УДК 51:37.091.27-057.874(477):378.4(477.411)КНУ DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.5

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ірина ЦИГАНІВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0001-7632-3410
e-mail: itsy8009@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА З МАТЕМАТИКИ 2025. ЗАОЧНИЙ ТУР

Анотація. *Математична олімпіада – це інтелектуальне змагання, яке дає можливість талановитим учням продемонструвати свої знання, логічне мислення та вміння розв’язувати складні математичні задачі. Олімпіади стимулюють поглиблене вивчення математики, розширюють знання та вдосконалюють навички учнів. У роботі представлено розв’язання задач Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка 2024 року.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; нерівність; розв’язання.*

1. Вступ

Одним із найважливіших показників ефективності навчання у школі є забезпечення розвитку розумових здібностей учня. Стосовно математики можна сказати, що сам процес її вивчення повинен приводити до вміння логічно, доказово мислити, творчо, а не стереотипно, підходити до розв’язування будь-якої задачі.

Одним з ефективних засобів формування в учнів навичок самостійного мислення є участь у математичних олімпіадах. Основна мета олімпіад полягає не стільки у тому, щоб виявити переможців, а скільки у тому, щоб зацікавити усіх учасників оригінальними задачами, залучити новачків до систематичних занять математикою, самостійної роботи з різними математичними джерелами. Не можна думати, що невдача на олімпіаді свідчить про відсутність математичних здібностей учня. Після невдачі доцільно спробувати краще підготуватися до наступної олімпіади або математичного конкурсу, використовуючи задачі, укладені у збірниках (Гайштут, 1997), (Михайловський, 1975), (Сканаві, 1992), (Стасюк, 2006). Досягнення олімпійських успіхів потребує наполегливості, працелюбності, постійних тренувань і маленьких перемог над собою щодня.

І саме тому, щоб допомогти у цій нелегкій справі навчання розв’язувати нестандартні задачі, запропоновано розгляд певних типів задач, на які доцільно звернути увагу при підготовці до олімпіад.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. Приклади модельних завдань олімпіади

2.1. Метод математичної індукції

Задача 1. *Доведіть, що для всіх натуральних n виконується нерівність*

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Розв'язання: База індукції: при $n=1$ маємо вірну нерівність

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Припустимо, що нерівність справедлива, коли $n=k$: тобто

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\mathrm{k}-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

Доведемо, що нерівність справедлива при $n=k+1$, тобто, що має місце нерівність:

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2\mathrm{k}+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

З урахуванням припущення індукції, достатньо довести нерівність

$$\frac{2k+1}{2\mathrm{k}+2}<\frac{\sqrt{2k+1}}{\sqrt{2k+3}}.$$

Оскільки $k>1$, то потрібно довести, що

$$\sqrt{2k+1}\cdot\sqrt{2k+3}<2k+2.$$

Піднесемо цю нерівність до квадрата (ліва і права частини нерівності додатні). Отримаємо, що $(2k+1)(2k+3)<4k^2+8k+4$.

Отримана нерівність еквівалентна нерівності $3<4$. Отримали виконання нерівності при $n=k+1$.

На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що твердження задачі справедливе для всіх натуральних n.

■

2.2. Рівняння, що має розв'язки в цілих або натуральних числах

Задача 2. *Розв'язати в натуральних числах рівняння*

$$x^2-xy+2x-3y=11.$$

Розв'язання: Виразимо невідому y через невідому x:

$$(x+3)y = x^2 + 2x - 11,$$

$$y = \frac{x^2+2x-11}{x+3} = \frac{x^2+2x-3-8}{x+3} = \frac{(x-1)(x+3)-8}{x+3} = x - 1 - \frac{8}{x+3}.$$

Оскільки невідомі y та x – натуральні числа, то вираз $\frac{8}{x+3}$ має бути натуральним числом, а $(x+3)$ – дільником числа 8.

Отже, $x+3=4$ або $x+3=8$, звідки отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = -2, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 5, \\ y_1 = 3. \end{cases}$$

Задовольняє умові задачі $x = 5, y = 3$.

Відповідь: $(5{,}3)$.

