Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Гуляницький Андрій Леонідович

УДК 519.63

Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю

01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
Семенов Володимир Вікторович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2016

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Із розвитком природознавства й техніки дедалі більшою стає потреба у дослідженні систем, еволюція яких характеризується пам'яттю (еридитарністю, залежністю від передісторії). Важливими прикладами математичних моделей систем з пам'яттю є інтегро-диференціальні рівняння й рівняння з дробовою похідною Рімана-Ліувілля або Капуто за часом. Так, інтегро-диференціальні рівняння Вольтерра описують теплопровідність і коливання у в'язко-пружних матеріалах. Рівняння у частинних похідних з дробовими похідними за часом слугують математичними моделями перенесення зарядів в аморфних напівпровідниках, дифузії речовин у ґрунтових водах, внутрішньоклітинного транспорту, перенесення морфогенів у тканинах зародків тощо. Побудовою сучасних математичних моделей таких процесів займались В.М. Булавацький, І.М. Соколов, С.П. Федотов, О.В. Чечкін, E. Barkai, R. Gorenflo, J. Klafter та інші науковці.

З іншого боку, деякі задачі прикладної математики (точкове, точково-імпульсне керування) потребують дослідження відповідних початково-крайових задач з правими частинами у вигляді розподілів скінченного порядку. Актуальними проблемами є встановлення існування і єдиності розв'язків таких задач, а також побудова методів наближеного знаходження цих розв'язків. Вказані проблеми для класичних і деяких некласичних типів рівнянь у частинних похідних досліджувались Ж.-Л. Ліонсом, Ю.М. Березанським, С.І. Ляшком, Д.А. Номіровським, В.В. Семеновим, А.В. Анікушиним, V.J. Ervin, J.P. Roop та іншими науковцями. Проте чимало таких проблем для інтегро-диференціальних рівнянь і рівнянь дробових порядків досі є відкритими. Особливо це стосується одного з новітніх класів моделей математичної фізики — рівнянь змінних порядків.

Слід зазначити, що не для усіх перелічених вище класів рівнянь відомі аналітичні розв'язки. Навіть у випадках, коли вдається одержати такі розв'язки у за допомогою спеціальних функцій, вони часто виявляються малопридатними для безпосереднього обчислення. Тому саме коректна й ефективна побудова наближених розв'язків цих рівнянь може відіграти значну роль у дослідженні фізичних властивостей ередитарних систем. Слід зазначити, що часова нелокальність досліджуваних рівнянь ускладнює їх чисельне розв'язування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу виконано в рамках тем наукових досліджень „Моделювання та оптимізація диференціальних та інтегро-диференціальних систем з розподіленими параметрами"(№ДР 0115U000165) і "Методи якісного аналізу та алгоритми для некласичних варіаційних задач"(№ДР 0112U008252) факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є одержання теоретичних і обчислювальних результатів, які стосуються якісного характеру розв'язків інтегро-диференціальних і дробових диференціальних рівнянь. Досягнення мети пов'язане з розв'язанням таких задач:

- встановлення існування узагальнених розв'язків параболічних, псевдопараболічних і псевдогіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь;
- побудова й обґрунтування чисельних методів розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь;
- обґрунтування збіжності чисельного методу для рівняння повільної дифузії з негладкою правою частиною;

— доведення розв'язності рівняння дифузії з похідною змінного порядку за часом;

— побудова чисельних методів для дробових рівнянь дифузії, зокрема змінного порядку.

Об'єкт дослідження: інтегро-диференціальні й дробові диференціальні (з дробовими похідними за часом) рівняння у частинних похідних.

Предмет дослідження: слабка розв'язність і наближене обчислення розв'зків початково-крайових задач для вказаних рівнянь.

Методи дослідження: розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь встановлено за домомогою abc-методу і теорії операторів. При дослідженні рівнянь дробового порядку використано відомості з функціонального аналізу і дробового числення. Крім того, застосовано метод обчислювального експерименту.

Наукова новизна одержаних результатів.

— вперше досліджено слабку розв'язність рівняння субдифузії змінного порядку;

— вперше запропоновано й реалізовано чисельний метод для рівняння субдифузії змінного порядку;

— доведено неперервність слабких розв'язків рівняння субдифузії сталого порядку і слабкої збіжності напівдискретного методу Гальоркіна з негладкими правими частинами;

— в апріорних нерівностях, відомих для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь, знято суттєві обмеження на коефіцієнти, що дало змогу поширити ці результати (і відповідні теореми узагальненої розв'язності й керованості) на більшість практично важливих рівнянь вказаного типу. Крім того, спрощено доведення допоміжних нерівностей;

— вперше обґрунтовано збіжність напівдискретного методу Гальоркіна для інтегро-диференціальних рівнянь з негладкими правими частинами. Шляхом обчислювального експерименту показано, що результати його роботи узгоджуються з теоретичними відомостями про властивості розв'язків.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи може бути використано для чисельного моделювання процесів аномальної дифузії, динаміки пружних тіл, дифузії у в'язко-пружних середовищах. Крім цього, елементи дисертаційної роботи було впроваджено у навчальний процес кафедри обчислювальної математики в рамках дисциплін „Математичне моделювання еволюційних процесів“ і „Теорія оптимізації у функціональних просторах“. Окремі результати роботи було використано при виконанні науково-дослідних тем „Моделювання та оптимізація диференціальних та інтегро-диференціальних систем з розподіленими параметрами"(№ДР 0115U000165) і "Методи якісного аналізу та алгоритми для некласичних варіаційних задач"(№ДР 0112U008252) факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації одержано автором самостійно. Роботи [2]-[4] виконані здобувачем без співавторів. У роботі [1] здобувачу належать леми 1-5 і теореми 1-2, а співавтору — постановка задачі й означення 1. У роботі [5] здобувачу належать леми 4-6 і теорема 1, співавтору належать лема 2 і теорема 2; леми 1-3 одержано здобувачем і співавтором спільно.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи доповідались на науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (2016 р.), науковому семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (Київ, 2016), науковому семінарі відділу математичних систем моделювання проблем екології та енергетики інституту кібернетики НАН України (Київ, 2016), а також на міжнародних наукових конференціях:

1. IX Міжнародна міждисциплінарна науково-практична конференція „Шевченківська весна-2011“ (Київ, 2011).

2. XV Міжнародна конференція „Dynamical System Modelling and Stability Investigation“ (Київ, 2011).

3. Міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів і молодих науковців „Ломоносов“ (Москва, 2013).

4. Гумбольд-Колег „The Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society“ (Київ, 2014).

5. VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка „Обчислювальна та прикладна математика“ (Київ, 2014).

6. III Європейсько-українська конференція „Mathematics for Life Sciences“ (Рівне, 2015).

7. VIII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка „Обчислювальна та прикладна математика“ (Київ, 2015).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковано в 5 статтях у наукових журналах [13, 16, 18, 20, 54], з них 4 статті у фахових виданнях, затверджених МОН України, і 1 стаття у іноземному фаховому виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз даних, а також у 7 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях [11, 12, 14, 15, 17, 19, 21].

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Зростання уваги до інтегро-диференціальних і дробових диференціальних рівнянь у частинних похідних у прикладній математиці другої пол. XX ст. і початку XXI ст. пов'язане з тим, що вказані класи рівнянь дають змогу більш точно описувати динаміку систем, еволюція яких характеризується ередитарністю (наявністю пам'яті). Зокрема, ередитарність типова для задач механіки, біофізики, електродинаміки. Разом з тим, математичне методи аналізу систем з пам'яттю має чимало спільного з методами дослідження класичних рівнянь математичної фізики. Йдеться, зокрема, про застосування теорії операторів для дослідження коректності постановки початково-крайових задач, теорії різницевих схем і скінченноелементного аналізу для побудови й обґрунутвання чисельних методів розв'язування цих задач. Втім, застосування перелічених методів до інтегро-диференціальних і дробових диференціальних систем має свої особливості.

Перший підрозділ огляду стосується теорії розв'язності операторних рівнянь, які є основою якісного аналізу задач математичної фізики; наступні два підрозділи висвітлюють фізичний зміст рівнянь, що є об'єктом дослідження дисертації, а також деяких близьких до них рівнянь. Крім того, у цих двох підрозділах наведено деякі результати, пов'язані з розв'язністю і чисельними методами для цих інтегро-диференціальних і дробових диференціальних рівнянь.

1.1. Слабкі розв'язки операторних рівнянь

Поняття *слабкого розв'язку* було розроблено у зв'язку з тим, що деякі початково-крайові задачі, які виникають при моделюванні фізичних процесів, не мають розв'язків у *класичих розв'язків* — функцій необхідної гладкості, які задовольняють диференціальне рівняння (в розумінні класичних означень похідних) й початкові та/або крайові умови.

Основна ідея поняття слабкого розв'язку полягає у тому, щоб перейти від диференціального рівняння до інтегральної тотожності, одержаної шляхом домноження рівняння на пробну функцію (довільний елемент певного простору гладких функцій) і подальшого інтегрування частинами. При цьому зазвичай припускається належність правої частини рівняння до певного класу узагальнених функцій (розподілів), тож відповідний розв'язок також називають *узагальненим*.

Зазвичай слабкі постановки рівнянь математичної фізики розглядають з правими частинами у вигляді узагальнених функцій скінченного порядку, щоб розв'язок належав деякому соболєвському простору невід'ємного порядку. Відзначимо, що оскільки операції диференціювання й згортки можна узагальнити і на більш широкий клас узагальнених функцій Соболєва-Шварца, можна розглядати диференціальні й деякі інтегральні рівняння й у таких просторах. Для деяких класичних диференціальних рівнянь у частинних похідних вказаний підхід реалізовано у [10]. Проте такий підхід має суттєвий недолік: розв'язки початково-крайових задач у такій узагальненій постановці також є, взагалі кажучи, узагальненими функціями, тобто їхня гладкість потребує окремого дослідження.

Історичний огляд розвитку теорії узагальненого розв'язку класичних задач математичної фізики наведено О.О. Ладиженською [25, 26, 27]. Для дослідження слабкої розв'язності часто застосовують методи функціонального аналізу, зводячи задачу до проблеми зображуваності лінійних неперервних функціоналів за допомогою білінійних форм. Достатні умови такої зображуваності забезпечують, зокрема, теорема Вішика–Лакса–Мільґрама [8, 99] і проекційна теорема Ж.-Л. Ліонса [105].

Серед методів дослідження слабкої розв'язності слід відзначити метод апріорних нерівностей у негативних нормах (нормах оснащених гільбертових просторів).

У [31] досліджено лінійні операторні рівняння

$$\mathcal{L}u = f \tag{1.1}$$

у гільбертових просторах. Розглянуто випадок, коли мають місце щільні вкладення гільбертових просторів

$$W^+ \subset H^+ \subset L_2(Q) \subset H_*^- \subset W_*^-, \tag{1.2}$$

$$W_*^+ \subset H^+ \subset L_2(Q) \subset H^- \subset W^-, \tag{1.3}$$

де Q — просторово-часовий циліндр.

Запропонована конструкція узагальненого розв'язку спирається на апріорні нерівності

$$\|u\|_{H^+} \leqslant \|\mathcal{L}u\|_{W_*^-} \leqslant \|u\|_{W^+},$$

$$\|v\|_{H_*^+} \leqslant \|\mathcal{L}^*v\|_{W_*^-} \leqslant \|v\|_{W_*^+},$$

де $\mathcal{L}^*$ — формально спряжений до $\mathcal{L}$ оператор, u,v — довільні елементи просторів W^+ і W_*^+ відповідно. Показано, що за умови виконання таких вкладень і нерівностей декілька природних означень узагальненого розв'язку є рівносильним, а рівняння (1.1) має єдиний розв'язок.

Втім, схожий підхід можна застосовувати і тоді, коли апріорні нерівності одержано для просторів, які не задовольняють умови (1.2)–(1.3). Відзначимо, наприклад, статтю [38], де досліджено узагальнену розв'язність псевдогіперболічного рівняння у частинних похідних.

Отже, дослідження узагальненої розв'язності операторних рівнянь за такого підходу зводиться до доведення апріорних нерівностей у негативних нормах. Такі нерівності було одержано для еліптичних крайових операторів Ю.М. Березанським [6], а згодом В.П. Діденком [22, 23]. Надалі цей метод було застосовано й для інших диференціальних операторів у частинних похідних [30, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 44]; див. також підсумкові роботи [31, 100, 32].

Пізніше теорію узагальнених розв'язків було розширено на операторні рівняння у просторах більш загального вигляду. Так, у [36] доведено існування і єдиність розв'язків операторних рівнянь у рівномірних просторах У книгах [32, 97] побудовано абстрактну теорію узагальнених розв'язків лінійних операторних рівнянь, а також розглянуто її застосування до диференціальних та інтегральних рівнянь.

Досліджувати слабку розв'язність рівнянь у частинних похідних можна й за допомогою методу Гальоркіна. Наприклад, дискретизувавши рівняння за просторовими змінними, можна одержати систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, а потім довести оцінки, які забезпечують обмеженість послідовності напівдискретних наближень. Далі можна скористатись теоремами слабкої компактності і довести існування розв'язку, єдиність якого забезпечується енергетичними оцінками. Такий підхід реалізовано, наприклад, у [46]. А саме, доведено, що для заданих f і u_0, таких що $f \in L_2(I, V*)$, $u \in H$ існує і єдина функція $u \in L_2(I, V)$, яка задовольняє тотожність

$$\frac{d}{dt}(u, v) + a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

і початкову умову

$$u|_{t=0} = u_0.$$

Тут $I = (0, T)$, V — гільбертів простір (найчастіше його вибирають як деякий соболєвський простір) зі спряженим V^*, $a(\cdot, \cdot)$ — білінійна форма, яка задовольняє умови додатної визначеності, $f \in V^*$.

Ще один підхід до вивчення розв'язності еволюційних рівнянь пов'язаний з поняттям *максимальної* L_p-*регулярності*. Нехай оператор $-A$ з областю визначення $D(A)$ породжує обмежену аналітичну напівгрупу в банаховому просторі X, а u й f — відображення $X \to I$. Тоді якщо для довільного $f \in L_p(I, X)$ задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad t \in I,$$

$$u(0) = 0$$

має єдиний розв'язок $u \in L_p(I, D(A)) \bigcap W_p^1(I, X)$, то кажуть, що ця задача має. має максимальну L_p-регулярність. За відповідного вибору $D(A)$ це поняття дуже близьке до слабкої розв'язності параболічного рівняння. Досліджувати максимальну L_p-регулярність можна, зокрема, за допомогою загальних теорем Да Прато-Ґрівара й Доре-Венні (див. напр. [68], [72]). Зокрема, Е. Бажлекова [58] застосувала цей підхід до рівнянь з дробовою похідною за часом.

1.2. Інтегро-диференціальні рівняння Вольтерра

1.2.1. Фізичний зміст. Одим з перших науковців, який систематично дослідив інтегро-диференціальні рівняння, був Віто Вольтерра. Окрім фундаментальних питань теорії ередитарних рівнянь, він розглянув і застосування таких рівнянь у механіці [124].

Інтегро-диференціальні рівняння застосовуються для моделювання ередитарних процесів у фізичних системах. У [119] розглядається декілька таких моделей для задач механіки, теплопровідності й дифузії (див. також [77, 85] і бібліографії цих праць). До однієї з них веде *ередитарний закон Гука*

$$\sigma(t) = D(t,t)\epsilon(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial D(t,s)}{\partial s}\epsilon(s)\ ds,$$

де u — вектор зміщень, σ — тензор напружень, ϵ — тензор деформацій, D — матриця жорсткості. Щоб одержати рівняння динаміки, закон Гука потрібно сполучити зі співвідношеннями

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad -\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = f_i,$$

де f — вектор зовнішніх сил, що діють на об'єм тіла.

Інтегро-диференціальне рівняння дифузії виводиться з *еридитарного закону Фіка* [119, 122]

$$q = K\nabla u(t) + \int\limits_0^t m(t-s)\nabla u(s)\ ds;$$

це співвідношення для потоку речовини підставляється у рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} q.$$

Прикладами матеріалів, які характеризуються таким режимом дифузії, є скловидні полімери.

Подібно до цього, у [111] виведено *інтегро-диференціальне рівняння теплопровідності*

$$\alpha(0)\theta'(x,t) + \int\limits_0^\infty \alpha'(s)\theta'(x,t-s)\ ds =$$

$$= \kappa(0)\Delta\theta(x,t) + \int\limits_0^\infty \kappa'(s)\Delta\theta(x,t-s)\ ds + r(x,t),$$

де апостроф позначає диференціювання за часовою змінною, κ — функція теплової релаксації, α — функція енерго-тепмературної релаксації.

У [48] розглянуто псевдопараболічне рівняння

$$(\gamma - \Delta)u_t - \Delta u - \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds = f(t,x),$$

яке виникає при розв'язуванні нелінійних задач динаміки спадково пружних тіл; рівняння

$$(a - \Delta)u_{tt} - \beta\Delta u_t - \Delta u - \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)\,ds = f(t,x)$$

у 3-вимірному просторі при $f = 0$ моделює стан в'язкопружно-динамічного середовища.

У теорії нейтронних полів зустрічається [90] гіперболічне рівняння

$$cu_{tt} + bu_t + au - u_{xx} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^t e^{-\lambda_j(t-s)}u(s)\,ds = \sum_{i=1}^{n} \beta_j e^{-\lambda_j t}.$$

У [24] розглядається динамічна задача з тертям

$$u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ijkh}\epsilon_{kh}(u) - \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} b_{ijkh}(t-s)\epsilon_{kh}(u(s))\,ds,$$

де ϵ_{kh} — значення тензора деформацій, a_{ijkh} — коефіцієнти миттєвої пружності, a_{ijkh} — коефіцієнти пам'яті матеріалу.

Еліптичні інтегро-диференціальні рівняння Вольтерра розглядались у [42] як моделі теорії плазми.

1.2.2. Методи аналізу. Вказані вище задачі досліджено методом фундаментальних оператор-функцій [48]. Доведено теореми існування та єдиності узагальненого й класичного розв'язків.

Узагальнену розв'язність параболічних та деяких інших інтегро-диференціальних рівнянь досліджував А.В. Анікушин [1, 2, 3, 4, 5, 55]. У працях цього автора *abc*-метод (див. підрозділ 1.1), пристосовано до особливостей інтегро-диференціальних рівнянь.

У [86] вивчено параболічну задачу

$$u'(t) + Au(t) = \int_0^t a(t,s)g(s,u(s))\, ds + f(t,u(t))$$

$$u(0) = u_0,$$

де оператор g пов'язаний з A співвідношенням

$$g(t,u(t)) = A^{1/2}q(t,u(t)),$$

а оператор q пов'язаний з операторами нижчого порядку $g_i(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))$. Слабкий розв'язок означено як відображення зі значеннями в $D(A^{1/2})$, яке задовольняє інтегральну тотожність

$$u(x,t) = T(t)u_0 + \int_0^t A^{1/2}T(t-s)\left[\int_0^s a(s,\tau)q(\tau,u(\tau))\, d\tau\right] ds +$$

$$+ \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))\, ds,$$

де $\{T(t)\}$ — аналітична напівгрупа, яку породжує A.

Доведено існування розв'язку і його продовжуваність до нескінченності. Перевагами цього методу є можливість враховувати нелінійність і досліджувати рівняння у банахових просторах. Разом з тим, це означення слабкого розв'язку передбачає неперервність за часом.

Однією з проблем, що виникає при чисельному розв'язуванні рівнянь з пам'яттю, є збільшення (від кроку до кроку) кількості часових шарів, від яких залежить розв'язок на наступній ітерації. У [113],[123] побудовано наближені методи, які використовують при обчисленні розв'язку його значення тільки у фіксованій кількості попередніх моментів часу і доведено оцінки похибки. Оцінки похибки напівдискретного методу скінченних об'ємів для параболічного інтегро-диференціального рівняння одержано у [76], а методу скінченних елементів, у [104]. Похибку дискретизації за часом для схем Ейлера і Кранка-Ніколсона розглянуто у [120].

У [102] досліджено напівлінійне псевдогіперболічне інтегро-диференціальне рівняння

$$u_{tt} - \nabla \left(a(x,t)\nabla u_t + b(x,t)\nabla u + \int\limits_0^t c(x,t,s)\nabla u(x,s)\ ds \right) = f(x,t).$$

За допомогою інтерполяційної техніки одержано оптимальні оцінки похибки.

