Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

Формально спряжена задача до узагальненої задачі прогину тонкої пружної пластини

Студента 4 курсу
Лобова Арсенія Павловича

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук
Заворотинський А.В.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ – 2023

ЗМІСТ

Вступ

Як відомо, основним результатом теорії загальних еліптичних крайових задач в обмежених областях з гладкою межею є те, що ці задачі у відповідних парах функціональних просторів є нетеровими. Тобто оператор, який відповідає еліптичній граничній задачі, є нетеровим. Нетерів оператор, як і будь-який обмежений лінійний оператор, має спряжений. Питання про конкретний вид спряженого оператора для еліптичних крайових задач був досліджений в роботах М.Шехтера (1960), Я.А.Ройтберга (1996), В.А.Козлова, В.Г.Маз'ї, Д.Россмана (1997)(в просторах типу Соболева), В.А.Михайлеця, А.А.Мурача (2010)(в просторах Хермандера) та інших авторів (див.[8]). Також були отримані подібні результати і для еліптичних крайових задач з параметром в сенсі Аграновича-Вішика.

Також розглядались еліптичні крайові задачі з малим параметром, які давно виникали в різних розділах математичної фізики. Їх досліджували в своїх роботах М.І.Вішик та Л.А.Люстерник (1957), Л.Франк (1997), Л.Р.Волевич (2006), А.В.Заворотинський (2016). Для таких задач також було встановлено нетеревість оператора, пов'язаного з задачею, але не досліджувалися формально спряжені задачі відносно деякої формули Гріна.

Метою дослідження є встановлення зв'язку між еліптичними граничними задачами з малим параметром та узагальненою задачою прогину тонкої пружної мембрани та побудова формально спряженої задачі до неї відносно деякої формули Гріна.

Об'єктом дослідження є задача прогину тонкої пружної мембрани, як крайової задача з малим параметром.

Задачею дослідження є:

- Розглянути клас нормальних еліптичних крайових рівнянь з малим параметром.
- Перевірити, що задача прогину тонкої пружної мембрани належить до цього класу.
- Побудувати формально спряжену задачу до рівняння прогину тонкої пружної мембрани.

Зважаючи на це, розгляд узагальненої задачі прогину тонкої пружної мембрани, як еліптичної задачі з малим параметром ε і побудова формально спряженої задачі є актуальною науковою проблемою.

Методи дослідження: методи функціонального аналізу, теорія рівнянь з частинними похідними.

Основним методом є теорія еліптичних крайових задач з малим параметром у викладі Л. Р. Волевича [1], А.В. Заворотинського [2] та теорія побудови формально спряжених задач для еліптичних крайових задач [8],[10].

Структура роботи складається зі вступу, двох розділів, висновку та списку використаних джерел.

Розділ 1 присвячений постановці нормальних еліптичних крайових задач з малим параметром, розгляду умов еліптичності з малим параметром для таких задач та наводяться відомі результати для формально спряжених еліптичних крайових задач.

Розділ 2 присвячений постановці узагальненої задачі прогину тонкої пружної мембрани, перевірці належності цієї задачі до класу нормальних еліптичних крайових задач з малим параметром, виводу формули Гріна та побудові формально спряженої задачі.

Результати роботи є новими в наступному:

- Введено підклас еліптичних крайових задач з малим параметром, а саме нормальні еліптичні крайові задачі з малим параметром, і встановлено зв'язок цього класу задач і задачі прогину тонкої пружної мембрани.
- Для узагальненої задачі прогину тонкої пружної мембрани побудовано формулу Гріна та формально спряжену задачу.

1. Еліптичні крайові задачі з малим параметром

В цьому розділі розглядається постановка нормальних еліптичних крайових задач з малим параметром, умова еліптичності крайових задач з малим параметром, формально спряжені задачі для еліптичних крайових задач.

Наведені нижче результати для еліптичних крайових задач з малим параметром формулюються аналогічно до роботи Л. Р. Волевича [1] за умови, що граничні оператори є нормальними (див. умову 3) і граничні оператори не містять параметра ε ($\mu_i = m_i = b_i$). Подібний результат можна отримати з робіт А. В. Заворотинського [2], якщо в граничних умовах відсутні додаткові невідомі функції ($\varkappa = 0$). Без умов нормальності вони співпадають з результатами наведеними в роботі Хрипко [7]. Огляд результатів, щодо формально спряжених задач для еліптичних крайових наводиться відповідно до робіт [8], [10], [4].

1.1. Постановка задачі Нехай G - довільна обмежена область (відкрита зв'язна і непорожня множина) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$.

В області G розглядається крайова задача, що містить малий параметр $\varepsilon > 0$:

$$A(x, D, \varepsilon)u(x, \varepsilon) = f(x, \varepsilon), \quad x \in G, \tag{1}$$

$$B_j\left(x', D\right) u\left(x', \varepsilon\right) = g_j\left(x', \varepsilon\right), \quad x \in \partial G, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Тут $m, \mu \in \mathbb{N}$ та

$$A(x, D, \varepsilon) := \varepsilon^{2m-2\mu} A_{2m}(x, D) + \varepsilon^{2m-2\mu-1} A_{2m-1}(x, D) + \cdots + A_{2\mu}(x, D),$$

$$B_j(x, D) := B_{j,b_j}\left(x', D\right).$$

Кожне $A_{2m-i}(x, D) := \sum_{|\beta| \leq 2m-i} \alpha_{i,\beta}(x) D^\beta$ - лінійний диференційний оператор на $\bar{G}$, а $B_j(x, D) := \sum_{|\beta| \leq b_j} b_{j,\beta}(x) D^\beta$ - крайовий лінійний диференційний оператор на ∂G.

Порядки операторів задовольняють умови:

$$\operatorname{ord} A_j(x, D) \leq j, \quad (j = \overline{2\mu, 2m}),$$

$$\operatorname{ord} B_j(x, D) \leq b_j, \quad (j = \overline{1, m}, b_j \geq 0),$$

де числа $b_j \geq 0$, $j = \{1, \ldots m\}$.

