Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

УЗАГАЛЬНЕНА ПРОЦЕДУРА ВИБОРУ ЛІДЕРА ТА ВИПАДКОВІ ПРОСІЮВАННЯ

Виконала студентка 4-го курсу
Проскуріна Анна Данилівна

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Маринич Олександр Віталійович

Засвідчую, що у цій роботі немає запозичень
з праць інших авторів без відповідних посилань
Проскуріна А. Д.

Роботу заслухано й допущено до захисту на
засіданні кафедри дослідженная операцій
« » травня 2021р., протокол №
завідувач кафедри Іксанов О. М.

Київ - 2021

Реферат

Обсяг роботи 40 сторінок, 3 ілюстрації, 14 джерел посилань.

ВИПАДКОВЕ ПРОСІЮВАННЯ, ПРОЦЕДУРА ВИБОРУ ЛІДЕРА, ПРОЦЕС ГАЛЬТОНА-ВАТСОНА, УЗАГАЛЬНЕНА ПРОЦЕДУРА ВИБОРУ ЛІДЕРА, СТОХАСТИЧНЕ РІВНЯННЯ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ, ТВІРНА ФУНКЦІЯ.

Об'єктом роботи є класична та узагальнена процедури вибору лідера. Предметом роботи є аналіз граничної поведінки величин, пов'язаних з процесом вибору лідера.

Мета роботи - дослідити процедуру вибору лідера та граничні теореми для процесу Гальтона-Ватсона та отримати теореми, що описують граничну поведінку деяких характеристик (наприклад, число раундів, необхідне для вибуття перших M гравців) процедури вибору лідера в частковому випадку $E\xi \log \xi = \infty$, де ξ - випадкова змінна, що характеризує число нащадків процесу Гальтона-Ватсона.

В роботі було використано низку відомостей про процеси Гальтона-Ватсона.

Були отримані такі результати: описано алгоритм методу твірних функцій для аналізу складних комбінаторних об'єктів та його застосування до класичної процедури вибору лідера, реферативно наведено граничні теореми для характеристик узагальненого процесу вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi < \infty$ та отримано аналоги цих тверджень при $E\xi \log \xi = \infty$.

Зміст

Вступ

Задачі аналізу асимтотичної поведінки випадкових процесів та їх характеристик часто постають як в теоретичних дослідженнях, так і в задачах практичного застосування, наприклад, для аналізу швидкодії деяких алгоритмів. Тому апарат твірних функцій та стохастичного аналізу випадкових процесів є надзвичайно актуальним. У даній роботі розглядається застосування методів стохастичного аналізу та уже відомих даних про процеси Гальтона-Ватсона до процесів вибору лідера.

У класичній процедурі вибору лідера гравці незалежно один від одного підкидають монетку та вибувають ті, у кого випадає 0. Гра продовжується до того моменту, поки не залишиться один гравець. Класична процедура вибору лідера була досліджена у багатьох роботах, зокрема в [12], а також у роботах [11], [4] та [9].

В узагальненому випадку процесу номери гравців, що залишаються у грі, визначаються цілочисельним випадковим просіюванням. Зв'язок узагальненої процедури вибору лідера з процесами Гальтона-Ватсона, а також асимптотична поведінка важливих кількісних характеристик такої моделі у випадку $E\xi \log \xi < \infty$, де ξ - випадкова змінна, що характеризує число нащадків процесу Гальтона-Ватсона, були розглянуті в [1].

Мета та завдання роботи. Мета роботи - отримати теореми, що описують граничну поведінку деяких характеристик (наприклад, число раундів, необхідне для вибуття перших M гравців) процедури вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi = \infty$, де ξ - випадкова змінна, що характеризує число нащадків процесу Гальтона-Ватсона.

Для досягнення мети дослідження були поставлені такі задачі:

- дослідити класичну процедуру вибору лідера;
- дослідити метод твірних функцій для аналізу комбінаторних об'єктів;
- навести алгоритм методу для оцінки середнього числа раундів у класичній процедурі вибору лідера для n учасників;
- дослідити процедуру вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi < \infty$ та ознайомитися з результатами попередніх досліджень цього об'єкту;
- дослідити процеси Гальтона-Ватсона та їх граничну поведінку;

- сформулювати твердження про граничну поведінку числа гравців серед перших M, що вижили в n раундах, початкових номерів гравців, що вижили серед перших n раундів та числа раундів, необхідних для того, щоб всі гравці серед перших M вибули для процедури вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi = \infty$.

Об'єкт та методи дослідження. Об'єктом роботи є процедура вибору лідера та їх зв'язок з випадковими процесами Гальтона-Ватсона. ППредметом роботи є доведення тверджень, які надають інформацію про граничну поведінку деяких величин, пов'язаних з процесом вибору лідера.

Отриманню основних результатів роботи передували опис алгоритму твірних функцій для аналізу складних комбінаторних об'єктів та його застосування до класичної процедури вибору лідера, а також було наведено граничні теореми для характеристик узагальненого процесу вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi < \infty$.

Під час висвітлення інформації про узагальнені процедури вибору лідера та доведення тверджень з розділу 3 використовувались матеріали статті [1] відомості про процеси Гальтона-Ватсона, зокрема твердження про нормалізаційну послідовність та граничну поведінку процесу, наведені в [3]. Основними методами роботи є методи стохастичного аналізу та теорії ймовірності.

1 Класична процедура вибору лідера

1.1 Визначення твірної функції, символьний метод

Визначення 1.1. *Звичайною твірною функцією послідовності A_n називається формальний степеневий ряд $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot z^n$.*

Визначення 1.2. *Звичайна твірна функція комбінаторного класу A - твірна функція послідовності $A_n = \#(\ A_n\ )$, де A_n - множина об'єктів розміру n в класі A.*

Комбінаторна форма має вигляд $A(z) = \sum_{\alpha \in A} z^{|\alpha|}$.

Якщо функція $f(x)$ має розкладом в ряд вираз $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n$, то її коефіцієнти при n-му степені в цьому розкладі позначатимемо $[z^n]f(z) = f_n$.

Таким чином, комбінаторна форма твірної функції дає таке представлення комбінаторного класу, де внутрішня структура руйнується, а елементи, що впливають на розмір класу, заміщуються змінною.

Один із варіантів побудови комбінаторного класу є побудова в термінах комбінаторних конструкцій. Такий підхід називається символьним, оскільки базується на формальній мові комбінаторних структур, зокрема, допустимих конструкцій.

Визначення 1.3. *Нехай маємо деяку m-арну конструкцію Φ, що поєднує набір класів B_1,...B_n у повний клас $A = \Phi(B_1, ...B_n)$. Така конструкція Φ називається допустимою, якщо числова послідовність A_n класу A залежить лише від відповідних числових послідовностей класів B_1,...B_n.*

Для допустимих конструкцій існує визначений оператор, що діє на відповідних твірних функціях.

Якщо ввести набір базових допустимих конструкцій, то твірна функція будь-якого класу, що задовольняє певним умовам, може бути записана через ці специфікації.

Клас називають таким, що можна сконструювати або специфікувати, якщо він може бути визначеним з базових елементів допустимими конструкціями.

Зауважимо , що твірними функціями класів ε і атомарного класу Z є відповідано $E(z) = 1$ та $Z(z) = z$.

Теорема 1.4 (Базові допустимі конструкції; [8], ст. 27, теорема I.1)**.** *Конструкції об'єднання, декартового добутку, послідовності, множини всіх підмножин* *та мультимножини є допустимим. Відповідні оператори мають наступний вигляд:*

$A = B + C \Rightarrow A(z) = B(z) + C(z)$

$A = B \times C \Rightarrow A(z) = B(z) \cdot C(z)$

$A = Seq(B) \Rightarrow A(z) = \frac{1}{1-B(z)}$

$A = PSet(B) \Rightarrow A(z) = \prod_{n\geq 1}(1+z^n)^{B_n}$*, якщо множина B є скінченною і* $\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\cdot B(z^n)\right)$*, якщо B є нескінченною множиною.*

$A = MSet(B) \Rightarrow A(z) = \prod_{n\geq 1}(1-z^n)^{-B_n}$*, якщо множина B є скінченною і* $\exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\cdot B(z^n)\right)$*, якщо B є нескінченною множиною.*

Описи класу можуть бути ітеративними та рекурсивними. Ітеративне конструювання - такий опис класу, що використовує лише композицію базових допустимих конструкцій, що накладаються на класи ε і Z.

Визначення 1.5. *Специфікацією для n-арного вектору* $\bar{A} = (A_1, ...A_n)$ *класів є набір з n рівнянь* $A_i = \Phi_i(A_1, ...A_n)$*, де кожна з* Φ_i *відповідає терму, побудованому з A, використовуючи базові конструкції та класи* ε *та Z.*

Система є ітеративною, якщо вона є строго верхньотрикутною, тобто в матриці системи всі елементи нижче головної діагоналі є нульовими. У рекурсивному випадку система буде мати вигляд

$A_{i+1} = \Phi_i(A_i)$

Визначення 1.6. *Клас комбінаторних структур можна сконструювати тоді і тільки тоді, коли він допускає специфікацію в термінах суми, добутку, послідовності, множини, мультимножини та циклу.*

Теорема 1.7 (Символьний метод; [8], ст. 33, теорема I.2)**.** *Твірна функція класу, що можна сконструювати, є компонентою системи функціональних рівнянь, чиї терми побудовано з 1, z, +,* $\times$*,* Q*,* $\exp$*,* $\overline{\exp}$*,* $\log$*, де*

- $Q[f] = \frac{1}{1-f}$;
- $\exp[f] = \exp\left(\sum_{n\geq 1}\frac{f(z^n)}{n}\right)$;
- $\log[f] = \sum_{n\geq 1}\frac{\varphi(n)}{n}\cdot\log\left(\frac{1}{1-f(z^n)}\right)$;
- $\overline{\exp}[f] = \exp\left(\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{f(z^n)}{n}\right)$.

