2}\right) \left(\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{4\lambda_n a}{1 - \alpha_n \lambda_n \mu} \|y_{n-1} - x_n\|^2\right) + \\ + \frac{2M}{\lambda_n \mu} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^3}, \quad (16)$$

де $M = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{L}{\mu}\right) \|Ax^*\|$.

Доведення. Маємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 = \left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 + \left\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\right\|^2 + \\ + 2\left(x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}, x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\right) \geqslant \left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 + \\ + \left\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\right\|^2 - 2\left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\| \left\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\right\| \geqslant \\ \geqslant (1 - \varepsilon) \left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 + \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} \left\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\right\|^2 , \quad (17)$$

де $\varepsilon > 0$. Покладемо в (17) $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha_n \lambda_n \mu$. Отримаємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \geqslant \frac{2 - \alpha_n \lambda_n \mu}{2} \left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 - \\ - \frac{2 - \alpha_n \lambda_n \mu}{\alpha_n \lambda_n \mu} \left\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\right\|^2 . \quad (18)$$

В силу правил узгодження значень параметрів α_n, λ_n при великих n маємо $1 - \alpha_n\lambda_n\mu > 0$. З урахуванням другої нерівності леми 1 з (18) виводимо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \geqslant \frac{2-\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 - \\ - \frac{(2-\alpha_n\lambda_n\mu)}{\alpha_n\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^2}\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{L}{\mu}\right)\|Ax^*\|, \quad (19)$$

для всіх $n \geqslant n_0$. Використавши (19) в (7), отримаємо (для $n \geqslant n_0$)

$$\frac{2-\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 \leqslant (1-\alpha_n\lambda_n\mu)\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \left(1 - 4\lambda_n a - \alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}\right)\|x_n - y_n\|^2 - (1-2\lambda_n b)\|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 4\lambda_n a\|y_{n-1} - x_n\|^2 + \frac{(2-\alpha_n\lambda_n\mu)}{\alpha_n\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^2}M,$$

де $M = \frac{1}{\mu}\left(1+\frac{L}{\mu}\right)\|Ax^*\|$. Звідки випливає нерівність

$$\left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 \leqslant \frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \frac{2\left(1 - 4\lambda_n a - \alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}\right)}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n - y_n\|^2 - \frac{2(1-2\lambda_n b)}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + \frac{8\lambda_n a}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_{n-1} - x_n\|^2 + \frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \quad (20)$$

Перегрупувавши члени в (20), отримаємо

$$\left\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2 + \frac{4\lambda_{n+1}a}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\|y_n - x_{n+1}\|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\left(\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{4\lambda_n a}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_{n-1} - x_n\|^2\right) - \\ - \frac{2\left(1 - 4\lambda_n a - \alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}\right)}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n - y_n\|^2 - \\ - \left(\frac{1-2\lambda_n b}{1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}} - \frac{4\lambda_{n+1}a}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\right)\|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + \frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \quad (21)$$

Оскільки

$$\lambda_n \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a+b)}\right) \quad \text{та} \quad \alpha_n > 0, \ \lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0,$$

то починаючи з деякого номера n_1 будуть виконуватися нерівності

$$\frac{1-4\lambda_n a-\alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}>0,\quad \frac{1-2\lambda_n b}{1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}}-\frac{4\lambda_{n+1}a}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}>0,$$

та

$$\frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}<1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}.$$

Таким чином, для $n\geqslant N=\max\{n_0,n_1\}$ з (21) випливає

$$\begin{aligned}\left\|x_{n+1}-x_{\alpha_{n+1}}\right\|^2+\frac{4\lambda_{n+1}a}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\left\|y_n-x_{n+1}\right\|^2\leqslant\\ \leqslant\left(1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\right)\left(\left\|x_n-x_{\alpha_n}\right\|^2+\frac{4\lambda_n a}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\left\|y_{n-1}-x_n\right\|^2\right)+\\ +\frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3},\end{aligned}$$

що й потрібно було довести. □

Нагадаємо відомий результат про числові послідовності [13].

Лема 5. *Нехай послідовність невід'ємних чисел ξ_n задовольняє нерівність*

$$\xi_{n+1}\leqslant(1-\alpha_n)\xi_n+\beta_n,$$

де послідовності (α_n) та (β_n) мають властивості:

1) $\alpha_n\in(0,1)$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty$;
2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{\beta_n}{\alpha_n}\leqslant 0$.