1.3. Дробові за часом диференціальні рівняння

Означення 1.1. Нехай $t \geqslant 0$. Тоді *інтеграл Рімана-Ліувілля* функції f — це вираз

$$(I_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\ ds,$$

де $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

Зауважимо, що інтеграл Рімана-Ліувілля інтерполює оператори n-кратного інтегрування з нижньою межею 0.

Нехай $\alpha > 0$, $\{\alpha\}$ — дробова частина α, а $n = \lceil \alpha \rceil$ — найменше натуральне число, більше або рівне α.

Означення 1.2. *Похідними Рімана-Ліувілля й Капуто* функції f порядку α з нижньою межею 0 називаються відповідно оператори $D_0^\alpha f = \frac{d^n}{dt^n}\left(I_0^{1-\{\alpha\}} f\right)$ й ${}^*D_0^\alpha f = I_0^{1-\{\alpha\}}\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right)$.

Історично існувало декілька підходів до означування дробових похідних — у той час як похідна Рімана-Ліувілля зберігає природні диференціальні властивості степеневої функції, робились спроби побудувати теорію дробового диференціювання і на основі, наприклад, почленного диференціювання експоненційних рядів [116].

Відомо, що якщо $f \in AC^{n-1}([0,T])$, то

$$({}^*D_0^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds,$$

$$(D_0^\alpha f)(t) = ({}^*D_0^\alpha f)(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

Нижче при розгляді функцій багатьох змінних наведені позначення стосуються похідних за часовою змінною t.

1.3.1. Фізичний зміст. Застосування дробових похідних у природничих науках тісно пов'язані з таким типом математичних моделей як випадкові блукання з неперервним часом (ВБНЧ). А саме, розглядається траєкторія частинки, яка у випадкові моменти часу робить стрибки випадкової довжини у випадковому напрямі. Характеристиками моделі є початкове положення (або його розподіл) і щільність ймовірності переміщення на вектор x за час t (з моменту наступного стрибка). Якщо зміщення й час очікування стрибка незалежні, то кожна з цих величин задається окремою щільністю, які позначимо відповідно через $\lambda = \lambda(x)$ і $\psi = \psi(t)$.

Зрозуміло, що щільність $u(x,t)$ перебування частинки у точці x в момент часу t визначається вказаними параметрами. Для виведення співвідношення між ними використовують *перетворення Фур'є-Лапласа*

$$\overline{\widetilde{u}}(\xi,\nu) = \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^\infty e^{\nu t - i\xi x}\, dt\, dx.$$

Має місце співвідношення [60]

$$\overline{\widetilde{u}}(\xi,\nu) = \frac{(1-\overline{\psi}(\nu))\widetilde{u_0}(\xi)}{\nu(1-\overline{\psi}(\nu)\widetilde{\lambda}(\xi))}, \tag{1.4}$$

де $\overline{\psi}(\nu)$ і $\widetilde{\lambda}(\xi)$ — перетворення Лапласа й Фур'є.

Безпосередньо одержати зворотне перетворення для конкретних функцій ψ й λ не завжди буває просто, але з точки зору застосувань зазвичай достатньо співвідношень для поведінки $u(x,t)$ при великих x і t. При цьому виявляється корисною теорема Таубера [80]

$$f(t) \sim aBt^{-1-a} \iff \overline{f}(\nu) \sim 1 - B\Gamma(1-a)\nu^a$$

при $t \to \infty$, $\nu \to 0$, а позначення $F \sim G$ означає, що $\frac{F}{G} \to 1$.

За певних припущень (ψ має показниковий розподіл, а λ — нормальний), з (1.4) можна вивести класичне параболічне рівняння дифузії [95]. Якщо ж припустити, що

$$\psi(t) \sim \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\tau^\alpha}{t^{1+\alpha}}, \tag{1.5}$$

$$\lambda(x) = (4\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}},$$

де $0 < \alpha < 1$, $\tau > 0$, то справедливі асимптотичні формули

$$\overline{\psi}(\nu) = 1 - (\tau\nu)^\alpha + o(\nu^\alpha), \quad \widetilde{\lambda}(\xi) = 1 - \sigma^2\xi^2 + O(\sigma^4),$$

і підставивши ці вирази у (1.4) з урахуванням теореми Таубера, можна одержати *рівняння субдифузії* [95]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K_\alpha D_0^{1-\alpha} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \tag{1.6}$$

або, в іншому записі,

$${}^*D_0^\alpha u = K_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.7}$$

Величина $K_\alpha = \frac{\sigma^2}{\tau^\alpha}$ інтерпретується як коефіцієнт дифузії. Рівняння (1.6), як і (1.7), природним чином узагальнюється на випадок багатовимірного простору.

Вінерівські процеси в евклідовому просторі характеризуються лінійним зростанням середньоквадратичного зміщення. При дифузійному процесі, що описується рівнянням (1.6), середньоквадратичне зміщення зростає пропорційно до t^α, тобто повільніше, ніж для класичної моделі. Якщо для дифузійного процесу середньоквадратичне зміщення зростає повільніше за лінійну функцію часу, то такий процес називають *субдифузією*, а якщо швидше — *супердифузією*. Загалом, якщо залежність не є лінійною, то кажуть про *аномальну дифузію*.

Субдифузійний характер процесу перенесення частинок речовини може бути пов'язаний зі структурою середовища, в якому відбувається цей процес. Якщо середовище має складну структуру, яка зумовлює тривалі затримки частинок (пористі, тріщинуваті матеріали), то степенева щільність часу очікування (1.5) більш адекватно описує рух. Такі характеристики випадкового блукання було запропоновано в [109] для моделювання перенесення носіїв заряду в аморфних напівпровідниках, і ця модель виявилась набагато точнішою, аніж класичний броунівський рух (див. також [45]). Пізніше з'явились праці, в яких це випадкове блукання використовувалось як модель дифузії речовин в інших середовищах — ґрунтових водах, внутрішньоклітинному просторі тощо (див. напр. [47, 57, 59, 95, 96] і посилання у цих працях).

Аномальний характер дифузії у клітинах пов'язаний зі складністю структури клітини. Переміщення молекул вздовж цитоскелетів має супердифузійний характер, а решті внутрішньоклітинного простору властиве скупчення (crowding) молекул, внаслідок чого рух частинок відбувається значно повільніше, і у деяких випадках адекватно моделюється ВБНЧ вигляду (1.5) [121]. Слід зазначити, що дослідження процесів внутрішньоклітинної дифузії має велике значення для медичних наук, і ці процеси є одним з основних об'єктів дослідження сучасної статистичної фізики [61] З іншого боку, як уже було зазначено, стохастичним моделям дифузії — випадковим блуканням — відповідають рівняння у частинних похідних (зокрема, дробових порядків) для концентрації.

Рівняння (1.6) є найпростішою моделлю субдифузії, яка допускає різні узагальнення. Зокрема, моделювання дифузії у просторово неоднорідних середовищах потребує дослідження випадку, коли порядок α похідної за часом залежить від просторової змінної. Це було вперше зроблено у [65], де виведено рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(K(x) D_0^{1-\alpha(x)} u \right). \tag{1.8}$$

Слід наголосити, що порядок диференціювання у правій частині (друга похідна за просторовою змінною діє на похідну Рімана-Ліувілля за часом) є принциповим: якщо $\alpha(\cdot)$ не є сталою, то рівняння (1.8) не зводиться до вигляду (1.7) з порядком похідної $\alpha = \alpha(x)$ у лівій частині. Іншими словами, „інтуїтивне“ узагальнення рівняння (1.7) на випадок змінного порядку є некоректним з фізичної точки зору.

Окремого дослідження потребує й випадок, коли субдифузійне переміщення частинок супроводжується їхньою деградацією (розпадом). Математичними моделями таких процесів є рівняння реакції-дифузії. До цих процесів належить, зокрема, переміщення радіоактивних забрудників у ґрунтах, а також поширення у зародках організмів сигнальних молекул, відомих як морфогени. Диференціація й розвиток клітин зародка розпочинається під впливом морфогенів, коли їх концентрація поблизу клітин перевищує певний пороговий рівень (значення цього порогу залежить від типу клітини). Морфогени виділяє спеціальна частина ембріона; звідти вони поширюються тканиною, в процесі чого частина з них розпадається [50]. У [117, 91] виведено *рівняння реакції-субдифузії*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e^{-\theta t} K(x) D_0^{1-\alpha} \left(e^{\theta t} u \right) \right) - \theta u, \tag{1.9}$$

Зазначимо, що такий запис рівняння допускає узагальнення на випадок змінного порядку $\alpha = \alpha(x)$. Крім того, коефіцієнт реакції θ теж може залежати як від x, так і від t і навіть від самої концентрації $u(x,t)$. В останньому випадку вираз θt в експоненційних функціях потрібно замінити на $\int_0^t \theta(x,s,u(x,s))\ ds$; при цьому рівняння стає нелінійним. На думку деяких науковців, така постановка теж становить практичний інтерес [50].

Узагальнення класичного рівняння конвекції-дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x},$$

де коефіцієнт a характеризує поле сил або конвективне перенесення, здійснюється на випадок дробового порядку двома способами (залежно від фізичної моделі).

Якщо частинки, окрім дифузійного переміщення, характеризуються однорідним полем швидкостей v, рівняння конвекції-субдифузії має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = K_\alpha D_0^{1-\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Натомість, якщо значення швидкості v прив'язане до ейлерової координати, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_0^{1-\alpha}\left(-A_\alpha\frac{\partial}{\partial x}v(x) + K_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t).$$

Ще одним прикладом рівняння у частинних похідних з дробовою похідною за часом, яке має застосування в біомедичних дослідженнях, є *дробове рівняння Кляйна-Крамерса* [56]

$$\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[vP(x,v,t)] + \frac{F(x)}{M}\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial v} = \\ = \gamma_\alpha D_0^{1-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial v}v + A\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right]P(x,v,t), \quad (1.10)$$

де $P(x,v,t)$ — щільність перебування частинки у точці x зі швидкістю v в момент t, $F(x)$ — зовнішнє поле сили, а A, M і γ_α визначаються іншими фізичними характеристиками системи.

Зазначимо, що процес, який описується цим рівнянням, має супердифузійний характер. Шляхом інтегрування за змінною v з рівняння

(1.10) можна одержати інтегро-диференціальне рівняння для просторово-часової щільності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_\alpha I_0^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Рівняння (1.10) з $F = 0$ застосовано у [69] для моделювання міграції ракових клітин в організмі. На експериментальних даних проілюстровано, що це дробове рівняння більш адекватно відображає досліджуваний процес, аніж класичні (цілопорядкові) рівняння Ланжевена, Фоккера-Планка і Кляйна-Крамерса.

У [93] запропоновано модель еволюції ракової пухлини:

$$e^{Ct} \cdot {}^*D_0^\alpha \left(e^{-Ct} u\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(D(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right) = -Cu - G(x,t), \qquad (1.11)$$

де $u = u(x,t)$, C — характеристика інтенсивності розмноження (поділу) клітин, $G(x,t)$ — доданок, який моделює вплив хіміотерапії.

Наведені вище дробові диференціальні рівняння є рівняннями в частинних похідних. Втім, насправді деякі з них можна одержати з певних дискретних співвідношень шляхом граничного переходу. Це стосується рівнянь, які виводяться з ВБНЧ з дискретною множиною станів (наприклад, можна вважати, що частинка переміщується між вузлами, рівномірно розташованими на відрізку; стрибки щоразу здійснюються в один із сусідніх вузлів). Якщо ж не переходити до границі (згущуючи сітку до нескінченно малої відстані між вузлами), то замість рівняння у частинних похідних можна одержати *систему звичайних дробових диференціальних рівнянь різного порядку*

$$\begin{aligned} \frac{dp_k(t)}{dt} = a_{k-1} e^{-\theta_{k-1} t} D_0^{1-\alpha_{k-1}} \left(p_{k-1}(t) e^{\theta_{k-1} t}\right) + \\ + b_{k+1} e^{-\theta_{k+1} t} D_0^{1-\alpha_{k+1}} \left(p_{k+1}(t) e^{\theta_{k+1} t}\right) - \\ - (a_k + b_k) e^{-\theta_k t} D_0^{1-\alpha_k} \left(p_k(t) e^{\theta_k t}\right) - \theta_k p_k(t), \quad (1.12) \end{aligned}$$

де $p_k(t)$ — ймовірність бути у k-му вузлі в момент t, а a_k і b_k — характеристики, пов'язані з ймовірностями переходів з відповідного вузла ліворуч і праворуч.

Система (1.12) є досить загальною: вона враховує і дифузію, і конвекцію (через a_k і b_k, різниця між якими характеризує зміщення під дією чинників недифузійної природи), і реакцію (через коефіцієнти θ_k), і просторову неоднорідність (кожне рівняння має свій порядок α_k, що відповідає ситуації $\alpha = \alpha(x)$).

На межі області, в якій розглядається блукання (тобто у крайніх точках) можна задавати різні додаткові умови. Наприклад, можна припустити, що досягнувши крайньої лівої точки (нехай вона має індекс 0), частинка може при наступному стрибку або переміститись праворуч (з імовірністю, яка виражається через b_0 — аналогічно до внутрішніх вузлів), або „спробувати" перейти ліворуч. В останньому випадку вона поглинається з ймовірністю χ, а з імовірністю $1 - \chi$ „відбивається" від межі, залишаючись у крайньому зліва вузлі.

Якщо в усіх крайніх точках задано умову $\chi = 0$, а частинки не характеризуються деградацією ($\theta_k = 0$), то речовина повністю зберігається в області, тобто $\sum p_i(t) = 1$. У цьому випадку проявляється цікавий нелінійний ефект, досліджений у [78] і названий *структурною нестійкістю*. Навіть незначне збурення значень α_k може призвести до докорінних змін поведінки розв'язку при $t \to \infty$. А саме, якщо $\alpha_k = \alpha^*$ для $k \neq k_0$ і $\alpha_{k_0} = \alpha^* - \epsilon$, де $\epsilon > 0$, то при $t \to \infty$ має місце $p_k \to 0$, $k \neq k_0$ і $p_{k_0}(t) \to 1$. Таку ситуацію називають *аномальним накопиченням* (aggregation), і вона не має місця для незбуреної системи.

Додамо, що порядок α у дробових рівняннях дифузії можна інтерпретувати як швидкість дифузії: чим меншим є його значення, тим повільніше відбувається процес (бо тим повільніше спадає щільність очікування часу стрибка). З огляду на це, аномальне накопичення можна пояснити тим, що у точці найменшого порядку рівняння частинки в середньому затримуються найдовше: прибуття частинок відбувається інтенсивніше, ніж вихід.

Окрім рівнянь змінного порядку, існує ще одне узагальнення дробових рівнянь сталого порядку — *рівняння розподіленого порядку*. Наприклад, деякі фізичні процеси описуються рівнянням

$$\int_0^1 \tau^{\alpha-1} p(\alpha) D_0^{\alpha} u(x,t)\, d\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{V'(x)}{m\nu} + K \frac{\partial x}{\partial x^2} \right) u(x,t).$$

Еволюція систем, що описуються такими рівнянянми, відбувається ще повільніше, аніж у випадку рівняння дробового порядку. При $p(\alpha) = q\alpha^{q-1}$ середньоквадратичне зміщення має асимптотику

$$\left\langle x^2(t) \right\rangle \sim \log^q t;$$

такий режим ще називають *ультраповільною дифузією*. Рівняння такого типу досліджено у [62, 63, 64, 98].

Слід окремо зупинитись на питанні про початкові умови для дробових рівнянь. Вигляд цих умов залежить від типу похідної за часом. Для похідної Капуто порядку α, $\lceil \alpha \rceil = n$, потрібно задавати значення функції і її похідних цілих порядків: $u|_{t=0}, \ldots, \frac{\partial^{(n-1)} u}{\partial t^{(n-1)}}|_{t=0}$ (всього n умов) [70]. Для рівнянь з похідними Рімана-Ліувілля потрібні умови на дробові похідні у початковий момент часу — $I_0^{n-\alpha} u|_{t=0}, D_0^{\alpha-n+1} u|_{t=0}, \ldots, D_0^{\alpha-1} u|_{t=0}$ [114] (тут оператор I_0 дробового інтегрування за часовою змінною фактично відіграє роль похідної від'ємного порядку).

Дискусійним є питання про фізичний зміст таких початкових умов. На думку деяких авторів, умови, що містять початкові значення дробових похідних, не мають „чіткої фізичної інтерпретації“ [49]. З іншого боку, останнім часом з'явилася низка праць, де здійснено спроби дати фізичну та геометричну інтерпретацію дробовим похідним [115] і початковим умовам для рівнянь з такими похідними [89]. З практичної точки зору, ці два підходи часто виявляються рівносильними [106].

Ще однією галуззю природознавства, що інтенсивно використовує моделі з дробовими похідними, є механіка (зокрема теорія в'язко-пружності). Найзагальнішою з них є дробова модель Зенера [89]

$$\sigma(t) + \nu^* D_0^\alpha \sigma(t) = \lambda \epsilon(t) + \mu^* D_0^\alpha \epsilon(t),$$

де $\epsilon(t)$ – тензор деформації, $\sigma(t)$ – тензор напружень, λ, ν і μ – параметри системи.

В [67] використано теорію в'язко-пружності для вивчення артеріальної системи людини. Співвідношення між тензорами деформації й напруження мають вигляд

$${}^*D_0^\alpha \epsilon(t) = \frac{E_2}{\nu(E_1+E_2)} \left[\frac{\nu}{E_2} {}^*D_0^\alpha \sigma(t) + \sigma(t) - E_1 \epsilon(t) \right],$$

де ν, E_1, E_2 – параметри системи. Дослідження в'язко-пружних властивостей артерій допомагає з'ясувати їхню біомеханічну структуру, що може бути корисним для діагностики патологій і прогнозування еволюції кровоносної системи людини з віком.

У [108] запропоновано дробове хвильове рівняння

$${}^*D_0^\alpha u = K \Delta u, \quad 1 < \alpha < 2.$$

Властивості цього рівняння, як і його порядок, є проміжними між класичними рівняннями дифузії й коливань. У [107] довежено, що фундаментальний розв'язок дробового хвильового оператора є функцією Райта.

1.3.2. Методи аналізу. Як і для диференціальних рівнянь цілих порядків, для дробових диференціальних рівнянь розроблено чимало методів аналітичного й чисельного розв'язування. Аналітичні розв'язки зазвичай містять спеціальні функції.

Розв'язок рівняння субдифузії (1.6) можна записати в термінах функцій Фокса [95, 96]. Крім того, в [73] в термінах функцій Райта знайдено фундаментальний розв'язок задачі

$$({}^*D_0^\alpha u)(x,t) - Bu(x,t) = f(x,t),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),$$

де

$$Bu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i} + a(x)u-$$

рівномірно еліптичний оператор з обмеженими неперервними коефіцієнтами. У [125] знайдено функцію Ґріна одновимірної задачі Коші для рівняння субдифузії в термінах функцій Фокса, а у [118] цей результат поширено на випадок багатовимірної просторової змінної і $\alpha \in (1,2)$. У [112] знайдено розв'язок задачі Коші для рівняння субдифузії і доведено його єдиність у класі функцій, які задовольняють аналог умови Тихонова.

У [29] доведено існування і єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння з дробовою похідною за часом у випадку, коли у правій частині й початковій умові присутні узагальнені функції.

Ґрунтовне дослідження розв'язності еволюційних рівнянь з дробовими похідними здійснено у [58]. Зокрема, для початково-крайових задач вигляду

$$D_0^\alpha u(x,t) = \mathcal{A}u(x,t) + f(x,t),$$

$$I_0^{1-\alpha}|_{t=0} = u_0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

встановлено умови існування та єдиності розв'язку у просторах вигляду $L_p([0,T],H)$ (максимальної L_p-регулярності), H — гільбертів простір функцій просторових змінних. Для цього задача розбивалась на дві підзадачі: з нульовою правою частиною і з однорідними початковими умовами. Першу з цих задач вивчено за допомогою теорії напівгруп, а другу — шляхом узагальнення на випадок дробового порядку теорії максимальної L_p-регулярності.

У [87] для рівняння субдифузії з самоспряженим оператором за допомогою теореми фон Неймана - Діксім'є доведено збіжність розв'язку, одержаного методом відокремлення змінних.