1.2 Аналіз особливостей аналітичних та мероморфних функцій

Визначення 1.8. *Функція f(z), визначена на області Ω, є аналітичною в деякій точці $z_0 \in \Omega$, якщо у деякому відкритому околі цієї точки, що міститься в області, цю функцію можна представити у вигляді*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} C_n \cdot (z - z_0)^n$$

Функція є аналітичною в області тоді і тільки тоді, коли вона є аналітичною в кожній точці з цієї області.

Область збіжності функції - це окіл, у якому f(z) збігається; радіусом збіжності називатимемо радіус області збіжності.

Визначення 1.9. *Функція h(z), визначена на Ω, є мероморфною в деякій точці $z_0 \in \Omega$, якщо $\forall z \in O(z_0), z \neq z_0$ її можна представити у вигляді $h(z) = f(z)/g(z)$, де функції f(z) та g(z) є аналітичними в точці z_0 і в околі цієї точки має місце рівність $h(z) = \sum_{n \geq -M} h_n \cdot (z - z_0)^n$*

Визначення 1.10. *Якщо у розкладі функції h(z) в ряд Лорана*

$$h(z) = \sum_{n \geq -M} h_n \cdot (z - z_0)^n$$

маємо $h_{-M} \neq 0$, $M \geq 1$, то функція h(z) має полюс порядку M в точці z_0.

Коефіцієнт h_{-1} називають лишком функції h(z) в точці z_0.

Теорема 1.11. *Якщо функція f аналітична в області Ω і λ - проста замкнена крива, то*

$$\int_\lambda f(z) dz = 0$$

Теорема 1.12 (про лишки)**.** *Нехай h(z) мероморфна в області Ω і λ - проста додатно орієнтована замкнена крива в області, на якій функція h(z) є аналітичною. Тоді*

$$\frac{1}{2i\pi} \cdot \int_\lambda h(z) dz = \sum_s Res[h(z), z = s],$$

де через s позначено полюси $h(z)$, що містяться в області, обмеженою кривою λ.

Теорема 1.13 (формула Коші)**.** *Якщо f(z) аналітична в області Ω, що містить 0, і λ - проста додатно орієнтована замкнена крива в області, коефіцієнти при розкладі функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі нуля мають вигляд*

$$f_n = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_{\lambda} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

Нехай тепер маємо аналітичну функцію $f(z)$, що визначена на внутрішності замкненої простої кривої λ і в деякій точці z_0 належить цій кривій. Цю функцію можна продовжити аналітично в точці z_0, якщо існує така функція $f^*(z)$, яка є аналітичною в деякій відкритій області, що містить z_0, і задовольняє $f^*(z) = f(z)$ в перетині двох областей. Аналітичне продовження є єдиним.

Визначення 1.14. *Точка z_0 на границі замкненої області називається особливою (сингулярною) точкою (або особливістю) функції, якщо цю функцію не можна аналітично продовжити в точці z_0.*

Збіжний ряд є аналітичним в середині області збіжності, тобто на границі цієї області має існувати хоча б одна особливість, отже, маємо наступну теорему.

Теорема 1.15. *Якщо функція є аналітичною в початку координат та її розклад в ряд в цій точці має скінченний радіус збіжності, то ця функція завжди має особливість на границі своєї області збіжності.*

Визначення 1.16. *Домінантна особливість - особливість, що лежить на границі області збіжності аналітичної функції*

Розклад твірних функцій в ряд містить лише невід'ємні коефіцієнти. Наступна теорема Прінсхайма дає ефективний інструмент знаходження особливої точки.

Теорема 1.17 (Прінсхайма)**.** *Якщо функцію $f(z)$ можна подати у вигляді розкладу в ряд з невід'ємними коефіцієнтами в точці початку координат і цей ряд має скінченний радіус збіжності R, то точка $z = R$ є особливою точкою функції $f(z)$.*

Числова послідовність a_n має експоненційний порядок K^n ($a_n \sim K^n$), якщо $\lim_{x\to+\infty} \sup |a_n|^{1/n} = K$, тобто $\forall \varepsilon > 0$, $|a_n| > (K - \varepsilon)^n$ нескінченно часто і $|a_n| < (K + \varepsilon)^n$ майже всюди.

Теорема 1.18 (формула асимптотичного зростання). *Якщо $f(z)$ аналітична в 0і R - модуль найближчої до початку координат особливості у розумінні, що $R = \sup\{r \geq 0 \mid f$ аналітична в $|z| < r\}$, то коефіцієнти f_n розкладу функції $f(z)$ в ряд задовольняють співвідношенню $(\frac{1}{R})^n$.*

Для функцій з невід'ємними коефіцієнтами таке твердження має місце для $R = \sup\{\ r \geq 0 \mid f,$ аналітична в $0 \leq z < r\}$

Доведення. Нехай функція f(z) має розклад в ряд в 0 вигляду

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n \, z^n$$

і має радіус збіжності R_1. Тоді за визначенням радіусу збіжності $\forall \varepsilon > 0$ $f_n \cdot (R_1 - \varepsilon)^n \to 0$, отже, достатньо великих n маємо $|f_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R_1 - \varepsilon}$ майже всюди.

З іншого боку, $\forall \varepsilon > 0$ $f_n \cdot (R_1 + \varepsilon)^n$ не є обмеженою послідовністю, тому $|f_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{R_1 + \varepsilon}$ нескінченно часто.

Отже, $f_n \sim \left(\frac{1}{R_1}\right)^n$. Залишилось показати, що R є радіусом збіжності.

Якщо R задано за правилом, сформульованим в теоремі, то нерівність $R < R_1$ неможлива, оскільки функція $f(z)$ аналітична всередині області збіжності, а нервність $R > R_1$ неможлива, адже на границі області збіжності за теоремою Прінсхайма обов'язково існує особливість. Отже, теорему доведено. □

Таким чином, можемо сформулювати перший принцип асимптотики коефіцієнтів: розташування особливості функції вказує на експоненційне зростання коефіцієнтів цієї функції.

Для випадку, коли радіус збіжності може бути нескінченним, розглянемо наступне твердження.

Теорема 1.19 (Обмеження сідлових точок). *Нехай $f(z)$ аналітична в області радіуса R, де $0 < R \leq \infty$. Для $r \in (0, R)$ визначимо*

$$M(f, r) = \sup_{|z| = r} |f(z)|.$$

Тоді для довільного такого r матимемо

$$f_n \leq \frac{M(f, r)}{r^n}, \quad f_n \leq \inf_{r \in (0, R)} \frac{M(f, r)}{r^n}$$

.

Якщо розклад $f(z)$ в околі 0 має невід'ємні коефіцієнти, то

$$f_n \le \frac{f(r)}{r^n}, \quad f_n \le \inf_{r\in(0,R)} \frac{f(r)}{r^n}.$$

Тепер нас цікавитиме ефективне обчислювання зростання коефіцієнтів твірних функцій нерекурсивних комбінаторних класів, які можна сконструювати. Має місце таке:

Теорема 1.20 (Обчислюваність зростання). *Нехай C - непомічений клас, який можна сконструювати ітеративно в термінах (Seq, PSet, MSet, Cyc; $+$, $\cdot$), починаючи з базових елементів $(1, z)$. Тоді радіус збіжності r_c твірної функції класу набуває строго додатних дійсних значень або $+\infty$.*

Нехай D - помічений клас, який можна сконструювати ітеративно в термінах (Seq, Set, Cyc; $+$, $\cdot$), починаючи з базових елементів $(1, z)$. Тоді радіус збіжності r_d твірної функції класу набуває строго додатних дійсних значень або $+\infty$.

Якщо радіуси збіжності скінченні, то асимтотичні коефіцієнти твірної функції відповідного класу можна оцінити наступним чином:

$$C_n \sim \left(\frac{1}{r_c}\right)^n, \quad \frac{1}{n!}\cdot D_n \sim \left(\frac{1}{r_d}\right)^n.$$

Фактично, перший принцип асимптотики коефіцієнтів каже, що для коефіцієнтів f_n розкладу функції $f(z) = \sum_{n\ge 0} f_n \cdot z^n$ має місце співвідношення: $f_n \sim \left(\frac{1}{r}\right)^n$, де r - радіус збіжності ряду та відстань до домінуючої особливості. Тобто коефіцієнти мають вигляд $f_n = \left(\frac{1}{r}\right)^n \cdot \theta(n)$.

Другий принцип асимптотики коефіцієнтів каже, що природа особливостей функції $f(z)$ визначає відповідний асимптотичний множник $\theta(n)$. Зокрема, якщо всі особливості функції є полюсами, то множник $\theta(n)$ зростає поліноміально.

Теорема 1.21 (про розклад раціональних функцій). *Якщо функція f(z) є раціональною і аналітичною в 0, а також має полюси в точках $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$, то її коефіцієнти є асимптотично поліноміальними, тобто існують такі поліноми $\Pi_1(x), \Pi_2(x), ...\Pi_m(x)$, що для деякого фіксованого N та всіх $n > N$ мають місце рівності*

$$f_n = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n) \cdot \alpha_j^{-n}.$$

При цьому степінь кожного полінома дорівнює зменшеному на одиницю порядку відповідного полюса.