Тоді $\lim_{n\to\infty}\xi_n=0$.

Сформулюємо основний результат підрозділу.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A1)–(A7) та (B1)–(B4). Тоді для породжених алгоритмом 1 послідовностей (x_n), (y_n) має місце*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-x^*\|=0, \tag{22}$$

де $x^*\in H$ — єдиний розв'язок задачі (1).

Доведення. В силу леми 5 та нерівності (16) маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2+\frac{4\lambda_n a}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_{n-1}-x_n\|^2\right)=0.$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{\alpha_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|y_{n-1}-x_n\|=0. \tag{23}$$

З нерівності

$$\|x_n-x^*\|\leqslant\|x_n-x_{\alpha_n}\|+\|x_{\alpha_n}-x^*\|,$$

леми 2 та (23) отримуємо шукані співвідношення (22). □

Зауваження 6. При $A = I$ задача (1) співпадає з задачею пошуку точки $P_{EP(F,C)}0$. Таким чином, в цьому випадку алгоритм 1 є сильно збіжною схемою обчислення нормального (з мінімальною нормою) розв'язку задачі про рівновагу.

5. Адаптивний алгоритм

Для розв'язання задачі (1) вище було розглянуто такий метод:

$$\begin{cases} z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n, \\ y_n = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left(\lambda_n F(y_{n-1}, y) + \frac{1}{2} \|y - z_n\|^2 \right), \\ x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left(\lambda_n F(y_n, y) + \frac{1}{2} \|y - z_n\|^2 \right), \end{cases} \tag{24}$$

де λ_n задавалися виходячи з умови

$$\lambda_n \in \left[\underline{\lambda}, \overline{\lambda}\right] \subseteq \left(0, \frac{1}{2(2a+b)}\right),$$

а додатня послідовність (α_n) така, що

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n^2} = 0.$$

З метою позбутися явного використання в (24) інформації про значення констант a і b при заданні меж для λ_n розглянемо наступний алгоритм з адаптивним вибором λ_n.

Алгоритм 2 (Ведель–Денисов–Семенов, [16]). Обираємо елементи $x_1, y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладаємо $n = 1$.

1: Обчислити

$$z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n.$$

2: Обчислити

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1},\cdot)} x_n.$$

3: Обчислити

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n.$$

4: Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \ \text{якщо} \ F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leqslant 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2}{(F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\}, \quad \text{інакше}. \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на **1**.

У алгоритмі 2 параметр λ_{n+1} залежить від розташування точок y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, значень $F(y_{n-1}, x_{n+1})$, $F(y_{n-1}, y_n)$ і $F(y_n, x_{n+1})$. Ніяка інформація про константи a і b не використовується. Очевидно, що послідовність (λ_n) незростаюча. Також вона обмежена знизу числом

$$\min\left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a, b\}} \right\}.$$

Дійсно, маємо

$$F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant \max\{a, b\} \left(\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2 \right).$$

Щодо додатніх параметрів α_n будемо припускати виконаними наступні умови:

(C1) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;
(C2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
(C3) $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_n^2} = 0$.

Перейдемо до обґрунтування алгоритму 2. Доведення збіжності проведемо за розглянутою вище схемою. А саме, покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_{\alpha_n}\| = 0$, де x_{α_n} — розв'язок задачі (2) при $\varepsilon = \alpha_n$.

6. Доведення збіжності адаптивного алгоритму

Спочатку доведемо важливу нерівність для послідовностей (x_n), (y_n) та елементів x_{α_n}.