2.3. Рівняння вищих степенів

Задача 3. *Розв'язати рівняння*

$$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = 0.$$

Розв'язання: Застосуємо метод розкладу на множники, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Кубічний многочлен можемо представити у вигляді добутку таких многочленів з невизначеними коефіцієнтами

$$x + a \quad \text{та} \quad \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3,$$

що має місце рівність:

$$(x+\alpha)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3) = x^3 + 3x + 5\sqrt{2}.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях невідомої змінної x у лівій і правій частинах цієї рівності, маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 + \alpha\beta_1 = 0, \\ \beta_2\alpha + \beta_3 = 3, \\ \alpha\beta_3 = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

З отриманої системи покроково виразимо невідомі β_2, β_3 через невідоме α і маємо наступне рівняння: $\alpha^3 + 3\alpha - 5\sqrt{2} = 0$. Представимо рівняння у вигляді

$$\alpha^3 + 3\alpha - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0,$$

отримаємо, що $\alpha = \sqrt{2}$.

Отже, розв'язком цієї системи рівнянь є числа $\beta_1 = 1,\ \beta_2 = -\sqrt{2},\ \beta_3 = 5,\ \alpha = \sqrt{2}$. Тому справедливий розклад многочлена на множники:

$$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 5\right).$$

Отримаємо, що вихідне рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} x + \sqrt{2} = 0\ , \\ x^2 - \sqrt{2}x + 5 = 0. \end{array}\right.$$

Ця сукупність рівнянь має єдиний розв'язок $x = -\sqrt{2}$.

Відповідь: $x = -\sqrt{2}$.

2.4. Доведення нерівностей

Задача 4. *Довести, що якщо* $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$, *то виконується нерівність*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Розв'язання: Зробимо заміну виразів: $b + c = 2x,\ c + a = 2y,\ a + b = 2z$. Тоді, виразивши з цих співвідношень змінні a, b, c, отримаємо:

$$a = y + z - x, \quad b = x + z - y, \quad c = x + z - z.$$

Розглянемо ліву частину нерівності, підставивши в неї отримані вирази для a, b, c:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} - \frac{3}{2} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{e} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} - 3\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 - 3) - \frac{3}{2} = 0.$$

Що й треба було довести.

■

2.5. Рівняння з параметром

Задача 5. *Знайти, для яких значеннях параметра a рівняння*

$$1 + a\sin x = a^2 - \sin^2 x$$

має розв'язки.

Розв'язання: Введемо заміну: $\sin x = t$, тоді початкове рівняння набуде вигляду

$$t^2 + at + 1 - a^2 = 0.$$

Тоді наша задача зводиться до наступної: *потрібно знайти усі такі значення параметра a, при яких хоча б один корінь отриманого рівняння належав проміжку* $-1 \le t \le 1$.

Обчислимо дискримінант $D = a^2 + 4a^2 - 4 = 5a^2 - 4$. Тоді корені рівняння

$$t_{1,2} = \frac{-a^2 \pm \sqrt{5a^2 - 4}}{2}.$$

Для розв'язування поставленої задачі можна розв'язати сукупність систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{-a^2 - \sqrt{5a^2 - 4}}{2} \le 1; \end{cases} \\ \begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0, \\ -1 \le \dfrac{-a^2 + \sqrt{5a^2 - 4}}{2} \le 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Але з обчислювальної точки зору розв'язування буде досить складним і є не зовсім раціональним.

Тому розглянемо функцію $f(t) = t^2 + at + 1 - a^2$ і дослідимо для яких значень параметра a хоча б один корінь рівняння $t^2 + at + 1 - a^2 = 0$ належить відрізку $-1 \le t \le 1$. Дослідимо розташування нулів квадратичної функції відносно відрізка $[-1; 1]$ осі абсцис.

Тоді потрібна умова виконується у двох випадках:

1) коли корені різні і один з них належить проміжку $-1 \le t \le 1$;
2) коли обидва корені (різні чи ні) належать проміжку $-1 \le t \le 1$.

Перший випадок має місце при виконанні умови $f(-1)f(1) < 0$, тобто

$$(a^2 - a - 2)(a^2 + a - 2) < 0.$$

Розв'яжемо нерівність методом інтервалів (рис. 1).

Відповідне рівняння має такі нулі: $-1;\ 2;\ 1;\ -2$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

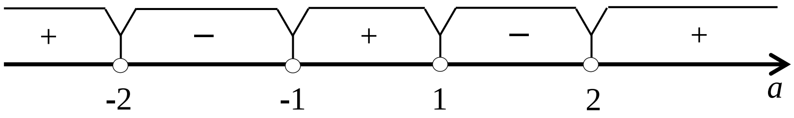

Рис. 1. Ілюстрація методу інтервалів для випадку 1)

Розв'язком системи буде $a \in (-2; -1;) \cup (1; 2)$.