Доведення. За умовою теореми $f(z)$ - аналітична в околі 0. Тому дана функція може бути представлена у вигляді $f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$. Отже,

$$f(z) = Q(z) + \sum_{(\alpha,r)} \frac{C_{\alpha,r}}{(z-\alpha)^r},$$

де $Q(z)$ - поліном степеня n_0, $n_0 = deg(N) - deg(D)$, α пробігає всі полюси функції $f(z)$, а r обмежене зверху. За формулою Ньютона маємо

$$[z^n]\frac{1}{(z-\alpha)^r} = \frac{(-1)^r}{\alpha^r}[z^n]\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^r} = \frac{(-1)^r}{\alpha^r}\alpha^{-n}C_{n+r-1}^{r-1}$$

$\square$

Теорема 1.22 (про розклад мероморфних функцій). *Нехай функція $f(z)$ є мероморфною в усіх точках кулі $|z| \leq R$, а також має полюси в точках $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_m$. Припустимо, що $f(z)$ аналітична в усіх точках $|z| = R, z = 0$. Тоді її коефіцієнти є асимптотично поліноміальними, тобто існують такі поліноми $\Pi_1(x), \Pi_2(x), ...\Pi_m(x)$, що для деякого фіксованого N фіксоване таке, що*

$$f_n = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n) \cdot \alpha_j^{-n}, \quad n > N.$$

При цьому степінь кожного полінома дорівнює зменшеному на одиницю порядку відповідного полюса.

Доведення. Поблизу полюса α_j має місце розклад

$$f(z) = \sum_{k \geq -M} C_{\alpha_j,r} \cdot (z-\alpha_j)^r = S_{\alpha j}(z) + H_{\alpha j}(z),$$

де $S_\alpha(z)$ пробігає всі доданки з індексами $[-M, -1]$, тобто $S_\alpha(z) = \frac{N_\alpha(z)}{(z-\alpha)^{-M}}$.

Нехай $S(z) = \sum_j S_{\alpha_j}(z)$, тоді $f(z) - S(z) = H(z)$ є аналітичною в $|z| < R$ функцією. Тоді

$$f_n = [z^n]S + [z^n](f(z) - S(z)).$$

За теоремою про розклад раціональних функцій

$$S_n = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(n) \cdot \alpha_j^{-n}.$$

Для другого доданку маємо

$$|\,[z^n](f(z) - S(z))\,| = \frac{1}{2i\pi}|\int_{|z|=R} \frac{f(z) - S(z)}{z^{n+1}} dz\,| \le \frac{1}{2i\pi} \cdot \frac{O(1)}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = O(R)$$

□

Існують випадки, коли у функції існує декілька домінуючих особливостей. У цьому разі необхідно поєднати декілька виразів типу β^n, кожний з яких має свій асимптотичний множник. Можливі дві ситуації: інколи такі вирази в поєднанні глобально викликають чисту періодичну поведінку коефіцієнтів, в загальному ж коливання є неперіодичними і описати такі коефіцієнти важко. Тому нас цікавитимуть умови періодичності додатних твірних функцій.

Необхідно визначити домінуючі особливості функції і з'ясувати чи є їх аргументи співрозмірними з 2π.

Визначення 1.23. *Нехай послідовність f_n має твірну функцію f(z). Суппортом (або носієм) Supp(f) функції f(z) називається множина всіх n таких, що $f_n \neq 0$. Послідовність і її твірна функція допускає період (проміжок) d, якщо для деякого r виконується наступне:*

$$Supp(f) \subseteq r + \mathbb{Z}_{\ge 0} \equiv \{r, r+d, r+2d, ...\}.$$

Найбільший проміжок p називається періодом; якщо період $=1$, послідовність та її твірна функція називаються аперіодичними.

Теорема 1.24 (Співрозмірність домінуючих напрямків)**.** *Нехай S - нерекурсивний помічений клас, який можна сконструювати, а його твірна функція S(z) має скінченний радіус збіжності ρ. Тоді існує обчислюване число $d \ge 1$ таке, що множина домінантних особливостей твірної функції міститься в множині $\{\rho \cdot \omega^j\}$, де $\omega^d = 1$*

Розглянемо тепер декілька допоміжних результатів для визначення розташування нулів аналітичної та полюсів мероморфної функції.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області Ω, а γ - проста замкнена крива всередині цієї області, на якій функція не має нулів. Тоді число

$$N(f,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \cdot \int_\gamma \frac{f\,'(z)}{f(z)} dz$$

є кількістю нулів, врахованих із кратностями, функції $f(z)$ всередині області, відділеної кривою γ.

Якщо функція є мероморфною, то $N(f,\gamma)$ дорівнює різниці між кількістю нулів і кількістю полюсів функції $f(z)$ всередині кривої.

Оскільки антипохідна функції $\frac{f\,'}{f}$ є $\ln(f)$, цей інтеграл також відображає зміну (варіацію) $\ln(f)$ вздовж γ, яка перетворюється на $2i\pi$ помножити на зміну аргументу функції $f(z)$ вздовж кривої. Кількість разів, що контур $f(\gamma)$ обмотує початок координат, називається числом обертів.

Число нулів функції $f(z)$, що враховані з кратностями, всередині простої кривої γ дорівнює числу обертів перетвореного контуру $f(\gamma)$ навколо початку координат.

Теорема 1.25 (Руше). *Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ аналітичні в області, що містить у своїй внутрішності просту замкнену криву γ. Припустимо, що $|f(z)| < |g(z)|$ на кривій γ. Тоді функції $f(z)$ та $f(z)+g(z)$ мають однакову кількість нулів у внутрішності кривої γ.*

Оскільки природа функціонального рівняння дає інформацію про особливості його розв'язку, необхідно з'ясувати що можна сказати про обернену функцію, маючи деяке рівняння. Розглянемо функцію $z_0 = \psi(y_0)$ з оберненою $\psi(y) = z$ в околі точок z_0, y_0.

Нехай $\psi\,'(y_0) \neq 0$. Тоді локально

$$\psi(y) \approx \psi(y_0) + \psi\,'(y_0) \cdot (y - y_0)$$

І при z близькому до z_0 маємо

$$y \approx y_0 + \frac{1}{\psi\,'(y_0)} \cdot (z - z_0)$$

Теорема 1.26. *Нехай $\psi(z)$ аналітична в y_0, при чому $\psi(y_0) = z_0$ і $\psi\,'(y_0) \neq 0$. Тоді для z з достатньо малого околу z_0 існує аналітична функція $y(z)$ така, що розв'язує рівняння $\psi(y) = z$ і така, що $y(z_0) = y_0$*

Тобто аналітична функція локально допускає існування аналітичної обереної функції поблизу тих точок, де перша похідна не нульова.

Нехай тепер $\psi\,'(y_0) = 0, \psi\,''(y_0) \neq 0$. Маємо рівняння

$$\psi(y) \approx \psi(y_0) + \frac{1}{2} \cdot \psi\,''(y_0) \cdot (y - y_0)^2$$

яке має два розв'язки

$$y \approx y_0 \pm \sqrt[2]{\frac{2}{\psi\,''(y_0)} \cdot (z - z_0)}.$$

Теорема 1.27. *Нехай $\psi(z)$ аналітична в околі точки y_0, причому $\psi(y_0) = z_0$ і $\psi\,'(y_0) = 0, \psi\,''(y_0) \neq 0$. Тоді існує Ω_0 малий окіл z_0 такий, що для будь-якого фіксованого напрямку θ існують дві функції $y_1(z)$ та $y_2(z)$, визначені на проколотому околі Ω_0^θ і такі, що $\psi(y(z)) = z$. Кожна з них є аналітичною на цьому проколотому околі, має особливість в точці z_0 і прямує до y_0 при $z \to z_0$.*

Тут проколотим околом позначається наступна множина

$$\Omega^\theta = \{z \in \Omega : \arg(z - z_0) \neq \theta \mod 2\pi, z \neq z_0)\}$$

Теорема 1.28. *Нехай $\psi(z)$ аналітична в 0 функція, що має невід'ємні коефіцієнти, і така, що $\psi\,'(0) \neq 0$. Нехай $R \leq +\infty$ - радіус збіжності розкладу даної функції в 0.*

За умови $lim_{x\to R^-} \frac{x\cdot\psi\,'(x)}{\psi(x)} > 1$ існує єдиний розв'язок $\tau \in (0, R)$ характеристичного рівняння $\frac{\tau\cdot\psi\,'(x)}{\psi(x)} = 1$.

Тоді формальний розв'язок $y(z)$ рівняння $y(z) = z\psi(y(z))$ є аналітичним в 0 і коефіцієнти цього розв'язку задовольняють наступну формулу асимптотичного зростання:

$y_n \sim (\frac{1}{\rho})^n$, *де* $\rho = \frac{\tau}{\psi(\tau)} = \frac{1}{\psi\,'(\tau)}$

1.3 Аналіз у випадку однієї та багатьох особливостей

Розглянемо асимптотичний аналіз функцій, що мають не лише особливості у вигляді полюсу. Основний принцип, так само, як і у попередньому розділі, каже, що існує певна відповідність між асимптотичним розкладом функції поблизу її домінуючої особливості та асимптотичними коефіцієнтами цієї функції.

Метод сингулярного аналізу застосовується у випадках, коли функція у своєму асимптотичному розкладі містить дробові степені або логарифми. Тоді мають місце наступні теореми.

Теорема 1.29. *Нехай* α *- довільне комплексне число в* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$. *Тоді коефіцієнт при* z^n *функції* $f(z) = (1-z)^{-\alpha}$ *допускає для великих* n *асимптотичний розклад по спадаючих степенях* n

$$f_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{n^k}\right)$$

де e_k *є поліномами по* α *порядку 2k, а* $\Gamma(\alpha)$ *є гамма-функцією. Зокрема,*

$$f_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(1 + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1)}{2n} + \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (3\alpha-1)}{24n^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2 \cdot (\alpha-1)^2 \cdot (\alpha-2) \cdot (\alpha-3)}{48n^3} + O(n^{-4})\right)$$

Теорема 1.30. *Нехай* α *- довільне комплексне число в* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$. *Тоді коефіцієнт при* z^n *функції* $f(z) = (1-z)^{-\alpha} \cdot \left(\frac{1}{z}\log(\frac{1}{1-z})\right)^{\beta}$ *допускає для великих* n *повний асимптотичний розклад по спадаючих степенях* $\log(n)$:

$$f_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot (\log(n))^{\beta} \cdot \left(1 + \frac{C_1}{\log(n)} + \frac{C_2}{\log^2(n)} + ..\right),$$

де $C_k = C_n^k \cdot \Gamma(\alpha)\frac{d^k}{ds^k}\frac{1}{\Gamma(s)}|_{s=\alpha}$.