Лема 6. *Для породжених алгоритмом 2 послідовностей* (x_n), (y_n) *та елементів* x_{α_n} *виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n\lambda_n\mu) \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) \|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - \alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}\right) \|y_n - x_n\|^2 + \\ + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_{n-1}\|^2. \quad (25)$$

Доведення. Маємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 = \\ = \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\big(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}\big) = \\ = \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 - \\ - 2\big(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}\big) + 2\big(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}\big). \quad (26)$$

З визначення точок x_{n+1} і y_n випливає

$$\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) - \lambda_n F(y_n, x_{n+1}) \geqslant \big(x_{n+1} - x_n + \alpha_n\lambda_n A x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}\big), \quad (27)$$

$$\lambda_n F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda_n F(y_{n-1}, y_n) \geqslant -\big(x_n + \alpha_n\lambda_n A x_n - y_n, y_n - x_{n+1}\big). \quad (28)$$

Використавши нерівності (27), (28) для оцінки скалярних добутків в (26), отримуємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\lambda_n \left(F(y_n, x_{\alpha_n}) - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)\right) + \\ + 2\alpha_n\lambda_n \left(A x_n, x_{\alpha_n} - y_n\right). \quad (29)$$

З правила обчислення λ_{n+1} випливає нерівність

$$F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} \left(\|y_{n-1} - y_n\|^2 - \|x_{n+1} - y_n\|^2 \right). \quad (30)$$

Для оцінки виразу

$$F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1})$$

в (29) скористаємося (30). Отримаємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - y_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ + 2\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) + 2\alpha_n \lambda_n \big(Ax_n, x_{\alpha_n} - y_n \big).$$

Член $\|y_{n-1} - y_n\|^2$ оцінимо наступним чином:

$$\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leqslant 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\|x_n - y_n\|^2.$$

Маємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_n\|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + \\ + 2\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) + 2\alpha_n \lambda_n \big(Ax_n, x_{\alpha_n} - y_n \big). \quad (31)$$

Із монотонності біфункції F випливає $F(y_n, x_{\alpha_n}) \leqslant F(x_{\alpha_n}, y_n)$, звідки

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) - \alpha_n (Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) \leqslant -F(x_{\alpha_n}, y_n) - \alpha_n (Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Оскільки

$$F(x_{\alpha_n}, y_n) + \alpha_n (Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) \geqslant 0,$$

то

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) \leqslant \alpha_n (Ax_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Врахувавши останню оцінку в (31), приходимо до нерівності

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \\ + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_n - y_n\|^2 + \\ + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + 2\alpha_n \lambda_n \left(Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n \right). \quad (32)$$

Оцінимо зверху член $(Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n)$. Маємо

$$\begin{aligned}
&(Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n) = \\
&\quad = (Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x_n) + (Ax_n - Ax_{\alpha_n}, x_n - y_n) \leqslant \\
&\quad \leqslant -\mu\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + L\|x_n - x_{\alpha_n}\|\,\|x_n - y_n\| \leqslant \\
&\quad \leqslant -\mu\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + \frac{\mu}{2}\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{L^2}{2\mu}\|x_n - y_n\|^2 = \\
&\quad = -\frac{\mu}{2}\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{L^2}{2\mu}\|x_n - y_n\|^2. \qquad (33)
\end{aligned}$$

З нерівностей (32) і (33) отримуємо

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n\lambda_n\mu)\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\
&\quad - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - \alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}\right)\|y_n - x_n\|^2 + \\
&\quad + 2\tau\lambda_n\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\|x_n - y_{n-1}\|^2,
\end{aligned}$$

що і треба було довести. □

Доведемо тепер оцінку, з якої буде слідувати збіжність до нуля послідовностей $(\|x_n - x_{\alpha_n}\|)$ і $(\|x_n - y_{n-1}\|)$.

Лема 7. *Для породжених алгоритмом 2 послідовностей (x_n), (y_n) і елементів x_{α_n} при великих $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність*

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\|x_{n+1} - y_n\|^2 \leqslant \\
&\quad \leqslant \left(1 - \frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\right)\left(\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + \frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n - y_{n-1}\|^2\right) + \\
&\quad + \frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^3}, \qquad (34)
\end{aligned}$$

де $M = \mu^{-1}(1 + L\mu^{-1})\|Ax^*\|$.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 = \\
&\quad = \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2 + 2(x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}, x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}) \geqslant \\
&\quad \geqslant \|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2 - 2\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|\,\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\| \geqslant \\
&\quad \geqslant (1 - \varepsilon)\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2, \qquad (35)
\end{aligned}$$

де $\varepsilon > 0$. Покладемо в (35) $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n\mu$. Отримаємо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \geqslant \frac{2-\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 - \\ - \frac{2-\alpha_n\lambda_n\mu}{\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}\|^2. \quad (36)$$

