

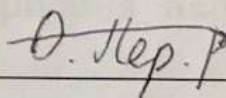
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА  
БАКАЛАВРА

на тему:

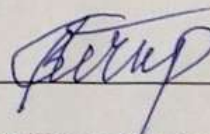
**Аналіз чутливості у параметричних задачах  
варіаційного числення, стійкості та  
ідентифікації**

студента 4 курсу  
кафедри МСС  
Олега ПЕРМЯКОВА



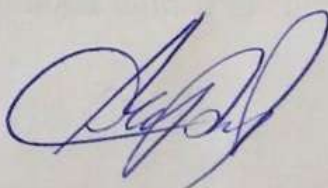
Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, професор  
Володимир ПІЧКУР



Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та  
рекомендована до захисту в ЕК, протокол №10 від 5 червня 2023 р.

Завідувач кафедри МСС  
доктор технічних наук, доцент



Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2023

# Анотація

Випускна кваліфікаційна робота бакалавра: 44 сторінки, 8 рисунків, 12 інформаційних джерел.

Актуальність роботи: Актуальність теми кваліфікаційної роботи полягає в необхідності аналізу стійкості і чутливості параметричних моделей, пошуку оптимальних параметрів для параметричних систем з врахуванням чутливості, ідентифікація параметрів математичної моделі за допомогою підходів теорії чутливості.

Об'єкт дослідження: Параметричні системи звичайних диференціальних рівнянь

Мета роботи: Аналіз методів чутливості для оптимізації та ідентифікації параметрів моделей.

Предмет дослідження: Чутливість, параметрична оптимізація, ідентифікація параметричних систем.

Ключові слова: параметричні системи, чутливість, стійкість, варіаційне числення, параметрична оптимізація, ідентифікація.

# Зміст

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Вступ</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1 Аналіз параметричних систем в задачах стійкості і варіаційного числення</b>           | <b>5</b>  |
| 1.1 Основні означення . . . . .  | 5         |
| 1.2 Використання другого методу Ляпунова для аналізу параметричних систем . . . . .        | 9         |
| 1.3 Аналіз параметричних систем за допомогою методів практичної стійкості . . . . .        | 12        |
| 1.4 Рівняння чутливості в задачах варіаційного числення . . . . .                          | 18        |
| 1.4.1 Найпростіша задача варіаційного числення . . . . .                                   | 18        |
| 1.4.2 Задача варіаційного числення з рухомими кінцями . . . . .                            | 21        |
| <b>2 Параметрична оптимізація та ідентифікація параметрів на основі методів чутливості</b> | <b>24</b> |
| 2.1 Метод параметричної оптимізації . . . . .  | 24        |
| 2.2 Ідентифікація параметрів на основі матриці чутливості . . . . .                        | 27        |
| 2.3 Алгоритм параметричної оптимізації з використанням функцій чутливості . . . . .        | 30        |
| 2.4 Обчислювальний експеримент . . . . .   | 32        |
| 2.4.1 Математична модель динаміки бою . . . . .  | 32        |
| 2.4.2 Алгоритм параметричної оптимізації . . . . .   | 33        |
| 2.4.3 Результати обчислювального експерименту . . . . .                                    | 36        |
| <b>Висновки</b>  | <b>42</b> |
| <b>Список використаних джерел</b>  | <b>43</b> |

# Вступ

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня бакалавра присвячена висвітленню основних положень теорії чутливості параметричних систем. Теорія чутливості вивчає вплив зміни параметрів на динамічні властивості систем. Актуальність цієї теми полягає в тому, що при конструюванні складних систем однією з вимог є обмеженість чутливості розрахункових параметрів [1, 4]. Аналіз стійкості і чутливості параметричних систем тісно пов'язаний з задачами параметричної оптимізації і ідентифікації параметрів. Інформація про матрицю чутливості дозволяє створювати алгоритми знаходження оптимальних параметрів в моделях, ідентифікувати невідомі параметри за спостереженнями [1, 5]. Дослідження чутливості систем доцільне в багатьох прикладних галузях: медицині, машинобудуванні, літакобудуванні, в аналізі економічних процесів тощо.

Структура роботи така: вступ, два розділи, висновки та список використаних джерел. У першому розділі вводяться основні поняття, наводяться теореми параметричної стійкості на основі другого методу Ляпунова, практичної стійкості, розглядаються функції чутливості у варіаційних задачах. У другому розділі наводиться методика параметричної оптимізації та ідентифікації для нелінійних систем з використанням матриці чутливості. Наведено результати обчислювального експерименту.

# Розділ 1

## Аналіз параметричних систем в задачах стійкості і варіаційного числення

### 1.1 Основні означення

Наведемо основні означення теорії чутливості [1, 4].

Нехай  $x \in \mathbb{R}^n$  – вектор стану системи (вихід),  $u \in \mathbb{R}^n$  – вектор керування (вхід),  $\alpha \in \mathbb{R}^r$  – вектор параметрів моделі, які описують умови зовнішнього середовища і параметри математичної моделі при фіксованому керуванні. Такий зв'язок можна записати у вигляді співвідношення

$$x = L(u, v, \alpha),$$

де  $L$  – деякий оператор, який встановлює залежність між вхідними і вихідними параметрами системи. В подальшому вважаємо, що керування – фіксоване.

**Означення 1.1.** *Здатність системи змінювати свої властивості при зміні параметрів  $\alpha$  називають (параметричною) чутливістю.*

Якість функціонування системи може описуватись критеріями якості

$$\mathcal{I}_j(\alpha), \quad j = 1, 2, \dots, s.$$

Одним з основних об'єктів теорії чутливості є властивості функції чутливості [1].

**Означення 1.2.** Частинні похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(t, \alpha)}{\partial \alpha_k}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, \dots, r, \\ \frac{\partial \mathcal{J}_j(\alpha)}{\partial \alpha_k}, \quad j = 1, \dots, s, \quad k = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (1.1)$$

будемо називати функціями чутливості першого порядку від компонент векторів стану та критерію якості системи.

Функції чутливості (1.1) складають матриці чутливостей розмірності  $n \times n$  та  $s \times r$  відповідно

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial x_1(t, \alpha)}{\partial \alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n(t, \alpha)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial x_n(t, \alpha)}{\partial \alpha_r} \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \mathcal{J}_j(\alpha)}{\partial \alpha} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}_1(\alpha)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{J}_1(\alpha)}{\partial \alpha_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \mathcal{J}_s(\alpha)}{\partial \alpha_1} & \dots & \frac{\partial \mathcal{J}_s(\alpha)}{\partial \alpha_r} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

**Означення 1.3.** Частинні похідні  $k$ -го порядку від компонент векторів стану та критеріїв якості

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k x_i(t, \alpha)}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_r^{k_r}}, \\ \frac{\partial^k \mathcal{J}_i(\alpha)}{\partial \alpha_1^{k_1} \partial \alpha_2^{k_2} \dots \partial \alpha_r^{k_r}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

будемо називати функціями чутливості  $k$ -го порядку за відповідними комбінаціями параметрів.

**Означення 1.4.** Вектор

$$\Delta x(t, \bar{\alpha}, \mu) = x(t, \bar{\alpha} + \mu) - x(t, \bar{\alpha})$$

будемо називати відхиленням збуреного руху від незбуреного. Аналогічно

*s*-вимірний вектор

$$\Delta \mathcal{J}(\bar{\alpha}, \mu) = \mathcal{J}(\bar{\alpha} + \mu) - \mathcal{J}(\bar{\alpha})$$

називатимемо відхиленням значень критеріїв якості на збурених режимах від незбурених відповідно.

Припустимо, що математична модель описується системою звичайних диференціальних рівнянь, в якій права частина залежить від  $\alpha$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha). \quad (1.4)$$

Властивості розв'язків системи (1.4) описуються теоремами про неперервну залежність від початкових умов, параметрів, а також теоремами про неперервну диференційованість розв'язків відносно початкових умов і параметрів [10].

**Теорема 1.1.** (про неперервну залежність розв'язків від параметра) Нехай праві частини системи (1.4) неперервні за компонентами векторів  $x$ ,  $\alpha$  та  $t$ , разом із частинними похідними  $\frac{\partial f_i(x, t, \alpha)}{\partial x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$  у деякій області  $\Gamma$   $n + r + 1$  змінних  $x, \alpha, t$ . Якщо  $x = x(t, \alpha)$  – розв'язок системи (1.4), який задовольняє початкові умови  $x(t_0, \alpha^{(0)}) = x^{(0)}$  на відрізку  $t_1 \leq t \leq t_2$ , то існує  $\rho > 0$  таке, що вказаний розв'язок є визначеним і неперервним за  $t$ ,  $\alpha$  при  $\|\alpha - \alpha^{(0)}\| < \rho$ ,  $t \in [t_1; t_2]$ .

**Теорема 1.2** (про диференційованість за параметрами). Якщо праві частини системи (1.4) мають неперервні частинні похідні за компонентами векторів  $x$ ,  $\alpha$  до порядку  $s$  включно та неперервні за  $t$ , то розв'язок системи має неперервні частинні похідні до порядку  $s$  за елементами вектора  $\alpha$  при  $\|\alpha - \alpha^{(0)}\| < \rho_1$ ,  $t \in [t_1, t_2]$  ( $\rho_1$  – досить мале додатне число).

**Теорема 1.3.** Нехай  $x^{(0)}$ ,  $t_0$  не залежать від  $\alpha$  і виконуються умови диференційованості розв'язку системи (1.4) за елементами вектора  $\alpha$ , тоді вектор-функції  $u^{(j)}(t) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha_j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  задовольняють системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du^{(j)}}{dt} = \frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial x} u^{(j)} + \frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial \alpha^{(j)}}, j = 1, 2, \dots, r \quad (1.5)$$

з нульовими початковими умовами

$$u^{(j)}(t_0) = 0, j = 1, 2, \dots, r. \quad (1.6)$$

Припустимо, що початковий момент  $t_0$  та вектор  $x^{(0)}$  залежать від параметра  $\alpha$ :

$$t_0 = t_0(\alpha), \quad x^{(0)} = x^{(0)}(\alpha). \quad (1.7)$$

**Теорема 1.4.** *Нехай функції  $t_0(\alpha)$  та  $x^{(0)}(\alpha)$  диференційовані за елементами вектора  $\alpha$  і виконується умова з теореми (1.2) при  $s = 1$ . Тоді функції чутливості  $u^{(j)}(t)$  для системи (1.4) задовольняють рівняння (1.5) з початковими умовами.*

$$\begin{aligned} u^{(j)}(t_0) &= \frac{\partial x^{(0)}(\alpha)}{\partial \alpha_j} - x^{(0)} \frac{\partial t_0(\alpha)}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial x^{(0)}(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \\ &- f(x^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha), \alpha) \frac{\partial t_0}{\partial \alpha_j}, j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Порядок функцій чутливості може бути другого порядку чи навіть більше [1]. Розглянемо функції чутливості другого порядку

$$u^{(i,j)}(t, \alpha) = \frac{\partial^2 x(t, \alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (1.9)$$

Припустимо, що умови сформульованої вище теореми про диференційованість розв'язку для  $s = 2$  виконуються. Тоді рівняння для функцій чутливості другого порядку можна отримати шляхом диференціювання лівої та правої частин системи (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{du^{(i,j)}}{dt} &= \frac{\partial f(x, t, \alpha)}{\partial x} u^{(i,j)} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (u^{(i)}, u^{(j)}) + \\ &+ \frac{\partial^2 f(x, t, \alpha)}{\partial x \partial \alpha_j} u^{(i)} + \frac{\partial^2 f(u^{(i)}, u^{(j)})}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j}, i, j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned}
u^{(j)}(t, \alpha) &= \int_t^{t_0(\alpha)} \left( \frac{\partial f(x, \tau, \alpha)}{\partial x} u^{(j)}(\tau, \alpha) + \right. \\
&\left. + \frac{\partial f(x, \tau, \alpha)}{\partial \alpha_j} \right) d\tau + u^{(j)}(t_0), j = 1, 2, \dots, r.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}
u^{(i,j)}(t_0) &= \frac{\partial^2 x^{(0)}(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - f(x^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha), \alpha) \frac{\partial^2 t_0(\alpha)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} - \\
&- \frac{\partial f(x^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha), \alpha)}{\partial t} \frac{\partial t_0(\alpha)}{\partial \alpha_i} \frac{\partial t_0(\alpha)}{\partial \alpha_j} - \\
&- \frac{\partial f(x^{(0)}(\alpha), t_0(\alpha), \alpha)}{\partial x} (u^{(i)}(t_0) + u^{(j)}(t_0)), \\
i, j &= 1, 2, \dots, r.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Якщо якість функціонування системи (1.4) визначається критерієм якості  $\mathcal{J}(\alpha)$ , при цьому параметри системи вибираються з умови мінімізації критерія якості, то така задача називається задачею параметричної оптимізації [1, 5]. Параметри системи можуть визначатися на основі спостережень за станом системи. Така задача називається задачею параметричної ідентифікації. Вона, як правило, зводиться до задачі параметричної оптимізації [1, 8, 9]. Задачі параметричної оптимізації і ідентифікації висвітлюються у другому розділі.