Щоб знайти похибки наближення, необхідно знайти асимптотичне наближення коефіцієнтів функції поблизу особливості. Введемо допоміжне визначення.

Визначення 1.31. *Нехай дано два числа* ϕ *та* R *такі, що* $R > 1$ *та* $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. *Тоді відкрита область* $\Delta(\phi, R)$ *визначаєтьcя наступним чином:*

$$\Delta(\phi, R) = \{z : |z| < R, z \neq 1, |arg(z-1)| > \phi\}$$

Область є Δ*-областю в* 1, *якщо це* $\Delta(\phi, R)$ *для деяких* ϕ *та* R.

Для деякого комплексного ζ, Δ*-область в* ζ *- це образ* Δ*-області в* 1 *при відображенні* $z \mapsto \zeta z$.

Функція є Δ*-аналітичною, якщо вона є аналітичною в деякій* Δ*-області.*

Теорема 1.32. *Нехай* α, β *- довільні числа,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *і функція* $f(z)$ *є* Δ *- аналітичною.*

1. Припустимо, що $f(z)$ в перетині її Δ-області та околу 1 задовольнаяє умові

$$f(z) = O\left((1-z)^{-\alpha} \cdot \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right)$$

Тоді для її коефіцієнтів виконується $f_n = O\left(n^{\alpha-1} \cdot (\log(n))^{\beta}\right)$;

2. Припустимо, що $f(z)$ в перетині її Δ-області та околу 1 задовольнаяє умові

$$f(z) = o\left((1-z)^{-\alpha} \cdot \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^{\beta}\right)$$

Тоді для її коефіцієнтів виконується $f_n = o\left(n^{\alpha-1} \cdot (\log(n))^{\beta}\right)$

Зокрема, якщо функція $f(z)$ є Δ-аналітичною і $f(z) \sim (1-z)^{-\alpha}, z \to 1, z \in \Delta$, де α є строго додатноим числом, то для коефіцієнтів $f(z)$ виконується

$$f_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Остаточно, для випадку однієї особливості стверджується наступне.

Теорема 1.33. *Нехай $f(z)$ є функцією, аналітичною в 0, з особливістю в точці ζ такій, що функція $f(z)$ може бути продовжена на область виду $\zeta\Delta_0$ для Δ-області Δ_0, де $\zeta\Delta_0$ є образом області Δ_0 при відображенні $z \mapsto \zeta z$. Припустимо, що існують дві функції σ, τ такі, що σ є скінченною комбінацією функцій в S і $\tau \in S$ і такі, що*

$$f(z) = \sigma\left(\frac{z}{\zeta}\right) + O\left(\tau\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right)$$

при $z \mapsto \zeta$ в області $\zeta\Delta_0$.

Тоді для коефіцієнтів $f(z)$ виконується асимптотичне наближення

$$f_n = \zeta^{-n}\sigma_n + O(\zeta^{-n}\tau_n^*).$$

Тут σ_n - коефіцієнти функції σ, що є визначені теоремами про наближення коефіцієнтів з логарифмічними або степеневими множниками, а $\tau_n^* = n^{a-1}(\log(n))^b$ при $\tau(z) = (1-z)^{-a}\lambda^b(z)$.

Узагальнюючи процес аналізу функції у випадку, коли вона має одну особливість, маємо наступний алгоритм, що виконується за умови, що $f(z)$ є аналітичною в 0, а її коефіцієнти можна асимптотично проаналізувати.

1. Визначення домінуючої особливості в точці ζ на області збіжності функції, з'ясувати, що функція є аналітичною на деякій області Δ_0.

2. Аналіз f(z) при $z \mapsto \zeta$ в області $\zeta\Delta_0$ та визначення асимптотичного розкладу в околі домінуючої особливості виду

$$f(z) = \sigma\left(\frac{z}{\zeta}\right) + O\left(\tau\left(\frac{z}{\zeta}\right)\right),$$

де $\tau(z) = o(\sigma(z))$. При цьому функції σ, τ мають належати

$$S = \{(1-z)^a \lambda^b(z)\}, \lambda^b(z) = z^{-1} \cdot \log^{-1}(1-z).$$

3. Перекласти терм $\sigma(z)$ за допомогою спеціальних каталогів та обрахувати похибку. В результаті отримати

$$f_n = \zeta^{-n}\sigma_n + O(\zeta^{-n}\tau_n^*), n \to +\infty$$

У випадку багатьох особливостей (скінченна кількість), кожна особливість аналізується окремо, а отримані результати додаються.

Теорема 1.34. *Нехай $f(z)$ аналітична в $|z| < \rho$ і має скінченну кількість особливостей на $|z| = \rho$ в точках $\zeta_j = \rho e^{i\theta_j}$, $j = 1..r$. Припустимо, що існує Δ-область Δ_0 така, що функція f(z) аналітична в середині диску*

$$D = \cap_{j=1}^{r}(\theta_j \cdot \Delta_0),$$

де $\zeta\Delta_0$ є образом області Δ_0 при відображенні $z \mapsto \zeta z$.

Припустимо, що існує r функцій $\sigma_1, ..\sigma_r$, з яких кожна σ_i є скінченною комбінацією функцій в S і $\tau \in S$ і такі, що

$$f(z) = \sigma_j\left(\frac{z}{\zeta_j}\right) + O\left(\tau\left(\frac{z}{\zeta_j}\right)\right),$$

при $z \mapsto \zeta_j$ в області D.

Тоді коефіцієнти функції f(z) задовольняють асимптотичне наближення

$$f_n = \zeta_j^{-n}\sigma_{j,n} + O(\rho^{-n}\tau_n^*).$$

Тут $\sigma_{j,n}$ - коефіцієнти функції σ_j, що є визначені теоремами про наближе-

ння коефіцієнтів з логарифмічними або степеневими множниками, а $\tau_n^* = n^{a-1}(\log(n))^b$ *при* $\tau(z) = (1-z)^{-a}\lambda^b(z)$

1.4 Процедура вибору лідера

Процедуру вибору лідера можна описати таким процесом: скінченна або (у загальному випадку) нескінченна кількість гравців одночасно підкидають монетку. У випадку, коли результатом є 0, гравець вибуває з гри, а коли результатом є 1, гравець продовжує участь у грі; коли у всіх гравців випадає 0, гравці підкидують монетку повторно. Цей процес у випадку скінченної кількості гравців продовжується до моменту, коли залишиться єдиний учасник, який є лідером.

Нехай X_n кількість раундів за участі n гравців, за які обрано лідера. Тоді

$$X_0 = X_1 = 0, X_n = 1 + X_{I_n}^{(1)} \cdot \mathbb{I}_{\{I_n \neq 0\}} + X_{I_n}^{(2)} \cdot \mathbb{I}_{\{I_n = 0\}},$$

де $\mathbb{I}_A$ - індикатор події A, I_n - число гравців, що залишились після першого раунду, має біноміальний розподіл: $I_n \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$, $X_n^{(1)}, X_n^{(2)}$ - незалежні випадкові величини, що мають такий же розподіл, як і X_n, та відповідають двом підструктурам, на які розбивається структура X_n.

Нас цікавитиме кількість раундів, за яку можна обрати лідера за фіксованої кількості гравців. Для цього обчислимо математичне сподівання цієї величини $a_n = \mathbb{E}X_n$:

$$a_0 = 0, a_1 = 0, a_n = 1 + 2^{-n} \cdot a_n + 2^{-n} \cdot \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot a_k$$

Нехай $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k z^k}{k!}$. Тоді

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n z^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n z^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{a_n (\frac{z}{2})^n}{n!} \right) + \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a_k (\frac{z}{2})^k}{k!} \cdot \frac{(\frac{z}{2})^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= e^z - z - 1 + f\left(\frac{z}{2}\right) + f\left(\frac{z}{2}\right) \cdot e^{\frac{z}{2}} = e^z - z - 1 + f\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \left(1 + e^{\frac{z}{2}}\right). \end{aligned}$$

Позначимо функцію $\widehat{f}(z) = \frac{f(z)}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{e^z - 1} + \widehat{f}(\frac{z}{2})$. Коефіцієнти при n-му степені цієї функції матимуть вигляд

$$a_n' = [z^n]\widehat{f}(z) = \mathbb{I}_{\{n=0\}} - \frac{B_n}{n!} + 2^{-n} a_n',$$

де B_n - n-те число Бернуллі.