В силу правил узгодження значень параметрів α_n, λ_n при великих номерах $n \in \mathbb{N}$ маємо $1 - \alpha_n\lambda_n\mu > 0$. З урахуванням другої нерівності леми 1 з (36) виводимо

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \geqslant \frac{2-\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 - \\ - \frac{(2-\alpha_n\lambda_n\mu)}{\alpha_n\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^2}\mu^{-1}(1+L\mu^{-1})\|Ax^*\|. \quad (37)$$

для всіх $n \geqslant n_0$. Використавши (37) в (25), отримаємо (для $n \geqslant n_0$)

$$\frac{2-\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 \leqslant (1-\alpha_n\lambda_n\mu)\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)\|x_{n+1} - y_n\|^2 - \left(1 - 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} - \alpha_n\lambda_n\frac{L^2}{\mu}\right)\|y_n - x_n\|^2 + \\ + 2\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\|x_n - y_{n-1}\|^2 + \frac{(2-\alpha_n\lambda_n\mu)}{\alpha_n\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^2}M,$$

де $M = \mu^{-1}(1+L\mu^{-1})\|Ax^*\|$. Звідки випливає нерівність

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}\|^2 \geqslant \frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \\ - \frac{2(1-\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1})}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_{n+1} - y_n\|^2 - \\ - \frac{2(1-2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n\lambda_n L^2\mu^{-1})}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_n - x_n\|^2 + \\ + \frac{4\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n - y_{n-1}\|^2 + \frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \quad (38)$$

Перегрупувавши члени в (38), отримаємо

$$\|x_{n+1}-x_{\alpha_{n+1}}\|^2+\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\|x_{n+1}-y_n\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\left(\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2+\frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-y_{n-1}\|^2\right)-$$
$$-\frac{2(1-2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}-\alpha_n\lambda_nL^2\mu^{-1})}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_n-x_n\|^2-$$
$$-\left(\frac{1-\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n\mu}-\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\right)\|x_{n+1}-y_n\|^2+$$
$$+\frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \quad (39)$$

Оскільки $\tau\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, існує $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n>0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, то починаючи з деякого номера $n_1\in\mathbb{N}$ будуть виконуватися нерівності

$$\frac{1-2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}-\alpha_n\lambda_nL^2\mu^{-1}}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}>0,\quad\frac{1-\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n\mu}-\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}>0,$$
$$\frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}<1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}.$$

Таким чином, для $n\geqslant N=\max\{n_0,n_1\}$ з (39) випливає нерівність

$$\|x_{n+1}-x_{\alpha_{n+1}}\|^2+\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\|x_{n+1}-y_n\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\right)\left(\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2-\frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-y_{n-1}\|^2\right)+$$
$$+\frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3},$$

що і потрібно було довести. □

Сформулюємо основний результат.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A1)–(A7) і (C1)–(C3). Тоді для породжених алгоритмом 2 послідовностей* (x_n), (y_n) *має місце*

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-x^*\|=0, \quad (40)$$

де $x^*\in H$ *— единий розв'язок задачі* (1).

Доведення. В силу леми 5 і нерівності (34) маємо

$$\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2+2\tau\frac{\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-y_{n-1}\|^2\to 0\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Звідки

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{\alpha_n}\|=\lim_{n\to\infty}\|y_{n-1}-x_n\|=0. \quad (41)$$

З нерівності
$$\|x_n - x^*\| \leqslant \|x_n - x_{\alpha_n}\| + \|x_{\alpha_n} - x^*\|,$$
леми 2 і (41) отримуємо рівності (40). □

Зауваження 7. Ясно, що послідовність (z_n) також сильно збігається до точки $x^* \in H$.

Розглянемо тепер окремий випадок задачі (1): дворівневу варіаційну нерівність в гільбертовому просторі H:
$$\text{знайти} \quad x \in VI(A_2, VI(A_1, C)). \tag{42}$$
Нехай виконані наступні умови: множина $C \subseteq H$ опукла та замкнена; оператор $A_1 : C \to H$ монотонний і ліпшицевий; множина $VI(A_1, C)$ непорожня; оператор $A_2 : C \to H$ сильно монотонний і ліпшицевий. Нехай P_C — оператор метричного проектування на опуклу замкнену множину C, тобто $P_C x$ — єдиний елемент множини C з властивістю
$$\|P_C x - x\| = \min_{z \in C} \|z - x\|.$$

Для задачі (42) алгоритм 2 приймає наступний вигляд.