У [75] запропоновано оригінальний метод дослідження дробових рівнянь, який не має аналогів для рівнянь цілих порядків. А саме, використано формулу дробового інтегрування частинами

$$({}^*D_0^\alpha u, v)_{L_2} = (D_0^{\frac{\alpha}{2}} u, D_T^{\frac{\alpha}{2}} v)_{L_2},$$

причому можна показати, що при $u = v$ вираз у правій частині оцінюється знизу через квадрат дробової соболєвської норми u. Сказане справедливе для гладких функцій, носій яких лежить строго всередині часового відрізка $[0, T]$. Втім, множина таких функцій у випадку $\alpha < \frac{1}{2}$ виявляється щільною у соболєвському просторі порядку α. Це дає змогу переформулювати рівняння у вигляді тотожності з коерцитивною білінійною формою (де на аргументи діють похідні однакових порядків) і застосувати лему Лакса-Мільґрама. В цьому розумінні дробові диференціальні рівняння за своїми властивостями зближуються з еліптичними.

Для чисельного розв'язування дробових диференціальних рівнянь запропоновано різні методи. Ті з них, що ґрунтуються на пошаровому обчисленні розв'язку, потребують дискретизації дробових похідних. Загалом, можна виділити два підходи до цієї проблеми [114]. Перший полягає у заміні дробової похідної квадатурною формулою (це можна зробити, замінивши першу похідну різницевим співвідношенням в інтегральному поданні дробової похідної). Прикладом такої квадратурної формули для похідної порядку $\alpha \in (0, 1)$ є

$$({}^*D_0^\alpha f)(t_j) \approx \sum_{k=0}^{j} c_{kj} f_{j-k},$$

де $t_j = j\tau$, $f_j = f(t_j)$, а коефіцієнти c_j задаються співвідношенням

$$\Gamma(2-\alpha)c_{kj} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ -2k^{1-\alpha} + (k-1)^{1-\alpha} + (k+1)^{1-\alpha}, & k = \overline{1, j-1} \\ -(\alpha-1)k^{-\alpha} + (k-1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}, & k = j. \end{cases}$$

Інший підхід (див. напр. [83, 114]) спирається на те, що похідна Рімана-Ліувілля достатньо гладких функцій збігається з *похідною Ґрюнвальда-Летнікова*

$$(\mathbf{D}_0^\alpha f)(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t-kh).$$

На практиці ці два підходи дають доволі близькі результати.

Гальоркінські методи для дробових рівнянь представлені широким набором алгоритмів. Відзначимо запропоновану в [101] просторово-часову дискретизацію з базисними функціями, які виражаються в термінах многочленів Якобі.

Стійкість, швидкість збіжності, консервативність та інші питання, пов'язані з дискретизацією рівнянь сталих порядків, досліджувались у [51, 52, 81, 84, 88, 92]. Аналіз чисельних методів для звичайних дробових диференціальних рівнянь здійснено у [66, 71].

Як і у випадку інтегро-диференціальних операторів, обчислення дробових похідних безпосередньо за квадратурними формулами потребує зберігання у пам'яті дедалі більшої кількості попередніх значень функції (так проявляється ефект пам'яті). Щоб усунути цю проблему, було запропоновано *принцип фіксованої пам'яті*, відповідно до якого усі значення, окрім деякої фіксованої кількості останніх, відкидаються. У [114] доведено оцінки похибки для таких наближень. Інші методи зменшення обчислювальної складності, але зі збереженням прийнятної точності, розроблялись у [82].

Чисельно-аналітичний метод знаходження розв'язку дробового рівняння дифузії у насичених соляними розчинами геосередовищах застосовано у [7].

1.4. Висновки

1) Існує декілька означень і методів дослідження слабкої розв'язності еволюційних рівнянь. Історично більшість із них, хоча не усі, було розроблено для дослідження класичних моделей математичної фізики (насамперед параболічних). Можливість поширення методів на інші класи рівнянь залежить від конкретного вигляду цих рівнянь.

2) Поняття слабкого розв'язку активно розроблялось у контексті дослідження інтегро-диференціальних рівнянь. Разом з тим, теорем розв'язності й збіжності чисельних методів, які б охоплювали випадок негладкої як за простором, так і за часом правої частини, відомо дуже мало. Виглядає перспективним застосування abc-методу для таких цілей.

3) Інтегро-диференціальні й дробові диференціальні рівняння є поширеними математичними моделями процесів у фізиці й біології. Останнім часом набувають поширення рівняння змінних порядків. Проте ці рівняння мають складніші властивості навіть порівняно з дробовими рівняннями сталих порядків. Дослідження розв'язності, розроблення аналітичних й чисельних методів розв'язування таких рівнянь є актуальними науковими проблемами.

РОЗДІЛ 2
ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

У цьому розділі досліджуються питання розв'язності, побудови чисельних методів і властивостей розв'язків для інтегро-диференціальних рівнянь у слабкій постановці. При цьому застосовано підхід, реалізований у [31], [38] для диференціальних рівнянь у частинних похідних. Теореми існування і єдиності розв'язків одержано як наслідки апріорних нерівностей у негативних нормах.

Нехай $T > 0$, Ω — обмежена замкнена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0, T]$. Нехай також C_0^∞ і C_T^∞ — множини нескінченно диференційовних у $\overline{Q}$ функцій, які задовольняють, відповідно, певні початково-крайові умови і спряжені до цих умов. Під L_2, якщо не вказано інше, матимемо на увазі простір $L_2(Q)$. Під C надалі матимемо на увазі додатну величину, яка може набувати різних значень у різних нерівностях, але не залежить від елементів гільбертових просторів. Наприклад, нерівність $\|u\|_1 \leqslant C\|u\|_2 \leqslant C\|u\|_3$, якщо не вказано конкретне значення C, розумітимемо так: $\exists c_1, c_2 > 0\ \forall u\ \|u\|_1 \leqslant c_1\|u\|_2 \leqslant c_2\|u\|_3$.

Наведемо означення й теореми існування та єдиності розв'язків операторних рівнянь, для яких справедливі апріорні нерівності [31]. Нехай W^+ і H^+ (W_*^+ і H_*^+) — поповнення C_0^∞ (C_T^∞) за деякими нормами $\|\cdot\|_W$ і $\|\cdot\|_{H^+}$, причому $W^+ \subset H^+ \subset L_2$ (зауважимо, що вкладення є щільними). Позначимо через W^- і H^- негативні простори, побудовані за L_2 й W^- і H^- відповідно. Аналогічно побудуємо гільбертові простори W_*^- і H_*^-. Мають місце ланцюжки вкладень

$$W^+ \subset H^+ \subset L_2 \subset H^- \subset W^-,$$

$$W_*^+ \subset H_*^+ \subset L_2 \subset H_*^- \subset W_*^-.$$

Нехай $\mathcal{L}$ — лінійний оператор, визначений на C_0^∞, а $\mathcal{L}^*$ — оператор, формально спряжений до $\mathcal{L}$. Припустимо, що справедливі апріорні нерівності

$$\|u\|_{H^+} \leqslant C\|\mathcal{L}u\|_{W_*^-} \leqslant C\|u\|_{W^+}, \quad \|v\|_{H_*^+} \leqslant C\|\mathcal{L}^*v\|_{W^-} \leqslant C\|v\|_{W_*^+}. \tag{2.1}$$

Тоді $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}^*$) можна розширити за неперервністю до оператора з множиною визначення W^+ (W_*^+).

Розглянемо операторне рівняння

$$\mathcal{L}u = f. \tag{2.2}$$

Означення 2.1. Розв'язком рівняння (2.2) з правою частиною $f \in W_*^-$ називається елемент $u \in W^+$, який задовольняє рівність $\mathcal{L}u = f$ у просторі W_*^-.

Означення 2.2. Розв'язком рівняння (2.2) з правою частиною $f \in W_*^-$ називається елемент $u \in W^+$, для якого існує послідовність $u_i \in C_0^\infty$, така що

$$\|u_i - u\|_{W^+} \to 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W_*^-} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Означення 2.3. Розв'язком рівняння (2.2) з правою частиною $f \in W_*^-$ називається елемент $u \in W^+$, такий що для усіх $v \in W_*^+$ справедлива рівність

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle_{W_*^- \times W_*^+} = \langle f, v\rangle_{W_*^- \times W_*^+},$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_*^- \times W_*^+}$ — розширення за неперервністю скалярного добутку простору L_2 на $W^- \times W^+$.

Теорема 2.1. *Нехай справедливі нерівності (2.1). Тоді означення (2.1)–(2.3) рівносильні, і для довільного $f \in H_*^-$ існує і єдиний розв'язок рівняння (2.2) в розумінні цих означень.*

Означення 2.4. Розв'язком рівняння (2.2) з правою частиною $f \in W_*^-$ називається елемент $u \in H^+$, для якого існує послідовність $u_i \in C_0^\infty$, така що

$$\|u_i - u\|_{H^+} \to 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W_*^-} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Означення 2.5. Розв'язком рівняння (2.2) з правою частиною $f \in W_*^-$ називається елемент $u \in H^+$, такий що для усіх $v \in W_*^+$, для яких $\mathcal{L}^* v \in H^-$, справедлива рівність

$$\langle \mathcal{L}^* v, u \rangle_{H^- \times H^+} = \langle f, v \rangle_{W_*^- \times W_*^+},$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^- \times H^+}$ — розширення за неперервністю скалярного добутку простору L_2 на $H^- \times H^+$.

Теорема 2.2. *Нехай справедливі нерівності (2.1). Тоді означення (2.4) й (2.5) рівносильні, і для довільного $f \in W_*^-$ існує і єдиний розв'язок рівняння (2.2) в розумінні цих означень.*

Дещо інший випадок апріорних нерівностей (менш сингулярна права частина) досліджено у [32].

Тоді справедлива

Теорема 2.3. *Нехай справедливі нерівності*

$$\|u\|_{H^+} \leqslant C\|\mathcal{L}u\|_{H_*^-} \leqslant C\|u\|_{H^+}, \quad \|v\|_{H_*^+} \leqslant C\|\mathcal{L}^* v\|_{H^-} \leqslant C\|v\|_{H_*^+}. \qquad (2.3)$$

Тоді для довільного $f \in H_*^-$ існує і єдиний розв'язок $u \in H^+$ рівняння $\mathcal{L}u = f$.

Аналогічні теореми справедливі й для спряженого рівняння $\mathcal{L}^* v = g$.

При доведенні коерцитивності інтегро-диференціальних операторів буде використано дві допоміжні нерівності.

Лема 2.1. *Нехай $f, g \in C([0,T])$ — невід'ємні функції. Тоді $\forall p > 0$*

$$\int_0^T f(t) \left(\int_0^t e^{ps} g(s)\, ds \right) dt \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int_0^T e^{pt} f^2(t)\, dt + \int_0^T e^{pt} g^2(t)\, dt \right)$$

Доведення. Застосуємо нерівність Коші-Буняковського для внутрішнього інтегралу:

$$\int\limits_0^T f(t)\left(\int\limits_0^t e^{ps}g(s)\;ds\right)\;dt = \int\limits_0^T f(t)\left(\int\limits_0^t e^{\frac{ps}{2}}\cdot e^{\frac{ps}{2}}g(s)\;ds\right)\;dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T f(t)\sqrt{\frac{e^{pt}-1}{p}}\sqrt{\int\limits_0^t e^{ps}g^2(s)\;ds}\;dt \leqslant \int\limits_0^T f(t)\sqrt{\frac{e^{pt}-1}{p}}\;dt\cdot\sqrt{\int\limits_0^T e^{ps}g^2(s)\;ds}.$$

Ще раз використаємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\int\limits_0^T f(t)\sqrt{\frac{e^{pt}-1}{p}}\;dt = \int\limits_0^T e^{\frac{pt}{2}}f(t)\sqrt{\frac{e^{pt}-1}{pe^{pt}}}\;dt \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_0^T e^{pt}f^2(t)\;dt}\sqrt{\int\limits_0^T \frac{e^{pt}-1}{pe^{pt}}\;dt} \leqslant \sqrt{\int\limits_0^T e^{pt}f^2(t)\;dt}\sqrt{\int\limits_0^T \frac{1}{p}\;dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{T}{p}}\sqrt{\int\limits_0^T e^{pt}f^2(t)\;dt}.$$

Отже,

$$\int\limits_0^T f(t)\left(\int\limits_0^t e^{ps}g(s)\;ds\right)\;dt \leqslant \sqrt{\frac{T}{p}}\sqrt{\int\limits_0^T e^{pt}f^2(t)\;dt}\sqrt{\int\limits_0^T e^{pt}g^2(t)\;dt} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\left(\int\limits_0^T e^{pt}f^2(t)\;dt + \int\limits_0^T e^{pt}g^2(t)\;dt\right).$$

$\square$

Лема 2.2. *Для довільної функції $u \in C(Q)$, такої що $u|_{\partial\Omega} = 0, u_{x_i} \in L_2$, і сталої $p > 0$ справделива нерівність:*

$$\int\limits_Q |u(x,t)|\int\limits_0^t e^{ps}|u_{x_i}(x,s)|\;ds\;dQ \leqslant C_\Omega\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_Q e^{pt}u_{x_i}^2(x,t)\;dQ,$$

де C_Ω *— стала, з якою виконується нерівність Фрідріхса* $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega)}$ *в області* Ω, $i \in \{1, ..., n\}$.

Це твердження одержується застосуванням леми 2.1 з $f(t) = |u(x,t)|$, $g(t) = |u_{x_i}(x,t)|$ і нерівності Фрідріхса.

2.1. Параболічні інтегро-диференціальні рівняння

Розглянемо початково-крайову задачу

$$u_t + \mathcal{A}u + \mathcal{I}u = f, \tag{2.4}$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.5}$$

Тут $u = u(x,t)$ — шукана функція, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}$ — диференціальний оператор другого порядку:

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

$\mathcal{I}$ — вольтеррівський інтегральний оператор:

$$\mathcal{I}u = \int_0^t -\sum_{i,j=1}^{n} (k_{ij}(x,t,s)u_{x_i}(x,s))_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t,s)u_{x_i}(x,s) +$$

$$+ k(x,t,s)u(x,s)\ ds.$$

Накладемо такі умови на коефцінєнти рівняння:

— $a_{ij} = a_{ji}, a_i, \frac{\partial a_i}{\partial x_i}, a$ вимірні й обмежені в Ω;

— $k_{ij} = k_{ji}, k_i, \frac{\partial k_i}{\partial x_i}, k, \frac{\partial k_{ij}}{\partial s}, \frac{\partial k_i}{\partial s}, \frac{\partial k}{\partial s}$ — вимірні й обмежені в $\Omega \times [0,T] \times [0,T]$.

Позначимо через M сталу, яка при всіх $x \in \Omega,\ t,s \in [0,T]$ мажорує значення функцій $|a_{ij}(x)|, |a_i(x)|, |a(x)|, \left|\frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}\right|, |k_{ij}(x,t,s)|$, $|k_i(x,t,s)|, |k(x,t,s)|, \left|\frac{\partial k_i(x,t,s)}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial k_{ij}(x,t,s)}{\partial s}\right|, \left|\frac{\partial k_i(x,t,s)}{\partial s}\right|, \left|\frac{\partial k(x,t,s)}{\partial s}\right|$.

Зауваження 2.1. У багатьох задачах підінтегральний вираз має вигляд $m(t-\tau)\mathcal{K}u$, де $\mathcal{K}$ – диференціальний оператор, аналогічний оператору

$\mathcal{A}$, тобто незалежний від часових змінних t и τ. Сама функція $m(t-\tau)$, яка враховує передісторію процесу, може мати вигляд $m(t-\tau) = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{m} \varphi_i e^{\lambda_i(t-\tau)}$ [28], сталої або синусоїди [42].

Припустимо, що оператор $\mathcal{A}$ рівномірно еліптичний: $\exists \alpha > 0\ \forall x \in \Omega$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2.$$

Нехай C_s^∞, $s \in \{0, T\}$ — лінійні множини нескінченно диференційовних функцій, які задовольняють крайові умови:

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=s} = 0. \tag{2.6}$$

Позначимо через W^+ і H^+ поповнення C_0^∞ за нормами

$$\|u\|_{W^+} = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \; dQ \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{H^+} = \left(\int_Q \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 \; dQ \right)^{\frac{1}{2}},$$

а через W_*^+ — поповнення C_T^∞ за нормою $\|\cdot\|_{W^+}$. Зауважимо, що вводити простір H_*^+ як поповнення C_T^∞ за нормою $\|\cdot\|_{H^+}$ немає потреби, оскільки він був би тотожним H^+. Через W^-, W_*^-, H^- позначимо відповідні негативні простори. З умов (2.6) і нерівності Фрідріхса випливає, що справедливі ланцюжки щільних вкладень

$$W^+ \subset H^+ \subset L_2 \subset H^- \subset W^-, \quad W_*^+ \subset H^+ \subset L_2 \subset H^- \subset W_*^-.$$

2.1.1. Узагальнена постановка. Для дослідження на узагальнену розв'язність введемо білінійні форми

$$l_r(u,v) \equiv -r(u,v_t)_{L_2} + r\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2} + r\sum_{i=1}^{n}(a_i u_{x_i}, v)_{L_2} + r(au,v)_{L_2} +$$

$$+ r\sum_{i,j=1}^{n}\left(u_{x_i}, \int_t^T k_{ij}(x,s,t) v_{x_j}(x,s)\; ds \right)_{L_2} +$$

$$+ r\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i}, \int\limits_t^T k_i(x,s,t)v(x,s)\,ds\right)_{L_2} + r\left(u, \int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\,ds\right)_{L_2}, \tag{2.7}$$

де $r > 0$ (як показано нижче, цей допоміжний параметр дає змогу зняти деякі обмеження на коефіцієнти).

Лема 2.3. *Для довільних $u \in C_0^\infty$ і $v \in C_T^\infty$ справедлива рівність*

$$l_1(u,v) = \langle u_t + \mathcal{A}u + \mathcal{I}u, v\rangle_{W_*^- \times W_*^+},$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_*^-,W_*^+}$ — розширення за неперервністю скалярного добутку у просторі $L_2(Q)$ на $W_*^- \times W_*^+$.

Доведення. Інтегруючи частинами за змінною t з урахуванням умов (2.6), одержуємо

$$\int\limits_Q u_t v\,dQ = -\int\limits_Q u v_t\,dQ;$$

Інтегрування частинами за змінними x_i з урахуванням умов (2.6) дає

$$\int\limits_Q -\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)u_{x_j}\right)_{x_i}\,dQ = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_j}v_{x_i}\,dQ,$$

Крім того, інтегруючи частинами за просторовими змінними і змінюючи порядок інтегрування за іншими змінними, маємо

$$\int\limits_Q \left[\int\limits_0^t -\sum_{i,j=1}^{n}\left(k_{ij}(x,t,s)u_{x_i}(x,s)\right)_{x_j} + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t,s)u_{x_i}(x,s) + k(x,t,s)u(x,s)\,ds\right] v(x,t)\,dQ =$$
$$= \int\limits_\Omega \left[\int\limits_0^T \int\limits_0^t \sum_{i,j=1}^{n} k_{ij}(x,t,s)u_{x_i}(x,s)v_{x_j}(x,t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t,s)u_{x_i}(x,s)v(x,t) + k(x,t,s)u(x,s)v(x,t)\,dsdt\right]\,d\Omega =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left[\int\limits_0^T \int\limits_s^T \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x,t,s) u_{x_i}(x,s) v_{x_j}(x,t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n k_i(x,t,s) u_{x_i}(x,s) v(x,t) + k(x,t,s) u(x,su) v(x,t)\ dtds \right] \ d\Omega =$$

$$= \int\limits_Q \left[u_{x_i}(x,\tau) \int\limits_s^T \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x,t,\tau) v_{x_j}(x,t)\ dt + \right.$$

$$\left. + u_{x_i}(x,su) \int\limits_s^T \sum_{i=1}^n k_i(x,t,s) v(x,t)\ dt + u(x,\tau) \int\limits_s^T k(x,t,\tau) v(x,t)\ dt \right] \ dQ,$$

що завершує доведення. □

Дослідимо неперервність білінійної форми l_1.