Маємо

$$a_n = n![z^n]f(z) = n![z^n](\widehat{f}(z)(e^z - 1)) =$$
$$= n! \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k{}'}{(n-k)!} - a_n{}' \right) = -\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot \frac{B_k}{1 - 2^{-k}} =$$
$$= -\sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \cdot B_k \cdot \left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \frac{B_k}{2^k - 1}.$$

Розглянмо тепер допоміжку функцію

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \frac{B_k}{2^k - 1} = -\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{R_n} \frac{(-1)^n n!}{(z-1)(z-2)...(z-n)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z - 1} dz,$$

де прямокутник R_n задовольняє таким умовам: $Re\, z = \frac{1}{2}$, $Re\, z = n - \frac{3}{4}$, $\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + ...$

Тоді

$$a_n = 1 - s_n = 1 - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{(-1)^n n!}{(z-1)(z-2)...(z-n)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z - 1} dz$$

Крім того,

$$a_n = 1 - \sum_k Res_{z=z_k} \frac{(-1)^n n!}{(z-1)(z-2)...(z-n)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z - 1} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

де z_k - полюси функції $\frac{(-1)^n n!}{(z-1)(z-2)...(z-n)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z-1}$, що лежать в області $-1 < Rez < \frac{1}{2}$; цими полюсами є точки $z_0 = 0, z_k = \frac{2\pi k i}{\log(2)}$

Обчислимо лишки в полюсах. Оскільки

$$\frac{(-1)^n n!}{(z-1)(z-2)...(z-n)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z - 1} \to \frac{(-1)^n n! \Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z - 1},$$

то

$$Res_{z=0} \frac{(-1)^n n! \Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z - 1} = -\frac{1}{\log(2)}(H_n - \gamma) + \frac{1}{2} = -\log(2) + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&Res_{z=\frac{2\pi ki}{\log(2)}} \frac{(-1)^n n!\Gamma(z-n)}{\Gamma(z)} \cdot \frac{\zeta(1-z)}{2^z-1} = \\
&= \frac{1}{\log(2)} \cdot \frac{(-1)^n n!\Gamma\left(\frac{2\pi ki}{\log(2)}-n\right)}{\Gamma\left(\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right)} \cdot \zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) = \\
&= \frac{1}{\log(2)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right)}{\Gamma\left(n+1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right)} \cdot \zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \\
&= \frac{1}{\log(2)} \cdot \Gamma\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot \zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot \left(n^{\frac{2\pi ki}{\log(2)}} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\log(2)} \cdot \Gamma\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot \zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot \left(e^{2\pi ki\cdot\log_2(n)} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Тепер визначимо функцію

$$\delta_1(x) = \frac{1}{\log(2)} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Gamma\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot \zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot e^{2\pi kix}$$

Скористаємось оцінкою

$$\begin{aligned}
|\delta_1(x)| = |&\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \Gamma\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot \zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right) \cdot e^{\frac{2\pi kix}{\log(2)}}| \leq \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\Gamma\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right)| \cdot |\zeta\left(1-\frac{2\pi ki}{\log(2)}\right)| < \infty.
\end{aligned}$$

Звідси матимемо наступне:

$$a_n = \log_2(n) + \frac{1}{2} - \delta_1(\log_2(n)) + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Отже, середнє число раундів, які необхідно провести, щоб вибрати лідера, якщо грають n гравців становить наближено

$$\log_2(n) + \frac{1}{2} - \delta_1(\log_2(n))$$

.

2 Узагальнена процедура вибору лідера та деякі граничні теореми при $E\xi \log \xi < \infty$

2.1 Узагальнена процедура вибору лідера

Розглянемо наступний опис процедури вибору лідера: на початку кожного раунду будемо перенумеровувати гравців, що залишилися, зберігаючи початковий порядок. Позначимо $R = \{R(k) : k \geq 1\}$ випадкова множина цілих чисел, що переходять в наступний раунд гри, де $R(0) := 0;\ R(k) := \xi_1 + ... + \xi_k, k \geq 1$. Тут величини ξ_i - випадкові незалежні однаково розподілені.

Розглянемо $R^{(n)}, n \geq 1$ - незалежні копії випадкового блукання R. Прирости блукання $R^{(n)}$ при цьому позначимо $\xi_i^{(n)}$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини з розподілом $P\{\xi_k^{(n)} = i\} = p_i, i \in \mathbb{N}$.

Тоді відповідні блукання матимуть вигляд $R^{(n)}(0) := 0;\ R^{(n)}(k) := \xi_1^{(n)} + ... + \xi_k^{(n)}, k \geq 1$.

В n-ому раунді гравці з поточними позначеннями $R^{(n)}(1), R^{(n)}(2), ...$ залишаються для участі у наступному раунді гри, а решта гравців вибувають. Учасники, що залишилися, перенумеровуються, зберігаючи порядок, і процедура повторюється.

В припущені, що ξ_i мають геометричний розподіл, маємо класичну процедуру вибору лідера. Якщо ж замінити геометричний розподіл на деякий довільний розподіл p_n на $\mathbb{N}$, $p_1 < 1$, то отримаємо узагальнену процедуру вибору лідера.

Для подальшої зручності введемо декілька позначень.

Нехай $N_M^{(n)}$ - число гравців серед 1, .. M, що вижили серед n раундів. Інакше кажучи, $N_M^{(0)} := M$, $N_M^{(n)} := \{j \in \mathbb{N} | R^{(n)}(j) \leq N_M^{(n-1)}\}$ для $M \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$.

Нехай $1 \leq S_1^{(n)} < S_2^{(n)} < ...$ - початкові номери гравців, що вижили серед перших n раундів. Формально, $S_j^{(n)} := \inf\{i \in \mathbb{N} | N_i^{(n)} = j\}$ для $n \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$.

Нехай $T(M)$ - число раундів гри (підкидання монетки) необхідне для того, щоб всі гравці серед 1, 2, ... M вибули. А саме $T(M) := \inf\{n \in \mathbb{N} | N_M^{(n)} = 0\}$ для $M \in \mathbb{N}$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ розглянемо випадковий вектор

$$\left(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, ...\right) = \left(S_{R^{(n)}(1)}^{(n-1)}, S_{R^{(n)}(2)}^{(n-1)}, ...\right) \tag{2.1}$$

$$\left(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, ...\right) = \left(R^{(1)} \circ ... \circ R^{(n)}(1), R^{(1)} \circ ... \circ R^{(n)}(2) ...\right) \tag{2.2}$$

$$\left(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, ...\right) \stackrel{d}{=} \left(R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(1), R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(2)...\right),$$

де в останньому рядку мається на увазі рівність за розподілів.

Отже, було показано, що j-та координата цього вектора є числом нащадків особин 1, ... j в поколінні n процесу Гальтона-Ватсона, що починається зі зліченно великого числа особин і має розподіл нащадків $p_n, n \geq 1$. З припущення $p_1 < 1$ випливає, що процес Гальтона-Ватсона є надкритичним і виживає з ймовірністю 1.

2.2 Граничні теореми

У цьому розділі наводяться граничні теореми для випадку процесу зі значенням $E\xi \log \xi < \infty$. Детальне доведення цих та інших фактів було розглянуто у статті [1].

Теорема 2.1. *Нехай маємо процес Гальтона-Ватсона Z_n з приростами ξ, де $E\xi = \mu \in (1, \infty)$, $E\xi \log \xi < \infty$. Тоді при $n \to \infty$*

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_2^{(n)}}{\mu^n}, ... \right) \to \left(Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, ... \right)$$

де $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, ...$ - незалежні копії величини $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\mu^n}$. Розподіл граничного вектора задовольняє стохастичне рівняння

$$(\mu X_1, \mu X_2, ...) = \left(X_{R(1)}, X_{R(2)}, ... \right).$$

В останньому рівнянні мається на увазі рівність за розподілом і $R(j), j \geq 0$ - випадкові блукання з приростами ξ є незалежими від X_j.

Доведення. Доведемо такий факт: Нехай θ -випадкова змінна, що приймає цілі додатні значення, $E\theta = \mu \in (1, \infty)$, $E\theta \log^+ \theta < \infty$ і $R^{(n)}(0) := 0, R^{(n)}(k) := \theta_1^{(n)} + ... + \theta_k^{(n)}$, де $\theta_k^{(n)}$ - незалежні копії випадкової величини θ. Позначимо при цьому функцію $f_n(t) := \mu^{-n} R^{(n)}(\lfloor \mu_{n-1} t \rfloor)$ для $n \in \mathbb{N}, t \geq 0$.

Тоді існує такий випадковий процес $Z_\infty(t)$, $t \geq 0$, що при $n \to \infty$

$$(f_n \circ ... \circ f_1(t)) \to Z_\infty(t)$$

майже напевно. Тут процес $Z_\infty(t)$ - границя нормалізованого числа нащадків особин $1, 2, ... \lfloor t \rfloor$ процеса Гальтона-Ватсона зі змінною θ та зліченним числом предків. Тобто якщо $Z_\infty^{(j)}$ - незалежні копії Z_∞ границі цього процесу з одним нащадком, то $Z_\infty(t) = Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(\lfloor t \rfloor)}$.

Оскільки має місце $f_n \circ ... \circ f_1(t) = \frac{1}{\mu^n} R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(\lfloor t \rfloor)$, то необхідно довести, що

$$\left(\frac{1}{\mu^n}R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(j)\right) \to Z_\infty(j)$$

майже напевно при $n \to \infty$, де $j \in \mathbb{N}_0$.

При кожному n послідовність ліворуч є випадковим блуканням, оскільки композиція незалежних зростаючих випадкових блукань є випадковим блуканням. Отже, достатньо показати, що

$$\left(\frac{1}{\mu^n}R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(1)\right) \to Z_\infty(1).$$

Ліворуч записано нормалізоване число особин в час n у процесі Гальтона-Ватсона з одним предком. Таким чином, збіжність вище випливає з майже напевної збіжності її нормалізації, яка є невід'ємним мартингалом.

Тепер перейдемо до доведення теореми. Позначимо

$$\psi((x_1, x_2, ...)) = \frac{1}{\mu}(x_{R(1)}, x_{R(2)}, ...)$$

та розглянемо

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_2^{(n)}}{\mu^n}, ...\right) = \left(\mu^n R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(1), \mu^n R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(2)...\right) =$$
$$= \psi_1 \circ \psi_2 \circ ...\psi_n(1, 2, ...),$$

де ψ_i - незалежні копій ψ. Остання послідовність збігається майже напевно до $\left(Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, ...\right)$ за наведеною лемою.

Стохастичне рівняння для фіксованої точки випливає з майже напевної неперервності відображення ψ відносно топології добутку на просторі $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а також за теоремою про неперервне відображення.

□

Теорема 2.2. *Нехай маємо процес Гальтона-Ватсона Z_n з приростами ξ, де $E\xi = \mu \in (1, \infty)$, $E\xi \log \xi < \infty$. Тоді при $n \to \infty$*

$$N^{(n)}_{\lfloor \mu^n x \rfloor} \to N^{'}(x)$$

слабко у просторі Скорохода D із J_1-топологією, де $N^{'}(x) = \#\{k \in \mathbb{N} | Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(k)} \le x\}$ для $x \ge 0$. Тут $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, ...$ - незалежні копії величини $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{\mu^n}$.