## 1.2 Використання другого методу Ляпунова для аналізу параметричних систем

Розв'язуючи задачі теорії чутливості можна використовувати другий метод Ляпунова [1, 4, 7, 10]. Розглянемо рівняння збуреного руху

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad t \geq t_0. \tag{1.13}$$

Система рівнянь (1.13) має розв'язок  $x(t, \mu) = 0, t \geq t_0$ , при  $\mu = 0$ .

**Теорема 1.5.** Припустимо, що для системи (1.13) можна вказати функцію  $V(x, \mu, t)$ , яка задовольняє умови:

1)  $V(0, 0, t) = 0$ ,  $V(x, \mu, t) > V_1(x)$ ,  $|\mu| \leq \bar{\mu}$ ,  $t \in I_t = \{t : t \geq t_0\}$ ,  $x \in \Gamma_r = \{x : \|x\| < r\}$ , де  $r, \bar{\mu} > 0$  – деякі числа,  $V_1(x)$  – додатно визначена функція;

2) для  $x \in \Gamma_r$ ,  $t \in I_t$ ,  $|\mu| \leq \bar{\mu}$  на розв'язках системи (1.13) виконується нерівність

$$\frac{dV(x, \mu, t)}{dt} = \frac{\partial V(x, \mu, t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x, \mu, t) f(x, \mu, t) \leq 0. \quad (1.14)$$

Якщо  $l(r) = \min_{\|z\|=r} V_1(z)$ , то з умови

$$V(z^{(0)}, \mu, t_0) = c < l(r), \quad z^{(0)} \in \Gamma_r, \quad t_0 \in I_{t_0}, \quad |\mu| \leq \bar{\mu} \quad (1.15)$$

впливає нерівність

$$V(x, \mu, t) \leq c, \quad t \in I_t. \quad (1.16)$$

Припустимо, що додатковий (збурений) рух описується системою

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \mu Bx + \mu f(t). \quad (1.17)$$

Якщо всі корені характеристичного рівняння  $\det(\lambda E - A) = 0$ , мають від'ємні дійсні частини, то функцію Ляпунова можна побудувати у вигляді квадратичної форми

$$V(x) = x^T H x.$$

Причому симетрична додатньо визначена матриця  $H$  визначається з матричного рівняння Ляпунова

$$HA + A^T H = G, \quad (1.18)$$

де  $G$  – задана симетрична від'ємно визначена матриця. Обчислимо похідну від  $V(x)$  на розв'язках системи (1.17)

$$\begin{aligned} \frac{dV(x)}{dt} &= \frac{dx^T}{dt} H x + x^T H \frac{dx}{dt} = x^T G x + \\ &+ \mu(x^T (B^T H + H B)x) + \mu(f^T(t) H x + x^T H f(t)). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Перепишемо цей вираз у формі

$$\frac{dV}{dt} = x^T P x + \mu Q^T x, \quad (1.20)$$

де

$$P = G + \mu(B^T H + H B), \quad Q^T = 2f^T(t)H.$$

На основі (1.20) оцінимо

$$\max_{V(x)=c} \frac{dV}{dt} \leq \max_{V(x)=c} x^T P x + |\mu| \max_{V(x)=c} Q^T x. \quad (1.21)$$

Однак за співвідношенням Релея

$$\max_{V(x)=c} x^T P x = \lambda_{max} c,$$

де  $\lambda_{max}$  – максимальне власне число матриці  $P$ . Другий максимум правої частини нерівності (1.21) знайдемо за допомогою функції Лагранжа

$$L(x, \lambda) = Q^T x - \lambda(V(x) - c). \quad (1.22)$$

З необхідності екстремуму

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -2\lambda H x + Q = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = c - V(x) = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

Знаходимо

$$\bar{x} = \frac{1}{2\lambda} H^{-1} Q \quad (1.24)$$

Підставляємо (1.24) у друге рівняння системи (1.23)

$$\bar{x}^T H \bar{x} = \frac{1}{4\lambda^2} Q^2 (H^{-1})^T H H^{-1} Q = c. \quad (1.25)$$

і знаходимо  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{c}} \sqrt{Q^T H^{-1} Q}. \quad (1.26)$$

Враховуючи (1.26), рівність (1.24) перепишемо у вигляді

$$\bar{x} = \frac{H^{-1}Q\sqrt{c}}{\sqrt{Q^T H^{-1}Q}}. \quad (1.27)$$

Отже,

$$\max_{V(x)=c} Q^T x = \sqrt{c}\sqrt{Q^T H^{-1}Q}. \quad (1.28)$$

Згідно з (1.21)

$$\max_{V(x)=c} \frac{dV}{dt} \leq \lambda_{max}c + 2|\mu|\sqrt{c}\sqrt{f^T(t)Hf(t)}. \quad (1.29)$$

### 1.3 Аналіз параметричних систем за допомогою методів практичної стійкості

Особливості задач стійкості в класній постановці полягають у тому, що аналіз стійкості незбуреного руху проводиться відносно збурень тільки початкових умов, а функціонування системи розглядається на нескінченному проміжку часу:  $t \geq t_0$  [1, 4, 7, 10]. Крім цього, початкові збурення й викликані ними відхилення від розрахункового руху можуть бути досить малими. Згідно з фундаментальним поняттям стійкості за Ляпуновим, необхідно за будь-яким числом  $\epsilon$  відшукати  $\delta$  (або встановити його існування). При цьому питання про те, наскільки великим може бути значення  $\delta$  при заданому  $\epsilon$ , не розглядається. Для аналізу стійкості та пов'язаних з ним інших прикладних задач важливо з'ясувати питання про можливі межі змінювання початкових і подальших відхилень для реальної динамічної системи та встановити величину допустимого інтервалу її функціонування. Крім того, необхідно визначити й можливі екстремальні збурення для реальної системи. У зв'язку з постановками такого типу задач виникає, зокрема, поняття практичної (технічної) стійкості чи стійкості на кінцевому проміжку часу.

Для практичної стійкості динамічних систем є характерним два основних моменти:

- 1) початкові умови та фазові обмеження визначені в конкретному вигляді;
- 2) динаміка процесу відбувається на скінченному проміжку часу.

При розв'язанні різного типу задач, що пов'язані з проектуванням скла-

дних систем, їх керуванням, адаптацією, чутливістю тощо, розглядається параметрична модель рухомого об'єкта.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь, що залежать від параметрів [1–4]

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha), \quad f(0, t, 0) = 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (1.30)$$

де  $x = x(t, \alpha)$  – вектор фазових координат розмірністю  $n$ ;  $\alpha$  –  $r$ -вимірний вектор параметрів, що вибирається з деякої множини  $G_\alpha$  ( $0 \in G_\alpha$ ),  $f(x, t, \alpha)$  – вектор-функція розмірністю  $n$ , яка задовольняє умови існування та єдиності розв'язків для довільних  $\alpha \in G_\alpha$ .

Вважаємо, що  $x(t, 0) = 0$ ,  $t \in [t_0, T]$  є незбуреним розв'язком системи (1.30), що характеризує розрахунковий режим функціонування.

**Означення 1.5.** Незбурений зв'язок  $x(t, 0) = 0$ ,  $t \in [t_0, T]$  системи (1.30) назвемо  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$  – стійким, якщо траєкторії системи (1.30) не виходять за межі допустимої множини  $\Phi_t$  ( $0 \in \Phi_t$ ),  $t \in [t_0, T]$  для початкових умов  $x(t_0, \alpha)$  з області  $G_0^x$  і довільних  $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$ .

Тут множина  $G_\alpha$  ( $0 \in G_\alpha$ ) є допустимою множиною значень параметрів, які використовуються при аналізі практичної стійкості.

**Означення 1.6.** Нульовий розв'язок системи диференціальних рівнянь (1.30) називається  $\{G_0^{x,\alpha}, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$  – стійким, якщо вектори  $x(t)$ ,  $\alpha$  в динаміці належать множині допустимих обмежень  $\Phi_{t,\alpha}$ ,  $t \in [t_0, T]$  для довільних початкових умов  $x(t_0)$  і параметрів  $\alpha$  множини  $G_0^{x,\alpha}$ .

**Означення 1.7.** Функція  $V(x, t, \alpha)$  називається додатно визначеною за змінною  $x$ , якщо існує додатно визначена функція  $V_1(x, t)$  така, що

$$V(x, t, \alpha) \geq V_1(x, t),$$

коли  $\|x\| \neq 0$ ,  $\alpha \in G_\alpha$  та  $V(0, t, 0) \equiv 0$  для усіх  $t \geq t_0$

**Означення 1.8.** Функцію  $V(x, t, \alpha)$  назвемо додатно визначеною за змінною  $x$  на  $[t_0, T]$ , якщо  $V(t, x, \alpha) > 0$  при  $\alpha \in G_\alpha$  та  $V(0, t, 0) = 0$  для довільних  $t \in [t_0, T]$ .

**Означення 1.9.** Функція  $V(t, x, \alpha)$  називається додатно визначеною, якщо знайдеться така додатно визначена функція  $V_2(x, \alpha)$ , що  $V(t, x, \alpha) > V_2(x, \alpha)$  при  $\|(x/\alpha)\| \neq 0$  та  $V(0, t, 0) = 0$  для кожного моменту  $t \geq t_0$ .

**Означення 1.10.** Будемо говорити, що функція  $V(x, t, \alpha)$  є додатно визначеною на  $[t_0, T]$ , якщо  $V(x, t, \alpha) > 0$ , коли  $\|(x/\alpha)\| \neq 0$  та  $V(0, t, 0) = 0$  для всіх  $t \in [t_0, T]$

Функція  $V(x, t, \alpha)$  буде від'ємно визначеною (за змінною  $x$ ), якщо функція  $-V(x, t, \alpha)$  буде додатно визначеною (за змінною  $x$ ). Аналогічно вводиться поняття від'ємно визначеної (за змінною  $x$ ) функції на  $[t_0, T]$ .

**Означення 1.11.** Будемо говорити, що додатно визначена за змінною  $x$  функція  $V(x, t, \alpha)$  допускає нескінченно малу вищу границю за змінною  $x$ , якщо існує додатно визначена функція  $W(x)$ , для якої виконується нерівність  $V(x, t, \alpha) \leq W(x)$  при  $\|x\| \neq 0$ ,  $\alpha \in G_\alpha$  для кожного  $t \geq t_0$

**Теорема 1.6.** Якщо для системи (1.30) існує додатно визначена за змінною  $x$  на  $[t_0, T]$  функція  $V(x, t, \alpha)$ , що задовольняє співвідношення

$$\{x : V(x, t, \alpha) < 1\} \subset \Phi_t,$$

$$t \in [t_0, T],$$

$$\alpha \in G_0^\alpha;$$

$$\left(\frac{dV(x, t, \alpha)}{dt}\right)_{(1.30)} = \frac{\partial V(x, t, \alpha)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x, t, \alpha) f(x, t, \alpha) \leq 0,$$

коли

$$x \in \{x : V(x, t, \alpha) \leq 1\},$$

$$t \in [t_0, T],$$

$$\alpha \in G_0^\alpha,$$

$G_0^x \subset \{x : V(x(t_0, \alpha), t_0, \alpha) \leq 1\}$ ,  $\alpha \in G_0^\alpha$ , то незбурений розв'язок  $x(t, 0) \equiv 0$  системи (1.30) буде  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$  – стійким

**Наслідок 1.1.** Якщо  $G_0^x = \{x : W(x) < 1\}$ , де  $W(x)$  – однозначна, неперервна, додатно визначена функція, задана в області визначення змінної  $x$ , то функцію Ляпунова, що задовольняє усі вимоги теореми (1.6) можна побудувати таким чином:

$V(x, t, \alpha) = W(\phi(t, t_0, x, \alpha))$ , де  $x(t_0) = \phi(t, t_0, x, \alpha)$  – інтеграл системи (1.30).

