ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

УДК 929:51(540) **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.3**

Сергій ГЛАДУН, магістр (прикл. математика),
ORCID ID: 0000-0002-5896-676X
e-mail: gladunsergio@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА ПОЕЗІЯ ТРАГІЧНОЇ НЕСКІНЧЕННОСТІ

Анотація. *У статті дуже стисло розповідається про життєвий шлях і наукові досягнення індійського математика Срінівази Рамануджана Айєнгара, який зробив значний внесок у теорію чисел, математичний аналіз та інші галузі математики. Не маючи формальної освіти в галузі математики, він сам вивчав цю дисципліну, спираючись на обмежені ресурси та власну інтуїцію. Він сформулював безліч теорем, зробив припущення, які згодом були доведені іншими математиками, та розробив нові методи дослідження. Його роботи мали значний вплив на розвиток математики XX століття.*

Ключові слова: *ланцюговий дріб; тета-функція; гамма-функція Ейлера; дзета-функція Рімана.*

1. Вступ

Трохи більше 100 років минуло з дня смерті видатного індійського математика, представника формальних геніїв, Срініваси Аєнґара Рамануджана, який став своєрідним символом класичної математики. В математиці, як і в інших науках, є свої титани, революціонери, філософи. До титанів математики відносяться Л. Ейлер, К. Гаус, І. Ньютон, Р. Декарт. Революціонерами-математиками були М. Лобачевський, Е. Галуа, К. Гьодель, Г. Кантор. До математиків-філософів належать Б. Больцано, Г. Лейбніц, Б. Паскаль. Рамануджан належить до математиків-монахів, оскільки був позбавлений більшості математичних скарбниць людства і вимушений був шукати ці скарбниці самостійно, а потім іти до нових істин, яких людство ще не знало, своїм великим шляхом. Він жив у світі формул для рядів, інтегралів, нескінченних ланцюгових дробів та радикалів, що повторюються нескінченну кількість разів. Кожна з цих формул схожа на витвір мистецтва. Переважна більшість формул Рамануджана так чи інакше пов’язана з теорією тета-функцій, яка на сьогоднішній день представляє собою красивий і величний храм математичної архітектури. Доля Рамануджана, як і багатьох літературних поетів, була трагічна. Прожив він неповних 33 роки і помер від тяжкої хвороби у Четпуті неподалік від Мадрасу 26 квітня 1920 року. Досить повний варіант біографії див. у (Kanigel,1991).

2. Співпраця Рамануджана з Харді

Зараз у світі дуже багато прихильників і фанатів творчості Рамануджана. Скоріше за все це пов’язано із загадковою долею цього великого східного математика. У житті він був дуже скромною, віруючою, трохи дивною людиною, проте з ним інколи можна було поговорити і про політику. Рамануджан став всесвітньо відомим не тільки завдяки своїм грандіозним формулам, а й завдяки підтримці дуже поважного англійського математика Годфрі Гарольда Харді, якому він писав листи із далекої Індії, оскільки тоді на батьківщині його мало хто міг зрозуміти. Професор Харді відразу побачив, що має справу з унікальним талантом, який треба рятувати, і запросив приїхати до Англії для співпраці. У 1914 році, спираючись на одну з формул Рамануджана, професор Харді довів, що дзета-функція Рімана має нескінченну кількість нулів на критичній прямій. Ще одним видатним результатом співпраці цих вчених була асимптотична формула для функції числа розбиттів. Пізніше Радемахер отримав точну формулу, вдосконаливши метод Харді-Рамануджана.

Срініваса Аєнґар Рамануджан (1887-1920)

Асимптотична формула Харді-Рамануджана записується так:

$$p(n) = \frac{e^{K\lambda_n}}{4\sqrt{3}\lambda_n^2} + O\left(\frac{e^{K\lambda_n}}{\lambda_n^3}\right), \tag{1}$$

де $K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$, $n \geq 1$, а $p(n)$ є числом представлень n у вигляді суми натуральних доданків.