Тут використовуються стандартні позначення $\beta := (\beta_1, \ldots \beta_n)-$ мульти індекс, $|\beta| := \beta_1 + \cdots + \beta_n$, $\quad D^\beta := D_1^{\beta_1} \ldots D_n^{\beta_n}$, $\quad D_l := -i\frac{\partial}{\partial x_l}$, де $i-$ уявна одиниця, $x = (x_1, \ldots, x_n)-$ довільна точка простору $\mathbb{R}^n$.

1.2. Умови еліптичності крайових задач з малими параметром Сформулюємо поняття еліптичності з малим параметром для крайової задачі (1)-(2).

Нехай $x \in \bar{G}$. Головну частину оператора $A(x, D, \varepsilon)$ позначимо через $A^{(0)}(x, D, \varepsilon)$, тобто

$$A^{(0)}(x, D, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x, D),$$

де

$$A^{(0)}_{2m-i}(x, D) := \sum_{|\beta|=2m-i} \alpha_{i,\beta}(x) D^{\beta}.$$

Головним символом диференціального оператора $A(x, D, \varepsilon)$ називаємо вираз

$$A^{(0)}(x, \xi, \varepsilon) \equiv \sum_{i=0}^{2m-2\mu} \varepsilon^{2m-2\mu-i} A^{(0)}_{2m-i}(x, \xi),$$

залежний від $\xi \in C^n$ і параметра $\varepsilon > 0$, де

$$A^{(0)}_{2m-i}(x, \xi) := \sum_{|\beta|=2m-i} \alpha_{i,\beta}(x) \xi^{\beta}$$

є головним символом оператора $A^{(0)}_{2m-i}(x, D)$.

Для кожного фіксованого $x \in \bar{G}$ вираз $A^{(0)}_{2m-i}(x, \xi)$ є однорідним поліномом порядку $2m - i$ змінної $\xi \in \mathrm{C}^n$. Функція $A^{(0)}\left(x, \xi, |\xi|^{-1}\right)$ є однорідною по ξ порядку 2μ.

Аналогічно, через $B^{(0)}_j(x, D)$ позначимо головну частину диференціального оператора $B_j(x, D)$, а через $B^{(0)}_j(x, \xi)$– його головний символ. Зокрема

$$B^{(0)}_j(x, D) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(x) D^{\beta}$$

Для кожного фіксованого $x \in \partial G$ вираз

$$B^{(0)}_j(x, \xi) := \sum_{|\beta|=m_j} b_{j,\beta}(x) \xi^{\beta}$$

є однорідним поліномом порядку m_j змінної $\xi \in \mathrm{C}^n$.

Сформулюємо умови еліптичності для задачі (1)-(2).

Умова 1. Для точки $x^{(0)} \in \bar{G}$ існує стала $C > 0$ така, що для довільних $\xi \in R^n$ і $\varepsilon \geq 0$ виконується нерівність

$$\left| A^{(0)}\left(x^{(0)}, \xi, \varepsilon\right) \right| \geq C|\xi|^{2\mu}(1 + \varepsilon|\xi|)^{2m-2\mu}.$$

Умову 1 називають умовою еліптичності з малим параметром диференціального оператора $A(x,D,\varepsilon)$ у точці $x^0 \in \bar{G}$. Якщо оператор $A(x,D,\xi)$ задовольняє умову 1 для кожної точки $x^0 \in G$, то оскільки $G-$ компакт, можна вважати що стала C в нерівності не залежить від x^0.

Відповідно результатів [1] для довільних $\xi \in R^n\{0\}$ і $\varepsilon \geq 0$ умова 1 виконується тоді і тільки тоді, коли

$$A_{2m}^{(0)}\left(x^0,\xi\right) \neq 0, \quad A_{2\mu}^{(0)}\left(x^0,\xi\right) \neq 0, \quad A^{(0)}\left(x^0,\xi,\varepsilon\right) \neq 0$$

Відмітимо, що перші дві нерівності означать еліптичність операторів $A_{2m}\left(x^0,D\right)$ і $A_{2\mu}\left(x^0,D\right)$.

Умова 2. Виконуються рівності

$$m^+ = m^- =: m, \quad \mu^+ = \mu^- =: \mu.$$

Це - умова правильної еліптичності з малим параметром диференціального оператора $A^{(0)}\left(x^0,D,\varepsilon\right)$. Якщо $n \geq 3$, то умова 2 є наслідком умови 1. Це не так при $n \neq 2$.

Умова 3. Система граничних диференційних операторів $B_1,\ldots,B_m$ задовольняє умовам:

(i) ord $B_k \neq$ ord B_j для $k \neq j$,

(ii) $B_k^{(0)}\left(x^{(0)},\nu(x^{(0)})\right) \neq 0$ для $x^{(0)} \in \partial G$.

Система граничних умов, що задовольняють умові 4 називається *нормальною*, а якщо порядки операторів B_k менше m таку систему називають *системою Діріхле.*

Ця умова є більш "жорсткою"умовою на порядки диференціальних операторів B_j розглянутих в роботах [1], [2], [7], оскільки вона включає в себе умову $b_\mu < b_{\mu+1}$.

Позначимо через $B_j^{(0)}(\xi)$ головний символ диференціального оператора $B_j^{(0)}(D) := B_j^{(0)}\left(x^0,D\right)$, записаного у локальних координатах. У крайовій задачі (1)-(2) відкинемо молодші члени диференціальних операторів $A_{2m-i}(x,D), B_j(x,D)$, зафіксуємо їх коефіцієнти в точці $x^0 \in \partial G$, покладемо $f \equiv 0$, перейдемо до спеціальних локальних координат в околі точки x^0 та застосуємо перетворення Фур'є $F' = F'_{x'\to\xi'}$ за зміними $x_1,\ldots,x_{n-1}$і зафіксуємо $\xi' \in R^{n-1}\backslash\{0\}$. Отримаємо таку крайову задачу, що відповідає задачі (1)-(2) на півосі $t := x_n > 0$:

$$A^{(0)}\left(\xi',D_t,\varepsilon\right)v(t,\varepsilon) = 0, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$B_j^{(0)}\left(\xi',D_t\right)v(t,\varepsilon)\Big|_{t=0} = \varphi_j\left(\xi',\varepsilon\right), \quad j = 1,\ldots,m. \tag{4}$$

Тут $D_t := -i\partial/\partial t$ та

$$v(t) := \left(F'u\left(x', x_n\left(\xi', \varepsilon\right)\right)\right)\left(\xi', x_n\left(\xi', \varepsilon\right)\right),$$
$$\varphi_j := \left(F'g_j\left(\xi', \varepsilon\right)\right)\left(\xi', \varepsilon\right), j = \{1, \dots, m\}.$$

Задача (3)-(4) залежить від двух параметрів $\xi' \in R^{n-1} \backslash \{0\}$ та $\varepsilon > 0$. Вона називається *крайовим символом* початкової крайової задачі (1)-(2) в точці $x^0 \in \partial G$.