Другий випадок: коли обидва корені належать проміжку $-1 \le t \le 1$ (рис. 2.). Тоді має місце виконання умов:

$$\begin{cases} D \ge 0, \\ 1f(-1) > 0, \\ 1f(1) > 0, \\ -1 < -\dfrac{a}{2} < 1; \end{cases} \quad \text{тобто} \quad \begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0, \\ 2 - a - a^2 > 0, \\ 2 + a - a^2 > 0, \\ -2 < a < 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| \ge \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ a^2 + a - 2 < 0, \\ a^2 - a - 2 < 0, \\ -2 < a < 2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \infty\right), \\ a \in (-2; 1), \\ a \in (-1; 2), \\ a \in (-2; 2); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in \left(-\infty; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \infty\right), \\ a \in (-1; 1). \end{cases}$$

Розв'язком системи буде:

$$a \in \left(-1; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right).$$

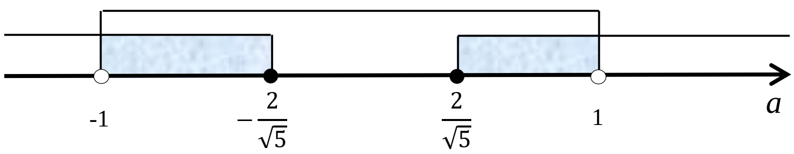

Рис. 2. Ілюстрація методу інтервалів для випадку 2)

Розглянемо тепер випадок, коли тричлен має корені $y = -1$ або $y = 1$.
Якщо $y = -1$, то $1 - a + 1 - a^2 = 0$, $a^2 + a - 2 = 0$, $a_1 = -2, a_2 = 1$.
Якщо $y = 1$, то $1 + a + 1 - a^2 = 0$, $a^2 - a - 2 = 0$, $a_1 = -1, a_2 = 2$.
Збираючи всі знайдені значення a, отримаємо остаточну відповідь.

Відповідь: рівняння має розв’язки при

$$a \in \left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right].$$

3. Анонс

Київський національний університет імені Тараса Шевченка щорічно проводить Всеукраїнську олімпіаду з математики. В олімпіаді можуть брати участь особи, які є учнями випускних класів закладів загальної середньої освіти або мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету. Традиційно олімпіада проходить у два тури: перший – дистанційний (відбірковий) взимку, та другий – очний (фінальний) навесні. Детальну інформацію читачі можуть знайти на офіційному сайті Київського національного університету імені Тараса Шевченка https://knu.ua.

Із завданнями дистанційного (відбіркового) туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка читачі можуть також ознайомитися в цьому номері журналу у рубриці «Задачі та гіпотези, рішення».

Список використаних джерел

Гайштут О. (1997) *Алгебра. Розв'язування задач та вправ*. Посібник. К.: «Магістр-S». 256 с.

Михайловський В.І. (1975) *Практикум з розв'язування задач з математики*. К.: Вища школа. 424 с.

Сканаві М.І. (1992) *Збірник задач з математики*. К.: Вища школа. 445 с.

Стасюк В.Д. (2006) *Практикум з розв'язування конкурсних завдань з математики*. Навчально-методичний посібник. К.: Карбон. 524 с.

Отримано редакцією журналу: 01.12.2024
Прорецензовано: 10.12.2024
Схвалено до друку: 19.12.2024

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Iryna TSYGANIVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0001-7632-3410
e-mail: itsy8009@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ALL-UKRAINIAN MATHEMATICS OLYMPIAD OF TARAS SHEVCHENKO NATIONAL UNIVERSITY OF KYIV 2025. CORRESPONDENCE TOUR

Abstract. *Mathematical Olympiad is an intellectual competition that allows talented students to demonstrate their knowledge, logical thinking and ability to solve complex mathematical problems. Olympiads stimulate in-depth study of mathematics, expand knowledge and improve students' skills. The paper presents solutions to the problems of the All-Ukrainian Mathematics Olympiad of Taras Shevchenko National University of Kyiv in 2024.*

Keywords: *Mathematical Olympiad; equation; inequality; solution.*