Алгоритм 3 (Варіант для варіаційних нерівностей)**.** Обираємо елементи x_1, $y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Покладаємо $n = 1$.

1.: Обчислити
$$z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A_2 x_n.$$
2.: Обчислити
$$y_n = P_C\left(z_n - \lambda_n A_1 y_{n-1}\right).$$
3.: Обчислити
$$x_{n+1} = P_C\left(z_n - \lambda_n A_1 y_n\right).$$
4.: Обчислити
$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{якщо} \quad (A_1 y_{n-1} - A_1 y_n, x_{n+1} - y_n) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|y_n - x_{n+1}\|^2}{(A_1 y_{n-1} - A_1 y_n, x_{n+1} - y_n)}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на **1**.

З теореми 2 випливає наступний результат.

Теорема 3. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина; оператор $A_1 : C \to H$ монотонний і ліпшицевий; множина $VI(A_1, C)$ непорожня; оператор $A_2 : C \to H$ сильно монотонний і ліпшицевий; виконуються умови (C1)–(C3). Тоді породжені алгоритмом 3 послідовності (x_n) і (y_n) сильно збігаються до єдиного розв'язку задачі* (42).

Зауваження 8. Аналогічний теоремі 3 результат має місце для модифікації алгоритму 3 з заміною інструкції перерахунку λ_n на наступну
$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \frac{\|y_{n-1} - y_n\|}{\|A_1 y_{n-1} - A_1 y_n\|}\right\}, & \text{якщо} \quad A_1 y_{n-1} \neq A_1 y_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$
де $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Зауваження 9. Спираючись на результати [22], можна побудувати економну модифікацію алгоритму 3. Слід змінити крок 3, поклавши

$$x_{n+1} = P_{T_n}(z_n - \lambda_n A_1 y_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H : (z_n - \lambda_n A_1 y_{n-1} - y_n, z - y_n) \leqslant 0\}.$$

Заключні зауваження

Розглянуто дворівневу задачу: варіаційну нерівність на множині розв'язків задачі про рівновагу. Прикладом такої задачі є пошук нормальної рівноваги Неша. Для розв'язання даної задачі запропоновано два алгоритми. Перший суміщає у собі ідеї двоетапного проксимального методу та ітеративної регуляризації. А другий алгоритм є адаптивним варіантом першого з правилом оновлення параметрів, що не використовує значень ліпшицевих констант біфункції. Для монотонних біфункцій ліпшицевого типу та сильно монотонних ліпшицевих операторів доведено теореми про сильну збіжність алгоритмів. Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до монотонних дворівневих варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проєкт «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, екології та медицини», 0119U100337, 2019–2021 рр.) та НАН України (проєкт «Нові методи дослідження коректності та розв'язання задач дискретної оптимізації, варіаційних нерівностей та їх застосування», 0119U101608, 2019–2021 рр.).

Література

1. Eremin I. I. Problems in sequential programming. *Siberian Mathematical Journal.* 1973. Vol. 14. P. 36–43. doi: https://doi.org/10.1007/BF00967264
2. Podinovskii V. V., Gavrilov V. M. Optimization with respect to successively applied criteria. Moscow: Sovetskoe Radio, 1975. 192 p. (In Russian)
3. Kalashnikov V. V., Kalashnikova N. I. Solution of two-level variational inequality. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1994. Vol. 30. Issue 4. P. 623–625.
4. Konnov I. V. On systems of variational inequalities. *Izv. Vuzov, Matematika.* 1997. No. 12. P. 79–88. (In Russian)
5. Popov L. D. Lexicographic variational inequalities and some applications. *Mathematical Programming. Regularization and Approximation. A Collection of Papers, Tr. IMM.* Vol. 8, No. 1. 2002. P. 103–115. (In Russian)
6. Semenov V. V. Strongly Convergent Algorithms for Variational Inequality Problem Over the Set of Solutions the Equilibrium Problems. In: Zgurovsky M.Z. and Sadovnichiy V.A. (eds.) Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, vol. 211, Springer International Publishing Switzerland, 2014. P. 131–146. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10
7. Semenov V. V. About convergence of methods for solving bilevel variational inequalities with monotone operators. *J. Num. Appl. Math.* 2010. No. 2 (101). P. 120–128. (In Russian)