Лема 2.4. *Для* $u \in H^+$ *і* $v \in W_*^+$ *справедлива нерівність*

$$|l_1(u,v)| \leqslant C \|u\|_{H^+} \|v\|_{W_*^+}.$$

Доведення. Оцінимо окремо кожний з доданків білінійної форми l_1, використовуючи нерівність Шварца:

$$|-(u,v_t)_{L_2}| \leqslant \|u\|_{L_2} \|v_t\|_{L_2} \leqslant \|u\|_{H^+} \|v\|_{W_*^+}.$$

$$\left| \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2} \right| \leqslant \sum_{i,j=1}^n M \|u_{x_j}\|_{L_2} \|v_{x_i}\|_{L_2} \leqslant$$

$$\leqslant Mn^2 \|u\|_{H^+} \|v\|_{H^+} = Mn^2 \|u\|_{H^+} \|v\|_{W_*^+}.$$

$$\left| \sum_{i=1}^n (a_i u_{x_j}, v)_{L_2} \right| \leqslant \sum_{i=1}^n M \|u_{x_i}\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leqslant C \|u\|_{H^+} \|v\|_{W_*^+}.$$

$$|(au,v)_{L_2}| \leqslant M \|u\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \leqslant C \|u\|_{H^+} \|v\|_{W_*^+}.$$

Перейдемо до інтегральних доданків:

$$\left| \sum_{i,j=1}^n \left(u_{x_i}, \int\limits_t^T k_{ij}(x,s,t) v_{x_j}(x,s)\ ds \right)_{L_2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left|\sum_{i,j=1}^{n}\left(|u_{x_i}|,\int\limits_0^T|v_{x_j}(x,s)|\;ds\right)_{L_2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{i,j=1}^{n}\left(|u_{x_i}|,\int\limits_0^T|v_{x_j}(x,s)|\;ds\right)_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{L_2}\left\|\int\limits_0^T|v_{x_j}(x,s)|\;ds\right\|_{L_2}\leqslant M\sqrt{T}\sum_{i,j=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{L_2},\left\|v_{x_j}\right\|_{L_2}\leqslant$$

$$M\sqrt{T}n^2\|u\|_{H^+}\|v\|_{H^+}\leqslant C\|u\|_{H^+}\|v\|_{W_*^+}.$$

(при оцінюванні норми інтеграла застосовано інтегральну невірність Коші-Буняковського). Аналогічно

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\left(u_{x_i},\int\limits_t^T k_i(x,s,t)v(x,s)\;ds\right)_{L_2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\left|\sum_{i=1}^{n}\left(|u_{x_i}|,\int\limits_0^T|v(x,s)|\;ds\right)_{L_2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\left(|u_{x_i}|,\int\limits_0^T|v(x,s)|\;ds\right)_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{L_2}\left\|\int\limits_0^T|v(x,s)|d\tau\right\|_{L_2}\leqslant M\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\|u_{x_i}\|_{L_2},\|v\|_{L_2}\leqslant$$

$$M\sqrt{T}n\|u\|_{H^+}\|v\|_{L_2}\leqslant M\sqrt{T}n\|u\|_{H^+}\|v\|_{W_*^+}.$$

Нарешті,

$$\left|\left(u,\int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\;ds\right)_{L_2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\left(|u|,\int\limits_0^T|v(x,s)|\;ds\right)_{L_2}\leqslant M\left(|u|,\int\limits_0^T|v(x,s)|\;ds\right)_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant M\|u_{x_i}\|_{L_2}\left\|\int\limits_0^T |v(x,s)|\ ds\right\|_{L_2} \leqslant M\sqrt{T}\sum_{i=1}^n \|u\|_{L_2}, \|v\|_{L_2} \leqslant$$

$$M\|u\|_{L_2}\|v\|_{L_2} \leqslant C\|u\|_{H^+}\|v\|_{W_*^+}.$$

□

Наслідок 2.1. *Білінійні форми l_r є неперервними у розглянутій парі просторів, тобто*

$$l_r(u,v) \leqslant C_r\|u\|_{H^+}\|v\|_{W_*^+}.$$

З лем 2.3 і 2.4 випливає, що білінійну форму l_1 можна розширити за неперервністю на множину $H^+ \times W_*^-$. Це розширення породжує лінійний неперервний оператор $\mathcal{L}$, що діє з H^+ в W_*^-, а також спряжений оператор $\mathcal{L}^*$, що діє з W^+ в H^-; при цьому на множині гладких функцій цей оператор тотожний оператору $\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{A}+\mathcal{I}$. Такі самі оператори (з точністю до множника r) породжуються і білінійними формами l_r; позначимо їх через ${\mathcal{L}^*}_r$ і ${\mathcal{L}^*}_r$.

Тепер, розширивши скалярний добуток $(\cdot,\cdot)_{L_2}$ до білінійної форми $\langle\cdot,\cdot\rangle_{W_*^-\times W_*^+}$, можна перейти від операторного рівняння (2.4) до інтегральної тотожності

$$l_r(u,v) = \langle f, v\rangle_{W_*^-\times W_*^+}\,, \tag{2.8}$$

або, що те саме, до рівняння $\mathcal{L}u = f$, де $f \in W_*^-$. Зрозуміло, що за умов на гладкість і праву частину, достатніх для класичного розуміння задачі (2.4)–(2.5), рівняння (2.8) рівносильне останній.

Отже, змінивши праву частину, можна досягти того, щоб початкова умова була однорідною. Тому надалі досліджуватиметься саме цей випадок.

Позначимо через $l_r^{(1)}(u,v)$ білінійну форму, яка відповідає оператору $\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{A}$ (перші чотири доданки $l_r(u,v)$), а через $l_r^{(2)}(u,v)$ — білінійну форму, що відповідає оператору $\mathcal{I}$ (останні три доданки $l_r(u,v)$).

2.1.2. Апріорні нерівності у негативних нормах.

Лема 2.5. *Для $u \in H^+$ справедлива нерівність $\|\mathcal{L}u\|_{W_*^-} \geqslant C\|u\|_{L_2}$.*

Доведення. Доведемо нерівність леми для оператора $\mathcal{L}_r$ при деякому значенні r, яке буде уточнено пізніше (зрозуміло, що оцінка $\|\mathcal{L}_r u\|_{W_*^-} \geqslant C_r\|u\|_{L_2}$ рівносильна твердженню леми зі сталою $C = \frac{C_r}{r}$). Розглянемо інтегральне перетворення, що ставить у відповідність кожному елементу $u \in C_0^\infty$ функцію

$$v(x,t) = -\int\limits_T^t e^{-ps}u(x,s)\ ds,$$

де p — деяка додатна стала, значення якої буде вказано нижче. Маємо $u(x,t) = -e^{pt}v_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t) = -e^{pt}v_{tx_i}(x,t)$. Зрозуміло, що $v \in C_T^\infty$.

Щоб одержати оцінку для $\mathcal{L}_r$, доведемо ланцюжок нерівностей

$$\|\mathcal{L}_r u\|_{W_*^-}\|v\|_{W_*^+} \geqslant |(\mathcal{L}_r u, v)_{L_2}| \geqslant C_{1,r}\|v\|^2_{W_*^+} \geqslant C_r\|v\|_{W_*^+}\|u\|_{L_2}.$$

Ліва нерівність — це нерівність Коші-Шварца. Права очевидно випливає з того, що $\|v\|_{W_*^+} \geqslant \|v_t\|_{L_2} = \|ue^{-pt}\|_{L_2} \geqslant e^{-pT}\|u\|_{L_2}$. Відтак, достатньо оцінити знизу вираз $|l_r(u,v)| = \left|l_r^{(1)}(u,v) + l_r^{(2)}(u,v)\right|$.

У [32] показано, що при виконанні умов

$$a(x) \geqslant \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i(x)}{\partial x_i}, \quad a(x) \geqslant 0 \ \ \forall x \in \Omega \tag{2.9}$$

справедлива оцінка для $l_1^{(1)}(u,v)$, яку можна переписати через $l_r^{(1)}(u,v) = rl_1^{(1)}(u,v)$ у такий спосіб:

$$l_r^{(1)}(u,v) \geqslant \frac{r}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_Q e^{pt}v_t^2\ dQ + r\frac{\alpha p - nM^2}{2}\int\limits_Q e^{pt}\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\ dQ +$$

$$+\frac{r\alpha}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0}\ d\Omega = \frac{r}{2}\sum_{i=1}^n \int\limits_Q e^{pt}v_t^2\ dQ +$$

$$+R_1(p)\int\limits_Q e^{pt}\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\ dQ+\frac{r\alpha}{2}\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0}\ d\Omega,$$

де $R_1(p)\sim p$ при $p\to\infty$.

Тепер розглянемо доданок

$$l_r^{(2)}(u,v)=J_1+J_2+J_3.$$

Оцінимо кожне J_i окремо.

$$J_1=-r\sum_{i,j=1}^n\int\limits_Q e^{pt}v_{tx_i}(x,t)\int\limits_t^T k_{ij}(x,s,t)v_{x_j}(x,s)\ ds\ dQ.$$

Проінтегруємо частинами за змінною t.

$$J_1=-r\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega\left\{e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int\limits_t^T k_{ij}(x,s,t)v_{x_j}(x,s)\ ds\ \right\}\Bigg|_{t=0}^{t=T}\ d\Omega+$$

$$+r\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega\int\limits_0^T pe^{pt}v_{x_i}(x,t)\int\limits_t^T k_{ij}(x,s,t)v_{x_j}(x,s)ds\ \ dt\ d\Omega+$$

$$+r\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega\int\limits_0^T e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int\limits_t^T \frac{\partial k_{ij}(x,s,t)}{\partial t}v_{x_j}(x,s)\ ds\ dt\ d\Omega-$$

$$-r\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega\int\limits_0^T e^{pt}k_{ij}(x,t,t)v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)\ dt\ d\Omega=J_{1,1}+J_{1,2}+J_{1,3}+J_{1,4}.$$

Перший доданок у цій сумі оцінимо так:

$$|J_{1,1}|=r\left|\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega\left\{e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int\limits_t^T k_{ij}(x,s,t)v_{x_j}(x,s)\ ds\ \right\}\Bigg|_{t=0}^{t=T}\ d\Omega\right|=$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^n\int\limits_\Omega v_{x_i}(x,0)\cdot\int\limits_0^T rk_{ij}(x,s,0)v_{x_j}(x,s)\ ds\ d\Omega\right|\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \left[v_{x_i}^2(x,0) + \left(\int\limits_0^T r|k_{ij}(x,s,0) v_{x_j}(x,s)| \ ds \right)^2 \right] \ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \left(v_{x_i}^2(x,0) + r^2 M^2 T \int\limits_0^T v_{x_j}^2(x,s) \ ds \right) \ d\Omega =$$

$$= \frac{n}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2|_{t=0} \ d\Omega + \frac{nr^2M^2T}{2} \int\limits_{Q} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 \ dQ \leqslant$$

$$\leqslant \frac{nr^2M^2T}{2} \int\limits_{Q} e^{pt} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 \ dQ + \frac{n}{2} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2|_{t=0} \ d\Omega.$$

Решту доданків оцінимо, використовуючи лему 2.1.

$$|J_{1,2}| = r \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T pe^{pt} v_{x_i}(x,t) \int\limits_t^T k_{ij}(x,s,t) v_{x_j}(x,s) ds \ dt \ d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant rpM \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T e^{pt} |v_{x_i}(x,t)| \int\limits_t^T |v_{x_j}(x,s)| \ ds \ dt \ d\Omega =$$

$$= rpM \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T |v_{x_j}(x,s)| \int\limits_0^{\tau} e^{pt} |v_{x_i}(x,t)| \ dt \ ds \ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{rpM}{2} \sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T e^{pt} \left(v_{x_i}^2(x,t) + v_{x_j}^2(x,t) \right) \ dt \ d\Omega =$$

$$= nr\sqrt{pT} M \int\limits_{Q} e^{pt} \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 \ dQ.$$

$$|J_{1,3}| = r \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T e^{pt} v_{x_i}(x,t) \int\limits_t^T \frac{\partial k_{ij}(x,s,t)}{\partial t} v_{x_j}(x,s) \ ds \ dt \ d\Omega \right| =$$

$$= r \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^T v_{x_j}(x,s) \int\limits_0^s \frac{\partial k_{ij}(x,s,t)}{\partial t} e^{pt} v_{x_i}(x,t) \ dt \ ds \ d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant rM\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}|v_{x_j}(x,s)|\int\limits_{0}^{s}e^{pt}|v_{x_i}(x,t)|\;dt\;ds\;d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant\frac{rM}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}\left(|v_{x_i}^2(x,t)|+|v_{x_j}^2(x,t)|\right)\;dt\;d\Omega=$$

$$=nrM\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ.$$

$$|J_{1,4}|=r\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}k_{ij}(x,t,t)v_{x_i}(x,t)v_{x_j}(x,t)\;dt\;d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant\frac{rM}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}\left(v_{x_i}^2(x,t)+v_{x_j}^2(x,t)\right)\;dt\;d\Omega=nrM\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ.$$

Отже,

$$|J_1|\leqslant\left(nrM\sqrt{Tp}+\frac{nr^2M^2T+2nrM}{2}+nrM\sqrt{\frac{T}{p}}\right)\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ+$$

$$+\frac{n}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2|_{t=0}\;d\Omega.$$

Тепер розглянемо доданок J_2.

$$J_2=r\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}u_{x_i}(x,t)\int\limits_{t}^{T}k_i(x,s,t)v(x,s)\;ds\;dQ=$$

$$=-r\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}e^{pt}v_{tx_i}(x,t)\int\limits_{t}^{T}k_i(x,s,t)v(x,s)\;ds\;dQ.$$

Проінтегрувавши частинами за t, одержуємо

$$J_2=-r\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\left\{e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int\limits_{t}^{T}k_i(x,s,t)v(x,s)\;ds\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=T}\;d\Omega+$$

$$+r\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\int_{0}^{T} pe^{pt}v_{x_i}(x,t)\int_{t}^{T} k_i(x,s,t)v(x,s)\;ds\;dt\;d\Omega +$$

$$+r\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\int_{0}^{T} e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int_{t}^{T} \frac{\partial k_i(x,s,t)}{\partial t}v(x,s)\;ds\;dt\;d\Omega -$$

$$-r\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\int_{0}^{T} e^{pt}k_i(x,t,t)v_{x_i}(x,t)v(x,t)\;dt\;d\Omega = J_{2,1}+J_{2,2}+J_{2,3}+J_{2,4}.$$

Оцінимо доданки $J_{2,i}$ аналогічно до того, як це зроблено для $J_{1,i}$.

$$|J_{2,1}| = \left| -r\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\left\{ e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int_{t}^{T} k_i(x,s,t)v(x,s)\;ds\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=T} d\Omega \right| =$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega} v_{x_i}(x,0)\cdot\int_{0}^{T} rk_i(x,s,0)v(x,s)\;ds\;d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left[v_{x_i}^2(x,0) + \left(\int_{0}^{T} r|k_i(x,s,0)v(x,s)|\;ds \right)^2 \right] d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{1}{2}\left(v_{x_i}^2(x,0) + r^2M^2T\int_{0}^{T} v^2(x,s)\;ds \right) d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2|_{t=0}\;d\Omega + \frac{r^2M^2C_\Omega T}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{Q} v_{x_i}^2\;dQ \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^2M^2C_\Omega T}{2}\int_{Q} e^{pt}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2\;dQ + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2|_{t=0}\;d\Omega.$$

Наступний доданок оцінимо за лемою 2.2:

$$|J_{2,2}| = r\left| \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\int_{0}^{T} pe^{pt}v_{x_i}(x,t)\int_{t}^{T} k_i(x,s,t)v(x,s)ds\;dt\;d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant rpM\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}|v_{x_i}(x,t)|\int\limits_{t}^{T}|v(x,s)|\;ds\;dt\;d\Omega=$$

$$=rpM\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}|v(x,s)|\int\limits_{0}^{\tau}e^{pt}|v_{x_i}(x,t)|\;dt\;ds\;d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant rpM\frac{C_\Omega+1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ=rM\frac{C_\Omega+1}{2}\sqrt{Tp}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ.$$

Таким самим способом можна показати, що

$$|J_{2,3}|=r\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}v_{x_i}(x,t)\int\limits_{t}^{T}\frac{\partial k_i(x,s,t)}{\partial t}v(x,s)\;ds\;dt\;d\Omega\right|\leqslant$$

$$\leqslant rM\frac{C_\Omega+1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ.$$

Доданок $J_{2,4}$ оцінимо безпосередньо:

$$|J_{2,4}|=r\left|\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}k_i(x,t,t)v_{x_i}(x,t)v(x,t)\;dt\;d\Omega\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{rM}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{T}e^{pt}\left(v_{x_i}^2(x,t)+v^2(x,t)\right)\;dt\;d\Omega\leqslant$$

$$\leqslant\frac{rM(C_\Omega+1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}e^{pt}v_{x_i}^2(x,t)\;dQ.$$

Додаючи одержані нерівності для $J_{2,i}$, маємо

$$|J_2|\leqslant\left(rM\frac{C_\Omega+1}{2}\sqrt{Tp}+\frac{r^2M^2TC_\Omega T+rM(1+C_\Omega)}{2}+rM\frac{C_\Omega+1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\right)\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\;dQ+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2|_{t=0}\;d\Omega.$$

Нарешті, оцінимо J_3.

$$J_3 = r\int\limits_Q u(x,t)\int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\ ds\ dQ =$$

$$= -r\int\limits_Q e^{pt}v_t(x,t)\int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\ ds\ dQ.$$

Проінтегрувавши частинами за t, перепишемо J_3 у вигляді суми

$$J_3 = -r\int\limits_\Omega \left\{ e^{pt}v(x,t)\int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\ ds \right\}\Bigg|_{t=0}^{t=T}\ d\Omega +$$

$$+r\int\limits_\Omega \int\limits_0^T pe^{pt}v(x,t)\int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\ ds\ dt\ d\Omega +$$

$$+r\int\limits_\Omega \int\limits_0^T e^{pt}v(x,t)\int\limits_t^T \frac{\partial k(x,s,t)}{\partial t}v(x,s)\ ds\ dt\ d\Omega -$$

$$-r\int\limits_\Omega \int\limits_0^T e^{pt}k(x,t,t)v^2(x,t)\ dt\ d\Omega = J_{3,1} + J_{3,2} + J_{3,3} + J_{3,4}.$$

Як і раніше, оцінимо за модулем кожний з одержаних доданків окремо.

$$|J_{3,1}| = \left| -r\int\limits_\Omega \left\{ e^{pt}v(x,t)\int\limits_t^T k(x,s,t)v(x,s)\ ds \right\}\Bigg|_{t=0}^{t=T}\ d\Omega \right| =$$

$$= \left| \int\limits_\Omega v(x,0)\cdot \int\limits_0^T rk(x,s,0)v(x,s)\ ds\ d\Omega \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \frac{1}{2}\left[v^2(x,0) + \left(\int\limits_0^T r|k(x,s,0)v(x,\tau)|\ ds \right)^2 \right]\ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} \left(v^2(x,0) + r^2 M^2 T \int\limits_0^T v^2(x,s)\ ds \right)\ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^2 M^2 T}{2} \int\limits_Q e^{pt} v^2\ dQ + \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} v^2|_{t=0}\ d\Omega.$$

Решту доданків можна оцінити аналогічно до $J_{1,2}$, $J_{1,3}$ и $J_{1,4}$:

$$|J_{3,2}| \leqslant r\sqrt{pT} M \int\limits_Q e^{pt} v^2\ dQ;$$

$$|J_{3,3}| \leqslant rM\sqrt{\frac{T}{p}} \int\limits_Q e^{pt} v^2\ dQ;$$

$$|J_{3,4}| \leqslant rM \int\limits_Q e^{pt} v^2\ dQ.$$

Застосувавши нерівність Фрідріхса до правих частин усіх нерівностей для $J_{3,i}$ і додавши одержані вирази, прийдемо до потрібної оцінки J_3:

$$|J_3| \leqslant \left(rM\sqrt{Tp} + \frac{r^2 M^2 T + 2rM}{2} + rM\sqrt{\frac{T}{p}} \right) \frac{C_\Omega}{n} \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\ dQ +$$

$$+ \frac{C_\Omega}{2n} \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0}\ d\Omega.$$

Отже,

$$|l_r^{(2)}(u,v)| = |J_1 + J_2 + J_3| \leqslant |J_1| + |J_2| + |J_3| \leqslant$$

$$\leqslant rM \left(n + \frac{C_\Omega + 1}{2} + \frac{C_\Omega}{n} \right) \left(\sqrt{Tp} + \frac{rMT}{2} + 1 + \sqrt{\frac{T}{p}} \right) \cdot \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\ dQ +$$

$$+ \left(1 + \frac{C_\Omega}{2n} \right) \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0}\ d\Omega =$$

$$= R_2(p) \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\ dQ + \left(1 + \frac{C_\Omega}{2n} \right) \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0}\ d\Omega,$$

де $R_2(p) \sim \sqrt{p}$ при $p \to \infty$.