Кожний розв'язок $v(t)$ рівняння (3) належить до $C^\infty([0, \infty])$. Нас будуть цікавити розв'язки задачі (3)-(4), які задовольняють умову:

$$v(t, \varepsilon) \to 0, \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Умова 4. Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}, \varepsilon > 0$ і чисел $\varphi_1 \dots \varphi_m \in \mathbb{C}$ крайова задача (3)-(4) має єдиний розв'язок $v(t)$, що задовольняє умову (5).

Сформулюємо умови, яким повинна задовольняти задача (4)-(5) у випадку $\varepsilon = \infty$ та $\varepsilon = 0$.

Нехай $r \in \{m, \mu\}$. Розглянемо таку крайову задачу:

$$A_{2r}^{(0)}\left(\xi', D_t\right) v(t, \varepsilon) = 0, \tag{6}$$

$$B_j^{(0)}\left(\xi', D_t\right) v(t, \varepsilon)\Big|_{t=0} = \varphi_j\left(\xi', \varepsilon\right), j = 1, \dots, r. \tag{7}$$

Умова 5. Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}, \varepsilon > 0$ і чисел $\varphi_1 \dots \varphi_m \in \mathbb{C}$ задача (6)-(7), $(r = m)$ має єдиний розв'язок $v(t)$, що задовольняє умову (5).

Умова 6. Для довільних вектора $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}, \varepsilon > 0$ і чисел $\varphi_1 \dots \varphi_\mu \in \mathbb{C}$ задача (6)-(7), $(r = \mu)$ має єдиний розв'язок $v(t)$, що задовольняє умову (5).

При малих $\varepsilon > 0$ необхідні поправки, що є розв'язком наступної крайової задачі:

$$A^{(0)}\left(0, D_t, 1\right) v(t, 1) = 0, \quad t > 0 \tag{8}$$

$$B_j^{(0)}\left(0, D_t\right) v(t, 1)\Big|_{t=0} = \varphi_j\left(\xi', 1\right), \quad j = \mu + 1, \dots, m. \tag{9}$$

Умова 7. Для довільних чисел $\varphi_{\mu+1}, \dots \varphi_m \in \mathbb{C}$ задача (8)-(9) має єдиний розв'язок $v(t)$, що задовольняє умову (5).

Основне означення. Крайова задача (1)-(2) називається *нормальною еліптичною з малим параметром*, якщо для довільної точки $x \in \overline{G}$ виконується умова 1 і для кожної точки $x \in \partial G$ виконуються умови 2-7.

Ще раз відзначимо, що навідміну від означення еліптичних з малим параметром крайових задач (Волевич Л.Р., Заворотинський А.В.) в даному означенні накладено більш жорсткі умови на граничні оператори B_k. Це пов'язано з необхідністю побудови формули Гріна і отримання формально спряженої задачі відносно неї.

1.3. Формально спряжена задача для еліптичних крайових задач Нагадаємо означення формально спряженої задачі для еліптичних крайових задач (див. [8], [10], [4]).

В області G розглядається крайова задача:

$$Au = \sum_{|\mu|\le 2m} l_\mu(x) D^\mu u = f, \quad x \in G, \tag{10}$$

$$B_j u = \sum_{|\mu|\le b_j} b_{ju}(x) D^\mu u = g_j, \quad x \in \partial G, \quad j = 1, \dots, m. \tag{11}$$

Тут $A = A(x, D)$ - лінійний диференціальний вираз на $\overline{G}$ парного порядку $2m \ge 2$, а $B_j = B_j(x, D), j = 1, \dots, m,$ - граничні лінійні диференціальні вирази на ∂G порядків $\operatorname{ord} B_j = b_j \le 2m - 1$. Всі коефіцієнти диференціальних виразів A и B_j вважаються нескінченно гладикими комплекснозначними функціями: $l_\mu \in C^\infty(\overline{G})$ и $b_{j,\mu} \in C^\infty(\partial G)$. Покладемо $B : (B_1, \dots, B_q)$.

Нагадаємо означення регулярної еліптичної крайової задачі в області G.

Означення. Крайова задача (10)-(11) називається регулярною еліптичною в області G, якщо виконуються наступні умови:

(i) Диференціальний вираз A є правильно еліптичним на $\bar{G}$

(ii) Диференціальні граничні вирази $B_1, \dots, B_m$ задовольняють умові додатковості по відношенню до A в ∂G, тобто для довільної точки $x \in \partial G$ та будь-якого вектора $\xi \ne 0$ дотичного до ∂G у точці x, многочлени $B_j^{(0)}(x, \xi + \tau\nu(x)), j = 1, \dots, m$ змінної τ лінійно незалежні по модулю многочлена $\prod_{j=1}^q (\tau - \tau_j^+(x; \xi, \nu(x)))$

(iii) Система виразів $\{B_1, \dots, B_m\}$ є нормальною, тобто їх порядки $b_j, j = 1, \dots, m$ попарно різні та $B_j^{(0)}(x, \nu(x)) \ne 0$ для будь-якого $x \in \partial G$. Крайова задача (10)-(11) є регулярною еліптичною в області G.