**Теорема 1.7.** Якщо для системи (1.30) існує додатно визначена функція Ляпунова  $V(x, t, \alpha)$ , що задовольняє умови:

$$\{x : V(x, t) < 1\} \subset \Phi_t, t \in [t_0, T];$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x, t) f(x, t, \alpha) \leq 0$$

при

$$x \in \{x : V(x, t) \leq 1\}, t \in [t_0, T], \alpha \in G_0^\alpha;$$

$$G_0^x \subset \{x^V(x(t_0, \alpha), t_0) < 1\}, \alpha \in G_0^\alpha.$$

Тоді незбурений рух системи (1.30) є  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$  – стійким.

**Теорема 1.8.** Якщо система диференціальних рівнянь (1.30) є такою, що можна знайти додатно визначену на  $[t_0, T]$  функцію  $V(x, t, \alpha)$  яка задовольняє співвідношення

$$\{x, \alpha : V(x, t, \alpha) < 1\} \subset \Phi_{t, \alpha}, t \in [t_0, T];$$

$$\frac{\partial V(x, t, \alpha)}{\partial t} + \text{grad}_x^T V(x, t, \alpha) f(x, t, \alpha) \leq 0$$

при

$$x(t), \alpha \in \{x, \alpha : V(x, t, \alpha) \leq 1\}, t \in [t_0, T];$$

$$G_0^{x, \alpha} \subset \{x, \alpha : V(x(t_0, \alpha), t_0, \alpha) < 1\}.$$

Тоді незбурений розв'язок  $x(t, 0) = 0$  системи (1.30) –  $\{G_0^{x, \alpha}, \Phi_{t, \alpha}, t_0, T\}$  – стійкий.

**Теорема 1.9.** Якщо для системи (1.30) існує додатньо визначена за змінною  $x$  функція Ляпунова  $V(x, t, \alpha)$ , що задовольняє умови

$$\{x : V(x, t, \alpha) < 1\} \subset \Phi_t, t \geq t_0, \alpha \in G_0^\alpha; \quad (1.31)$$

похідна  $(\frac{dV(x, t, \alpha)}{dt})_{(1.30)}$  є від'ємно визначеною за змінною  $x$  на множині

$$\{x : V(x, t, \alpha) \leq 1\}, t \geq t_0, \alpha \in G_0^\alpha, \quad (1.32)$$

виконується співвідношення  $G_0^x \subset \{x : V(x(t_0, \alpha), t_0, \alpha) < 1\}$ ,  $\alpha \in G_0^\alpha$ ; функція  $V(x, t, \alpha)$  допускає нескінченно малу вищу границю за змінною  $x$  на множині (1.32), то розв'язок  $x(t, 0) \equiv 0$  системи (1.30)  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, \infty\}$  – асимптотично стійкий.

**Теорема 1.10.** Якщо для системи (1.30) існує додатно визначена функція Ляпунова  $V(x, t, \alpha)$ , яка задовольняє умови

$$\{x : V(x, t) < 1\} \subset \Phi_t, t \geq t_0;$$

$$G_0^x \subset \{x : V(x(t_0, \alpha), t_0) < 1\}, \alpha \in G_0^\alpha;$$

$$\left(\frac{dV(x, t, \alpha)}{dt}\right)_{(1.30)} - \text{від'ємно визначена на множині}$$

$\{x : V(x, t) \leq 1\}$ ,  $t \geq t_0$ ,  $\alpha \in G_0^\alpha$ ; функція  $V(x, t)$  допускає нескінченно малу вищу границю, коли  $x \in \{x : V(x, t) \leq 1\}$ ,  $t \geq t_0$ , то незбурений розв'язок  $x(0, t) \equiv 0$  системи буде (1.30) буде  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$  – асимптотично стійким.

**Твердження 1.11.** Для  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$  – стійкості системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha + f(t), t \in [t_0, T] \quad (1.33)$$

за відомих збурень необхідно й достатньо, щоб

$$\{x : W(X(t_0, t)(x - G_1(t)\alpha - a(t)) < 1\} \subset \Phi_t, t \in [t_0, T], \alpha \in G_0^\alpha$$

$$G_1(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau)G(\tau)d\tau, a(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau)F(\tau)d\tau \quad (1.34)$$

$$G_0^x = \{x : W(x) < 1\},$$

де  $X(t, \tau)$  – нормована за моментом  $\tau$  фундаментальна матриця для однорідної системи  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ .

**Твердження 1.12.** Для  $\{G_0^{x, \alpha}, \Phi_{t, \alpha}, t_0, T\}$  – стійкості системи (1.34) при відомих збуреннях  $f(t)$  необхідно й достатньо, щоб

$$\{y = \frac{t}{\alpha} : W(Y(t_0, t)(y - \int_{t_0}^t Y(t, \tau)\bar{f}(\tau)d\tau) < 1\} \subset \Phi_{t, \alpha}, t \in [t_0, T].$$

Тут  $\bar{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ \alpha \end{pmatrix}$  –  $(n+r)$ -вимірний вектор,

$$Y(t, t_0) = \begin{pmatrix} X(t, t_0) & G_1(t) \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

– квадратна матриця розмірністю  $n+r$ .

Співвідношення (1.33), (1.34) можна використовувати для отримання різних конструктивних оцінок. Наприклад, якщо

$$G_0^x = \{x : x^T B x < c^2\}, \quad G_0^\alpha = \{\alpha : \alpha^T B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\},$$

то  $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$  – стійкість будемо позначати  $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$  – стійкістю.

**Твердження 1.13.** Для  $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$  – стійкості системи (1.33) при відомих збуреннях необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{aligned} c^2 &\leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1,2,\dots,N} \min_{\alpha \in \{\alpha : \alpha^T B_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}} \frac{(1 - |l_s^T(t)(a(t) + G_1(t)\alpha)|)^2}{l_s^T(t)Q(t)l_s(t)}, \\ |l_s^T(t)(a(t) + G_1(t)\alpha)| &< 1, t \in [t_0, T], \\ s &= 1, 2, \dots, N, \alpha \in \{\alpha : \alpha^T B_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

У (1.35) матриця  $Q(t)$  задовольняє матричне диференціальне рівняння

$$\frac{dQ}{dt} = A(t)Q(t) + A^T(t)Q(t), \quad Q(t_0) = B^{-1}, \quad (1.36)$$

а множина  $\Gamma_t$  визначається так

$$\Gamma_t = \{x : |l_s^T(t)x| \leq 1, s = 1, \dots, N\}, \quad (1.37)$$

де  $l_s(t)$  – задані  $n$ -вимірні вектори з неперервними елементами.

## 1.4 Рівняння чутливості в задачах варіаційного числення

### 1.4.1 Найпростіша задача варіаційного числення

Розглянемо найпростішу задачу варіаційного числення [1, 11]. Задача полягає в тому, щоб серед кривих  $x(t)$ , які є скалярними неперервно диференційованими функціями і задовольняють умови

$$x(t_0) = a, \quad x(t_1) = b. \quad (1.38)$$

знайти ту, яка доставляє слабкий екстремум функціоналу

$$I(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (1.39)$$

Тут  $F(t, x, \dot{x})$  – скалярна функція, яка має неперервні частинні похідні за всіма аргументами до другого порядку включно.

Відомо, що розв'язки задачі мають задовольняти рівняння Ейлера

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{\dot{x}} = 0. \quad (1.40)$$

Нехай функціонал (2.18) і крайові умови (2.17), (1.40) залежать від скалярного параметра  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ :

$$I(x(t, \alpha)) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t), \alpha) dt. \quad (1.41)$$

З припущення існування розв'язку для всіх  $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$  можна вивести однопараметричну сім'ю розв'язків варіаційної задачі

$$x(t, \alpha) = x(t, a(\alpha), b(\alpha), t_0(\alpha), t_1(\alpha), \alpha). \quad (1.42)$$

Як і раніше, функцію чутливості визначаємо у вигляді

$$u(t) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}. \quad (1.43)$$

Рівняння Ейлера (1.40) запишемо таким чином:

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} + F_{x\dot{x}}\dot{x} + F_{\dot{x}t} - F_x = 0 \quad (1.44)$$

або у векторній формі

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha), \quad (1.45)$$

де

$$f(x, t, \alpha) = \frac{F_x - F_{\dot{x}t} - F_{x\dot{x}}x_2}{F_{\dot{x}\dot{x}}}, \quad x = x_1, \quad \dot{x} = x_2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Припустимо, що  $F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$  при  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $\alpha = \alpha_0$ , вектор-функція  $f(x, t, \alpha)$  – неперервно диференційована за своїми аргументами.  $t_0(\alpha)$ ,  $t_1(\alpha)$  – неперервно диференційовані функції за  $\alpha$ .

Рівняння чутливості можна отримати прямим диференціюванням рівнянь (1.40) або (1.44) за  $\alpha$ . Із (1.40) отримаємо

$$\frac{d}{dt}(F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u} + F_{x\dot{x}}u + F_{\dot{x}\alpha}) - F_{x\dot{x}}\dot{u} - F_{xx}u = F_{x\alpha}. \quad (1.47)$$

У явному вигляді (1.47) перепишемо так:

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{u} + \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}\dot{x}})\dot{u} + \left(\frac{d}{dt}F_{x\dot{x}} - F_{xx}\right)u - F_{x\alpha} + \frac{d}{dt}F_{\dot{x}\alpha} = 0. \quad (1.48)$$

За формою рівняння (1.48) збігається з неоднорідним рівнянням Якобі, і ми будемо називати його рівнянням чутливості Ейлера.

Зобразимо крайові умови (2.17) у векторній формі:

$$G(x(t_0, \alpha), x(t_1, \alpha), \alpha) = 0, \quad (1.49)$$

де  $G^T = (g_1, g_2)$ ,  $g_1 = x(t_0, \alpha) - a$ ,  $g_2 = x(t_1, \alpha) - b$ . Продиференціюємо (1.49) за  $\alpha$ :

$$\frac{\partial G}{\partial x_0} \frac{dx_0}{d\alpha} + \frac{\partial G}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0. \quad (1.50)$$

Ураховуючи

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{d\alpha} &= \frac{da}{d\alpha}, \\ \frac{dx_1}{d\alpha} &= \frac{db}{d\alpha}, \\ \frac{x(t_0)}{\partial\alpha} &= u(t_0) + \dot{x}_0 \frac{\partial t_0}{\partial\alpha}, \\ \frac{\partial x(t_1)}{\partial\alpha} &= u(t_1) + x_1 \frac{\partial t_1}{\partial\alpha}.\end{aligned}$$

Отримуємо крайові умови:

$$u(t_0) = \frac{\partial a}{\partial\alpha} - \dot{x}_0 \frac{\partial t_0}{\partial\alpha}, u(t_1) = \frac{\partial a}{\partial\alpha} - \dot{x}_1 \frac{\partial t_1}{\partial\alpha}. \quad (1.51)$$

Цей підхід можна розповсюдити на більш складні варіаційні задачі у випадку функцій багатьох змінних, коли  $F$  не залежить від похідної вищих порядків тощо.

Розглянемо декілька випадків

1) Підінтегральна функція  $F$  не залежить від  $\dot{x}$ . У цьому випадку рівняння Ейлера має такий вигляд:

$$F_x(t, x, \alpha) = 0. \quad (1.52)$$

Зрозуміло, що лише в деяких випадках крива, яка описується цим алгебраїчним рівнянням, проходить через точки  $(t_0, a)$ ,  $(t_1, b)$ . Для такого виродженого випадку рівняння чутливості має вигляд:

$$F_{xx}u + F_{x\alpha} = 0. \quad (1.53)$$

2) Функція  $F$  не залежить від  $x$ . Ураховуючи це, рівняння Ейлера має такий вигляд:

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = 0. \quad (1.54)$$

Йому відповідає рівняння чутливості

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{u} + \frac{d}{dt}F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u} - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}\alpha} = 0. \quad (1.55)$$

3) Нехай функція  $F$  залежить лише від  $x$ . Матимемо для цього випадку

рівняння Ейлера  $F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0$  та відповідне рівняння чутливості

$$F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{u} + \ddot{x}\frac{\partial}{\partial\alpha}F_{\dot{x}\dot{x}} = 0.$$

## 1.4.2 Задача варіаційного числення з рухомими кінцями

Дано точку  $(t_0, x_0)$  і криву  $x(t) = h(t)$ . Серед усіх гладких функцій, які проходять через точку  $(t_0, x_0)$  і перетинають криву  $h(t)$  під ненульовим кутом, знайти ту, яка доставляє слабкий екстремум функціоналу (2.18) [1].