Слід зазначити, що $N^{'}(x)$ є процесом відновлення, що пов'язаний з $Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(k)}, k \ge 1$.

Доведення. Помітимо, що $N_{\lfloor \mu^n x \rfloor}^{(n)}$ є процесом, пов'язаним зі зростаючою випадковою послідовністю $\mu^{-n} S_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}$. За теоремою 2.1 скінченно-мірний розподіл останньої послідовності збігається до розподілу строго зростаючої випадкової послідовності $\left(Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + ... + Z_\infty^{(k)}\right), k \in \mathbb{N}$, що пов'язана з процесом $N^{'}(x), x \ge 0$. Крім того, для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$, оскільки $\xi > 0, Z_\infty^{(1)} > 0$ майже напевно,

$$\lim_{k\to\infty} S_k^{(n)} = \lim_{k\to\infty} \left(Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + ... + Z_\infty^{(k)}\right) = +\infty \text{ м. н.}$$

За лемою 5.2 з додатку в [1], яку також буде наведено в доведенні аналогу даної теореми для випадку $E\xi \log \xi = \infty$, маємо слабку збіжність відповідних процесів у просторі Скорохода D із J_1-топологією. □

Теорема 2.3. *Нехай маємо процес Гальтона-Ватсона Z_n з приростами ξ, де $E\xi = \mu \in (1, \infty)$, але $E\xi \log \xi = \infty$. Тоді при $n \to \infty$*

$$T_{\lfloor \mu^n x \rfloor} - n \to T^{'}(x),$$

де розподіл $T^{'}(x)$ задано виразом $P\{T^{'}(x) \le k\} = P\{Z_\infty > \frac{x}{\mu^k}\}, k \in \mathbb{Z}$.

Доведення. Помітимо, що

$$\begin{aligned} P\{T_{\lfloor \mu^n x \rfloor} - n \le k\} &= P\{\inf\{n \in \mathbb{N} | N_{\lfloor \mu^n x \rfloor}^{(n)} = 0\} - n \le k\} = \\ &= P\{S_1^{(n+k)} > \lfloor \mu^n x \rfloor\} = P\{S_1^{(n+k)} > \mu^n x\} = \\ &= P\{\mu^{-(n+k)} S_1^{(n+k)} > \mu^{-k} x\} \end{aligned}$$

Оскільки $\mu^{-(n+k)} S_1^{(n+k)}$ при $n \to \infty$ прямує до Z_∞,то теорему доведено. □

3 Процедура вибору лідера при $E\xi \log \xi = \infty$

У випадку, коли прирости випадкового процесу мають нескінченне середнє $E\xi \log \xi = \infty$, в термінах попереднього розділу можна сформулювати аналоги твердженнь 2.1-2.3. Це відкрите питання було поставлено у статті [1]. У цьому розділі ця задача буде розв'язана.

Спершу сформулюємо допоміжне твердження, яке буде ключовим для розуміння асимптотики процесу, адже надає інформацію про нормалізаційну послідовність такого процесу Гальтона-Ватсона та її природу.

Теорема 3.1. *Нехай $\{Z_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ - процес Гальтона-Ватсона з $1 < \mu = E\xi < \infty$. Тоді завжди існує послідовність констант $\{C_n\}, C_n \to \infty$, та $\frac{C_{n+1}}{C_n} \to \mu, n \to \infty$ така, що випадкові змінні $W_n = \frac{Z_n}{C_n}$ збігаються майже напевно до випадкової змінної W з розподілом, що задовольняє $P\{W > 0\} = 1 - q$. Крім того, якщо $\phi(z) = E(e^{-zW})$ для $Rez \geq 0$, то $\phi(z)$ задовольняє функціональне рівняння*

$$\phi(z) = f\left(\phi\left(\frac{z}{\mu}\right)\right).$$

Доведення, що буде наведено нижче, детально розглядається в [3].

Доведення. Нехай $k(s) = -\log f_n(e^{-s})$ - кумулятивна твірна функція послідовності $\{p_j\}$. Очевидно, що $k(s)$ визначена на $[0, \infty)$, строго зростає, є неперервною та увігнутою. Образ функцій - проміжок $[0, -\log p_0)$. Отже, можна визначити єдину обернену до $k(s)$ функцію $h(s)$, визначену на $[0, -\log q)$. Тоді визначимо ітеративні функції

$$k_n(s) = -\log f_n(e^{-s}),\ h_n(s) \text{ є оберненою до } k_n(s).$$

Тепер зафіксуємо $s_0 \in (0, -\log q)$ і визначимо для $n \geq 1$

$$C_n = (h_n(s_0))^{-1},$$
$$W_n = \frac{Z_n}{C_n},$$
$$Y_n = e^{-W_n}.$$

Позначимо також F_n σ-алгебру, породжену $Z_0, Z_1, ...Z_n$.

Покажемо, що $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{C_n} = 0$. Доведення буде проходити від супротивного, тому припустимо, що існує підпослідовніть $\{n_j\}$ така, що $\{h_{n_j}(s_0)\}$ відокремлена від 0. У такому випадку послідовність $\{e^{-h_{n_j}(s_0)}\}$ буде відокремленою від 1. З результатів про ймовірність вимирання процесу Гальтона-Ватсона (а саме, для $|s| < 1$ має місце $f_n(s) \to q$, де $f(s)$ - твірна функція процесу) випливають такі граничні співвідношення:

$$f_{n_j}(e^{-h_{n_j}(s_0)}) \to q;\ k_{n_j}(h_{n_j}(s_0)) \to -\log q.$$

Оскільки функція $h(s)$ є оберненою до $k(s)$, то в лівій частині останнього виразу стоїть значення s_0, що суперечить початковому вибору $s_0 < -\log q$. Отже, дійсно $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{C_n} = 0$.

Крім того,

$$\frac{C_n}{C_{n+1}} = \frac{h(h_n(s_0))}{h_n(s_0)} \to \frac{1}{\mu},$$

адже $\lim_{s\to 0} \frac{h(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \left(\frac{k(s)}{s}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}$.

З цих міркувань випливає, що для $Rez \geq 0$

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \lim_{n\to\infty} E\left(e^{-zW_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}\left(e^{\frac{z}{C_{n+1}}}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} f\left(f_n\left(e^{zC_{n+1}^{-1}C_n^{-1}C_n}\right)\right) = f\left(\phi\left(\frac{z}{\mu}\right)\right)\end{aligned}$$

Доведемо, що $W_n \to W$ майже напевно і $P\{W > 0\} = 1 - q$.

Сім'я $\{Y_n, F_n | n = 0, 1, ...\}$ є мартингалом. Отже, границя $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ існує майже напевно і

$$\lim_{n\to\infty} EY_n^k = EY^k\ \forall k > 0.$$

Щоб довести цю лему, розглянемо

$$k\left(\frac{1}{C_{n+1}}\right) = k(h_{n+1}(s_0)) = k((h_n(s_0))) = h_n(s_0) = \frac{1}{C_n}.$$

Звідси

$$\begin{aligned} E\{Y_{n+1}|F_n\} = E\{e^{\frac{-Z_{n+1}}{C_{n+1}}}|F_n\} = \\ = \left(f(e^{\frac{-1}{C_{n+1}}})\right)^{Z_n} \text{ м.н. } = \\ = e^{-Z_n k(C^{-1}_{n+1})} = Y_n. \end{aligned}$$

Останні міркування встановлюють властивість мартингалу. Майже напевна збіжність випливає з невід'ємності Y_n, а збіжність моментів - з теореми про мажоровану збіжність.

Тепер розглянемо лему, що надасть можливість зробити висновок, що $W \equiv -\log Y$ невироджене в 0 і має скінченне значення.

Отже, нехай сім'я $\{Y_n, F_n | n = 0, 1, ...\}$ є мартингалом, границя $\lim_{n\to\infty} Y_n = Y$ існує майже напевно. Тоді

$$P\{Y > 0\} = 1,\ P\{Y = 1\} = q.$$

Помітимо, що $EY = \lim_{n\to\infty} EY_n = EY_1 = e^{-s_0}$ з властивості мартингалів.

Позначимо $M_n(k, s_0) = EY_n^k$ та $M(k, s_0) = EY^k$. Тоді попередня лема стверджує, що

$$M_n(k, s_0) \to M(k, s_0) \forall k > 0.$$

Проте можна побачити, що $M_n(k, s_0) = f\left(M_{n-1}(k, h(s_0))\right)$. Тоді при $n \to \infty$ має місце функціональне співвідношення

$$M(k, s_0) = f\left(M(k, h(s_0))\right)$$

.

З визначення $M(k, s_0) = EY^k$ випливає, що

$$\begin{aligned} P\{Y > 0\} = \lim_{k\to 0} M(k, s_0), \\ P\{Y = 1\} = \lim_{k\to\infty} M(k, s_0). \end{aligned}$$

З іншого боку,

$$P\{Y > 0\} = P\{\lim_n W_n < \infty\},$$
$$P\{Y = 1\} = P\{\lim_n W_n = 0\}.$$

Отже,

$$P\{\lim_n h_n(s_0) Z_n < \infty\} = \lim_{k\to 0} M(k, s_0),$$
$$P\{\lim_n h_n(s_0) Z_n = 0\} = \lim_{k\to \infty} M(k, s_0).$$

і

$$P\{\lim_n h_{n+1}(s_0) Z_n < \infty\} = \lim_{k\to 0} M(k, s_0),$$
$$P\{\lim_n h_{n+1}(s_0) Z_n = 0\} = \lim_{k\to \infty} M(k, s_0).$$

Крім того, мають місце рівності

$$P\{\lim_n h_{n+1}(s_0) Z_n < \infty\} = P\{\lim_n h_n(s_0) Z_n < \infty\},$$
$$P\{\lim_n h_{n+1}(s_0) Z_n = 0\} = P\{\lim_n h_n(s_0) Z_n = 0\}.$$

Звідси, $\lim_{k\to 0} M(k, s_0)$ та $\lim_{k\to\infty} M(k, s_0)$ зберігають свої значення при заміні s_0 на $h(s_0)$. Позначимо $\alpha \equiv \lim_{k\to 0} M(k, s_0)$ та $\beta \equiv \lim_{k\to\infty} M(k, s_0)$. Можна зі співвідношення $M(k, s_0) = f\left(M(k, h(s_0))\right)$, отриманого вище, побачити, що α та β задовольняють рівняння $x = f(x)$.