Тепер підберемо потрібні значення параметрів r і p. Покладемо $r = \frac{n+C_\Omega}{n\alpha}$. Тоді

$$\left(\frac{r\alpha}{2} - 1 - \frac{C_\Omega}{2n}\right) \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0}\, d\Omega = 0,$$

тому

$$l_r^{(1)}(u,v) - |l_r^{(2)}(u,v)| \geqslant (R_1(p) - R_2(p)) \int\limits_Q e^{pt} \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\right)\, dQ.$$

Отже, зафіксувавши r, можна вибрати достатньо велике p^*, при якому $R_1(p^*) - R_2(p^*) \geqslant \frac{r}{2}$. Це випливає з того, що $R_1(p) \sim p$, $R_2(p) \sim \sqrt{p}$, при $p \to \infty$. Але тоді, використавши нерівність трикутника, маємо

$$|l_r(u,v)| = |l_r^{(1)}(u,v) + l_r^{(2)}(u,v)| \geqslant l_r^{(1)}(u,v) - |l_r^{(2)}(u,v)| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{r}{2} \int\limits_Q e^{pt} \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2\right)\, dQ = \frac{r}{2}\|v\|_{W_*^+}^2,$$

що доводить коерцитивність оператора $\mathcal{L}_r$ зі сталою $C_r = \frac{r}{2e^{p^*T}}$ (і, відповідно, твердження леми для гладких функцій зі сталою $C = \frac{1}{2e^{p^*T}}$) за умов (2.9).

Якщо ці умови не виконуються, зробимо заміну $u = e^{qt}\widetilde{u}$. Очевидно, $\widetilde{u} \in C_0^\infty$, при цьому $u_t = qe^{qt}\widetilde{u} + e^{qt}\widetilde{u}_t$, $u_{x_i} = e^{qt}\widetilde{u}_{x_i}$, і відповідно

$$\mathcal{L}u = e^{qt}\left(\widetilde{u}_t + \widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{u} + \mathcal{I}\widetilde{u}\right) = e^{qt}\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{u},$$

де $\widetilde{\mathcal{A}}$ — диференціальний оператор, що задається аналогічно до оператора $\mathcal{A}$. Його коефіцієнти виражаються через коефіцієнти $\mathcal{A}$ так:

$$\widetilde{a}_{ij}(x) = a_{ij}(x),\ \widetilde{a}_i(x) = a_i(x),\ \widetilde{a}(x) = a(x) + q$$

Очевидно, що при достатньо великому q коефіцієнти оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$ будуть задовольняти умови (2.9). З іншого боку, неважко переконатися, що

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_*^-} \geqslant \widetilde{C}_1\|\widetilde{\mathcal{L}}\widetilde{u}\|_{W_*^-} \geqslant \widetilde{C}_2\|\widetilde{u}\|_{L_2} \geqslant C\|u\|_{L_2}.$$

Отже, доведена вище коерцитивність оператора $\widetilde{\mathcal{L}}$ тягне за собою аналогічну властивість початкового оператора $\mathcal{L}$.

Справедливість леми для усіх елементів $u \in H^+$ одержується граничним переходом. $\square$

Оцінку коерцитивності для оператора $\mathcal{L}$ можна одержати і в іншій парі норм. Для цього розглянемо білінійну форму

$$\widehat{l}(u,v) \equiv (u_t, v)_{L_2} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i u_{x_i}, v)_{L_2} + (au, v)_{L_2} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^t k_{ij}(x,t,s)u_{x_i}(x,s)ds, v_{x_j} \right)_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t k_i(x,t,s)u_{x_i}(x,s)ds, v \right)_{L_2} +$$

$$\left(\int_0^t k(x,t,s)u(x,s)\ ds, v \right)_{L_2}.$$

Лема 2.6. *Для довільних $u, v \in H^+$ справедлива рівність*

$$\widehat{l}(u,v) = \langle \mathcal{L}u, v \rangle_{H^-,H^+},$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^-,H^+}$ — розширення за неперервністю скалярного добутку у просторі $L_2(Q)$ на $H^- \times H^+$.

Ця лема доводиться аналогічно до леми (2.3). Крім того, аналогічно до леми (2.4) можна одержати таке твердження.

Лема 2.7. *Для довільних $u, v \in H^+$ справедлива рівність*

$$\widehat{l}(u,v) \leqslant C\|u\|_{W^+}\|u\|_{H^+},$$

Отже, $\widehat{l}(u,v)$ визначає лінійний неперервний оператор, який діє з W^+ у H^-. Зауважимо, що він є звуженням оператора $\mathcal{L}$ на множину W^+, тож будемо також позначати його $\mathcal{L}$. Крім того, білінійна форма $\widehat{l}(u,v)$ задає спряжений оператор, який є розширенням оператора $\mathcal{L}^*$ на множину H^+ і діє в W_*^-. Цей оператор також позначимо через $\mathcal{L}^*$. Через $\widehat{l}^{(1)}(u,v)$ і $\widehat{l}^{(2)}(u,v)$ позначимо відповідно перші чотири й останні три доданки форми $\widehat{l}(u,v)$.

Лема 2.8. *Для* $u \in W^+$ *справедлива нерівність* $\|\mathcal{L}u\|_{H^-} \geqslant C\|u\|_{H^+}$.

Доведення. Твердження леми одержимо з ланцюжка нерівностей

$$\|\mathcal{L}u\|_{H^-}\|v\|_{H^+} \geqslant |(\mathcal{L}u, v)_{L_2}| \geqslant C\|v\|^2_{H^+} \geqslant C\|v\|_{H^+}\|u\|_{H^+},$$

де $v(x,t) = e^{-pt}u(x,t)$, тобто $u(x,t) = e^{pt}v(x,t)$, $u \in C_0^\infty$. Права й ліва нерівності очевидні. Щоб довести середню, оцінимо кожний доданок $l^{(1)}(u,v)$, інтегруючи частинами з урахуванням умов (2.6) і (2.9):

$$I_1 = \int\limits_Q u_t v\; dQ = -\int\limits_Q u v_t\; dQ = -\int\limits_Q e^{pt} v v_t\; dQ =$$

$$= \int\limits_\Omega v^2|_{t=0}\; d\Omega + p\int\limits_Q e^{pt} v^2\; dQ - I_1 \Rightarrow I_1 \geqslant \frac{p}{2}\int\limits_Q e^{pt} v^2\; dQ \geqslant 0.$$

$$I_2 = \int\limits_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} v_{x_j}\; dQ = \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j}\; dQ \geqslant \alpha \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n v^2_{x_i}\; dQ.$$

$$I_3 = \int\limits_Q \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} v\; dQ = \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n a_i v_{x_i} v\; dQ = \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} v^2\; dQ - I_3.$$

$$I_4 = \int\limits_Q a u v\; dQ = \int\limits_Q e^{pt} a v^2\; dQ \Rightarrow I_3 + I_4 \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_Q e^{pt} v^2\; dQ \geqslant 0.$$

Відповідно,

$$l^{(1)}(u,v) \geqslant \alpha \int\limits_Q e^{pt} \sum_{i=1}^n v^2_{x_i}\; dQ.$$

Тепер оцінимо доданки $l^{(2)}(u,v)$, використовуючи деми 2.1, 2.2 і нерівність Фрідріхса.

$$J_1 = \int\limits_Q \int\limits_0^t \sum_{i,j=1}^n k_{ij}(x,t,s) u_{x_i}(x,s)\; ds \cdot v_{x_j}(x,t)\; dQ =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q v_{x_j}(x,t) \int\limits_0^t k_{ij}(x,t,s) e^{ps} v_{x_i}(x,\tau) ds\; dQ \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{Q}|v_{x_j}(x,t)|\int\limits_{0}^{t}e^{ps}|v_{x_i}(x,s)|ds\ dQ\leqslant \frac{Mn}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\ dQ.$$

$$J_2=\int\limits_{Q}\int\limits_{0}^{t}\sum_{i=1}^{n}k_i(x,t,s)u_{x_i}(x,s)ds\cdot v(x,t)\ dQ=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{Q}v(x,t)\int\limits_{0}^{t}k_i(x,t,s)e^{ps}v_{x_i}(x,s)\ ds\ dQ\leqslant$$

$$\leqslant MC_\Omega\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}(x,t)\ dQ.$$

$$J_3=\int\limits_{Q}\int\limits_{0}^{t}k(x,t,s)u(x,s)\ ds\cdot v(x,t)\ dQ=$$

$$=\int\limits_{Q}v(x,t)\int\limits_{0}^{t}k(x,t,s)e^{ps}v(x,s)\ ds\ dQ\leqslant$$

$$\leqslant M\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}v^2(x,t)\ dQ\leqslant M\frac{C_\Omega}{n}\sqrt{\frac{T}{p}}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2(x,t)\ dQ.$$

Отже, $l^{(2)}(u,v)=O(p^{-\frac{1}{2}}), p\to\infty$, тому можна вибрати достатньо велике p, при якому $|l^{(1)}(u,v)|-|l^{(2)}(u,v)|\geqslant\frac{1}{2}\int_Q e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\ dQ$, і тоді

$$|l(u,v)|\geqslant|l^{(1)}(u,v)|-|l^{(2)}(u,v)|\geqslant\frac{1}{2}\int\limits_{Q}e^{pt}\sum_{i=1}^{n}v_{x_i}^2\ dQ\geqslant\frac{1}{2}\|v\|_{H^+}^2$$

що й треба будо довести. Умови (2.9) можна зняти так само, як у доведенні леми 2.5. Нерівність леми для усіх елементів $u\in H^+$ виконується завдяки щільності C_0^∞ у H^+. □

Лема 2.9. *Для $v\in H^+$ має місце нерівність $\|\mathcal{L}^*v\|_{W^-}\geqslant C\|v\|_{L_2}$.*

Доведення. Доведемо лему для функцій із $v \in C_T^\infty$. Нехай $\widetilde{u}(x,t) = v(x, T-t)$. Тоді $\widetilde{u} \in C_0^\infty$. З іншого боку, як неважко перевірити, $\forall u \in C_0^\infty$

$$l(u,v) = -(\widetilde{u}, \widetilde{v}_t)_{L_2} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\widetilde{u}_{x_j}, \widetilde{v}_{x_i})_{L_2} - \sum_{i=1}^{n} (a_i \widetilde{v}_{x_i}, \widetilde{u})_{L_2} + (a\widetilde{u}, \widetilde{v})_{L_2} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\widetilde{v}_{x_j}, \int_t^T \widetilde{k}_{ij}(x,t,s) \widetilde{u}_{x_i}(x,\tau)\, ds \right)_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{u}, \int_t^T \widetilde{k}_i(x,t,s) \widetilde{v}_{x_i}(x,s)\, ds \right)_{L_2} +$$

$$\left(\int_t^T \widetilde{k}(x,t,s) \widetilde{v}(x,s)\, ds, \widetilde{u} \right)_{L_2},$$

де $\widetilde{k}_{ij}(x,t,s) = k_{ij}(x, T-t, T-s), \widetilde{k}_i(x,t,s) = k_i(x, T-t, T-s), \widetilde{k}(x,t,\tau) = k(x, T-t, T-s)$. Інтегруючи частинами з урахуванням крайової умови, одержуємо

$$(a_i \widetilde{v}_{x_i}, \widetilde{u})_{L_2} = -\left((a_i \widetilde{u})_{x_i}, \widetilde{v}\right)_{L_2} = -(a_i \widetilde{u}_{x_i}, \widetilde{v})_{L_2} - \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \widetilde{u}, \widetilde{v} \right)_{L_2},$$

$$\left(\widetilde{u}, \int_t^T \widetilde{k}_i(x,t,s) \widetilde{v}_{x_i}(x,s)\, ds \right)_{L_2} =$$

$$-\left(\widetilde{u}_{x_i}, \int_t^T \widetilde{k}_i(x,t,s) \widetilde{v}(x,s)\, ds \right)_{L_2} - \left(\widetilde{u}, \int_t^T \frac{\partial \widetilde{k}_i(x,t,s)}{\partial x_i} \widetilde{v}(x,s)\, ds \right)_{L_2}.$$

Це співвідношення можна переписати так: $l(u,v) = l^*(\widetilde{u}, \widetilde{v})$, де білінійна форма l^* задається виразом

$$l^*(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = -(\widetilde{u}, \widetilde{v}_t)_{L_2} + \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\widetilde{u}_{x_j}, \widetilde{v}_{x_i})_{L_2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i^* \widetilde{u}_{x_i}, \widetilde{v})_{L_2} + (a^* \widetilde{u}, \widetilde{v})_{L_2} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\widetilde{u}_{x_i}, \int_t^T k_{ij}(x,s,t) \widetilde{v}_{x_j}(x,s)\, ds \right)_{L_2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{u}_{x_i}, \int_t^T k_i^*(x,s,t) \widetilde{v}(x,s)\, ds \right)_{L_2} + \left(\widetilde{u}, \int_t^T k^*(x,s,t) \widetilde{v}(x,s)\, ds \right)_{L_2},$$

де $a_i^* = -a_i$, $a^* = a - \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, $k_i^*(x,t,s) = -k_i(x, T-t, T-s)$, $k^*(x,t,s) = k(x, T-t, T-s) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial k_i(x,T-t,T-s)}{\partial x_i}$.

Але тоді можна повторити міркування з доведення леми 2.5 для оператора, породженого білінійною формою $rl^*(\cdot,\cdot)$, поклавши

$$\widetilde{v}(x,t) = -\int\limits_T^t e^{-ps}\widetilde{u}_t(x,s)\,ds$$

і вибравши потрібне значення r. Це приведе до нерівності

$$l^*(\widetilde{u},\widetilde{v}) \geqslant C\|\widetilde{u}\|_{L_2}\|\widetilde{v}\|_{W_*^+},$$

З іншого боку, $\|\widetilde{u}\|_{L_2} = \|v\|_{L_2}$, що з урахуванням нерівності Коші-Шварца $|l^*(\widetilde{u},\widetilde{v})| \leqslant \|\mathcal{L}\widetilde{u}\|_{W_*^-}\|\widetilde{v}\|_{W_*^+}$ дає твердження леми. □

Лема 2.10. *Для $v \in W_*^+$ справедлива нерівність $\|\mathcal{L}^*v\|_{H^-} \geqslant C\|v\|_{H^+}$.*

Зауваження 2.2. Одержані апріорні оцінки цілковито збігаються з нерівностями коерцитивності для параболічного диференціального оператора. По суті, ідея доведення коерцитивності інтегро-диференціального оператора полягає у тому, щоб показати, що інтегральна частина не впливає на властивості оператора. Це дає змогу перенести означення розв'язку і теореми розв'язності, наведені у [32] для диференціального рівняння параболічного типу, на випадок інтегро-диференціального рівняння.

Теорема 2.4. *Для довільного функціоналу $f \in H^-$ існує і єдиний сильний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ з простору H^+.*

Теорема 2.5. *Для довільного функціоналу $f \in W_*^-$ існує і єдиний слабкий розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = f$ з простору L_2 в розумінні означень 2.4–2.5.*

Зауваження 2.3. Єдиним обмеженням на коефіцієнти оператора, окрім умов гладкості, залишилась рівномірна еліптичність оператора $\mathcal{A}$. Цим теорема 2.5 суттєво відрізняється від аналогічної теореми, одержаної в [2], де вимагається, щоб ядра k_{ij}, k_i й k дорівнювали нулю при $s = 0$. Разом з тим, доведення апріорних нерівностей, з яких випливає теорема 2.5, є розвиненням ідей доведення нерівностей у вказаній статті.

Зауваження 2.4. Аналогчні теореми справедливі і для спряженого рівняння.

2.1.3. Схема методу Гальоркіна. Виберемо базис $\{\omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Для простоти будемо вважати цей базис ортонормованим у $L_2(\Omega)$, хоча ця вимога не є суттєвою. Через H_m позначимо лінійну оболонку системи $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$.

Наближений розв'язок рівняння (2.4) будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$u^m = \sum_{l=1}^{m} g_l(t)\omega_l; \tag{2.10}$$

коефіцієнти $g_l(t)$ знаходяться зі співвідношень

$$(u_t^m(t), v)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i}^m(t), v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i}^m(t), v\right)_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ (a u^m(t), v)_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^t k_{ij} u_{x_i}^m(s)\, ds, v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \int_0^t k_i u_{x_i}^m(s)\, ds, v\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\int_0^t k u_{x_i}^m(s)\, ds, v\right)_{L_2(\Omega)} = (f(t), v)_{L_2(\Omega)}, \tag{2.11}$$

де v — довільний елемент простору H_m. Переписавши ці рівності з $v = \omega_l, l = \overline{1, m}$, одержимо систему звичайних інтегро-диференціальних рівнянь відносно $g_l(t)$:

$$(LG)(t) \equiv G^{'}(t) + AG(t) + \int_0^t K(t,s)G(s)\, ds = F(t) \tag{2.12}$$

з початковими умовами

$$G(0) = 0, \tag{2.13}$$

де $G(t) = (g_1(t), ..., g_m(t))^T$, $F(t) = ((f(t), \omega_1)_{L_2(\Omega)}, ..., (f(t), \omega_m)_{L_2(\Omega)})^T$, A,K – матриці, елементи яких визначаються так:

$$A_{ql} = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{q_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (a_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_q)_{L_2(\Omega)} + (a\omega_l, \omega_q)_{L_2(\Omega)},$$

$$K_{ql}(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n} (k_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{q_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (k_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_q)_{L_2(\Omega)} + (k\omega_l, \omega_q)_{L_2(\Omega)}.$$

Легко бачити, що $F \in L_2([0,T])^m$, тобто $(f(t), \omega_q) \in L_2([0,T]), q = \overline{1,m}$.

2.1.4. Розв'язність системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь. Доведення того, що система (2.12)—(2.13) має єдиний розв'язок достатньої гладкості, здійснимо у два етапи. Спочатку покажемо, що існування і єдиність мають місце для неперервно диференційовних правих частин, що обертаються в нуль у початковий момент часу (така множина щільна у просторі $L_2([0,T])^m$), а потім поширимо це твердження на весь простір $L_2([0,T])^m$ за допомогою апріорних нерівностей.

Лема 2.11. *Нехай $R \in C([0,T]), \mathbb{R}^{m,m}$, $B \in C\left([0,1]^3, \mathbb{R}^m\right)$, а також для деяких $\alpha, \beta > 0$ і довільних $G, H \in \mathbb{R}^m$, $0 \leqslant t, s, \nu \leqslant T$ справедливі нерівності*

$$\|A(G - H)\| \leqslant \alpha \|G - H\|,$$

$$\|B(t,s,\nu)(G - H))\| \leqslant \beta \|G - H\|.$$

Тоді при довільному $t \in [0,T]$ для оператора

$$\Lambda G(t) \equiv \int_0^t R(s) - AG(s)\, ds - \int_0^t \int_0^s B(t,s,\nu) G(\nu)\, d\nu\, ds,$$

справедлива оцінка

$$\|\Lambda^k X(t) - \Lambda^k Y(t)\| \leqslant \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \alpha^{k-j} \beta^j \frac{t^{k+j}}{(k+j)!} \|X - Y\|_\infty,$$

де $\|Z\|_\infty = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|Z\|$.