Розв'язок цієї задачі задовольняє рівняння Ейлера і

$$x(t_0) = a, x(t_1) = h_{t_1}, \quad (1.56)$$

а також за умови трансверсальності

$$F + F_x(h_t - x)|_{t=t_1} = 0. \quad (1.57)$$

Функція чутливості є розв'язком рівняння (1.47) за умов

$$u(t_0) = \frac{dx_0}{d\alpha} - \dot{x}(t_0)\frac{dt_0}{d\alpha} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} (F_t + h_t F_x + F_x h_{tt})\frac{dt_1}{d\alpha} + (h_t - \dot{x})(F_{\dot{x}\dot{x}}\dot{u} + F_{xx}u + F_{\dot{x}\alpha}) + \\ + F_x u + F_{\dot{x}}h_{t\alpha} + F_{\alpha}|_{t=t_1} = 0, \end{aligned} \quad (1.59)$$

де

$$\frac{dt_1}{d\alpha} = -\frac{u(t_1) - h_{\alpha}(t_1)}{\dot{x}(t_1) - h_t(t_1)}. \quad (1.60)$$

Диференціальне рівняння чутливості отримуємо за такою ж самою схемою. Граничні умови (1.58) були виведені раніше. Для отримання (1.59), (1.60) продиференціюємо за  $\alpha$  вирази (1.56) і (1.57):

$$\begin{aligned} F_t\frac{dt_1}{d\alpha} + F_x\frac{dx_1}{d\alpha} + F_{\alpha} + (h_t - x)(F_{\dot{x}\alpha} + F_{\dot{x}\dot{x}}\frac{dx_1}{d\alpha} + F_{\dot{x}t}\frac{dt_1}{d\alpha}) + \\ + F_{\dot{x}}(h_{tt}\frac{dt_1}{d\alpha} + h_{1\alpha} - \frac{d\dot{x}_1}{d\alpha})|_{t=t_1} = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = h_t \frac{dt_1}{d\alpha} + h_\alpha|_{t=t_1}. \quad (1.62)$$

Визначимо величини  $\frac{dx_1}{d\alpha}$ ,  $\frac{dt_1}{d\alpha}$ . Для цього запишемо інтегральні рівняння

$$x(t) = \int_{t_0(\alpha)}^t \dot{x}(\tau) d\tau + x_0, \quad \dot{x}(t) = \int_{t_0(\alpha)}^t \phi(\tau) d\tau + \dot{x}_0, \quad (1.63)$$

де

$$\phi(t) = \frac{F_x - F_{tx} - F_{xx}x}{F_{\dot{x}\dot{x}}}$$

$$F_{\dot{x}\dot{x}} \neq 0$$

З (1.63) отримаємо

$$\begin{aligned} u(t) &= -\dot{x}(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} + \frac{dx_0}{d\alpha} + \int_{t_0(\alpha)}^{t_1} \frac{dx}{d\alpha} d\tau, \\ \dot{u}(t) &= -\phi(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} + \frac{d\dot{x}_0}{d\alpha} + \int_{t_0(\alpha)}^t \frac{d\phi}{d\alpha} d\tau. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Звідси при  $t = t_1$  маємо

$$\begin{aligned} u(t_1) &= -\dot{x}(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} + \frac{dx_0}{d\alpha} + \int_{t_0(\alpha)}^{t_1} \frac{dx}{d\alpha} d\tau, \\ \dot{u}(t_1) &= -\phi(t_0) \frac{dt_0}{d\alpha} + \frac{d\dot{x}_0}{d\alpha} + \int_{t_0(\alpha)}^{t_1} \frac{d\phi}{d\alpha} d\tau. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Продиференціюємо (1.63) за  $\alpha$  при  $t = t_1$ , отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= \dot{x}(t_1)\frac{dt_1}{d\alpha} - \dot{x}(t_0)\frac{dt_0}{d\alpha} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\dot{x}}{d\alpha}d\tau + \frac{dy_0}{d\alpha}, \\ \frac{d\dot{x}_1}{dt} &= \phi(t_1)\frac{dt_1}{d\alpha} - \phi(t_0)\frac{dt_0}{d\alpha} + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\phi}{d\alpha}d\tau + \frac{d\dot{y}_0}{d\alpha}.\end{aligned}\tag{1.66}$$

З (1.65) і (1.66) знаходимо

$$\frac{dx_1}{dt} = \dot{x}(t_1)\frac{dt_1}{d\alpha} + u(t_1), \quad \frac{d\dot{x}_1}{dt} = \phi(t_1)\frac{dt_1}{d\alpha} + \dot{u}(t_1).\tag{1.67}$$

Підставивши (1.67) у (1.61) і (1.62), отримаємо формули (1.59) і (1.60).

Необхідно зазначити, що (1.60) збігається з похідною від моменту перемикання за параметром у рівняннях чутливості для розвинених систем.

## Розділ 2

# Параметрична оптимізація та ідентифікація параметрів на основі методів чутливості

### 2.1 Метод параметричної оптимізації

Розглянемо задачу параметричної оптимізації [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(p) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{ \langle N(t) x(t), x(t) \rangle + \langle M(t) p, p \rangle \} dt + \\ & + \frac{1}{2} \langle P_0 x(T), x(T) \rangle \rightarrow \inf, \end{aligned} \quad (2.1)$$

за умов, що

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), p, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.2)$$

$$x(t_0) = x_0. \quad (2.3)$$

Тут  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – вектор стану,  $N(t)$ ,  $P_0$  – невід’ємновизначені симетричні матриці розмірності  $n \times n$ ,  $M(t)$  – додатновизначена симетрична матриця розмірності  $m \times m$ ,  $f(x, p, t) = (f_1(x, p, t), \dots, f_n(x, p, t))^T$  – неперервно диференційована функція за  $x$  та  $p$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  – параметр, за яким здійснюється оптимізація.

Матриця чутливості при  $p = \hat{p}$  задовольняє матричне диференціальне

рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dU(t)}{dt} &= \frac{\partial f(x(t), \hat{p}, t)}{\partial x} U(t) + \frac{\partial f(x(s), \hat{p}, t)}{\partial p}, \\ U(t_0) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Має місце

$$x(t, p) = x(t, \hat{p}) + U(t)h + v(t, h), \quad p = \hat{p} + h.$$

Тут  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(t, h)}{\|h\|} = 0$ .

Розглянемо (2.1) на розв'язках динамічної системи (2.2). Одержимо  $\mathcal{J}(p) = \mathcal{J}(\hat{p} + h)$ . Вибираємо  $h$ , що мінімізує  $\mathcal{J}(\hat{p} + h)$ .

Підставляємо  $p = \hat{p} + h$  і  $x(t, p) = x(t, \hat{p}) + U(t)h + v(t, h)$  в (2.1). Одержуємо

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\hat{p} + h) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \{ \langle N(t) (x(t, \hat{p}) + U(t)h), x(t, \hat{p}) + U(t)h \rangle + \\ &\quad + \langle M(t) (\hat{p} + h), \hat{p} + h \rangle \} dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle P_0(x(T, \hat{p}) + U(T)h), x(T, \hat{p}) + U(T)h \rangle = \\ &= \mathcal{Q}(h) + w(h). \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(h) &= \frac{1}{2} \langle Rh, h \rangle + \langle g, h \rangle + r, \\ R &= \int_{t_0}^T (U^T(t)N(t)U(t) + M(t)) dt + U^T(T)P_0U(T), \\ g &= \int_{t_0}^T (U^T(t)N(t)x(t, \hat{p}) + M(t)\hat{p}) dt + U^T(T)P_0x(T, \hat{p}), \\ r &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T (\langle N(t)x(t, \hat{p}), x(t, \hat{p}) \rangle + \langle M(t)\hat{p}, \hat{p} \rangle) dt + \frac{1}{2} \langle P_0x(T, \hat{p}), x(T, \hat{p}) \rangle, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(h)}{\|h\|} &= 0. \end{aligned}$$

Оптимальне значення  $h$  шукаємо з умови екстремуму квадратичної форми

$$\mathcal{Q}(h) = \frac{1}{2} \langle Rh, h \rangle + \langle g, h \rangle + r.$$

З умови  $\frac{d\mathcal{Q}(h)}{dh} = 0$  випливає  $Rh + g = 0$ . Якщо матриця  $R$  – невироджена, то

$$h_* = -R^{-1}g,$$

в іншому випадку

$$h_* = -R^+g,$$

де  $R^+$  – псевдообернена матриця до матриці  $R$ .

*Алгоритм 2.1.* Параметрична оптимізація.

*Крок 1.* Знаходимо роз’язок  $x(t, p^{(0)})$  системи (2.2), (2.3) і підставляємо його і  $p = p^{(0)}$  в систему (2.16). Знаходимо матрицю чутливості  $U_0(t)$ .

*Крок 2.* Обчислюємо

$$R_0 = \int_{t_0}^T (U_0^T(t)N(t)U_0(t) + M(t)) dt + U_0^T(T)P_0U_0(T),$$

$$g_0 = \int_{t_0}^T (U_0^T(t)N(t)x(t, p^{(0)}) + M(t)p^{(0)}) dt + U_0^T(T)P_0x(T, p^{(0)}).$$

Далі визначаємо  $h_0 = -R_0^+g_0$  і наступне наближення

$$p^{(1)} = p^{(0)} + h_0.$$

*Крок 3.* Нехай знайшли  $p = p^{(k)}$ . Тоді обчислюємо роз’язок  $x(t, p^{(k)})$  системи (2.2), (2.3) і підставляємо його  $x(t, p^{(k)})$ ,  $p = p^{(k)}$  в систему (2.16). Знаходимо матрицю чутливості  $U_k(t)$ .

*Крок 4.* Обчислюємо

$$R_k = \int_{t_0}^T (U_k^T(t)N(t)U_k(t) + M(t)) dt + U_k^T(T)P_0U_k(T),$$

$$g_k = \int_{t_0}^T (U_k^T(t)N(t)x(t, p^{(0)}) + M(t)p^{(k)}) dt + U_k^T(T)P_0x(T, p^{(k)}).$$

Далі визначаємо  $h_k = -R_k^+g_k$  і наступне наближення

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + h_k.$$

Крок 5. Одна з можливих умов зупинки алгоритму є така:

$$\left| \mathcal{J} \left( p^{(k+1)} \right) - \mathcal{J} \left( p^{(k)} \right) \right| < \epsilon,$$

де  $\epsilon > 0$  – наперед задане число. Опис алгоритму завершено.

## 2.2 Ідентифікація параметрів на основі матриці чутливості

Розглянемо задачу ідентифікації параметрів на основі функції чутливості [1, 2, 5].

Задача ідентифікації полягає у тому, що ми будуємо математичну модель системи за спостереженнями. Якщо математична модель задана в параметричному вигляді, то задача ідентифікації полягає у знаходженні параметрів, які б забезпечили адекватне відтворення спостережень. Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, p), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.5)$$

Тут  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  – вектор стану,  $f(x, p) = (f_1(x, p), \dots, f_n(x, p))^T$  – неперервно диференційована функція за  $x$  та  $p$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  – параметр,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Зафіксуємо вектор  $p^{(0)}$  і для вектор-функції  $x(p^{(0)} + \Delta p, t)$  побудуємо апроксимацію

$$x(p^{(0)} + \Delta p, t) = x(p_0, t) + U(t)\Delta p. \quad (2.6)$$

Тут  $U(t)$  – матриця чутливості розмірністю  $n \times m$ , яка є розв'язком матричної задачі Коші

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\partial f(x(p^{(0)}, t), p^{(0)})}{\partial x} U(t) + \frac{\partial f(x(p^{(0)}, t), p^{(0)})}{\partial p}, \quad U(t_0) = 0. \quad (2.7)$$

Нехай  $y(t)$  – відома неперервна  $n$ -вимірна функція спостережень,  $t \in [t_0, T]$ . Ідентифікацію параметрів будемо здійснювати як розв'язок задачі мі-

мінімізації критерія якості

$$\int_{t_0}^T \|y(t) - x(t)\|^2 dt \rightarrow \min_p.$$

Підставляючи (2.6) у функціонал і мінімізуючи його за  $\Delta p$ , отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C \Delta p = P, \quad (2.8)$$

де

$$C = \int_{t_0}^T U^T(t) \Delta x(t, p^{(0)}) dt, \quad \Delta x(t) = y(t) - x(t, p^{(0)}).$$

Якщо  $C$  – неособлива матриця, то

$$\Delta p^{(0)} = C^{-1} P.$$

Умова

$$\det C \neq 0 \quad (2.9)$$

називається умовою ідентифіковності. Якщо умова ідентифіковності порушується, то

$$\Delta p^{(0)} = C^+ P,$$

де  $C^+$  – псевдообернена матриця до матриці  $C$ .