Оскільки $s_0 > 0$, то $\beta = P\{Y = 1\} \leq EY = e^{-s_0} < 1$, отже, $\beta = q$. Далі, $s_0 < -\log q$, таким чином, $\alpha = 1$.

З двох лем випливає, що, дійсно, $W_n \to W$ майже напевно і $P\{W > 0\} = 1 - q$, що завершує доведення теореми.

$\square$

Далі розглянемо основні твердження цього розділу, отримані завдяки знанням про нормалізаційну послідовність процесу з попередньої теореми.

Теорема 3.2. *Нехай маємо процес Гальтона-Ватсона Z_n з приростами ξ, де $E\xi = \mu \in (1, \infty)$, але $E\xi \log \xi = \infty$. Тоді завжди існує нормалізаційна послідовність констант $\{C_n\}, C_n \to \infty$, при $n \to \infty$ і $\frac{C_{n+1}}{C_n} \to \mu$, при $n \to \infty$ така,* *що*

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{C_n}, \frac{S_2^{(n)}}{C_n}, ...\right) \to \left(Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, ...\right)$$

де $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, ...$ *- незалежні копії величини* $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{C_n}$.

Доведення. Спершу доведемо таке допоміжне твердження.

Лема 3.3. *Нехай* θ *-випадкова змінна, що приймає цілі додатні значення, і* $R^{(n)}(0) := 0, R^{(n)}(k) := \theta_1^{(n)} + ... + \theta_k^{(n)}$, *де* $\theta_k^{(n)}$ *- незалежні копії випадкової величини* θ. *Позначимо при цьому функцію* $g_n(t) := \frac{1}{C_n} R^{(n)}(\lfloor C_{n-1} t \rfloor)$ *для* $n \in \mathbb{N}, t \geq 0$.

Тоді існує такий випадковий процес $Z_\infty(t)$, $t \geq 0$, *що при* $n \to \infty$

$$(g_n \circ ... \circ g_1(t)) \to Z_\infty(t)$$

майже напевно. Тут процес $Z_\infty(t)$ *- границя нормалізованого числа нащадків особин* $1, 2, ...\lfloor t \rfloor$ *процеса Гальтона-Ватсона зі змінною* θ, *що характеризує кількість числа нащадків процесу, та зліченним числом предків. Тобто якщо* $Z_\infty^{(j)}$ *- незалежні копії* Z_∞ *границі цього процесу з одним нащадком, то* $Z_\infty(t) = Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(\lfloor t \rfloor)}$.

Доведення. Оскільки має місце $g_n \circ ... \circ g_1(t) = \frac{1}{C_n} R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(\lfloor t \rfloor)$, то необхідно довести, що

$$\left(\frac{1}{C_n} R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(j)\right) \to Z_\infty(j)$$

майже напевно при $n \to \infty$, де $j \in \mathbb{N}_0$.

При кожному n послідовність ліворуч є випадковим блуканням, оскільки композиція незалежних зростаючих випадкових блукань є випадковим блуканням. Отже, достатньо показати, що

$$\left(\frac{1}{C_n} R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(1)\right) \to Z_\infty(1).$$

Ліворуч записано нормалізоване число особин в час n у процесі Гальтона-Ватсона з одним предком. Таким чином, збіжність вище випливає з майже напевної збіжності її нормалізації, яка є невід'ємним мартингалом.

□

Тепер перейдемо до безпосереднього доведення твердження. Розглянемо

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{C_n}, \frac{S_2^{(n)}}{C_n}, ...\right) = \left(C_n^{-1} R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(1), C_n^{-1} R^{(n)} \circ ... \circ R^{(1)}(2)...\right).$$

Остання послідовність збігається майже напевно до $\left(Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, ...\right)$ за наведеною лемою.

□

Теорема 3.4. *Нехай маємо процес Гальтона-Ватсона Z_n з приростами ξ, де $E\xi = \mu \in (1, \infty)$, але $E\xi \log \xi = \infty$. Тоді завжди існує нормалізаційна послідовність констант $\{C_n\}, C_n \to \infty$, при $n \to \infty$ і $\frac{C_{n+1}}{C_n} \to \mu$, при $n \to \infty$ така, що*

$$N_{\lfloor C_n x \rfloor}^{(n)} \to N^{'}(x)$$

слабко у просторі Скорохода D із J_1-топологією, де $N^{'}(x) = \#\{k \in \mathbb{N} | Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(k)} \leq x\}$ для $x \geq 0$. Тут $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, ...$ - незалежні копії величини $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{C_n}$.

Доведення. Розглянемо таку лему:

Лема 3.5. *Для кожного $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ нехай $0 \leq X_1^{(n)} \leq X_2^{(n)} \leq ...$ - випадкова послідовність така, що $\lim_{n\to\infty} X_k^{(n)} = \infty$ майже напевно (м.н.) і скінченно-мірні розподіли $\left(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, ...\right)$ збігаються до $\left(X_1^{(\infty)}, X_2^{(\infty)}, ...\right)$.*

Визначимо відповідний процес $N^n(x) := \#\{k \in \mathbb{N} | X_k^{(n)} \leq x\}$ для $x \geq 0, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Тоді має місце збіжність за розподілом

$$N^{(n)}(x) \to N^{(\infty)}(x)$$

у просторі Скорохода D із M_1-топологією. Остання може бути замінена J_1-топологією, якщо послідовність $X_1^{(\infty)}, k \geq 1$ строго зростаюча з ймовірністю 1.

Доведення. Нехай $L_{\leq}$ - простір всіх послідовностей $y_k, k \in \mathbb{N}$ таких, що $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq ...$ та $lim_{k\to\infty} y_k = \infty$. Оснастимо $L_{\leq}$ топологією поточкової збіжності. Така топологія метризується. Позначимо $\Psi : L_{\leq} \to D$, що кожній послідовності $y_k, k \in \mathbb{N}$ ставить у відповідність числову функцію

$$\Psi(y)(x) = \{k \in \mathbb{N} | y_k \leq x\}, x \geq 0.$$

Якщо ввести в D M_1-топологію, то легко показати, що відображення Ψ є неперервним на $L_{\leq}$. Якщо ж ввести в D J_1-топологію, то відображення Ψ є буде неперервним на $L_{\leq}$, але є неперервним на підмножині $L_{<}$ строго зростаючих послідовностей.

Розглянемо $X_k^n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ як випадкові елементи зі значеннями з $L_{<}$ у випадку J_1-топології. Тоді збіжність $\left(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, ...\right) \to \left(X_1^{(\infty)}, X_2^{(\infty)}, ...\right)$ еквівалентна слабкій збіжності відповідних випадкових елементів. Таким чином, з теореми про неперервність відображення випливає твердження леми.

□

Помітимо, що $N_{\lfloor C_n x \rfloor}^{(n)}$ є процесом, пов'язаним зі зростаючою випадковою послідовністю $C_n^{-1} S_k^{(n)}, k \in \mathbb{N}$. За теоремою 3.2 розподіл скінченної розмірності останньої послідовності збігається до розподілу строго зростаючої випадкової послідовності $\left(Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + ... + Z_\infty^{(k)}\right), k \in \mathbb{N}$, що пов'язана з процесом $N^{'}(x), x \geq 0$. Крім того, для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$, оскільки $\xi > 0, Z_\infty^{(1)} > 0$ майже напевно,

$$\lim_{k\to\infty} S_k^{(n)} = \lim_{k\to\infty} \left(Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + ... + Z_\infty^{(k)}\right) = +\infty \text{ м. н.}$$

За лемою, з наведених вище міркувань випливає слабка збіжність відповідних процесів у просторі Скорохода D із J_1-топологією.

□

Теорема 3.6. *Нехай маємо процес Гальтона-Ватсона Z_n з приростами ξ, де $E\xi = \mu \in (1, \infty)$, але $E\xi \log \xi = \infty$. Тоді завжди існує нормалізаційна послідовність констант $\{C_n\}, C_n \to \infty$, при $n \to \infty$ і $\frac{C_{n+1}}{C_n} \to \mu$, при $n \to \infty$ така, що*

$$T_{\lfloor C_n x \rfloor} - n \to T^{'}(x),$$

де розподіл $T^{'}(x)$ *задано виразом* $P\{T^{'}(x) \leq k\} = P\{Z_{\infty} > \frac{x}{\mu^k}\}, k \in \mathbb{Z}.$

Доведення. Помітимо, що

$$\begin{aligned} P\{T_{\lfloor C_n x \rfloor} - n \leq k\} &= P\{\inf\{n \in \mathbb{N} | N^{(n)}_{\lfloor \mu^n x \rfloor} = 0\} - n \leq k\} = \\ &= P\{S_1^{(n+k)} > \lfloor C_n x \rfloor\} = P\{S_1^{(n+k)} > C_n x\} = \\ &= P\{C_{n+k}^{-1} S_1^{(n+k)} > C_n C_{n+k}^{-1} x\} \end{aligned}$$

Оскільки ліва частина останнього виразу під знаком ймовірності при $n \to \infty$ прямує до Z_{∞}, а $C_n C_{n+k}^{-1} \to \mu^{-k}$, то теорему доведено.