Доведення. Здійснимо міркування за індукцією. Для $k=1$ маємо

$$\|\Lambda X(t)-\Lambda Y(t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^t AY(s)-AX(s)\,ds\right\|+\left\|\int\limits_0^t\int\limits_0^s B(t,s,\nu)(X(\nu)-Y(\nu))\,d\nu\,ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\|A\|t\|X-Y\|_\infty+\frac{\beta t^2}{2}\|X-Y\|_\infty=\left(\alpha t+\frac{\beta t^2}{2}\right)\|X-Y\|_\infty.$$

Тепер припустимо, що твердження леми виконується для Λ^k. З урахуванням нерівності

$$\left\|\int\limits_0^t Z(s)\,ds\right\|\leqslant\int\limits_0^t\|Z(s)\|\,dt$$

для Λ_1^{k+1} маємо

$$\|\Lambda^{k+1}X(t)-\Lambda^{k+1}Y(t)\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\int\limits_0^t A\Lambda^kY(s)-A\Lambda^kX(s)\,ds\right\|+$$

$$+\left\|\int\limits_0^t\int\limits_0^s B(t,s,\nu)(\Lambda^kX(\nu)-\Lambda^kY(\nu))\,d\nu\,ds\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^t\alpha\|\Lambda^kY(s)-\Lambda^kX(s)\|\,ds+\int\limits_0^t\int\limits_0^s\beta\|\Lambda^kX(\nu)-\Lambda^kY(\nu)\|\,d\nu\,ds\leqslant$$

$$\alpha\int\limits_0^t\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^j\frac{s^{k+j}}{(k+j)!}\|X-Y\|_\infty\,ds+$$

$$+\beta\int\limits_0^t\int\limits_0^s\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^j\frac{\nu^{k+j}}{(k+j)!}\|X-Y\|_\infty\,d\nu\,ds=$$

$$=\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\alpha^{k+1-j}\beta^j\frac{t^{k+1+j}}{(k+1+j)!}\|X-Y\|_\infty+$$

$$+\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^{j+1}\frac{t^{k+2+j}}{(k+2+j)!}\|X-Y\|_\infty+$$

$$+\sum_{j=k}^{k+1}\binom{k+1}{j}\alpha^{k+1-j}\beta^{j}\frac{t^{k+1+j}}{(k+1+j)!}\|X-Y\|_\infty.$$

□

Лема 2.12. *За умов леми 2.11 оператор* $\Lambda : C([0,T],\mathbb{R}^m) \to C([0,T],\mathbb{R}^m)$ *має єдину нерухому точку.*

Доведення. Нехай $X, Y \in C([0,T],\mathbb{R}^m)$. Тоді за лемою 2.11

$$\|\Lambda^k X(t)-\Lambda^k Y(t)\| \leqslant \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^{j}\frac{t^{k+j}}{(k+j)!}\|X-Y\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \frac{T^{2k}}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\alpha^{k-j}\beta^{j}\|X-Y\|_\infty = \frac{T^{2k}(\alpha+\beta)^k}{k!}\|X-Y\|_\infty.$$

Звідси легко бачити, що при достатньо великому k оператор Λ^k є стискуючим, а тому за теоремою Банаха Λ має єдину нерухому точку. □

Лема 2.13. *Нехай* $F \in C^1([0,T])^m$, $F(0) = 0$. *Тоді система (2.12)–(2.13) має єдиний розв'язок* $G \in C^1([0,T])^m$.

Доведення. Підставимо у систему (2.12)–(2.13) $G(t) = \int_0^t G'(s)ds$ і $F(t) = \int_0^t F'(s)ds$. Маємо

$$\Lambda G'(t) = \int_0^t F'(s)\,ds - \int_0^t K(t,s)\int_0^s G'(\nu)\,d\nu\,ds = G'(t).$$

За лемою 2.12 цей оператор має єдину нерухому точку
$G' \in C([0,T])^m$, яка і є єдиним розв'язком системи (2.12)–(2.13). □

Перейдемо до доведення апріорних нерівностей.

Лема 2.14. *Оператор* L *діє неперервно з* $H_0^1([0,T])^m$ *у* $L_2([0,T])^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Це твердження доводиться шляхом безпосередньої перевірки.

Лема 2.15. *Оператор L коерцитивний, тобто*
$\exists C > 0 \ \forall G \in H^1([0,T])^m \quad \|LG\|_{L_2([0,T])^m} \geqslant C\|G\|_{H_0^1([0,T])^m}$, $m \in \mathbb{N}$.

Доведення. Достатньо довести ланцюжок нерівностей

$$C\|LG\|_{L_2([0,T])^m}\|G\|_{H_0^1([0,T])^m} \geqslant \|LG\|_{L_2([0,T])^m}\|H\|_{L_2([0,T])^m} \geqslant \\ \geqslant \sum_{q=1}^{m} \|(LG)_k\|_{L_2([0,T])}\|h_q\|_{L_2([0,T])} \geqslant \sum_{q=1}^{m}((LG)_q, h_q)_{L_2([0,T])} \geqslant \\ \geqslant C\|H\|^2_{L_2([0,T])^m} \geqslant C\|G\|^2_{H_0^1([0,T])^m}, \quad (2.14)$$

де $H = (h_1, ..., h_m)^T$, через C позначено додатну сталу, яка може бути різною для різних нерівностей з ланцюжка, а вектор-функції H і G пов'язані співвідношенням $G(t) = \int_0^t e^{ps}H(s)ds$, тобто $g_k(t) = \int_0^t e^{ps}h_k(s)ds$. Очевидно, що зі співвідношення $G^{'}(t) = e^{pt}H(t)$ випливають крайні нерівності у (2.14). Крім того, друга і третя зліва нерівності — це нерівності Коші та Коші-Буняковського. Залишилось довести другу справа нерівність. Маємо

$$((LG)_q, h_q)_{L_2([0,T])} = \int_0^T g_q^{'}(t)h_q(t)\ dt + \sum_{l=1}^{m} A_{ql}\int_0^T g_l(t)h_q(t)\ dt +$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\int_0^T\int_0^t K_{ql}(t,s)g_l(s)\ ds \cdot h_q(t)\ dt = I_{q,1} + I_{q,2} + I_{q,3}.$$

Оцінимо окремо кожний з цих виразів.

$$I_{q,1} = \int_0^T g_q^{'}(t)h_q(t)\ dt = \int_0^T e^{pt}h_q^2(t)\ dt.$$

Інші доданки оцінимо за модулем, використавши лему 2.1:

$$|I_{q,2}| = \left|\sum_{l=1}^{m} A_{ql}\int_0^T g_l(t)h_q(t)\ dt\right| \leqslant \sum_{l=1}^{m}|A_{ql}|\int_0^T |h_q(t)|\int_0^t e^{ps}|h_l(s)|\ ds\ dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^T e^{pt}(h_l^2(t)+h_q^2(t))\ dt.$$

Аналогічно оцінимо й третю групу доданків, позначивши через M сталу, що мажорує величини $|K_{ql}|, q, l = \overline{1, m}$:

$$|I_{q,3}| = \left|\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^T\int\limits_0^t K_{ql}(t,s)g_l(s)\ ds \cdot h_q(t)\ dt\right| =$$

$$= \left|\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^T h_k(t)\int\limits_0^t K_{ql}(t,s)\int\limits_0^\nu e^{p\nu}h_l(\nu)\ d\nu\ ds\ dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant MT\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^T |h_q(t)|\int\limits_0^\nu e^{p\nu}|h_l(\nu)|\ d\nu\ dt \leqslant \frac{MT}{2}\sqrt{\frac{T}{p}}\sum_{l=1}^{m}\int\limits_0^T e^{pt}(h_l^2(t)+h_k^2(t))\ dt.$$

Отже,

$$\sum_{q=1}^{m}((LG)_q, h_q)_{L_2([0,T])} = \sum_{k=1}^{m} I_{q,1} + I_{q,2} + I_{q,3} =$$

$$= \sum_{q=1}^{m}\int\limits_0^T e^{pt}h_q^2(t)\ dt + O(p^{-1/2})\sum_{q=1}^{m}\int\limits_0^T e^{pt}h_q^2(t)\ dt.$$

Тому, вибравши достатньо велике p, можна досягти, наприклад, нерівності

$$\sum_{q=1}^{m}((LG)_q, h_q)_{L_2([0,T])} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{m}\int\limits_0^T e^{pt}h_q^2(t)\ dt \geqslant \frac{1}{2}\|H\|^2_{L_2([0,T])^m},$$

що завершує доведення. □

Леми 2.11, 2.14, 2.15 дають змогу сформулювати

Наслідок 2.2. *Оператор L допускає розширення до гомеоморфізму між $H_0^1([0,T])^m$ і $L_2([0,T])^m$.*

2.1.5. Збіжність послідовності наближень.

Лема 2.16. *Послідовність (u^m) обмежена за нормою простору H^+.*

Доведення. У лемі 2.10 коерцитивність оператора $\mathcal{L}$ одержано як наслідок допоміжної нернівості $\widehat{l}(u,v) \geqslant C\|v\|^2_{H^+}$, де $v = e^{-pt}u$, для достатньо гладких u. Ця нерівність справедлива й для u^m і $v^m = e^{-pt}u^m$. Зауважимо, що $(\mathcal{L}u^m, v^m)_{L_2(Q)} = (f, v^m)_{L_2(Q)}$, у чому можна переконатися, підставивши $v = e^{-pt}u^m(t)$ у (2.11) і проінтегрувавши цю рівність від 0 до T. Тому можна записати ланцюжок нерівностей

$$C\|f\|_{H^-}\|u^m\|_{H^+} \geqslant \|f\|_{H^-}\|v^m\|_{H^+} \geqslant$$

$$\geqslant (f, v^m)_{L_2(Q)} = (\mathcal{L}u^m, v^m)_{L_2(Q)} \geqslant C\|v^m\|^2_{H^+} \geqslant C\|u^m\|^2_{H^+},$$

звідки випливає твердження леми. □

Тепер перейдемо до головного результату.

Теорема 2.6. *Нехай $f \in H^-$. Тоді послідовність (u^m) збігаєтсья до розв'язку u задачі (2.4)–(2.5) слабко у просторі H^+.*

Доведення. Міркування в цілому повторюють доведення аналогічної теореми для параболічного оператора ([31], теорема 2.2.1).

За лемою 2.16 з послідовності (u^m) можна виділити слабко збіжну підпослідовність $(u^{m_k})_{k=1}^{\infty}$, а з неї, відповідно до властивості Банаха-Сакса — підпослідовність $(u^{m_{k_q}})_{q=1}^{\infty}$, таку що послідовність $\overline{u}^r = \frac{1}{r}\sum_{q=1}^{r} u^{m_{k_q}}$ збігається до деякого $\widetilde{u} \in H^+$ за нормою цього простору. Цей самий елемент є границею і послідовності середніх $\widehat{u}^r = \frac{1}{r}\sum_{q=r}^{2r-1} u^{m_{k_q}}$.

За лінійністю й неперервністю оператора $\mathcal{L}$, а також фундаментальністю послідовності $(\widehat{u}^r)$ маємо

$$\|\mathcal{L}\widehat{u}^i - \mathcal{L}\widehat{u}^j\|_{H^-} \leqslant C\|\widehat{u}^i - \widehat{u}^j\|_{H^+} \to 0, \quad i, j \to \infty.$$

Отже, послідовність $(\mathcal{L}\widehat{u}^r)$ фундаментальна. Позначимо її границю через $\widehat{f}$ і доведемо, що $\widehat{f} = f$. Це означатиме, що $\widehat{u}$ і є розв'язком задачі (2.4)–(2.5), тобто $\widehat{u} = u$.

Оскільки система функцій $\{\psi_l = \varphi(t)\omega_l \mid \varphi \in C^\infty([0,T])\}_{l=1}^\infty$, тотальна у H^+, достатньо показати, що $\left\langle \widehat{f}, \psi_l \right\rangle_{H^- \times H^+} = \langle f, \psi_l \rangle_{H^- \times H^+}$ для будь-якого $l \in \mathbb{N}$.

Така рівність має місце, оскільки з вигляду (2.11) і з побудови функцій ψ_l випливає

$$\langle \mathcal{L}\widehat{u}^r, \psi_l \rangle_{H^- \times H^+} = \langle f, \psi_l \rangle_{H^- \times H^+}, l = \overline{1, m_{k_r}},$$

але з іншого боку, для довільного фіксованого l

$$\left| \left\langle f - \widehat{f}, \psi_l \right\rangle_{H^- \times H^+} \right| = \left| \left\langle \mathcal{L}\widehat{u}^r - \widehat{f}, \psi_l \right\rangle_{H^- \times H^+} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|\psi_l\|_{H^+} \|\mathcal{L}\widehat{u}^r - \widehat{f}\|_{H^-} \to 0, \ r \to \infty$$

(перша рівність справедлива принаймні для $r \geqslant l$). Отже, $u^{m_k} \rightharpoonup u$, де u — розв'язок задачі (2.4)—(2.5). Оскільки за лемою 2.2 цей розв'язок єдиний, він є слабкою границею усієї послідовності (u^m).

□

Зауваження 2.5. Завдяки компактності вкладення H^+ у простір $L_2(Q) = L_2([0,T], L_2(\Omega))$ має місце і сильна збіжність u^m до u в $L_2(Q)$.

2.1.6. Схема методу. Розглянемо задачу (2.4)—(2.5) у випадку одновимірної області $\Omega = [0,1]$. Кожній точці $x_j = jh$, $j = \overline{1, m}$, де $h = \frac{1}{m+1}$, поставимо у відповідність скінченноелементну базисну функцію першого порядку:

$$\omega_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h} & x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j \\ 1 - \frac{x - x_j}{h} & x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1} \end{cases} \tag{2.15}$$

Задачу Коші для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь (2.12)–(2.13) розв'яжемо інтегро-інтерполяційним методом. Позначимо $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = \overline{0, n}$, а $\tau = \frac{1}{n}$. Проінтегруємо систему (2.12) на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$, дискретизуючи похідну й інтеграл за допомогою квадратурних формул:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} G'(s)\,ds = G_i - G_{i-1},$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} AG_i\,ds \approx \frac{\tau A}{2}(G_i + G_{i-1}),$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_0^s K(s,\nu)G(\nu)\,d\nu\right)\,ds \approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\tau}{2}(I(t_i) + I(t_{i-1}))\,ds \approx$$
$$\tau^2\left(\frac{1}{2}K(t_i,0)G_0 + \sum_{l=1}^{i-1} K(t_i,t_l)G_l + \frac{1}{2}K(t_i,t_i)G_i\right),$$

де внутрішній інтеграл дискретизовано за формулою правих прямокутників:

$$I(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i,\nu)G(\nu)\,d\nu \approx \tau\sum_{l=1}^{i} K(t_i,t_l)G_l.$$

Перегруповуючи доданки дискретизованого рівняння, маємо співвідношення

$$\left(P + \frac{\tau}{2}A + \frac{\tau^2}{2}K(t_i,t_i)\right)G_i =$$
$$= \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(s)\,ds - \frac{\tau}{2}AG_{i-1} - \frac{\tau^2}{2}K(t_i,0)G_0 - \tau^2\sum_{l=1}^{i} K(t_i,t_l)G_l. \quad (2.16)$$

Якщо вектор-функція F достатньо гладка, її інтеграл можна дискретизувати, наприклад, за формулою середніх прямокутників:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} F(s)\,ds \approx \frac{\tau}{2}(F_{i-1} + F_i).$$

Якщо F містить сингулярну складову, її можна регуляризувати і застосувати цю саму формулу, або ж проінтегувати її з урахуванням конкретного вигляду сингулярності.

Зауважимо, що вибір базисних функцій вигляду (2.15) веде до тридіагональних матриць A і K, тому матриця СЛАР (2.16) також тридіагональна. Обчислення розв'язку здійснюється пошарово, починаючи з шару G_0, після чого одержаний розв'язок $G = (g_1, ...g_m)$ підставляється у (2.10).

2.1.7. Приклад розв'язку рівняння з нульовою правою частиною. Для тестування алгоритму знайдемо аналітичний розв'язок задачі (2.4)-(2.6) з $f = 0$, $\Omega = [0, 1]$, $u_0(x) = \sin \pi x$. Для простоти також припустимо, що $a_1(x) = a(x) = 0$, $k_1(x) = k(x) = 0$ $\forall x \in [0, 1]$, а також $a_{11} = const$, $k_{11}(x, t, s) = k_0 \exp(t - s)$. Розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$u(t, x) = v(t) \sin \pi x.$$

Підставивши цей вираз у (2.4), з урахуванням співвідношень $u_t = v'(t) \sin \pi x$ і $\mathcal{A}u = -\pi^2 v(t) \sin \pi x$ і скорочуючи на $\sin \pi x$, одержуємо для v задачу Коші

$$v' + Av + K \int_0^t e^{t-s} v(s)\, ds = 0, \tag{2.17}$$

$$v(0) = 0, \tag{2.18}$$

де $A = \pi^2 a_{11}$, $K = \pi^2 k_0$.

Рівняння (2.17) можна переписати у вигляді

$$v' + Av + G * v = 0,$$

де $(f * g)(t) = \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds$ — згортка функцій, визначених на додатній півосі.

Розв'язок задачі (2.17)-(2.18) шукатимемо за допомогою перетворення Лапласа.

Для функції $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ позначимо

$$L[f](\eta) = \overline{f}(\eta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\eta t} f(t)\, dt.$$

Відомо, що $L[f * g](\eta) = \overline{f}(\eta) \cdot \overline{g}(\eta)$, а також

$$L[e^t](\eta) = \frac{1}{\eta - 1},$$

$$L[f'](\eta) = \eta \overline{f}(\eta) - f(0).$$

Використовуючи ці властивості перетворення Лапласа, для образу рівняння (2.17) одержуємо співвідношення

$$\eta \overline{v}(\eta) - 1 + A\overline{v}(\eta) + \frac{K}{\eta - 1}\overline{v}(\eta) = 0,$$

звідки

$$\overline{v}(\eta) = \frac{1}{\eta + A + \frac{K}{\eta - 1}}.$$

Отже,

$$\overline{v}(\eta) = \frac{\eta - 1}{K + (\eta + A)(\eta - 1)} = \frac{\eta - 1}{\eta^2 + B\eta + C},$$

де $B = A - 1$, $C = K - A$.

Спочатку розглянемо випадок, коли многочлен $\eta^2 + B\eta + C$ має дійсні корені, тобто $(A + 1)^2 - 4K \geqslant 0$. Ці корені мають вигляд

$$\eta_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2} = \frac{1 - A \pm \sqrt{(A + 1)^2 - 4K}}{2}.$$

Підберемо q_1 і q_2 так, щоб

$$\overline{v}(\eta) = \frac{q_1}{\eta - \eta_1} + \frac{q_2}{\eta - \eta_2}.$$

Маємо $q_1\eta - q_1\eta_2 + q_2\eta - q_2\eta_1 = \eta - 1$, тобто

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 1 \\ q_1\eta_2 + q_2\eta_1 = 1. \end{cases}$$

Нескладно переконатись, що розв'язки цієї системи задаються виразами

$$q_1 = \frac{\eta_1 - 1}{\eta_1 - \eta_2}, \quad q_2 = \frac{\eta_2 - 1}{\eta_2 - \eta_1}.$$

Діючи оберненим перетворенням Лапласа, одержуємо розв'язок допоміжної задачі Коші

$$v(t) = \frac{\eta_1 - 1}{\eta_1 - \eta_2} e^{\eta_1 t} + \frac{\eta_2 - 1}{\eta_2 - \eta_1} e^{\eta_2 t}$$

і, відповідно, шуканий розв'язок початково-крайової задачі

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \left[\frac{\eta_1 - 1}{\eta_1 - \eta_2} e^{\eta_1 t} + \frac{\eta_2 - 1}{\eta_2 - \eta_1} e^{\eta_2 t} \right].$$

Зауважимо, що якщо обидва корені $\eta_{1,2}$ від'ємні (нехай для визначеності $\eta_1 < \eta_2 < 0$), то при $t \to \infty$ $e^{\eta_1 t} = o(e^{\eta_2 t})$, а тому $v(t) \sim q_2 e^{\eta_2} t$, причому $q_2 < 0$. Це означає, що при великих t розв'язок початково-крайової задачі набуває від'ємних значень, незважаючи на нульову праву частину і невід'ємний початковий стан. Якщо ж хоча б один з коренів додатний, то розв'язок необмежено зростає за модулем.