Оцінку параметра  $p$  знаходимо за  $N$  кроків

$$p^{(k+1)} = p^{(k)} + \Delta p^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$p = p^{(0)} + \sum_{k=1}^N \Delta p^{(k)}.$$

Значення  $N$  вибираємо з умови

$$\|p^{(N)} - p^{(N-1)}\| < \varepsilon,$$

де  $\varepsilon > 0$  – значення, яке визначає точність ідентифікації.

Якщо  $y(t)$  розглядається як розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.10)$$

де  $\alpha$  –  $m$ -вимірний вектор параметрів моделі, то процедура ідентифікації завершена і

$$\alpha = p^{(N)}.$$

Розглянемо випадок ідентифікації параметрів математичної моделі у випадку, якщо спостереження описуються так

$$y(t) = H(t)x(t). \quad (2.11)$$

де  $H(t)$  – матриця розмірністю  $m \times n$  з неперервними елементами. У цьому випадку задача ідентифікації

$$\int_{t_0}^{\tau} \|y(t) - H(t)x(t)\|^2 dt \rightarrow \min_p. \quad (2.12)$$

Підставляємо (2.6) у (2.12) і розв'язуємо задачу мінімізації за  $t$  і запишемо умови мінімуму за  $\Delta p$ . Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C\Delta p = P. \quad (2.13)$$

Тут

$$C = \int_{t_0}^T C^T(t)C(t)dt, \quad C(t) = H(t)U(t),$$

$$P = \int_{t_0}^T C^T(t)\Delta x(t)dt, \quad \Delta x(t) = H(t)x(t, p^{(0)}) - x(t, p^{(0)}).$$

При цьому умови ідентифіковності виражаються так

$$\det C = \det \int_{t_0}^T U^T(t)H^T(t)H(t)U(t)dt \neq 0. \quad (2.14)$$

Для виконання умови (2.14) треба, щоб стовпці або рядки матриці  $C(t) = H(t)U(t)$  були лінійно незалежними.

Відомо, що система буде повністю спостережувана, якщо матриця спостережуваності першого роду

$$M(T) = \int_{t_0}^T \Phi^T(t) H^T(t) H(t) \Phi(t) dt \quad (2.15)$$

буде неособливою. Тут  $\Phi(t)$  – фундаментальна матриця рівняння спостереження (2.7). Структура матриці  $M(T)$  ідентична структурі матриці  $C$  у (2.13).

## 2.3 Алгоритм параметричної оптимізації з використанням функцій чутливості

Розглянемо частковий випадок задачі параметричної оптимізації [1, 2, 5]. Нехай  $\bar{y}(t)$  – відома неперервна  $n$ -вимірна функція,  $t \in [t_0, T]$ . Критерій якості має вигляд

$$I(p) = \int_{t_0}^T \|x(t, p) - \bar{y}(t)\|^2 dt \rightarrow \min_p.$$

Матриця чутливості задовольняє матричне диференціальне рівняння (рівняння чутливості)

$$\begin{aligned} \frac{dU(t, p)}{dt} &= \frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial x} U(t, p) + \frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial p}, \\ U(t_0, p) &= 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

де  $x(t, p)$  – розв'язок задачі Коші (2.2), (2.3). Числовий метод має вигляд

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Початкове наближення  $p_0$  задається,

$$\Delta p_k = \left( \int_{t_0}^T U^T(t, p_k) U(t, p_k) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^T U^T(t, p_k) (\bar{y}(t) - x(t, p_k)) dt.$$

Матриці чутливості  $U(t, p)$  визначається з матричного диференціального рів-

няння (2.16).

Алгоритм 2.2. Параметрична оптимізація.

### Ітерація 1.

Задаємо параметр точності  $\varepsilon > 0$ , початкове наближення  $p_0$ .

Крок 1. Розв'язуємо задачу Коші (2.2), (2.3) при  $p = p_0$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Знаходимо  $x(t, p_0)$ .

Крок 2. Підставляємо  $x(t, p_0)$  в рівняння чутливості. Розв'язуємо це рівняння одним з числових методів і знаходимо його розв'язок  $U(t, p_0)$ .

Крок 3. Знаходимо

$$\Delta p_0 = \left( \int_{t_0}^T U^T(t, p_0) U(t, p_0) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^T U^T(t, p_0) (\bar{y}(t) - x(t, p_0)) dt.$$

Крок 4. Обчислюємо

$$p_1 = p_0 + \Delta p_0.$$

### Ітерація $k - 1$ .

На початку цієї ітерації ми знаємо  $p_k$ .

Крок 1. Розв'язуємо систему одним з числових методів при  $p = p_k$ ,  $x(t_0) = x_0$ . Знаходимо  $x(t, p_k)$ .

Крок 2. Підставляємо  $x(t, p_k)$  в рівняння чутливості. Розв'язуємо це рівняння одним з числових методів і знаходимо його розв'язок  $U(t, p_k)$ .

Крок 3. Знаходимо

$$\Delta p_k = \left( \int_{t_0}^T U^T(t, p_k) U(t, p_k) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^T U^T(t, p_k) (\bar{y}(t) - x(t, p_k)) dt.$$

Крок 4. Обчислюємо

$$p_{k+1} = p_k + \Delta p_k.$$

Знаходимо  $I(p_{k+1})$ .

Крок 5. В кінці ітерації перевіряємо умову зупинки алгоритму:

$$\|\Delta p_{k+1}\| < \varepsilon.$$

Якщо умова зупинки виконується, то алгоритм зупиняється і  $p = p_{k+1}$  є наближеним розв'язком задачі. Якщо умова зупинки не виконується, то

переходимо на наступну ітерацію. Кінець опису алгоритму.

## 2.4 Обчислювальний експеримент

### 2.4.1 Математична модель динаміки бою

Нехай буде битва між двома фракціями. Табір А має у своєму складі  $N_1$  бойових частин та  $N_2$  бойових частин, які відрізняються від  $N_1$  частин. У таборі Б  $N_3$  бойових одиниць. Ми будемо дотримуватись форми організації бою, яка відповідає моделі «високоорганізованого бою». Відповідно до цієї моделі битва відбувається за таких умов:

1. У битві беруть участь дві фракції: табір А і табір В. Табір 1 складається з  $N_1$  однорідних бойових одиниць (наприклад, танки, кораблі, літаки, ракетні установки). У складі табору Б -  $N_2$  однорідні бойові частини, не обов'язково однорідні з бойовими частинами табору 2.;

2. Кожна бойова одиниця сторін веде довільний потік вогню по цілі із середньою скорострільністю (для сторони А -  $\lambda_1$ , для сторони Б -  $\lambda_2$ ), потік вогню має пуасонівський розподіл (Середньою скорострільністю бойової одиниці називають середнє число пострілів за одиницю часу);

3. Імовірність попадання при кожному ударі дорівнює  $p_1$  для сторони А,  $p_2$  для сторони Б;

4. Один постріл не може нейтралізувати більше однієї бойової одиниці;

5. У разі нейтралізації бойового підрозділу вогонь негайно переводиться на іншу, а сам уражений підрозділ у подальших бойових діях не бере участі;

6. У будь-який час загальна кількість бойових одиниць у кожній групі пропорційна не самій випадковій кількості бойових одиниць, що залишилися неушкодженими, а її середньому значенню (це припущення особливо природно для великих груп).

Тоді середні значення  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  для груп на стороні А і  $y_3(t)$  на стороні Б описуються системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_3\gamma_1 y_3, \\ y_2' = -\alpha_4\gamma_2 y_3, \\ y_3' = -\alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \end{cases} \quad (2.17)$$

$\alpha_1, \alpha_2$  – середні ефективні скорострільності сторони А,  
 $\alpha_3, \alpha_4$  – середні ефективні скорострільності сторони Б,  
 $\gamma_1, \gamma_2$  – коефіцієнти цілерозподілу (частка бойових одиниць сторони Б, які виділяються для ураження цілей із складу  $N_1$  і  $N_2$  сторони А з урахуванням їх важливості на момент часу  $t$ ).

Також функції  $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$  задовольняють такі початкові умови:

$$y_1(0) = N_1, y_2(0) = N_2, y_3(0) = N_3. \quad (2.18)$$

## 2.4.2 Алгоритм параметричної оптимізації

В Прикладі параметр  $p = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)^T$ , а функція  $\bar{y}$  буде нормованим нулем.

Нехай початкове наближення  $p_0 = (0.7, 0.6, 0.5, 0.4)$ . Коефіцієнти цілерозподілу  $\gamma_1 = 0.3, \gamma_2 = 0.7$ . Початкові умови  $N_1 = N_2 = N_3 = 1$ . Задаємо значення  $\epsilon = 0.1$  і розглядаємо проміжок  $T \in [0; 1]$

**Розв’язок** Маємо таку систему Коші:

$$\begin{cases} y_1' = -\alpha_3\gamma_1y_3, \\ y_2' = -\alpha_4\gamma_2y_3, \\ y_3' = -\alpha_1y_1 - \alpha_2y_2, \\ y_1(0) = N_1, y_2(0) = N_2, y_3(0) = N_3. \end{cases} \quad (2.19)$$

Підставляємо значення в рівняння чутливості, де

$$f(x(t, p), t, p) = \begin{pmatrix} -\alpha_3\gamma_1y_3 \\ -\alpha_4\gamma_2y_3 \\ -\alpha_1y_1 - \alpha_2y_2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

отримаємо такі значення:

$$\frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3\gamma_1 \\ 0 & 0 & -\alpha_4\gamma_2 \\ -\alpha_1 & -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$U(t, p) = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & U_{1,3} & U_{1,4} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & U_{2,3} & U_{2,4} \\ U_{3,1} & U_{3,2} & U_{3,3} & U_{3,4} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial f(x(t, p), p, t)}{\partial p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma_1 y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_2 y_3 \\ -y_1 & -y_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Отримуємо рівняння для кожного елементу  $\frac{dU(t, p)}{dt}$ :

$$\begin{cases} U'_{1,1} = -\alpha_3 \gamma_1 U_{3,1}, \\ U'_{2,1} = -\alpha_4 \gamma_2 U_{3,1}, \\ U'_{3,1} = -\alpha_1 U_{1,1} - \alpha_2 U_{2,1} - y_1, \\ U'_{1,2} = -\alpha_3 \gamma_1 U_{3,2}, \\ U'_{2,2} = -\alpha_4 \gamma_2 U_{3,2}, \\ U'_{3,2} = -\alpha_1 U_{1,2} - \alpha_2 U_{2,2} - y_2, \\ U'_{1,3} = -\alpha_3 \gamma_1 U_{3,1} - \gamma_1 y_3, \\ U'_{2,3} = -\alpha_4 \gamma_2 U_{3,1}, \\ U'_{3,3} = -\alpha_1 U_{1,3} - \alpha_2 U_{2,3}, \\ U'_{1,4} = -\alpha_3 \gamma_1 U_{3,1}, \\ U'_{2,4} = -\alpha_4 \gamma_2 U_{3,1} - \gamma_2 y_3, \\ U'_{3,4} = -\alpha_1 U_{1,3} - \alpha_2 U_{2,3}, \end{cases} \quad (2.24)$$