Для регулярної еліптичної крайової задачі вірна наступна формула Гріна:

$$(Au, v)_G + \sum_{j=1}^m \left(B_j u, C_j^+ v\right)_{\partial G} = \left(u, A^+ v\right)_G + \sum_{j=1}^m \left(C_j u, B_j^+ v\right)_{\partial G}, \tag{12}$$

що є справедливою для будь-яких функцій $u, v \in C^\infty(\overline{G})$. Тут $\left\{B_j^+\right\}, \{C_j\}, \left\{C_j^+\right\}$ - деякі нормальні системи граничних лінійних диференціальних виразів з коефіцієнтами класу $C^\infty(\partial G)$. Їх порядки задовольняють умові

$$\operatorname{ord} B_j + \operatorname{ord} C_j^+ = \operatorname{ord} C_j + \operatorname{ord} B_j^+ = 2m - 1.$$

Крім того, тут і далі $(\cdot, \cdot)_G$ і $(\cdot, \cdot)_{\partial G}$ позначені скалярні добутки у просторах $L_2(G)$ и $L_2(\partial G)$, а також природні розширення по неперервності цих скалярних добутків.

Диференціальний вираз A^+ називають формально спряженим до виразу A, а систему граничних виразів $\left\{B_1^+, \ldots, B_m^+\right\}$ називають спряженою до системи $\{B_1, \ldots, B_m\}$ відносно виразу A. Спряжена система визначається неоднозначно, але всі спряжені системи еквівалентні в наступному сенсі: якщо $\left\{\widetilde{B}_1^+, \ldots, \widetilde{B}_m^+\right\}$ - ще одна система, спряжена до $\{B_1, \ldots, B_m\}$ відносно A, то

$$\left\{v \in C^\infty(\overline{G}) : B_j^+ v = 0 \text{ на } \partial G, \quad j = 1, \ldots, m\right\} =$$
$$\left\{v \in C^\infty(\overline{G}) : \widetilde{B}_j^+ v = 0 \text{ на } \partial G, \quad j = 1, \ldots, m\right\}$$

Розглянемо крайову задачу

$$A^+ v \equiv \sum_{|\mu| \le 2m} D^\mu \left(\overline{l_\mu(x)} v\right) = \omega \text{ в } G, \tag{13}$$

$$B_j^+ v = h_j \text{ на } \partial G, j = 1, \ldots, m. \tag{14}$$

Вона є **формально спряженою** до задачі (10)-(11) відносно формули Гріна (12).

Відомо, що крайова задача є регулярною еліптичною тоді і тільки тоді, коли формально спряжена до неї задача є регулярною еліптичною.

Нехай

$$N := \left\{u \in C^\infty(\bar{G}) : Au = 0 \text{ в } G, B_j u = 0 \text{ на } \partial G, j = 1, \ldots, m\right\}$$
$$N^+ := \left\{v \in C^\infty(\bar{G}) :\right.$$
$$\left. A^+ v = 0 \text{ в } G, B_j^+ v = 0 \text{ на } \partial G, j = 1, \ldots, m\right\}.$$

Множина N^+ не залежить від вибору спряженої системи граничних виразів $\left\{B_1^+, \ldots, B_m^+\right\}$. Оскільки задачі (10)-(11) та (13)-(14) є регулярно еліптичними, то простори N та N^+ скінченновимірні.

Крім класичної формули Гріна (12), розглядається ще спеціальна формула Гріна

$$(Au, v)_G + \sum_{j=1}^{m} (B_j u, h_j)_{\partial G} = \left(u, A^+ v\right)_G + \sum_{k=1}^{m+1} \left(D_\nu^{k-1} u, K_k v + \sum_{j=1}^{m} Q_{j,k}^+ h_j\right)_{\partial G}, \tag{15}$$

де $u, v \in C^\infty(\bar{G}), h_1, \ldots, h_m \in C^\infty(\partial G)$. Окрім того, всі $Q_{j,k}^+$ є дотичними диференціальними операторами, формально спряженими відповідно до $Q_{j,k}$ відносно $(\cdot,\cdot)_{\partial G}$, а дотичні лінійні диференціальні оператори $Q_{j,k} := Q_{j,k}(x, D_\tau)$ взято із зображення крайових диференціальних операторів B_j у вигляді

$$B_j(x,D) = \sum_{k=1}^{m+1} Q_{j,k}\,(x, D_\tau)\, D_\nu^{k-1}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Зазначимо, що $\mathrm{ord} Q_{j,k} \leq b_j - k + 1$, причому, звісно, $Q_{j,k} = 0$ при $k \geq b_j + 2$. Нарешті, кожне $K_k := K_k(x,D)-$ деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на ∂G порядку $\mathrm{ord}\, K_k \leq 2m - k$ з коефіцієнтами класу $C^\infty(\bar{G})$.

Спеціальна формула Гріна (15) приводить до наступної **формально спряженої задачі** в області G :

$$A^+ v = \omega \text{ в } \quad G, \tag{16}$$

$$K_k v + \sum_{j=1}^{m} Q_{j,k}^+ h_j = \theta_k \quad \text{на} \quad \partial G, \quad k = 1, \ldots, m+1. \tag{17}$$

Ця задача містить окрім невідомої функції v на G ще $m - q + 1$ додаткову невідому функцію $h_1, \ldots, h_m$ на межі ∂G.

Відомо, що крайова задача (10),(11) еліптична тоді і тільки тоді, коли формально спряжена задача (16),(17) еліптична як крайова задача з додатковими невідомими функціями на межі області [10].

2. Задача прогину тонкої пружної мембрани

2.1. Постановка задачі Задача прогину тонкої жорстко закріпленої пружної мембрани розглядалась в роботах Л. Франка [9], Михлин [5], Назарова [6] та інших. Наведемо узагальнену постановку такої задачі.

Нехай G - довільна обмежена область (відкрита зв'язна і непорожня множина) в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$. Припускаємо, що межа ∂G цієї області є замкненим нескінченно гладким орієнтованим многовидом без краю вимірності $n-1$.

$$\varepsilon^2\Delta^2 u(x) - \Delta u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{18}$$

$$u(x') = g_1, \quad x' \in \partial G, \tag{19}$$

$$\partial_\nu u(x') = g_2, \quad x' \in \partial G. \tag{20}$$

Тут шуканою функцією є функція $u(x)$.

У випадку $n = 2$ рівняння (18) є рівнянням прогину тонкої пружної пластини G, а крайові умови (19)-(20), де $g_1 = g_2 = 0$, відповідають випадку, коли межа ∂G пластини жорстко закріплена (Л.Франк [9]). Безрозмірний додатній параметр ε, що вважається малим (тобто $\varepsilon \ll 1$) заданий, як

$$\varepsilon = \frac{t^3 E}{12(1-\nu^2)l^2 T},$$

тут $t-$ товщина пластини, E$-$ модуль Юнга (модуль пружності), v - відношення Пуассона, l - характерний діаметр пластини, $T-$ абсолютне значення щільності. $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ - оператор Лапласа. Надалі вважатимемо, що ε - дійсний параметр такий, що $0 < \varepsilon \leq 1$.