Одна із самих яскравих формул Рамануджана, яка містить функцію числа розбиттів (Hardy, 2002), має вигляд:

$$p(4) + p(9)q + p(14)q^2 + p(19)q^3 + \cdots = \tag{2}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$= 5\frac{\{(1-q^5)(1-q^{10})(1-q^{15})(1-q^{20})\cdots\}^5}{\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\cdots\}^6},$$

де $|q| < 1$.

Рамануджан ніколи не публікував повне доведення цього шедевру, який містить нескінченний добуток Ейлера. Але можна відтворити це доведення за опублікованою ним елементарною схемою. Більшість міркувань Рамануджана були елементарними, але нетривіальними, а інколи дуже складними. Англійський професор Ватсон систематично вивчав записні книжки Рамануджана із формулами і відновлював доведення, яких Рамануджан не залишив.

3. Формули Роджерса-Рамануджана

Завдяки Рамануджану став знаменитим англійський математик Роджерс – надзвичайно талановитий, але маловідомий вчений. Формули Роджерса-Рамануджана відносяться до комбінаторного аналізу й представлять собою велике математичне відкриття, хоча їх доведення займає дві сторінки. Рамануджан прийшов до цих формул незалежно від Роджерса. Спочатку у нього не було повного доведення, але пізніше він знайшов дуже красивий варіант міркувань. Ці формули наведені у (Hardy, 2002), а доведення Рамануджана можна знайти у (Hardy, Seshu, Wilson, 1927).

Математичні шедеври Рамануджан почав отримувати ще в юності. Наведемо, наприклад, наступні формули того періоду творчості:

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8-\cdots}}}} = 1 + 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right),$$

$$\sqrt[3]{\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)} = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}},$$

$$\sqrt[3]{\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)} + \sqrt[3]{\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right)} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}.$$

У першій з цих трьох формул знаки чергуються групами по три $(-,+,-)$. Очевидно, що здогадатись про існування подібних елементарних формул міг тільки математик самого високого рангу.

Коли, перебуваючи в Англії, Рамануджан тяжко захворів, то навіть лікарі не змогли заборонити йому напружено працювати над новим класом тета-функцій.

Як і теорію модулярних рівнянь високих степенів, Рамануджан дуже добре розумів формальний бік теорії нескінченних ланцюгових дробів. Приведемо цікаву формулу, яка зв'язує дві величини:

$$u = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^5}{1 + \cfrac{x^{10}}{1 + \cfrac{x^{15}}{1 + \cdots}}}}, \qquad v = \cfrac{x^{\frac{1}{5}}}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{1 + \cfrac{x^3}{1 + \cdots}}}}, \qquad |x| < 1.$$

Це елементарне алгебраїчне співвідношення має вигляд:

$$v^5 = u\frac{1 - 2u + 4u^2 - 3u^3 + u^4}{1 + 3u + 4u^2 + 2u^3 + u^4}. \tag{3}$$

Одного погляду достатньо, щоб зрозуміти глибину і складність доведення. Ще одна не менш цікава формула, яка пов'язана із цією темою, записується так:

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1 + \cdots}}}} = \mu e^{\frac{2\pi}{\sqrt{5}}}, \tag{4}$$

де

$$\mu = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} - 1}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

В лівій частині формули (4) знаходиться так званий ланцюговий дріб Роджерса Рамануджана. Формули (3) та (4) доводяться за допомогою теорії тета-функцій.

4. Формули Рамануджана, пов'язані з аналітичною теорією чисел

На думку автора цієї статті, часи формул не пройшли, і ніколи не пройдуть, хоча зараз іде ера обчислювальної техніки та нових інформаційних технологій, тому що математика при цьому ще більше споріднюється з мистецтвом. Ми бачимо, що поділ між наукою та мистецтвом умовний, і це підтверджує творчість Рамануджана. Навіть шахи, які придумали теж у Індії, є одночасно і наукою, і мистецтвом, а вже потім

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

спортом. Індійського математика Рамануджана можна порівняти ще із геніальним шаховим композитором, бо в нього також були дуже великі комбінаторні здібності і почуття краси математичної думки.