Розв'язавши ці рівняння, отримуємо матрицю чутливості. Після цього транспонуємо її і перемножуємо їх. Отримуємо такі рівняння:

$$\begin{cases}
U_{1,1,1}^* = U_{1,1}U_{1,1} + U_{2,1}U_{2,1} + U_{3,1}U_{3,1}, \\
U_{1,2,1}^* = U_{1,1}U_{1,2} + U_{2,1}U_{2,2} + U_{3,1}U_{3,2}, \\
U_{1,3,1}^* = U_{1,1}U_{1,3} + U_{2,1}U_{2,3} + U_{3,1}U_{3,3}, \\
U_{1,4,1}^* = U_{1,1}U_{1,4} + U_{2,1}U_{2,4} + U_{3,1}U_{3,4}, \\
U_{2,1,1}^* = U_{1,2}U_{1,1} + U_{2,2}U_{2,1} + U_{3,2}U_{3,1}, \\
U_{2,2,1}^* = U_{1,2}U_{1,2} + U_{2,2}U_{2,2} + U_{3,2}U_{3,2}, \\
U_{2,3,1}^* = U_{1,2}U_{1,3} + U_{2,2}U_{2,3} + U_{3,2}U_{3,3}, \\
U_{2,4,1}^* = U_{1,2}U_{1,4} + U_{2,2}U_{2,4} + U_{3,2}U_{3,4}, \\
U_{3,1,1}^* = U_{1,3}U_{1,1} + U_{2,3}U_{2,1} + U_{3,3}U_{3,1}, \\
U_{3,2,1}^* = U_{1,3}U_{1,2} + U_{2,3}U_{2,2} + U_{3,3}U_{3,2}, \\
U_{3,3,1}^* = U_{1,3}U_{1,3} + U_{2,3}U_{2,3} + U_{3,3}U_{3,3}, \\
U_{3,4,1}^* = U_{1,3}U_{1,4} + U_{2,3}U_{2,4} + U_{3,3}U_{3,4}, \\
U_{4,1,1}^* = U_{1,4}U_{1,1} + U_{2,4}U_{2,1} + U_{3,4}U_{3,1}, \\
U_{4,2,1}^* = U_{1,4}U_{1,2} + U_{2,4}U_{2,2} + U_{3,4}U_{3,2}, \\
U_{4,3,1}^* = U_{1,4}U_{1,3} + U_{2,4}U_{2,3} + U_{3,4}U_{3,3}, \\
U_{4,4,1}^* = U_{1,4}U_{1,4} + U_{2,4}U_{2,4} + U_{3,4}U_{3,4}.
\end{cases} \tag{2.25}$$

Сама ж перша частина для рівняння  $\Delta p_k$  має такий вигляд:

$$U_1^* = \begin{pmatrix} U_{1,1,1}^* & U_{1,2,1}^* & U_{1,3,1}^* & U_{1,4,1}^* \\ U_{2,1,1}^* & U_{2,2,1}^* & U_{2,3,1}^* & U_{2,4,1}^* \\ U_{3,1,1}^* & U_{3,2,1}^* & U_{3,3,1}^* & U_{3,4,1}^* \\ U_{4,1,1}^* & U_{4,2,1}^* & U_{4,3,1}^* & U_{4,4,1}^* \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

Шукаємо інтеграл від цих функцій і шукаємо обернену до результату. Оскільки  $\bar{y}$  визначений як нормований нуль, то отримуємо такі рівняння для другої

частини рівняння:

$$\begin{cases} U_{1,1,2}^* = -U_{1,1}U_{1,1} - U_{2,1}U_{2,1} - U_{3,1}U_{3,1}, \\ U_{2,1,2}^* = -U_{1,2}U_{1,1} - U_{2,2}U_{2,1} - U_{3,2}U_{3,1}, \\ U_{3,1,2}^* = -U_{1,3}U_{1,1} - U_{2,3}U_{2,1} - U_{3,3}U_{3,1}, \\ U_{4,1,2}^* = -U_{1,4}U_{1,1} - U_{2,4}U_{2,1} - U_{3,4}U_{3,1}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Перемножуємо обидва результати отримуємо:

$$\begin{cases} \Delta p_{k,1} = U_{1,1,1}^*U_{1,1,2}^* + U_{1,2,1}^*U_{2,1,2}^* + U_{1,3,1}^*U_{3,1,2}^* + U_{1,4,1}^*U_{4,1,2}^*, \\ \Delta p_{k,2} = U_{2,1,1}^*U_{1,1,2}^* + U_{2,2,1}^*U_{2,1,2}^* + U_{2,3,1}^*U_{3,1,2}^* + U_{2,4,1}^*U_{4,1,2}^*, \\ \Delta p_{k,3} = U_{3,1,1}^*U_{1,1,2}^* + U_{3,2,1}^*U_{2,1,2}^* + U_{3,3,1}^*U_{3,1,2}^* + U_{3,4,1}^*U_{4,1,2}^*, \\ \Delta p_{k,4} = U_{4,1,1}^*U_{1,1,2}^* + U_{4,2,1}^*U_{2,1,2}^* + U_{4,3,1}^*U_{3,1,2}^* + U_{4,4,1}^*U_{4,1,2}^*. \end{cases} \quad (2.28)$$

Після чого додаємо ці значення до попереднього наближення:

$$\begin{cases} \alpha_1^k = \alpha_1^{k-1} + \Delta p_{k,1}, \\ \alpha_2^k = \alpha_2^{k-1} + \Delta p_{k,2}, \\ \alpha_3^k = \alpha_3^{k-1} + \Delta p_{k,3}, \\ \alpha_4^k = \alpha_4^{k-1} + \Delta p_{k,4}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Вираховуємо норму дельта для нових значень параметрів:

$$\|\Delta p_{k+1}\| = \sqrt{(\Delta p_{k+1,1})^2 + (\Delta p_{k+1,2})^2 + (\Delta p_{k+1,3})^2 + (\Delta p_{k+1,4})^2} \quad (2.30)$$

Перевіряємо на умову для зупинки алгоритму. Якщо не виконується, то переходимо на наступну ітерацію. Інакше зупиняємо алгоритм і отримуємо оптимальні значення параметрів.

### 2.4.3 Результати обчислювального експерименту

Для написання алгоритму використовувалась мова програмування Python.

Для знаходження функцій  $y_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  використовуємо бібліотеку `sympy` і функцію з цієї бібліотеки `dsolve()`. Після розв'язання отримуємо таку

систему:

$$\begin{cases} y_1(t) = C_{1,1,1}e^{t\sqrt{\alpha_1\alpha_3\gamma_1+\alpha_2\alpha_4\gamma_2}} + C_{2,1,1}e^{-t\sqrt{\alpha_1\alpha_3\gamma_1+\alpha_2\alpha_4\gamma_2}} + C_{3,1,1}, \\ y_2(t) = C_{1,2,1}e^{t\sqrt{\alpha_1\alpha_3\gamma_1+\alpha_2\alpha_4\gamma_2}} + C_{2,2,1}e^{-t\sqrt{\alpha_1\alpha_3\gamma_1+\alpha_2\alpha_4\gamma_2}} + C_{3,2,1}, \\ y_3(t) = C_{1,3,1}e^{t\sqrt{\alpha_1\alpha_3\gamma_1+\alpha_2\alpha_4\gamma_2}} + C_{2,3,1}e^{-t\sqrt{\alpha_1\alpha_3\gamma_1+\alpha_2\alpha_4\gamma_2}} + C_{3,3,1}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Параметри  $C_{i,j,1}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  визначаємо з рівностей  $y_1(0) = N_1$ ,  $y_2(0) = N_2$ ,  $y_3(0) = N_3$ . Для знаходження цих значень використовуємо функцію `solve` з бібліотеки `sympy` і після цього підставляємо їх в функції  $y_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Виводимо функції на графіки на досліджуваній відрізок, використовуючи бібліотеку `matplotlib.pyplot` і функцію з цієї бібліотеки `plot`.

Після визначення значення матриць чутливості з систем (2.24). Для розв'язання цих систем знову використовуємо `sympy.dsolve`.

Після визначення матриці чутливості знаходимо транспоновану, домножуємо на початкову. Знаходимо інтеграл чисельним методом Сімпсона

$$\int_{t_0}^T f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{T-t_0}{6} (f(x_i) + 4f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}) + f(x_{i+1})), \quad (2.32)$$

де  $x_i = t_0 + i\frac{T-t_0}{n}$  і отримуємо першу частину для значення  $\Delta p_k$ . Для другої частини  $\Delta p_k$  перемножуємо транспоновану матрицю на вектор-стовпчик і так само інтегруємо формулою Сімпсона. Результати перемножуємо і отримуємо вектор-стовпчик  $\Delta p_k$ . Додаємо до вектор-стовпчика параметрів цієї ітерації і від нових значень рахуємо  $\Delta p_{k+1}$ . Після цього перевіряємо на зупинку алгоритму. І повторюємо ці процедури, доки алгоритм не зупиниться.

### Приклад

При заданих параметрах  $\alpha_1 = 0.7$ ,  $\alpha_2 = 0.6$ ,  $\alpha_3 = 0.5$ ,  $\alpha_4 = 0.4$ ,  $\gamma_1 = 0.3$ ,  $\gamma_2 = 0.7$ ,  $N_1 = N_2 = N_3 = 1$  і заданій точності  $\epsilon = 0.1$  знайти оптимальні значення параметрів на досліджуваному числовому відрізку  $T \in [0, 1]$ .

Чисельним експериментом при заданих параметрах досліджено оптимальне рішення для задачі на основі матриці чутливості. Це зайняло 7 ітерацій при даних параметрах. Графіки функцій  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  зображені на кожній ітерації і визначені своїм кольором:  $y_1(t)$  – червоним,  $y_2(t)$  – зеленим,  $y_3(t)$  – синім.