2.2. Перевірка умов еліптичності Покажемо, що задача (18)-(20) є нормальною еліптичною задачею з малим параметром, тобто задовольняє основному означенню пункту 1.2. Відзначимо також, що ця задача є і еліптичною граничною задачею з малим параметром (див. [1],[7]), оскільки в даному випадку ці означення співпадають. Відповідно до позначень п. 1.1 маємо:

$$\begin{gathered}
A(x, D, \varepsilon) = \varepsilon^2 \Delta^2 - \Delta, \\
A_{2m}(x, D) = \Delta^2, \\
A_{2\mu}(x, D) = -\Delta, \\
B_1(x, D) = 1, \\
B_2(x, D) = \partial\nu, \\
m = 2, \mu = 1, \\
b_1 = b_\mu = 0 < b_2 = b_m = 1.
\end{gathered}$$

Перевіримо умови 1-2 для задачі (18)-(20). Для цього запишемо головний символ оператора $A^{(0)}(x, D, \varepsilon)$:

$$A^{(0)}(x, \xi, \varepsilon) := \varepsilon^2 |\xi|^4 + |\xi|^2 = |\xi|^2 \left(1 + \varepsilon^2 |\xi|^2\right).$$

Умова 1 задовольняється, оскільки

$$\left|A^{(0)}\left(x^0, \xi, \varepsilon\right)\right| = \left||\xi|^2 \left(1 + \varepsilon^2 |\xi|^2\right)\right| \geq C|\xi\Big|^2 (1 + \varepsilon|\xi|)^2$$

Перевіримо виконання умови 2 для нашої задачі. Для цього знайдемо розв'язки наступних рівнянь $A^{(0)}(\xi', \tau, \varepsilon) = 0$, $A^{(0)}_{2\mu}\left(\xi', \tau\right) = 0$ відповідно (тут $\xi = \left(\xi', \tau\right), |\xi|^2 = \left|\xi'\right|^2 + \tau^2$). Оскільки вірне представлення

$$A^{(0)}\left(\xi', \tau, \varepsilon\right) := \left(\left|\xi'\right|^2 + \tau^2\right)\left(1 + \varepsilon^2\left(\left|\xi'\right|^2 + \tau^2\right)\right) = 0,$$

то маємо наступні корені $\tau_{1,2} = \pm i|\xi'|, \quad \tau_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + |\xi'|^2}$.

Отже, $m_+ = m_- = m = 2$.

Знайдемо корені другого рівняння

$$A^{(0)}_{2\mu}\left(\xi', \tau\right) := \left|\xi'\right|^2 + \tau^2 = 0$$

Оскільки корені $\tau_{1,2} = \pm i|\xi'|$, то $\mu_+ = \mu_- = \mu = 1$. З попереднього випливає, що умова 2 виконується.

Оскільки $b_1 < b_2$, то умова 3 виконується автоматично.

Для перевірки умов 4 - 7 запишемо крайовий символ задачі (18)-(20):

$$\varepsilon^2 \left(|\xi'|^2 + D_t^2\right)^2 v(t) + \left(|\xi'|^2 + D_t^2\right) v(t) = 0 \quad t > 0,$$
$$v(0) = 0,$$
$$D_t v(0) = 0.$$

Оскільки ця задача не залежить від $x \in \partial G$, то умова 4 еквівалентна тому, що крайова задача

$$\varepsilon^2 \left(|\xi'|^2 + D_t^2\right)^2 v(t) + \left(|\xi'|^2 + D_t^2\right) v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{21}$$
$$v(0) = 0, \tag{22}$$
$$D_t v(0) = 0, \tag{23}$$
$$v(t) \to 0, t \to +\infty, \tag{24}$$

має лише тривіальний розв‘язок для кожного $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \{0\}, \varepsilon > 0$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (21), який задовольняє умову (24), має вигляд

$$v(t) = c_1 e^{-|\xi'|t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + |\xi'|^2} t},$$

де c_1, c_2 - довільні комплексні числа. Якщо підставити в умови (22)-(23) цей розв'язок, то отримаємо, що $c_1 = c_2 = 0$ та $v(t) \equiv 0$. Отже, умова виконується.

Умова 5 еквівалентна тому, що крайова задача

$$\left(|\xi'|^2 + D_t^2\right)^2 v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{25}$$
$$v(0) = 0, \tag{26}$$
$$D_t v(0) = 0, \tag{27}$$
$$v(t) \to 0, t \to +\infty, \tag{28}$$

має лише тривіальний розв'язок для кожного $\xi' \in R^{n-1} \backslash \{0\}$.

Оскільки загальний розв'язок рівняння (25) задовольняє умові (28), то він записується як

$$v(t) = c_1 e^{-|\xi'|t} + c_2 t \cdot e^{-|\xi'|t}$$

де c_1, c_2− довільні комплексні числа.

Якщо підставити цей розв'зок у (26)-(27), то можна отримати, що $c_1 = c_2 = 0$ та $v(t) \equiv 0$. Отже, умова 5 виконується.

Умова 6 еквівалентна тому, шо крайова задача

$$\left(|\xi'|^2 + D_t^2\right) v(t) = 0 \quad t > 0, \tag{29}$$

$$v(0) = 0, \tag{30}$$

$$v(t) \to 0, t \to +\infty, \tag{31}$$

має лише тривіальний розв'язок. Міркування аналогічні попереднім випадкам.

Загальннй розв'язок диференціального рівняння (29), що задовольняє умову (31) буде

$$v(t) = ce^{-|\xi'|t},$$

де - довільне комплексне число.

Підставивши цей розв'язок в умову (30), то отримаємо, що $c = 0$ і відповідно $v(t) \equiv 0$.Отже, умова 6 виконується.

Остання 7 умова рівносильна тому, що крайова задача

$$\begin{gathered} \left(D_t^2 + 1\right) D_t v(t) = 0 \quad t > 0, \\ D_t v(0) = 0, \\ v(t) \to 0, t \to +\infty, \end{gathered} \tag{32}$$

має лише тривіальний розв'язок.