Зауважимо, що всього за декілька років Рамануджан фактично самостійно побудував базу для аналітичної теорії чисел, записавши асимптотичні формули для багатьох теоретико-числових функцій. Наведемо приклад однієї такої формули. Нехай $R(n)$ представляє кількість чисел $\le n$ вигляду $2^k 3^l$, де $k, l \in Z_0^+$. Тоді

$$R(n) \sim \frac{\lg(2n)\lg(3n)}{2\lg(2)\lg(3)}, \qquad n \to \infty.$$

Очевидно, що в даному випадку все не так просто, ніж коли розглядати числа вигляду 2^k або 3^k. Маємо наступні точні значення функції $R(n)$: $R(10^3) = 40$, $R(10^{50}) = 8\,839$, $R(10^{100}) = 35\,084$, $R(10^{150}) = 78\,734$. Формула Рамануджана дає відповідно наступні наближені значення: 39.96, $8\,838.996$, $35\,083.59$, $78\,734.29$.

Наостанок привернемо увагу читача до дивовижної формули, яка включає теоретико числову функцію Мьобіуса, гамма-функцію Ейлера та дзета-функцію Рімана (Titchmarsh, 1986):

$$\sqrt{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-\left(\frac{a}{n}\right)^2} - \sqrt{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-\left(\frac{b}{n}\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{b}}\sum_{n=1}^{\infty} b^{\rho}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\rho}{2}\right)}{\zeta'(\rho)}, \tag{5}$$

де $a, b > 0$ і $ab = \pi$. Зауважимо, що, можливо, ряд у правій частині по нетривіальним нулям дзета-функції збігається в звичайному сенсі, але для доведення цього недостатньо навіть гіпотези Рімана. Формулу (5) можна довести за допомогою теореми Коші про лишки.

Висновки

За свої математичні здобутки Рамануджан отримав звання професора Кембриджського університету та був обраний до англійської академії наук. З формулами Рамануджана пов'язані й порівняно нові напрямки математики (теорія нескінченновимірних алгебр Лі) та навіть фізики (статистична механіка та теорія струн). Для читачів, які бажають вивчати творчість Рамануджана, автор рекомендує багатотомні монографії (Berndt, 1985, 1998), (Andrews, Berndt, 2005, 2013) написані на основі манускриптів великого індійського математика.

Список використаних джерел

Kanigel R.(1991) *The Man Who Knew Infinity: A Life of the Genius Ramanujan.* Simon and Schuster.

Hardy G. H. (2002). *Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work*. Chelsea Pub Co.

Hardy G. H., Seshu Aiyar P. V. & Wilson B. M. (1927). *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge.

Titchmarsh E. C. (1986). *THE THEORY OF THE RIEMANN ZETA-FUNCTION*. Clarendon Press Oxford.

Berndt B. C. (1985, 1998), *Ramanujan Notebooks*, New York.

Andrews G. E., Berndt B. C. (2005-2013). *Ramanujan's Lost Notebooks*, New York.

Отримано редакцією журналу: 28.03.2022
Схвалено до друку: 24.06.2024

Sergiy GLADUN, Master's (App. Mathematics),
ORCID ID: 0000-0002-5896-676X
e-mail: gladunsergio@ukr.net

MATHEMATICAL POETRY OF TRAGIC INFINITY

Abstract. *The article, very briefly, tells about the life path and scientific achievements of the Indian mathematician Srinivasa Ramanujan Iyengar, who made a significant contribution to number theory, mathematical analysis and other areas of mathematics. With no formal training in mathematics, he taught himself the discipline, relying on limited resources and his own intuition. He formulated many theorems, made assumptions that were later proved by other mathematicians, and developed new research methods. His works had a significant impact on the development of mathematics in the 20th century.*

Keywords: *continued fraction; theta function; Gamma function; Riemann zeta function*.