$\square$

4 Моделювання граничних об'єктів деяких теорем

У даному розділі розглядається моделювання випадкового процесу $N'(x) = \#\{k \in \mathbb{N} | Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(k)} \leq x\}$ для $x \geq 0$, де $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, ...$ - незалежні копії величини $Z_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{Z_n}{C_n}$, тобто часу першого проходження вище певного рівня.

```
def ZInftyRealisation():
  arrZInf = [0]
  u = 1
  n = 0
  T = 15
  a_temp = 0
  a = 1
  b = 3
  mu = (a+b)/2
  k = 25
  j = 0
  while (np.sum(arrZInf) < T):
    while n < k:
      for i in range(u):
        temp = randint(a, b)
        a_temp += temp
        i += 1
      u = a_temp
      a_temp = 0
      n += 1
      i = 0
    arrZInf.append(u/mu**k)
    j += 1
  return j
```

У наведеному прикладі розглядався наступний алгоритм: за початкового числа $X_0 = 1$ особин в процесі Гальтона - Ватсона, з яким пов'язана величина $N'(x)$, для кожного j-го покоління моделювалися випадкові величини $\xi_i^{(j)}$, рівномірно розподілені на $\{1, 2, 3\}$; кількість особин в наступному поколінні визначалася за формулою $X_n = \xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + ... + \xi_{X_{n-1}}^{(n)}$; після моделювання заданої кількості поколінь знаходилась величина $Z_\infty \approx \frac{Z_n}{C_n}$, n $=$ 25 - кількість поколінь процесу. Зауважимо, що таке наближення величин Z_∞ відповідає збіжності в сенсі майже напевно. Моделювання $Z_\infty^{(k)}$, незалежних копій Z_∞, продовжувалося до тих пір, доки не виконувалась умова $Z_\infty^{(1)} + ... + Z_\infty^{(k)} > T$, T $=$ 15 - задане значення. Число k кількості кроків, необхідних для проходження рівня T записувалося. Процедура обрахунку кількості кроків, необхідних для проходження рівня T, проводилася 100 разів.

Результати роботи алгоритму подані у вигляді гістограм. Перша показує, яка кількість кроків, необхідних для проходження рівня T, потрапляє у певний проміжок значень. На гістограмі вісь абсцис відображає проміжки, у які потрапляє значення k, вісь ординат - кількість результатів у цьому проміжку. Крім того, наведено другу гістограму, де на горизонтальній прямій зображено порядковий номер ітерації алгоритму, а на вертикальній вісі - значення k.

Для програмування та графічного зображення результатів використовувалась мова Python та деякі стандартні математичні бібліотеки.

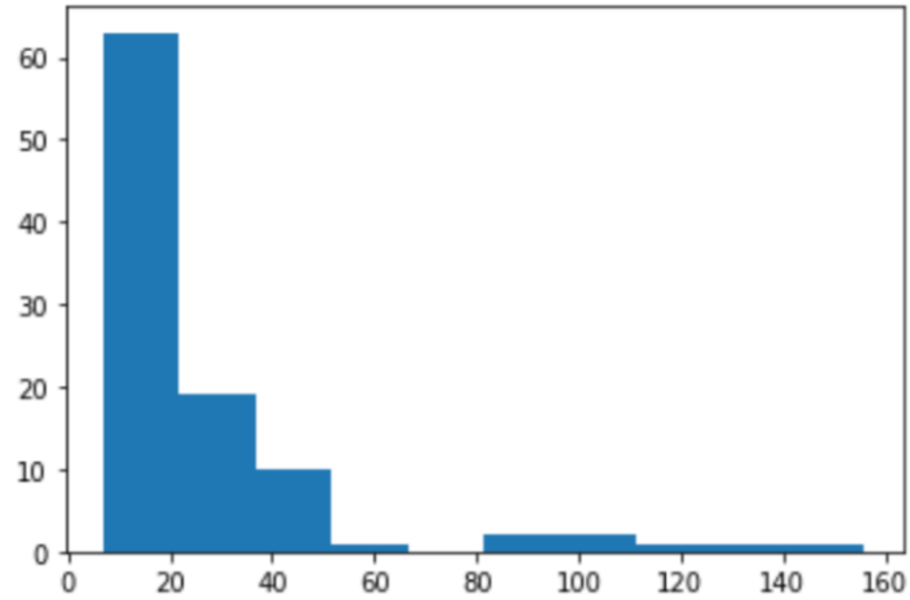

Рис. 1: Гістограма моментів першого проходження вище рівня 15

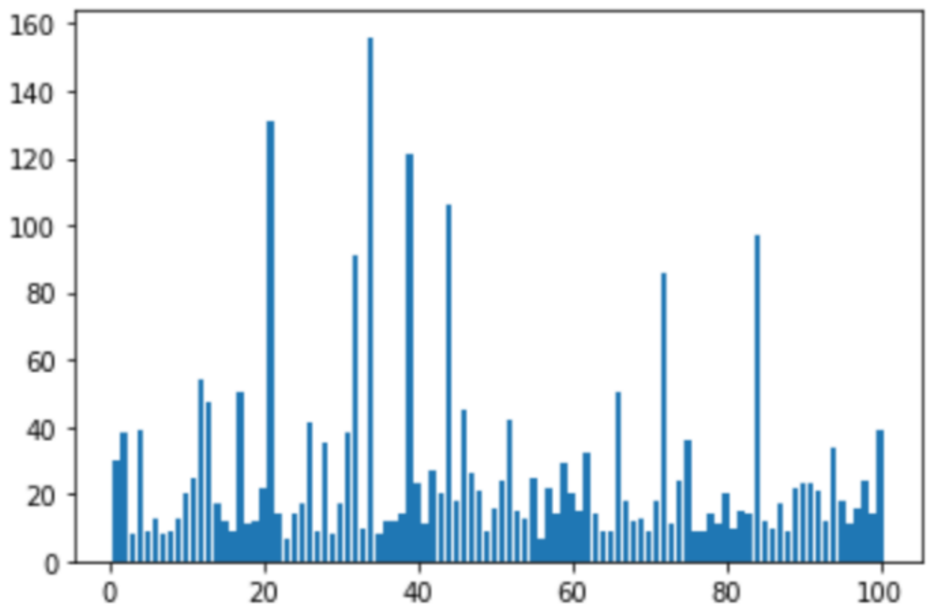

Рис. 2: Діаграма значень 100 реалізацій моментів першого проходження вище рівня 15

Висновки

Магістерська робота присвячена аналізу асимптотичної поведінки деяких характеристик (наприклад, число раундів, необхідне для вибуття перших M гравців) процедури вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi = \infty$, де ξ - випадкова змінна, що характеризує число нащадків процесу Гальтона-Ватсона.

Зокрема, у кваліфікаційній роботі

- описано класичну процедуру вибору лідера;
- наведено застосування алгоритму методу твірних функцій для оцінки середнього числа раундів у класичній процедурі вибору лідера для n учасників;
- досліджено процедуру вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi < \infty$ та реферативно описано результати попередніх досліджень цього об'єкту;
- вивчено граничну поведінку процесів Гальтона-Ватсона;
- сформульовано та доведено твердження про граничну поведінку числа гравців серед перших M, що вижили в n раундах, початкових номерів гравців, що вижили серед перших n раундів та числа раундів, необхідних для того, щоб всі гравці серед перших M вибули для процедури вибору лідера у випадку $E\xi \log \xi = \infty$;
- змодельовано граничний випадковий процес N', описаний в теоремі 2.2.

У майбутньому планується продовжити дослідження в області аналізу асимптотики поведінки характеристик процедури вибору лідера, оскільки пов'язані алгоритми широко використовуються у сучасній індустрії та деяких наукових дослідженнях, а знання про швидкодію роботи процесу є надзвичайно актуальними.

Література

[1] G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, and A. Marynych, Leader election using random walks – Latin American Journal of Probability and Statistics – 13 –2016 – pp. 1095-1122.

[2] G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, and A. Marynych, Leader election procedure using records – The Annals of Probability – 45 –2017 – pp. 4348-4388.

[3] K. B. Athreya and P. E. Ney, Branching processes – Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York – 1972 – pp.1 - 38

[4] F. T. Bruss and R. Grübel, On the Multiplicity of the Maximum in a Discrete Random Sample – The Annals of Applied Probability – 13 (4) – 2003 pp. – 1252-1263

[5] D. A. Darling, The Galton-Watson process with infinite mean – Journal of Applied Probability – 7 – 1970 – pp. 455-456.

[6] P. L. Davies, The simple branching process: a note on convergence when the mean is infinite – Journal of Applied Probability – 15(3) – 1978 – pp. 466-480.

[7] J. A. Fill, H. M. Mahmoud and W. Szpankowski, On the distribution of a duration of s randomized leader election algorithm – The Annals of Probability – 6 (4) – 1996 – pp. 1260-1283.

[8] P. Flajolet and R. Sedgewick, Analytic combinatorics – Cambridge University Press – 2009 – pp.1-49, pp.223-288, pp.375-400.

[9] R. Grübel and K. Hagemann, Leader election: A Markov chain approach – Mathematica Applicanda – 44 (1) – 2016 – pp. 113-134.

[10] C. C. Heyde, Extension of the result of Seneta for super-critical Galton-Watson process – Annals of Mathematical Statistics – 41 –1970 – pp.739-742.

[11] S. Janson and W. Szpankowski, Analysis of an assymetric leader election algorithm – The Electronic Journal of Combinatorics –4 (1) – 1997 – Research Paper 17, 16 pp.

[12] H. Prodinger, How to select a loser – Discrete Mathematics – 120 –1993 – pp.149-159.

[13] H.-J. Schuh and A. D. Barbour, On the asymptotic behaviour of branching processes with infinite mean – Advances in Applied Probability – 9 (4) –1977 – pp.681-723.

[14] G. Zanella and S. Zuyev, Branching-stable point processes – Electronic Journal of Probability – 20 (119) – 2015.