Тепер розглянемо випадок $(A+1)^2 < 4K$. Тоді можна скористатись формулами

$$L[e^{pt} \sin qt](\eta) = \frac{q}{(\eta - p)^2 + q^2},$$

$$L[e^{pt} \cos qt](\eta) = \frac{\eta - p}{(\eta - p)^2 + q^2}.$$

Отже,

$$\overline{v}(\eta) = \frac{\eta - 1}{\eta^2 + (A-1)\eta + K - A} = \frac{\eta - 1}{\eta^2 - (1-A)\eta + \frac{(A-1)^2}{4} + K - A - \frac{(A-1)^2}{4}} =$$

$$= \frac{\eta - 1}{\left(\eta - \frac{1-A}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}\right)^2} = \frac{\left(\eta - \frac{1-A}{2}\right) - \frac{1+A}{2}}{\left(\eta - \frac{1-A}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\eta - \frac{1-A}{2}}{\left(\eta - \frac{1-A}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}\right)^2} -$$

$$-\frac{1+A}{2\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}} \cdot \frac{\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}}{\left(\eta - \frac{1-A}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}\right)^2},$$

Легко бачити, що у цьому випадку розв'язок $u(x,t) = v(t)\sin \pi x$ періодично набуває від'ємних значень. Крім того, за умови $A < 1$ абсолютне значення цього розв'язку необмежено зростає.

$$v(t) = e^{\frac{1-A}{2}t}\left[\cos\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}t - \frac{1+A}{2\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}}\sin\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}t\right].$$

2.1.8. Обчислювальний експеримент. Алгоритм реалізовано для одновимірної просторової області — відрізка $[0,1]$. Для простоти розглядатимемо рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$u_t - a_{11}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \int_0^t k_{11}e^{t-s}\frac{\partial^2 u(x,s)}{\partial x^2}\, ds = f.$$

Для тестування алгоритму було розглянуто рівняння (2.4) з $a_{11} = k_{11} = 1$ та

$$f(x,t) = 2t(x^2 - x^3) - t^2(2 - 6x) - 4e^t +$$

$$+12e^t x + 4 - 12x + 4t - 12tx + 2t^2 - 6t^2 x.$$

Точним розв'зком рівняння з такою правою частиною є функція $u(x,t) = t^2 x(1-x)$. Розглянемо результати обчислень для різних кількостей скінченних елементів (m) і часових шарів (n, без врахування початкового стану).

Відносні похибки за нормою $L_2([0,T]; L_2(\Omega))$ наведено у табл. 2.1.

n \ m	10	25	50
25	$1.708 * 10^{-2}$	$1.708 * 10^{-2}$	$1.707 * 10^{-2}$
50	$8.591 * 10^{-3}$	$8.583 * 10^{-3}$	$8.581 * 10^{-3}$
100	$4.307 * 10^{-3}$	$4.303 * 10^{-3}$	$4.302 * 10^{-3}$
500	$8.632 * 10^{-4}$	$8.624 * 10^{-4}$	$8.622 * 10^{-4}$

Таблиця 2.1

Відносні похибки розв'язку параболічного рівняння в L_2.

Відносні похибки за нормою $L_2([0,T];H^1(\Omega))$ наведено у табл. 2.2.

n \ m	10	25	50
25	0.117	$4.013 * 10^{-2}$	$2.311 * 10^{-2}$
50	0.112	$3.479 * 10^{-2}$	$1.6 * 10^{-2}$
100	0.11	$3.264 * 10^{-2}$	$1.317 * 10^{-2}$
500	0.109	$3.125 * 10^{-2}$	$1.162 * 10^{-2}$

Таблиця 2.2

Відносні похибки розв'язку параболічного рівняння в H^+.

Наведемо результати роботи алгоритму для $f = 0$, $u_0(x) = \sin \pi x$.

У випадку $a_{11} = \frac{4}{\pi^2}$, $k_{11} = \frac{5}{\pi^2}$ точним розв'язком є $u(x,t) = q_1 e^{\eta_1 t} + q_2 e^{\eta_2 t}$, де $q_{1,2} = \frac{\mp 5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $\eta_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Як уже було встановлено аналітично, при достатньо великих t розв'язок цієї задачі набуває від'ємних значень. Графік цього розв'язку при $t = 1$ подано на рис. 2.1.

Для обчислення використовувався описаний метод Гальоркіна з $m = 50$, $n = 500$. Відносна похибка за нормою простору $L_2([0,T];L_2(\Omega))$ становить $6.704 * 10^{-3}$, за нормою простору $L_2([0,T];H^1(\Omega))$ — $6.689 * 10^{-3}$.

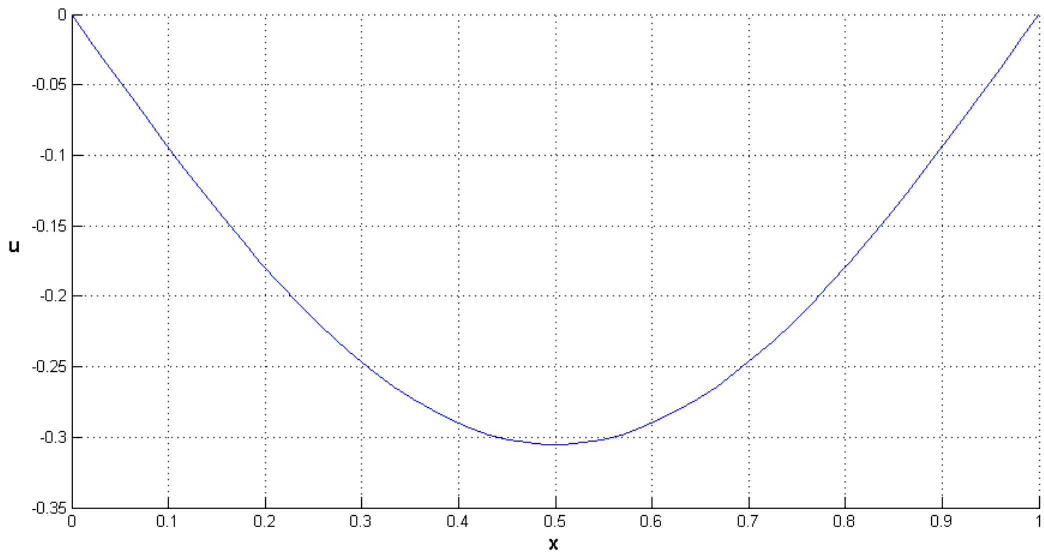

Рис. 2.1. Значення розв'язку параболічного рівняння з нульовою правою частиною

У випадку $a_{11} = \frac{1}{2\pi^2}$, $k_{11} = \frac{1}{\pi^2}$ точним розв'язком є

$$u(x,t) = \sin(\pi x) e^{\frac{1-A}{2}t} \cdot$$

$$\cdot \left[\cos \sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}} t - \frac{1+A}{2\sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}}} \sin \sqrt{K - \frac{(A+1)^2}{4}} t \right],$$

де $A = \pi^2 a_{11} = 1/2$, $K = \pi^2 k_{11} = 1$.

Як уже було встановлено аналітично, цей розв'зок при різних t набуває як додатних, так і від'ємних значень, а його апмлітуда зростає. Графіки цього розв'язку при $t = 0.151$ і $t = 0.539$ подано на рис. 2.2.

Для обчислення використовувався описаний метод Гальоркіна з $m = 50$, $n = 850$. Відносна похибка за нормою простору $L_2([0,T]; L_2(\Omega))$ становить $3.362 * 10^{-2}$, за нормою простору $L_2([0,T]; H^1(\Omega))$ — $3.384 * 10^{-2}$ $(T = 12)$.

Праві частини з простору H^- при $\Omega = (0,1)$ містять дельта-функції, зосереджені в точках цього проміжку. Графіки наближеного розв'язку, для $f(x,t) = 2\sin(\pi x)(t + \pi^2 e^t - \pi^2 - \pi^2 t) + 0.001\delta(x - \frac{1}{2})$ в різні моменти часу наведено на рис. 2.3.

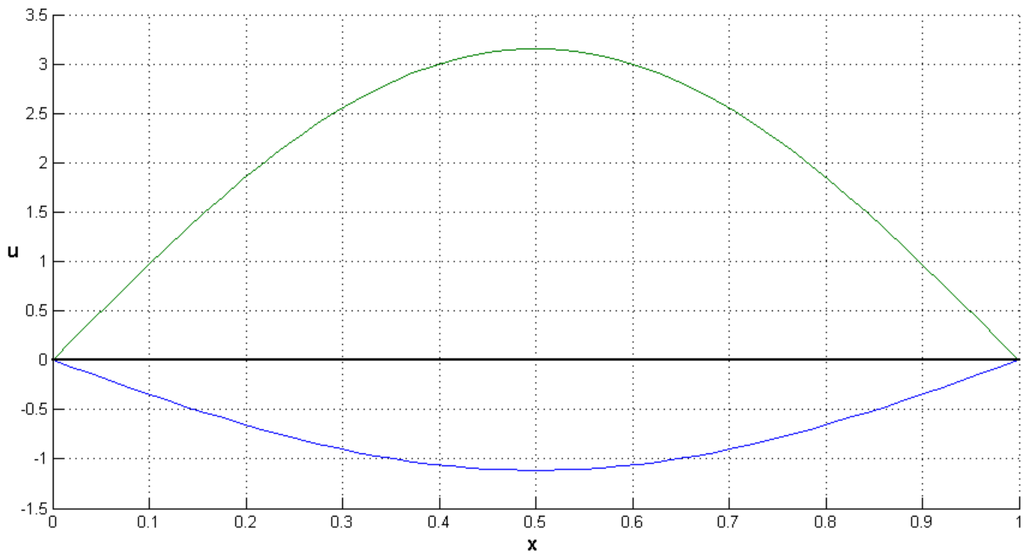

Рис. 2.2. Значення розв'язку параболічного рівняння з нульовою правою частиною при $t = 0.151$ (синій) і $t = 0.539$ (зелений).

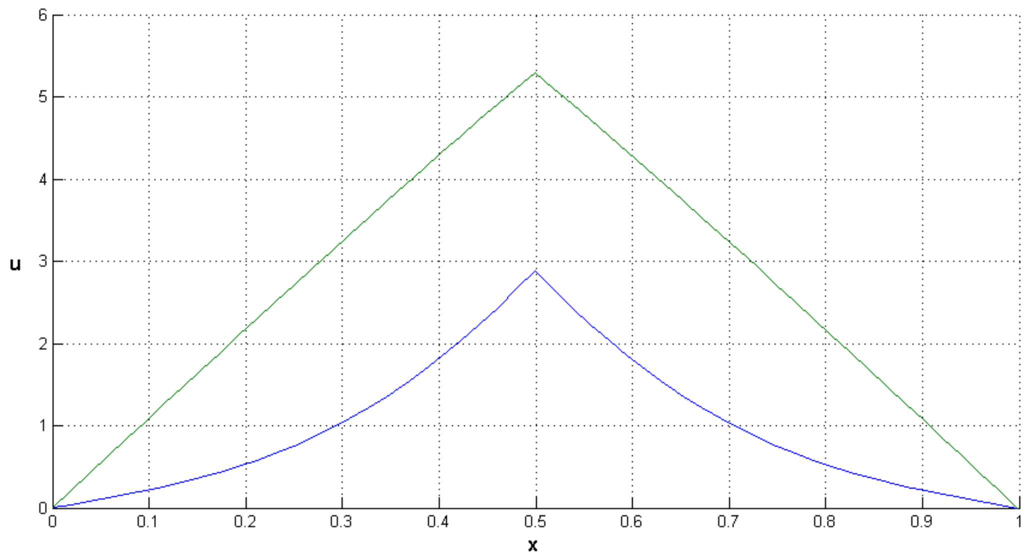

Рис. 2.3. Значення розв'язку параболічного рівняння з дельта-функцією у $t = 0.41666$ (синій) і $t = 0.25$ (зелений)

2.2. Псевдопараболічні інтегро-диференціальні рівняння

2.2.1. Основні позначення і простори. Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння, що узагальнює досліджене у [48]:

$$\mathcal{A}u_t + \mathcal{B}u - \mathcal{I}u = f. \tag{2.19}$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.20}$$

Тут $u = u(x,t)$ — шукана функція стану, $t \in [0,T]$, $x \in \Omega$, $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — диференціальні оператори другого порядку, що діють за просторовими змінними: наприклад,

$$\mathcal{A}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a(x)u,$$

оператор $\mathcal{B}$ задається аналогічним виразом,

$$\mathcal{I}u = \int_0^t \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(k_{ij}(x,t,\tau)u_{x_i}(x,\tau)\right)_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} k_i(x,t,\tau)u_{x_i}(x,\tau) + k(x,t,\tau)u(x,\tau) \right) d\tau.$$

Вимагатимемо виконання умов:

— функції $a_{ij} = a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}, a_i, b_i$ неперервно диференційовні, а a і b неперервні в замкненій області $\overline{\Omega}$;

— ядра k_{ij}, k_i, k обмежені, а k_{ij} й k_i диференційовні за просторовими змінними;

— оператори $\mathcal{A}$ й $\mathcal{B}$ рівномірно еліптичні, тобто $\exists \alpha > 0, \beta > 0$: $\forall x \in \Omega$, $\xi_i \in \mathbb{R}$ виконуються нервіності

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2;$$

— $\forall x \in \Omega$ $a(x) \geqslant \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) + \sum_{i=1}^{n} |b_i(x)|)$, $b(x) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(x)$, $b(x) \geqslant 0$.

Позначимо через M сталу, що мажорує абсолютні значення усіх коефіцієнтів операторів $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ й $\mathcal{I}$.

Нехай $C_s^\infty, s \in \{0, T\}$ — лінійні множини нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють умови:

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=s} = 0 \tag{2.21}$$

Під L_2, якщо не вказано інше, матимемо на увазі $L_2(Q)$.

Позначимо через W^+ (W_*^+) і H^+ поповнення C_0^∞ (C_T^∞) за нормами

$$\|u\|_{W^+} = \left(\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 \, dQ\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{H^+} = \left(\int\limits_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \, dQ\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Простори W^+, W_*^+ і H^+ щільно вкладаються в L_2, що випливає з умов (2.21) і нерівності Фрідріхса. Позначимо через W^-, W_*^- і H^- негативні простори, побудовані за L_2 і відповідними позитивними просторами. Оскільки для класів C_0^∞ і C_T^∞ справедливі нерівності $\|u\|_{H^+} \leqslant C\|u\|_{W^+}$, $\|v\|_{H^+} \leqslant C\|v\|_{W_*^+}$ мають місце ланцюжки щільних вкладень

$$W^+ \subset H^+ \subset L_2 \subset H^- \subset W^-, \;\; W_*^+ \subset H^+ \subset \; L_2 \subset H^- \subset W_*^-.$$

Формально спряженим до $\mathcal{L}$ є оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^* v = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) v_{tx_j}\right)_{x_i} + \sum_{i=1}^n (a_i(x) v_t)_{x_i} - a(x) v_t - \\ - \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij}(x) v_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i=1}^n (b_i(x) v)_{x_i} + b(x) v - \\ - \int\limits_t^T \Bigg(\sum_{i,j=1}^n (k_{ij}(x,s,t) v_{x_i}(x,s))_{x_j} - \\ - \sum_{i=1}^n (k_i(x,s,t) v(x,s))_{x_i} + k(x,s,t) v(x,s) \Bigg) \, ds.\end{aligned}$$

2.2.2. Апріорні оцінки в негативних нормах.

Лема 2.17. *Для* $u \in W^+$ *справедливі нерівності*

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_*^-} \leqslant C\|u\|_{H^+} \leqslant C\|u\|_{W^+}.$$

Доведення. Права нерівність є очевидною. Достатньо довести ліву нерівність для функцій з множини, яка є щільною в W^+. Скористаємось при цьому нерівностями $\|w\|_{L_2} \leqslant C\|w_t\|_{L_2}$, $\|w\|_{L_2} \leqslant C\|w\|_H$, які справедливі для функцій з класів $C_s^\infty, s \in \{0, T\}$.

Оцінимо окремо кожний доданок оператора $\mathcal{L}$, інтегруючи частинами й використовуючи нерівність Коші-Буняковського. Розглянемо спочатку диференціальну частину оператора:

$$\|\mathcal{A}u_t\|_{W_*^-} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(\mathcal{A}u_t, v)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \sup_{v \neq 0} \frac{\left| -\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j}, v_{tx_i})_{L_2} \right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n M \sup_{v \neq 0} \frac{\|u_{x_j}\|_{L_2}, \|v_{tx_i}\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant Mn^2 \|u\|_{H^+}.$$

$$I_2 = \sup_{v \neq 0} \frac{|-\sum_{i=1}^n (a_i u_{x_i}, v_t)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant \sum_{i=1}^n M \sup_{v \neq 0} \frac{\|u_{x_i}\|_{L_2}, \|v_t\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant C\|u\|_{H^+}.$$

$$I_3 = \sup_{v \neq 0} \frac{|-(au, v_t)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant M \sup_{v \neq 0} \frac{\|u\|_{L_2}, \|v_t\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant C\|u\|_{H^+}.$$

$$\|\mathcal{B}u\|_{W_*^-} = \sup_{v \neq 0} \frac{|(\mathcal{B}u, v)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} = I_4 + I_5 + I_6.$$

$$I_4 = \sup_{v \neq 0} \frac{\left| \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2} \right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n M \sup_{v \neq 0} \frac{\|u_{x_j}\|_{L_2}, \|v_{x_i}\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant Mn^2 \|u\|_{H^+}.$$

$$I_5 = \sup_{v\neq 0} \frac{|\sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i}, v)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant \sum_{i=1}^n M \sup_{v\neq 0} \frac{\|u_{x_i}\|_{L_2}, \|v\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant C\|u\|_{H^+}.$$

$$I_6 = \sup_{v\neq 0} \frac{|(bu_t, v)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant M \sup_{v\neq 0} \frac{\|u\|_{L_2}, \|v\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant C\|u\|_{H^+}.$$

Тепер оцінимо інтегральні доданки, застосовуючи нерівність Коші-Буняковського:

$$\|\mathcal{I}u\|_{W_*^-} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(\mathcal{I}u, v)_{L_2}|}{\|v\|_{W_*^+}} = I_7 + I_8 + I_9.$$

$$I_7 = \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^t k_{ij}(x,t,s) u_{x_i}(x,s)\, ds, v_{x_j}\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\sum_{i,j=1}^n \left(\int_0^T |u_{x_i}(x,s)|\, ds, |v_{x_j}|\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$M \sum_{i,j=1}^n \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\left(\int_0^T |u_{x_i}(x,s)|\, ds, |v_{x_j}|\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$M \sum_{i,j=1}^n \sup_{v\neq 0} \frac{\left\|\int_0^T |u_{x_i}(x,s)|\, ds\right\|_{L_2} \|v_{x_j}\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant Mn^2\sqrt{T}\|u\|_{H^+}.$$

Аналогічно

$$I_8 = \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\sum_{i=1}^n \left(\int_0^t k_i(x,t,s) u_{x_i}(x,s)\, ds, v\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\sum_{i=1}^n \left(\int_0^T |u_{x_i}(x,s)|\, ds, |v|\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=1}^n \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\left(\int_0^T |u_{x_i}(x,s)|\, ds, |v|\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i=1}^n \sup_{v\neq 0} \frac{\left\|\int_0^T |u_{x_i}(x,s)|\, ds\right\|_{L_2} \|v\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant M\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\sup_{v\neq 0}\frac{\||u_{x_i}(x,s)|\|_{L_2}\|v\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}}\leqslant C\|u\|_{H^+}.$$

Нарешті,

$$I_9=\sup_{v\neq 0}\frac{\left|\left(\int_0^t k(x,t,s)u(x,s)\;ds, v\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}}\leqslant$$

$$\leqslant M\sup_{v\neq 0}\frac{\left|\left(\int_0^T |u(x,s)|\;ds, |v|\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{W_*^+}}\leqslant M\sup_{v\neq 0}\frac{\left\|\int_0^T |u(x,s)|\;ds\right\|_{L_2}\|v\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}}\leqslant$$

$$\leqslant M\sqrt{T}\sup_{v\neq 0}\frac{\|u(x,s)\|_{L_2}\|v\|_{L_2}}{\|v\|_{W_*^+}}\leqslant C\|u\|_{H^+}.$$

Додаючи всі одержані нерівності, маємо твердження леми. □

Аналогічну властивість має й спряжений оператор.

Лема 2.18. *Для* $u\in H^+$ *справедлива нерівність*

$$\|\mathcal{L}^*v\|_{W^-}\leqslant C\|v\|_{H^+}\leqslant C\|v\|_{W_*^+}.$$

Леми 2.17 і 2.18 дають змогу розширити за неперервністю оператори $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ й розглядати їх як неперервні відображення $H^+\to W_*^-$ і $H^+\to W^-$.

Лема 2.19. $\exists C>0:\forall u\in H^+$ *має місце оцінка* $\|\mathcal{L}u\|_{W_*^-}\geqslant C\|u\|_{H^+}$.