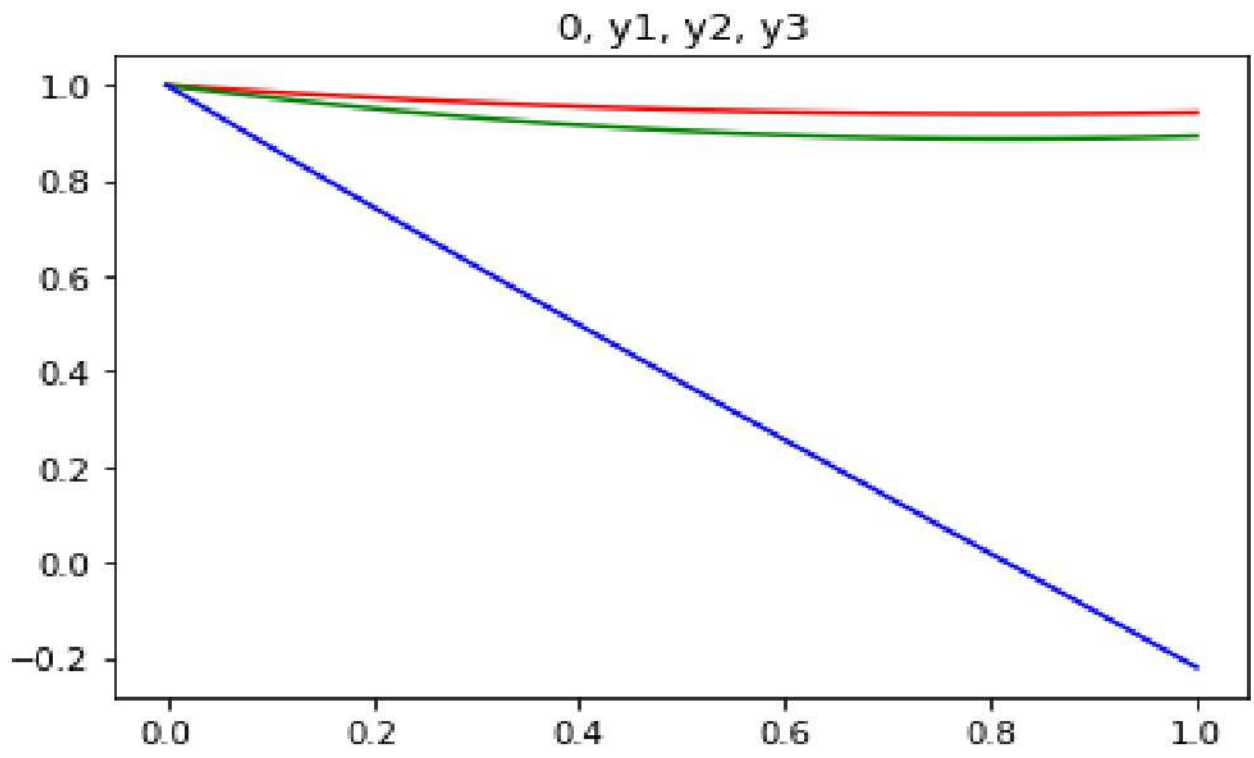


Рис. 2.1. Перша ітерація для заданих умов

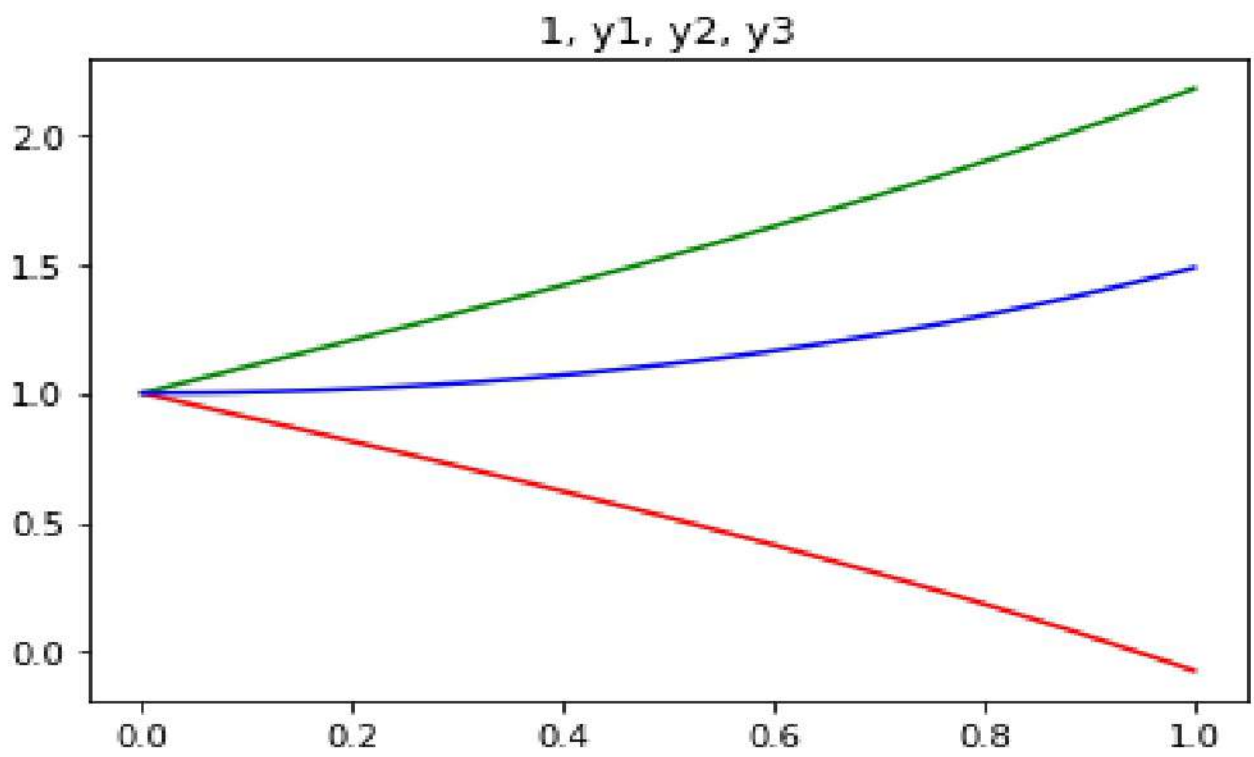


Рис. 2.2. Друга ітерація для заданих умов

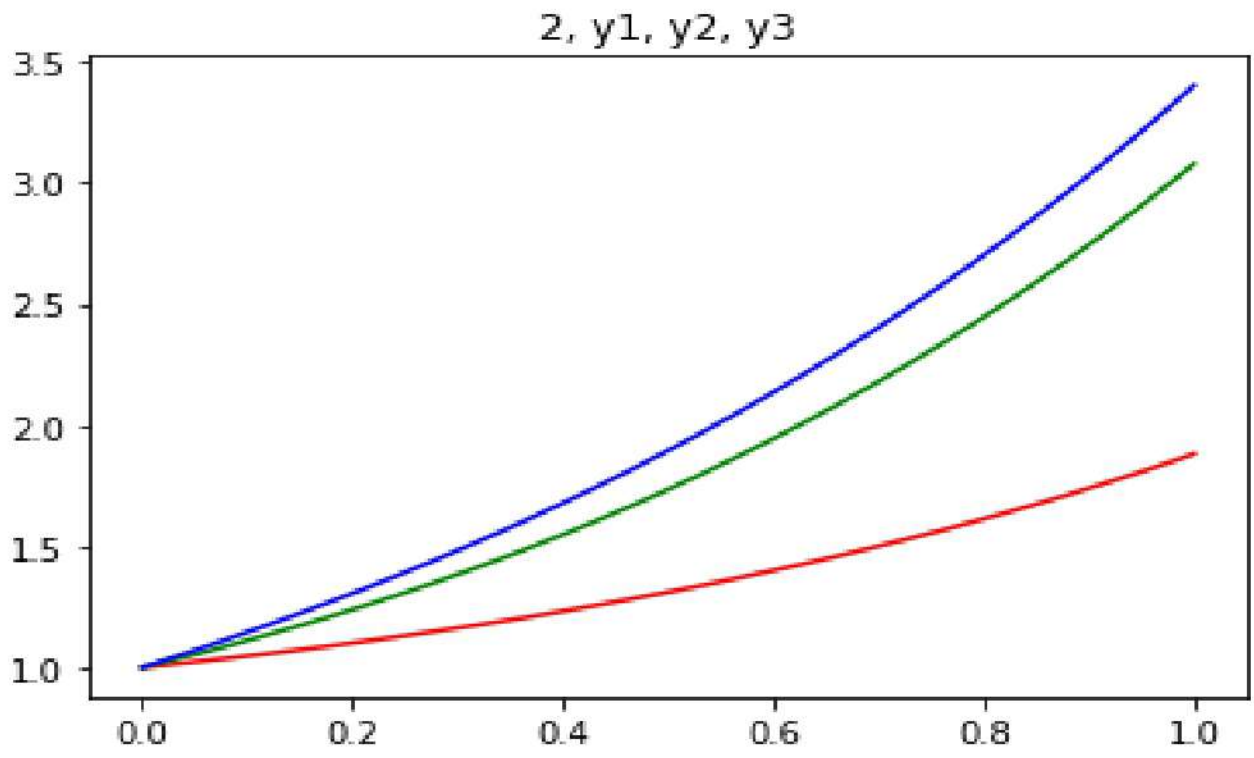


Рис. 2.3. Третя ітерація для заданих умов

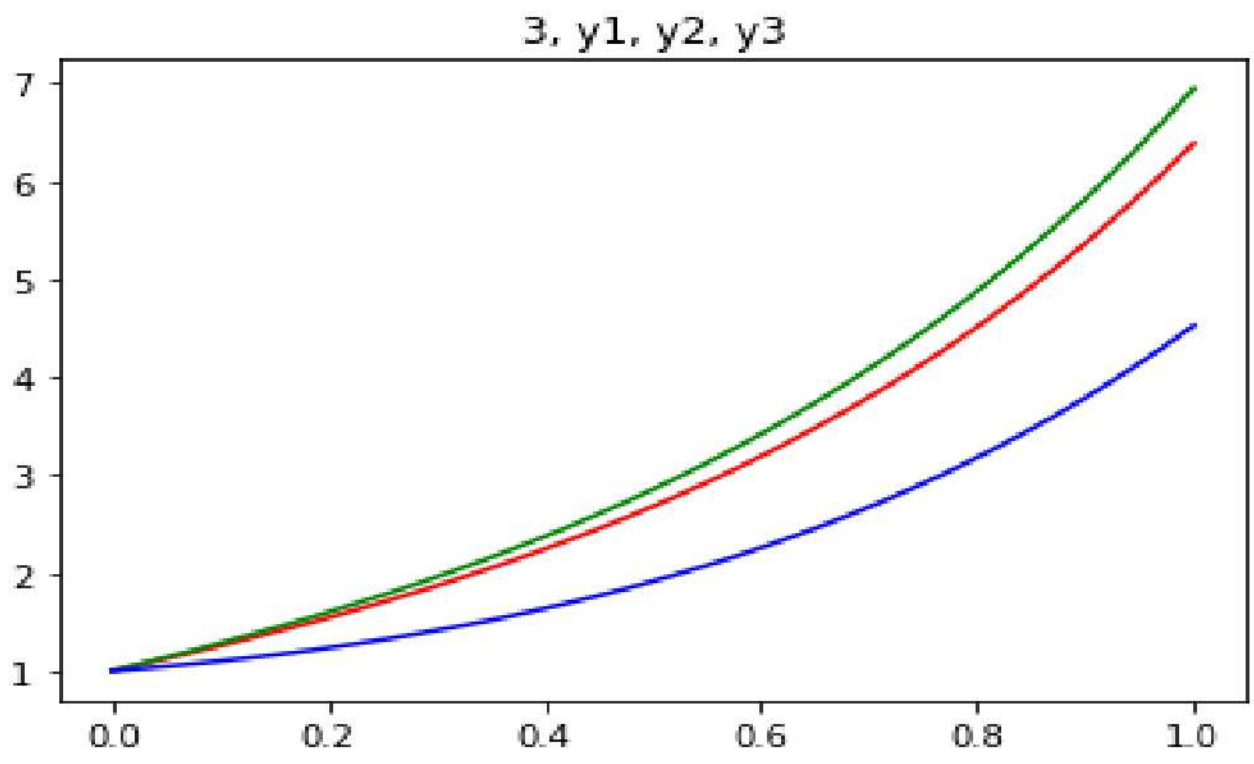


Рис. 2.4. Четверта ітерація для заданих умов

4,  $y_1, y_2, y_3$

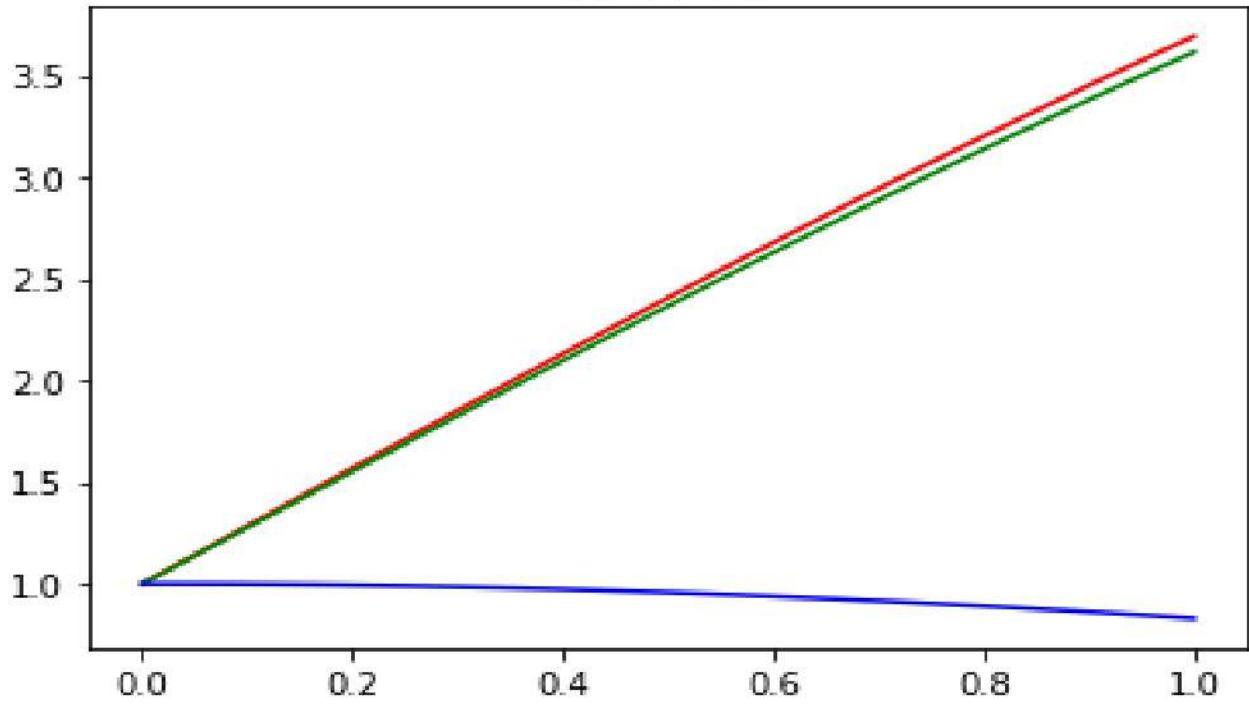


Рис. 2.5. П'ята ітерація для заданих умов

5,  $y_1, y_2, y_3$

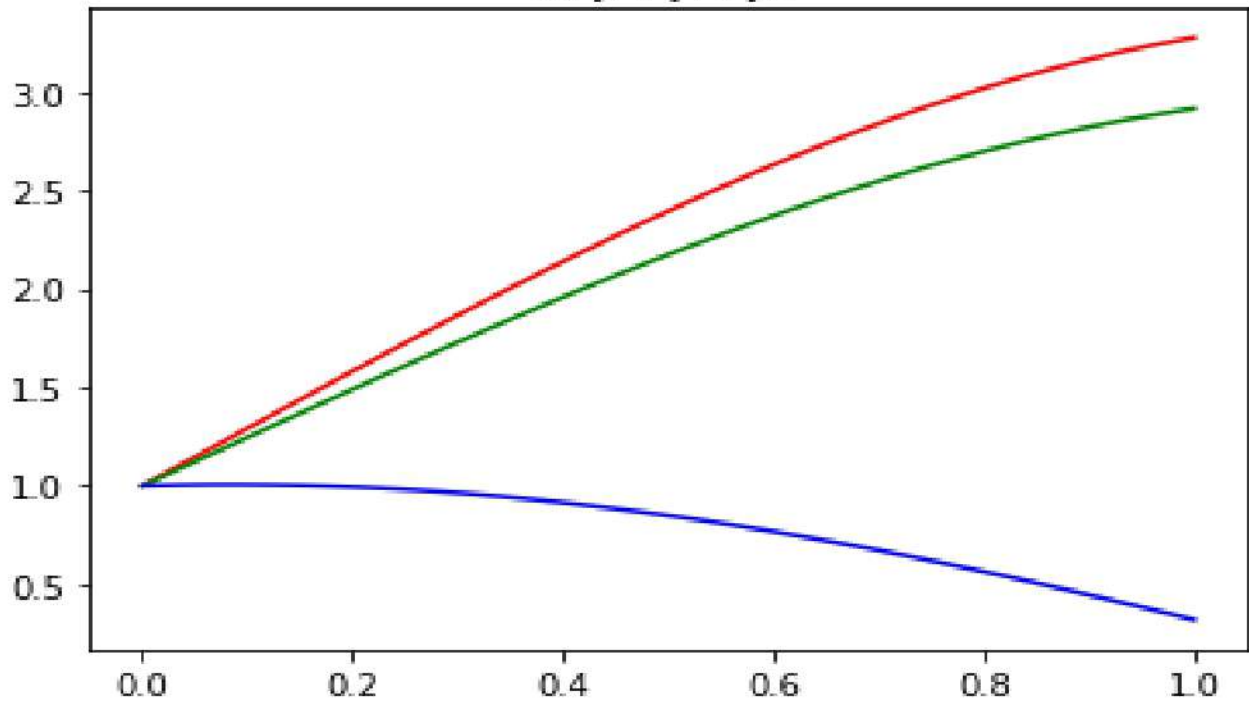


Рис. 2.6. Шоста ітерація для заданих умов

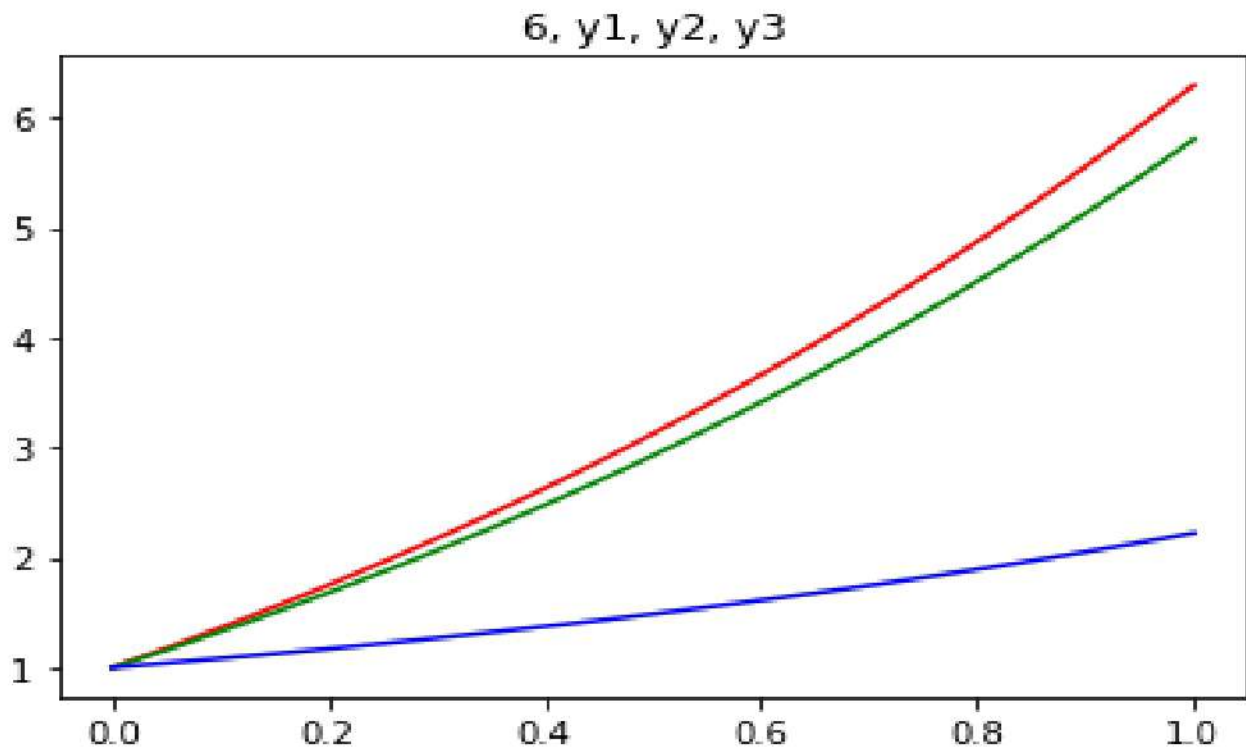


Рис. 2.7. Сьома ітерація для заданих умов

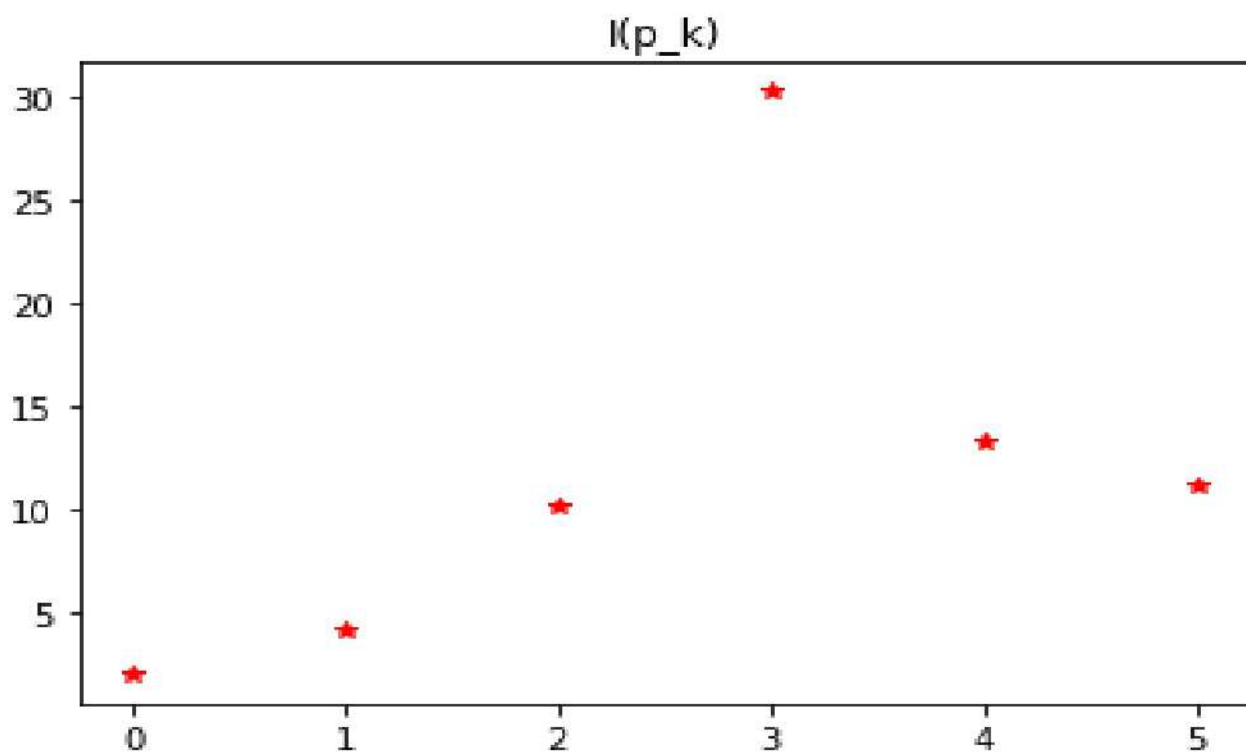


Рис. 2.8. Відображення значень функціоналів відносно ітерацій

# Висновки

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня бакалавра висвітлює аналіз чутливості в параметричних задачах варіаційного числення, стійкості, параметричної оптимізації та ідентифікації систем. У роботі пропонуються такі результати:

1. Описано методику аналізу стійкості і практичної стійкості параметричних систем.
2. Наведено побудову функції чутливості в задачах варіаційного числення.
3. Розглянуто метод параметричної стійкості нелінійних систем з використанням матриці чутливості. Наведено відповідний алгоритм.
4. Розглянуто метод ідентифікації параметрів за спостереженнями на основі матриці чутливості.
5. Для задачі параметричної оптимізації системи, що описує динаміку бою проведено обчислювальний експеримент.

# Список використаних джерел

- [1] Гаращенко Ф. Г., Швець О. Ф. Вступ до аналізу чутливості параметричних систем : Навчальний посібник – К.: Видавничо-поліграфічний центр „Київський університет”, 2006. – 115 с.