Заміна $z(t) = D_t v(t)$ зводить (32) до наступної задачі

$$\begin{gathered} D_t^2 z(t) + z(t) = 0, \quad t > 0, \\ z(t) = 0, \\ z(t) \to 0, t \to +\infty. \end{gathered}$$

Загальний розв'язок задачі запишемо у вигляді

$$z(t) = c(e^{-t} - e^t),$$

де с - довільне комплексне число. Тому $v(t) = c(e^{-t} - e^t) + c_1$. Отримаємо, що $c = c_1 = 0$ і тому $v(t) \equiv 0$.

Отже, умова 7 виконується. Оскільки для задачі (18)-(20) для довільної точки $x \in \bar{G}$ виконується умова 1 і для кожної точки $x \in \partial G$ виконуються умови $2 - 7$, то вона задовольняє означення еліптичної задачі з малим параметром, тобто є нормальною еліптичною з малим параметром.

2.3. Формально спряжена задача Невтрачаючи загальності, для побудови формули Гріна розглянемо узагальнену задачу (18)-(20) в одиничному крузі, а саме:

$$\varepsilon^2\Delta^2 u(x) - \Delta u(x) = f(x), \quad x \in G, \tag{33}$$

$$u(x') = g_1, \quad x' \in \partial G, \tag{34}$$

$$\partial_\nu u(x') = g_2, \quad x' \in \partial G, \tag{35}$$

тут - $G := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$; $\partial_\nu := \partial/\partial\nu = -\partial/\partial\rho$, $\partial_\varphi := \partial/\partial\varphi$; (ρ, φ) - полярні кординати.

Вірна наступна теорема.

Теорема. *Для задачі* (33),(34),(35) *та довільних функцій* $u, \omega \in C^\infty(\overline{G})$ *і* $h_1, h_2 \in C^\infty(\partial G)$ *вірна наступна формула Гріна:*

$$\begin{gathered}\left(\varepsilon^2\Delta^2 u - \Delta u, \omega\right)_G + (u, h_1)_{\partial G} + (\partial_\nu u, h_2)_{\partial G} = \\ = \left(u, \varepsilon^2\Delta^2\omega - \Delta\omega\right)_G + \\ + \left(u, \varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega + 2\partial_\varphi^2\partial_\nu\omega - \partial_\nu^2\omega - \partial_\nu\omega\right) - \partial_\nu\omega + h_1\right)_{\partial G} + \\ + \left(D_\nu u, -i\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega + 2\partial_\varphi^2\omega - \omega\right) + i\omega + ih_2\right)_{\partial G} \\ + \left(D_\nu^2 u, -\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega + \omega\right)\right)_{\partial G} + \left(D_\nu^3 u, \varepsilon^2 i\omega\right)_{\partial G}.\end{gathered} \tag{36}$$

Доведення. Для доведення теореми наведемо деякі допоміжні міркування. Нам знадобиться формула оператора Лапласа у полярній системі координат (ρ, φ). Оскільки : $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Відомо, що

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Звідси

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{r} = \cos\varphi, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\varphi,$$
$$\frac{\partial \tan\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{y\cos^2\varphi}{x^2} = -\frac{yx^2}{x^2r^2} = -\frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{x},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\cos^2\varphi}{x}=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Знайдемо другі частинні похідні:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\\
=\left(\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\varphi+\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\cos\varphi}{r}=\\
=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\sin\varphi}{r}=\\
=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cos\varphi-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r}\right)\frac{\sin\varphi}{r}=\\
=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi}{r}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cdot\cos\varphi-\\
-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}\cos\varphi-\frac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi-\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin\varphi}{r}-\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\frac{\sin\varphi}{r}=\\
=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\\
+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.
\end{gathered}$$

Таким чином

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\varphi-2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}+\\
+2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\varphi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\sin^2\varphi}{r^2}.
\end{gathered}\tag{37}$$

Аналогічно отримаємо:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin^2\varphi+2\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi\partial r}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r}-\\
-2\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\varphi}{r}+\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\frac{\cos^2\varphi}{r^2}.
\end{gathered}\tag{38}$$

Враховуючи (37), (38) отримаємо

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

або в іншій формі:

$$\Delta u = \partial_\nu^2 u - \frac{1}{r}\partial_\nu u + \frac{1}{r^2}\partial_{\partial G}^2 u \quad \text{в} \quad G,$$
$$\Delta u = \partial_\nu^2 u - \partial_\nu u + \partial_{\partial G}^2 u \quad \text{на} \quad \partial G.$$

Для доведення нам знадобиться друга класична формула Гріна (12) для оператора Лапласа

$$(\Delta u, \omega)_G = (u, \Delta\omega)_G - (\partial_\nu u, \omega)_{\partial G} + (u, \partial_\nu \omega)_{\partial G}.$$

Інтегруючи частинами перший доданок в лівій частині формули (36) отримаємо наступне:

$$\begin{gathered}
\left(\varepsilon^2\Delta^2 u - \Delta u, \omega\right)_G = \varepsilon^2(\Delta(\Delta u), \omega)_G - (\Delta u, \omega)_G = \\
= \varepsilon^2\left((\Delta u, \Delta\omega)_G - (\partial_\nu \Delta u, \omega)_{\partial G} + (\Delta u, \partial_\nu\omega)_{\partial G}\right) - \\
- \left((u, \Delta\omega)_G - (\partial_\nu u, \omega)_{\partial G} + (u, \partial_\nu\omega)_{\partial G}\right) = \\
= \varepsilon^2(\Delta u, \Delta\omega)_G - \varepsilon^2\left(\partial_\nu\Delta u, \omega\right)_{\partial G} + \varepsilon^2\left(\Delta u, \partial_\nu\omega\right)_{\partial G} - \\
-(u, \Delta\omega)_G + (\partial_\nu u, \omega)_{\partial G} - (u, \partial_\nu\omega)_{\partial G} = \\
= \varepsilon^2\left(\left(u, \Delta^2\omega\right)_G - (\partial_\nu u, \Delta\omega)_{\partial G} + (u, \partial_\nu\Delta\omega)_{\partial G}\right) - \varepsilon^2\left(\partial_\nu\Delta u, \omega\right)_{\partial G} + \\
+\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2 u - \partial_\nu u + \partial_{\partial G}^2 u, \partial_\nu\omega\right)_{\partial G} - \\
-(u, \Delta\omega)_G + (\partial_\nu u, \omega)_{\partial G} + (u, -\partial_\nu\omega)_{\partial G} = \\
= \left(u, \varepsilon^2\Delta^2\omega\right)_G + \left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\Delta\omega\right)_{\partial G} + \left(u, \varepsilon^2\partial_\nu\Delta\omega\right)_{\partial G} - \left(\partial_\nu\Delta u, \varepsilon^2\omega\right)_{\partial G} + \\
+\left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2\partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \left(u, \varepsilon^2\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \\
+(u, -\Delta\omega)_G + (\partial_\nu u, \omega)_{\partial G} + (u, -\partial_\nu\omega)_{\partial G} = \\
= \left(u, \varepsilon^2\Delta^2\omega - \Delta\omega\right)_G + \left(u, \varepsilon^2\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega + \varepsilon^2\partial_\nu\Delta\omega - \partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \\
+\left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\left(\Delta\omega + \partial_\nu\omega\right) + \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2\partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu\Delta u, -\varepsilon^2\omega\right)_{\partial G} = \\
= \left(u, \varepsilon^2\Delta^2\omega - \Delta\omega\right)_G + \left(u, \varepsilon^2\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega + \varepsilon^2\partial_\nu\Delta\omega - \partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \\
+\left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega - \partial_\nu\omega + \partial_{\partial G}^2\omega + \partial_\nu\omega\right) + \omega\right)_{\partial G} + \\
+\left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2\partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu\Delta u, -\varepsilon^2\omega\right)_{\partial G} = \\
= \left(u, \varepsilon^2\Delta^2\omega - \Delta\omega\right)_G + \left(u, \varepsilon^2\left(\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega + \partial_\nu\Delta\omega\right) - \partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \\
+\left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega + \partial_{\partial G}^2\omega\right) + \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2\partial_\nu\omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu\Delta u, -\varepsilon^2\omega\right)_{\partial G}
\end{gathered}$$

Оскільки

$$\partial_\nu \Delta u|_{\partial G} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right)\Bigg|_{\partial G} =$$

$$= \left(-\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 u}{\partial r \partial \varphi^2}\right)\Bigg|_{\partial G} =$$

$$= \partial_\nu^3 u - \partial_\nu u - \partial_\nu^2 u + 2\partial_{\partial G}^2 u + \partial_{\partial G}^2 \partial_\nu u,$$

та

$$\partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega + \partial_\nu \Delta \omega =$$

$$= \partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega + \partial_\nu^3 \omega - \partial_\nu \omega - \partial_\nu^2 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \omega + \partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega =$$

$$= \partial_\nu^3 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega - \partial_\nu^2 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \omega - \partial_\nu \omega.$$

Таким чином:

$$\begin{gathered}
\left(\varepsilon^2 \Delta^2 u - \Delta u, \omega\right)_G = \left(u, \varepsilon^2 \Delta^2 \omega - \Delta \omega\right)_G + \\
+ \left(u, \varepsilon^2\left(\partial_\nu^3 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega - \partial_\nu^2 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \omega - \partial_\nu \omega\right) - \partial_\nu \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2 \omega + \partial_{\partial G}^2 \omega\right) + \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2 \partial_\nu \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu^3 u - \partial_\nu u - \partial_\nu^2 u + 2\partial_{\partial G}^2 u + \partial_{\partial G}^2 \partial_\nu u, -\varepsilon^2 \omega\right)_{\partial G} = \left(u, \varepsilon^2 \Delta^2 \omega - \Delta \omega\right)_G + \\
+ \left(u, \varepsilon^2\left(\partial_\nu^3 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega - \partial_\nu^2 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \omega - \partial_\nu \omega\right) - \partial_\nu \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2 \omega + \partial_{\partial G}^2 \omega\right) + \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2 \partial_\nu \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu^3 u, -\varepsilon^2 \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu u, \varepsilon^2 \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2 \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(u, -2\varepsilon^2 \partial_{\partial G}^2 \omega\right)_{\partial G} + \left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2 \partial_{\partial G}^2 \omega\right)_{\partial G} = \left(u, \varepsilon^2 \Delta^2 \omega - \Delta \omega\right)_G + \\
+ \left(u, \varepsilon^2\left(\partial_\nu^3 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \partial_\nu \omega - \partial_\nu^2 \omega - \partial_\nu \omega\right) - \partial_\nu \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu u, -\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2 \omega + 2\partial_{\partial G}^2 \omega - \omega\right) + \omega\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu^2 u, \varepsilon^2\left(\partial_\nu \omega + \omega\right)\right)_{\partial G} + \\
+ \left(\partial_\nu^3 u, -\varepsilon^2 \omega\right)_{\partial G}.
\end{gathered}$$

Одже маємо

$$\left(\varepsilon^2\Delta^2 u-\Delta u,\omega\right)_G=\left(u,\varepsilon^2\Delta^2\omega-\Delta\omega\right)_G+$$

$$+\left(u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega+2\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega-\partial_\nu^2\omega-\partial_\nu\omega\right)-\partial_\nu\omega\right)_{\partial G}+$$

$$+\left(\partial_\nu u,-\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega+2\partial_{\partial G}^2\omega-\omega\right)+\omega\right)_{\partial G}+$$

$$+\left(\partial_\nu^2 u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega+\omega\right)\right)_{\partial G}+\left(\partial_\nu^3 u,-\varepsilon^2\omega\right)_{\partial G}.$$