8. Voitova T. A., Semenov V. V. Method for solving the bilevel operator inclusions. *J. Num. Appl. Math.* 2010. No. 3 (102). P. 34–39. (In Russian)
9. Denisov S. V., Semenov V. V. Proximal algorithm for bilevel variational inequalities: strong convergence. *J. Num. Appl. Math.* 2011. No. 3 (106). P. 27–32. (In Ukrainian)
10. Apostol R. Ya., Grynenko A. A., Semenov V.V. Iterative algorithms for monotone bilevel variational inequalities. *J. Num. Appl. Math.* 2012. No. 1 (107). P. 3–14. (In Ukrainian)
11. Vedel Y. I., Semenov V. V. A new two-phase proximal method of solving the problem of equilibrium programming. *J. Num. Appl. Math.* 2015. No. 1 (118). P. 15–23. (in Russian)
12. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: B. Goldengorin (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham, 2016. P. 315–325.
13. Bakushinskii A. B., Goncharskii A. V. Iterative Methods for Solving Ill-Posed Problems. Moscow: Nauka, 1989. 126 p. (in Russian)
14. Popov L. D. On schemes for the formation of a master sequence in a regularized extragradient method for solving variational inequalities. *Russian Mathematics.* 2004. Vol. 48. Issue 1. P. 67–76.
15. Vedel Ya. I., Denisov S. V., Semenov V. V. Algorithm for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. *J. Num. Appl. Math.* 2020. No. 1 (133). P. 18–30. doi: https://doi.org/10.17721/2706-9699.2020.1.02 (in Russian)
16. Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57. Issue 1. P. 91–100.
17. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. Vol. 6. P. 117–136.
18. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
19. Browder F. Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1966. Vol. 56. No. 4. P. 1080–1086.
20. Browder F. E. Convergence of approximants of fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1967. Vol. 24. P. 82–90.
21. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848.
22. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50. P. 271–277. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8
23. Denisov S. V., Dudar V. V., Semenov V. V., Vedel Y. I. A New Mirror-prox Algorithm For Variational Inequalities. *J. Num. Appl. Math.* 2017. No. 1 (124). P. 15–29.
24. Semenov V. V. A Version of the Mirror descent Method to Solve Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53. P. 234–243. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9

25. Semenov V. V. A variant of mirror descent method for solving variational inequalities. In: Polyakova, L. N. (ed.) Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V. F. Demyanov). IEEE, 2017. P. 281–284. doi: https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974011
26. Nomirovskii D. A., Rublyov V. V., Semenov V. V. Convergence of Two-Stage Method with Bregman Divergence for Solving Variational Inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55. P. 359–368.
27. Vedel Ya. I., Semenov V. V., Chabak L. M. About the two-stage proximal method for solving of equilibrium problems. *J. Num. Appl. Math.* 2019. No. 2 (131). P. 23–31. doi: https://doi.org/10.17721/2706-9699.2019.2.03 (In Russian)

Надійшла: 16.09.2021 / Прийнята: 27.11.2021

ДВУХУРОВНЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ДВУХЭТАПНЫЙ ПРОКСИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

Я. И. Ведель, С. В. Денисов, В. В. Семенов

Факультет компьютерных наук и кибернетики, КНУ имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: {yana.vedel, sireukr, volodya.semenov}@gmail.com

Аннотация. В данной работе рассмотрена двухуровневая задача: вариационное неравенство на множестве решений задачи о равновесии. Примером такой задачи является поиск нормального равновесия Нэша. Для решения данной задачи предложено два алгоритма. Первый совмещает идеи двухэтапного проксимального метода и итеративной регуляризации. А второй алгоритм является адаптивным вариантом первого с правилом обновления параметров, не использующего значения липшицевых констант бифункции. Для монотонных бифункций липшицевого типа и сильно монотонных липшицевых операторов доказаны теоремы о сильной сходимости алгоритмов. Показано, что предложенные алгоритмы можно применить к монотонным двухуровневым вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: вариационное неравенство, задача о равновесии, двухуровневая задача, двухэтапный проксимальный метод, сходимость.