- [2] Garashchenko, F. G., Pantalienko L. A. Analysis and estimation of parametric systems on the basis of practical stability methods. Journal of Automation and Information Sciences 1998, 30 (1), p. 1-17
- [3] Garashchenko, F. G., Pantalienko L. A. Practical Stability of Dynamical Systems Dependent on a Parameter. Journal of Soviet Mathematics, 1992, 58 (1), p. 95-99.
- [4] Гаращенко Ф.Г., Панталієнко Л.А. Аналіз та оцінка параметричних систем.- К.: МСДО України, 1995. - 140 с.
- [5] Матвієнко В.Т., Пічкур В.В., Черній Д.І. Методи оптимізації параметричних систем// Журнал обчислювальної та прикладної математики. -2021. -№1 (135). -С.151-157.
- [6] Гаращенко Ф.Г., Пічкур В.В. Прикладні задачі теорії стійкості. – К.: Київський університет, 2014. — 125 с.
- [7] Пічкур В. В., Капустян О. В., Собчук В. В. Теорія динамічних систем. – Луцьк : Вежа-Друк, 2020. – 348 с.
- [8] Пічкур В. В., Роговченко Т. М. Про метод адаптивного налаштування параметрів регулятора в дискретні моменти часу // Дослідження в математиці і механіці. – 2017. – Т. 22, вип. 2(30). – С. 45–54

- [9] Башняков О.М., Пічкур В.В., Поліщук О.А. Метод адаптивної корекції кутових швидкостей твердого тіла за дискретними вимірами орієнтації // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки. -2016. – Вип. 3. – С. 61 - 64.
- [10] Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. — К.: Либідь, 2003. — 600 с.
- [11] Моклярчук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник. — Київ, 2004, 384с.
- [12] Фурсенко О.К., Черновол Н.М. Ланчестеровські моделі бойових дій // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2020. – 4(66). – С. 88–89