Тоді враховуючи останню рівність, звівши спільні множники в скалярних добутках на межі області маємо:

$$\begin{gathered}\left(\varepsilon^2\Delta^2 u-\Delta u,\omega\right)_G+(u,h_1)_{\partial G}+(\partial_\nu u,h_2)_{\partial G}=\\=\left(u,\varepsilon^2\Delta^2\omega-\Delta\omega\right)_G+\\+\left(u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega+2\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega-\partial_\nu^2\omega-\partial_\nu\omega\right)-\partial_\nu\omega\right)_{\partial G}+\\+\left(\partial_\nu u,-\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega+2\partial_{\partial G}^2\omega-\omega\right)+\omega\right)_{\partial G}+\\+\left(\partial_\nu^2 u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega+\omega\right)\right)_{\partial G}+\left(\partial_\nu^3 u,-\varepsilon^2\omega\right)_{\partial G}+\\+(u,h_1)_{\partial G}+(\partial_\nu u,h_2)_{\partial G}=\\=\left(u,\varepsilon^2\Delta^2\omega-\Delta\omega\right)_G+\\+\left(u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega+2\partial_{\partial G}^2\partial_\nu\omega-\partial_\nu^2\omega-\partial_\nu\omega\right)-\partial_\nu\omega+h_1\right)_{\partial G}+\\+\left(\partial_\nu u,-\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega+2\partial_{\partial G}^2\omega-\omega\right)+\omega+h_2\right)_{\partial G}+\left(\partial_\nu^2 u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega+\omega\right)\right)_{\partial G}+\\+\left(\partial_\nu^3 u,-\varepsilon^2\omega\right)_{\partial G}=\\=\left(u,\varepsilon^2\Delta^2\omega-\Delta\omega\right)_G+\\+\left(u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega+2\partial_\varphi^2\partial_\nu\omega-\partial_\nu^2\omega-\partial_\nu\omega\right)-\partial_\nu\omega+h_1\right)_{\partial G}+\\+\left(D_\nu u,-i\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega+2\partial_\varphi^2\omega-\omega\right)+i\omega+ih_2\right)_{\partial G}\\+\left(D_\nu^2 u,-\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega+\omega\right)\right)_{\partial G}+\left(D_\nu^3 u,\varepsilon^2 i\omega\right)_{\partial G}.\end{gathered}$$

Формула Гріна має наступний вигляд:

$$\begin{gathered}\left(\varepsilon^2\Delta^2 u-\Delta u,\omega\right)_G+(u,h_1)_{\partial G}+(\partial_\nu u,h_2)_{\partial G}=\\=\left(u,\varepsilon^2\Delta^2\omega-\Delta\omega\right)_G+\\+\left(u,\varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega+2\partial_\varphi^2\partial_\nu\omega-\partial_\nu^2\omega-\partial_\nu\omega\right)-\partial_\nu\omega+h_1\right)_{\partial G}+\\+\left(D_\nu u,-i\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega+2\partial_\varphi^2\omega-\omega\right)+i\omega+ih_2\right)_{\partial G}\\+\left(D_\nu^2 u,-\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega+\omega\right)\right)_{\partial G}+\left(D_\nu^3 u,\varepsilon^2 i\omega\right)_{\partial G}.\end{gathered}$$

Що і треба було довести.

Спеціальна формула Гріна (36) приводить до наступної **формально спряженої задачі** до задачі (33)-(35) в області G :

$$\begin{gathered}
\varepsilon^2\Delta^2\omega - \Delta\omega = f, \quad x \in G, \\
\varepsilon^2 i\omega = \theta_1, \quad x \in \partial G, \\
-\varepsilon^2\left(\partial_\nu\omega + \omega\right) = \theta_2, \quad x \in \partial G, \\
-i\varepsilon^2\left(\partial_\nu^2\omega + 2\partial_\varphi^2\omega - \omega\right) + i\omega + ih_2 = \theta_3, \quad x \in \partial G, \\
\varepsilon^2\left(\partial_\nu^3\omega + 2\partial_\varphi^2\partial_\nu\omega - \partial_\nu^2\omega - \partial_\nu\omega\right) - \partial_\nu\omega + h_1 = \theta_4, \quad x \in \partial G.
\end{gathered}$$

Висновки

Основними результатами виконаної роботи є:

- Розглянуто клас нормальних еліптичних крайових рівнянь з малим параметром.
- Встановлено, що узагальнена задача прогину тонкої пружної мембрани належить до цього класу.
- Побудувано формулу Гріна та формально спряжену задачу до узагальненої задачі прогину тонкої пружної мембрани відносно отриманої формули Гріна.

Бакалаврська робота має теоритичний характер. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні властивостей продовження за неперервністю лінійного відображення пов'язаного з задачею (18) - (20) у придатних парах функціональних просторів $H^{r,s}(G,\varepsilon), H^{r,s}(\partial G,\varepsilon)$, залежних від малого параметра ε [1].

БІБЛІОҐРАФІЯ

1. Волевич Л. Р. Метод Вишика-Люстерника в эллиптических задачах с малым параметром // Труды московского математического общества, т. 67, - 2006. – С. 104 – 147.
2. Заворотинський А. В. Еліптичні з параметром крайові задачі з невідомими додатковими функціями на межі області / А. В. Заворотинський // Національна академія наук України. Інститут математики. УДК 517. 956. 2 – Дисертація на здобуття ступеня кандидата фізико-математичних наук. – Київ 2016 – 161 с.
3. Касіренко Т.М. Еліптичні задачі з крайовими умовами високих порядків у просторах Хермандера /Т.М. Касіренко, О.О. Мурач -К.: Укр. мат. журн., 2017, т. 69, № 11
4. Михайлец В.А., Мурач А.А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи // Праці Інституту математики НАН України. - 2010. - Т.84 - 372с.
5. Михлин С.Г. Вариационные методи в математической физике // Издательство "Наука". - 1970. - 512с.
6. Назаров С. А. Метод Вишика—Люстерника для эллиптических краевых задач в области с коническими точками. I. Задача в конусе // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22.№4. С. 142–163.
7. Хрипко Н.П. Формальний асимптотичний розв'язок задачі коливання тонкої пружної мембрани/Хрипко Н.П.//Київський національний університет імені Тараса Шевченка. - Випускна бакалаврська робота. - Київ 2022 - 34 с.
8. Agranovich M. S. Elliptic boundary problems // Encycl. Math. Sci. Vol. 79. Part. Different. Equat., IX. – Berlin:Springer, 1997. – P. 1 – 144.
9. Frank L. S. Singular perturbations in elasticity theory. Berlin: IOS Press, 1997.
10. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J. Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.