Доведення. Доведемо лему для функцій з C_0^∞. Розглянемо інтегральне перетворення, що кожному елементу $u\in C_0^\infty$ ставить у відповідність функцію

$$v(x,t)=-\int_T^t e^{-p\tau}u(x,\tau)\;d\tau,$$

де p — деяка додатна стала, значення якої буде підібрано пізніше. Таким чином, $u(x,t)=-e^{pt}v_t(x,t)$, $u_{x_i}(x,t)=-e^{pt}v_{tx_i}(x,t)$. Легко бачити, що $v\in C_T^\infty$.

Щоб довести потрібне твердження, обґрунтуємо ланцюжок нервіностей

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_*^-}\|v\|_{W_*^+}\geqslant|(\mathcal{L}u,v)_{L_2}|\geqslant C_0\|v\|_{W_*^+}^2\geqslant C\|v\|_{W_*^+}\|u\|_{H^+}.$$

Ліва нерівність — це нервініcть Коші-Шварца. Права є очевидною (див. вираз для u через v_t). Щоб довести середню, розглянемо білінійну форму

$$(\mathcal{L}u, v)_{L_2} = (\mathcal{A}u_t, v)_{L_2} + (\mathcal{B}u, v)_{L_2} + (\mathcal{I}u, v)_{L_2}.$$

спершу оцінимо $(\mathcal{A}u_t, v)_{L_2} + (\mathcal{B}u, v)_{L_2} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6$.

Інтегруючи частинами з урахуванням рівномірної еліптичності оператора $\mathcal{A}$, а також умов (2.21) та їх наслідків ($u_{x_i}|_{t=0} = v_{x_i}|_{t=T} = 0$), маємо

$$I_1 = -\int\limits_Q v \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} u_{tx_i}\right)_{x_j} \, dQ = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q a_{ij} u_{tx_i} v_{x_j} \, dQ =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q a_{ij} u_{x_i} v_{tx_j} \, dQ = \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q e^{pt} a_{ij} v_{tx_i} v_{tx_j} \, dQ \geqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \alpha e^{pt} v_{tx_i}^2 \, dQ.$$

Аналогічно можна показати, що

$$I_2 = \int\limits_Q \sum_{i=1}^n a_i u_{tx_i} v \, dQ = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \frac{\partial a_i}{\partial x_i} e^{pt} v_t^2 \, dQ,$$

$$I_3 = \int\limits_Q a u_t v \, dQ = \int\limits_Q a e^{pt} v_t^2 \, dQ,$$

$$I_4 = -\int\limits_Q v \sum_{i,j=1}^n \left(b_{ij} u_{x_j}\right)_{x_i} \, dQ \geqslant \int\limits_Q \frac{\beta p}{2} e^{pt} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 \, dQ,$$

$$I_5 = \int\limits_Q \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} v \, dQ = -\sum_{i=1}^n \int\limits_Q b_i u v_{x_i} \, dQ - \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u v \, dQ.$$

Оскільки

$$-\sum_{i=1}^n \int\limits_Q b_i u v_{x_i} \, dQ = \sum_{i=1}^n \int\limits_Q b_i e^{pt} v_t v_{x_i} \, dQ \geqslant -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int\limits_Q |b_i| e^{pt} (v_t^2 + v_{x_i}^2) \, dQ,$$

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u v \, dQ + I_6 = \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \frac{\partial b_i}{\partial x_i} u v \, dQ + \int\limits_Q b u v \, dQ \geqslant 0,$$

маємо $I_2+I_3+I_5+I_6 \geqslant -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_Q e^{pt}|b_i|v_{x_i}^2\ dQ$, тож загалом

$$(\mathcal{A}u_t, v)_{L_2} + (\mathcal{B}u, v)_{L_2} \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q e^{pt} v_{tx_i}^2\ dQ + P_1(p) \sum_{i=1}^{n} \int\limits_Q e^{pt} v_{x_i}^2\ dQ,$$

де $P_1(p) \sim p$. Тепер оцінимо доданки $(\mathcal{I}u, v)_{L_2} = (u, \mathcal{I}^* v)_{L_2} = J_1 + J_2 + J_3$.

Позначимо $M = \max_{(x,t,\tau)}(|k_{ij}(x,t,\tau)|, |k_i(x,t,\tau)|, |k(x,t,\tau)|)$. Використавши формулу інтегрування частинами і лему 2.1, маємо

$$J_1 = \int\limits_Q e^{pt} v_t(x,t) \int\limits_t^T \sum_{i,j=1}^{n} \left(k_{ij}(x,\tau,t) v(x,\tau)_{x_i}\right)_{x_j}\ d\tau dQ =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^T -e^{pt} v_{tx_j}(x,t) \int\limits_t^T k_{ij}(x,\tau,t) v_{x_i}(x,\tau)\ d\tau\ dt\ d\Omega =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^T -v_{x_i}(x,\tau) \int\limits_0^\tau e^{pt} k_{ij}(x,\tau,t) v_{tx_j}(x,t)\ dt\ d\tau\ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_0^T |v_{x_i}(x,\tau)| \int\limits_0^\tau e^{pt} |v_{tx_j}(x,t)|\ dt\ d\tau d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int\limits_Q e^{pt} (v_{tx_j}^2 + v_{x_i}^2)\ dQ \right) =$$

$$= \frac{Mn}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_Q e^{pt} (v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2)\ dQ \right).$$

Аналогічно

$$J_2 = \int\limits_Q -e^{pt} v_t(x,t) \int\limits_t^T \sum_{i=1}^{n} \left(k_i(x,\tau,t) v(x,\tau)\right)_{x_i}\ d\tau dQ =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^T v(x,\tau) \int\limits_0^\tau e^{pt} k_i(x,\tau,t) v_{tx_i}(x,t)\ dt\ d\tau\ d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{T} \sum_{i=1}^{n} |v(x,\tau)| \int\limits_{0}^{\tau} e^{pt} |v_{tx_i}(x,t)| \, dt \, d\tau d\Omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{Q} e^{pt}(v^2 + v_{tx_i}^2) \, dQ \right) \leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2) \, dQ \right)$$

(в останньому переході використано нерівність Фрідріхса).

$$J_3 = \int\limits_{Q} e^{pt} v_t(x,t) \int\limits_{t}^{T} k(x,\tau,t) v(x,\tau) d\tau dQ \leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int\limits_{Q} e^{pt}(v^2 + v_t^2) \, dQ \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2}\sqrt{\frac{T}{p}} \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2) \, dQ \right).$$

Таким чином,

$$|(\mathcal{L}u, v)|_{L_2} \geqslant |(\mathcal{A}u, v)_{L_2} + (\mathcal{B}u, v)_{L_2}| - |(\mathcal{I}u, v)_{L_2}| \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} e^{pt} v_{tx_i}^2 \, dQ + P_1(p) \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{Q} e^{pt} v_{x_i}^2 \, dQ + P_2(p) \left(\int\limits_{Q} e^{pt}(v_{x_i}^2 + v_{tx_i}^2) \, dQ \right),$$

де $P_1(p) \sim p$, $P_2(p) \sim p^{-\frac{1}{2}}$, тож при достатньо великому p потрібна нерівність має місце, наприклад, з $C_0 = \frac{\alpha}{2}$. □

Аналогічна нерівність справедлива і для спряженого оператора.

Лема 2.20. $\exists C > 0 : \forall v \in H^+$ *має місце оцінка:* $\|\mathcal{L}^* v\|_{W^-} \geqslant C\|v\|_{H^+}$.

Доведення. Доведемо лему для функцій із $v \in C_T^\infty$. Нехай $\widetilde{u}(x,t) = v(x, T-t)$. Тоді $\widetilde{u} \in C_0^\infty$, а $\mathcal{L}^* v = \mathcal{L}_* \widetilde{u}$, де $\mathcal{L}_*$ — інтегро-диференціальний оператор вигляду

$$\mathcal{L}_* u = \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{tx_j} \right)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i^*(x) u_{tx_i} - a^*(x) u_t -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \left(b_{ij}(x) u_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i^*(x) u_{x_i} + b^*(x) u -$$

$$- \int_t^T \left(\sum_{i,j=1}^{n} (k_{ij}(x,t,s) u_{x_i}(x,s))_{x_j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} k_i^*(x,t,s) u_{x_i}(x,s) + k^*(x,t,s) u(x,s) \right) \, ds,$$

коефіцієнти якого пов'язані з коефіцієнтами $\mathcal{L}$ співвідношеннями

$a_i^* = -a_i$, $a^* = a - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, $b_i^* = -b_i$, $b^* = b - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$, $k_i^*(x,t,\tau) = -k_i(x,T-t,T-\tau)$, $k^*(x,t,\tau) = k(x,T-t,T-\tau) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k_i(x,T-t,T-\tau)}{\partial x_i}$.

Але тоді можна повторити міркування з доведення леми 2.19 для оператора $\mathcal{L}_*$, поклавши

$$\widetilde{v}(x,t) = - \int_T^t e^{-ps} \widetilde{u}_t(x,s) \, ds.$$

Це дасть твердження леми, адже $\|v\|_{H^+} = \|\widetilde{u}\|_{H^+}$. □

З доведених нерівностей випливають теореми розв'язності.

Теорема 2.7. *Для кожного функціонала $f \in W_*^-$ рівняння $\mathcal{L}u = f$ має єдиний розв'язок з простору H^+ в розумінні означень 2.4–2.5, причому $u \in W^+ \Leftrightarrow f \in H^-$.*

Теорема 2.8. *Для кожного функціонала $g \in W^-$ рівняння $\mathcal{L}^*v = g$ має єдиний розв'язок з простору H^+ в розумінні означень 2.4–2.5, причому $v \in W_*^+ \Leftrightarrow g \in H^-$.*

Теорема 2.9. *Для кожного функціонала $f \in H^-$ рівняння $\mathcal{L}u = f$ має єдиний розв'язок з простору W^+ в розумінні означень 2.1–2.3 .*

Теорема 2.10. *Для кожного функціонала $g \in H^-$ рівняння $\mathcal{L}^*v = g$ має єдиний розв'язок з простору W_*^+ в розумінні означень 2.1–2.3.*

Зауваження 2.6. До вищерозглянутої задачі зводиться початковокрайова задача з неоднорідними початковими умовами:

$$\mathcal{L}u = f,\ u|_{t=0} = u_0(x),\ u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Введемо до розгляду функцію $u^*(x,t) = u_0(x)$. Якщо $u_0 \in W_2^1(\Omega)$, то можна зробити заміну $v = u - u^*$, що приводить до задачі

$$\mathcal{L}v = f - \mathcal{L}u^*,\ v|_{t=0} = 0,\ v|_{\partial\Omega} = 0.$$

2.2.3. Імпульсно-точкова керованість. Розглянемо систему

$$\mathcal{L}u(h) = B(h), \quad h \in U, \tag{2.22}$$

де $B : U \to W_*^-$.

Означення 2.6. Система (2.22) точно керована (асимптотично керована) в банаховому просторі $M \subseteq L_2$ множиною допустимих керувань U, якщо множина $\{u(h) : \ h \in U\}$ покриває M (щільна в M).

З попередніх результатів безпосередньо випливає: якщо $B\,(U) = W_*^-$, то (2.22) точно керована в H^+. Умова $B\,(U) = W_*^-$ є жорсткою та, як правило, не виконується для правих частин, що зустрічаються в задачах узагальненого керування. Послабивши вимоги на праву частину, яка задає вплив, приходимо до твердження: якщо $B\,(U)$ щільна в W_*^-, то система (2.22) асимптотично керована в H^+ [31].

Розглянемо дві конкретні ситуації керованості. Нехай

$$B(h) = \sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j \delta\,(\cdot - t_j) \otimes g_j,$$

де $h = \{(t_j, c_j, g_j\,(x))\}$ — фінітна послідовність елементів $[0,T] \times \mathbb{R} \times L_2(\Omega)$ (тобто, починаючи з деякого j_0 всі елементи дорівнюють нулю). Позначимо через F множину всіх таких фінітних послідовностей. Відомо [44], що множина

$$\left\{\sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j \delta\,(\cdot - t_j) \otimes g_j : \ h \in F\right\}$$

щільно вкладена в W_*^-. Звідси випливає асимптотична імпульсна керованість системи (2.22).

Припустимо, що множина Ω циліндрична за змінною x_1, тобто $\Omega = (0,1)\times\Omega'$, $\Omega'\in\mathbb{R}^{n-1}$. Нехай

$$B(h)=\sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j\delta\left(\cdot-t_j\right)\otimes\delta\left(\cdot-x_{1,j}\right)\otimes g_j,$$

де $h = \{(t_j, x_{1,j}, c_j, g_j\left(x_2,\ldots,x_n\right))\}$ — фінітна послідовність елементів декартового добутку $[0,T]\times[0,1]\times\mathbb{R}\times L_2\left(\Omega'\right)$, F' — множина всіх таких фінітних послідовностей. Оскільки множина

$$\left\{\sum\nolimits_{j\geqslant 1} c_j\delta\left(\cdot-t_j\right)\otimes\delta\left(\cdot-x_{1,j}\right)\otimes g_j:\ h\in F'\right\}$$

щільно вкладена в W_*^-, то система (2.22) асимптотично керована в просторі H^+ (імпульсно-точкова керованість).

2.2.4. Схема методу Гальоркіна. Нехай $\{\omega_i\}_{i=1}^m$ — скінченноелементні базисні функції вигляду (2.15). Через H_m позначимо лінійну оболонку системи $\{\omega_1, ..., \omega_m\}$.

Як і для параболічного рівняння, наближений розв'язок рівняння (2.19) будемо шукати у вигляді лінійної комбінації

$$u^m=\sum_{k=1}^m g_k(t)\omega_k.$$

Коефцієнти $g_k(t)$ знайдемо зі співвідношень

$$-\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u^m_{x_i}(t), v_{tx_j}\right)_{L_2(\Omega)}-\left(\sum_{i=1}^n a_i u^m_{x_i}(t), v_t\right)_{L_2(\Omega)}-\left(au^m(t),v_t\right)_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij}u^m_{x_i}(t), v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\sum_{i=1}^n b_i u^m_{x_i}(t), v\right)_{L_2(\Omega)}+$$
$$+\left(bu^m(t),v\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\sum_{i,j=1}^n \int_0^t k_{ij}u^m_{x_i}(s)\ ds, v_{x_j}\right)_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{0}^{t} k_i u^m_{x_i}(s)\,ds, v\right)_{L_2(\Omega)} + \left(\int\limits_{0}^{t} k u^m_{x_i}(s)\,ds, v\right)_{L_2(\Omega)} = (f(t), v)_{L_2(\Omega)}, \tag{2.23}$$

де v — довільний елемент простору H_m. Переписавши ці рівності з $v = \omega_l, l = \overline{1,m}$, одержимо систему звичайних інтегро-диференціальних рівнянь відносно $g_k(t)$:

$$(LG)(t) \equiv AG^{'}(t) + BG(t) + \int\limits_{0}^{t} K(t,s)G(s)\,ds = F(t) \tag{2.24}$$

з початковими умовами

$$G(0) = 0, \tag{2.25}$$

де $G(t) = (g_1(t), ..., g_m(t))^T$, $F(t) = ((f(t), \omega_1)_{L_2(\Omega)}, ..., (f(t), \omega_m)_{L_2(\Omega)})^T$, а елементи матриць A,B і K визначаються так:

$$A_{ql} = \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{q_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(a_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_q)_{L_2(\Omega)} + (a\omega_l, \omega_q)_{L_2(\Omega)},$$

$$B_{ql}(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{q_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(b_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_q)_{L_2(\Omega)} + (b\omega_l, \omega_q)_{L_2(\Omega)},$$

$$K_{ql}(t,s) = \sum_{i,j=1}^{n}(k_{ij}\omega_{l_{x_i}}, \omega_{q_{x_j}})_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n}(k_i\omega_{l_{x_i}}, \omega_q)_{L_2(\Omega)} + (k\omega_l, \omega_q)_{L_2(\Omega)}.$$

Очевидно, що $F \in L_2([0,T])^m$, тобто $(f(t), \omega_k) \in L_2([0,T]), q = \overline{1,m}.$

Систему (2.24) можна переписати у вигляді

$$(L_1G)(t) \equiv G^{'}(t) + A^{-1}BG(t) + \int\limits_{0}^{t} A^{-1}K(t,s)G(s)\,ds = A^{-1}F(t), \tag{2.26}$$

і її розв'язність випливає з наслідку 2.2 (тобто псевдопараболічне рівняння у частинних подіхних зводиться до системи звичайних інтегро-ди

ференціальних рівнянь такого самого вигляду, як і параболічне).

2.2.5. Збіжність послідовності наближень. Сфромулюємо теорему збіжності побудованого методу.

Лема 2.21. *Послідовність* (u^m) *обмежена за нормою простору* H^+.

Теорема 2.11. *Нехай* $f \in H^-$. *Тоді послідовність* (u^m) *збігаєтсья до розв'язку* u *задачі (2.19)–(2.20) слабко у просторі* H^+.

Доведення леми й теоерми повністю повторюють доведення їх аналогів для параболічного рівняння — 2.16 леми й теореми 2.6.

Зауваження 2.7. Завдяки компактності вкладення H^+ у простір $L_2(Q) = L_2([0,T], L_2(\Omega))$ має місце і сильна збіжність u^m до u в $L_2(Q)$.

2.2.6. Схема методу. Задачу Коші для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь (2.24)–(2.25) розв'яжемо інтегро-інтерполяційним методом. Позначимо $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = \overline{0,n}$, а $\tau = \frac{1}{n}$. Проінтегруємо систему (2.24) на проміжку $[t_{i-1}, t_i]$, дискретизуючи похідну й інтеграл за допомогою квадратурних формул:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} AG'(s)\, ds = A(G_i - G_{i-1}),$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} BG_i\, ds \approx \frac{\tau B}{2}(G_i + G_{i-1}),$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_0^s K(s,\nu)G(\nu)\, d\nu \right) ds \approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{\tau}{2}(I(t_i) + I(t_{i-1}))\, ds \approx$$

$$\approx \tau^2 \left(\frac{1}{2}K(t_i,0)G_0 + \sum_{l=1}^{i-1} K(t_i,t_l)G_l + \frac{1}{2}K(t_i,t_i)G_i \right),$$

де внутрішній інтеграл дискретизовано за формулою правих прямокутників:

$$I(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i,\nu)G(\nu)\, d\nu \approx \tau \sum_{l=1}^{i} K(t_i,t_l)G_l.$$

Перегруповуючи доданки дискретизованого рівняння, маємо співвідношення

$$\left(A + \frac{\tau}{2}B + \frac{\tau^2}{2}K(t_i,t_i)\right)G_i =$$
$$= \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} F(s)\,ds - AG_{i-1} - \frac{\tau}{2}BG_{i-1} - \frac{\tau^2}{2}K(t_i,0)G_0 - \tau^2\sum_{l=1}^{i}K(t_i,t_l)G_l. \tag{2.27}$$

Якщо вектор-функція достатньо гладка, її інтеграл можна дискретизувати, наприклад, за формулою середніх прямокутників:

$$\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} F(s)\,ds \approx \frac{\tau}{2}(F_{i-1} + F_i).$$

Якщо F містить сингулярну складову, її можна регуляризувати і застосвувати цю саму формулу, або ж проінтегувати її з урахуванням конкретного вигляду сингулярності.

Матриці A, B і K тридіагональні в силу вибору скінченноелементного базису, тому СЛАР (2.27) можна розв'язувати методом прогонки. Обчислення розв'язку здійснюється пошарово, починаючи з шару G_0.

2.2.7. Обчислювальний експеримент. Для тестування алгоритму було розглянуто рівняння (2.4) з

$$f(x,t) = 2\pi^2 \sin \pi x(e^t - 1).$$

Точним розв'зком рівняння з такою правою частиною є функція $u(x,t) = t^2 \sin(\pi x)$. У таблиці наведено похибки для різних кількостей скінченних елементів (m) і часових шарів (n, без врахвування початкового стану). Наведемо відносні похибки за нормою $L_2([0,T];L_2(\Omega))$.

m \ n	10	25	50
25	$1.237 * 10^{-2}$	$1.708 * 10^{-2}$	$5.991 * 10^{-3}$
50	$9.551 * 10^{-3}$	$4.028 * 10^{-3}$	$3.139 * 10^{-3}$
100	$8.155 * 10^{-3}$	$2.616 * 10^{-3}$	$1.723 * 10^{-3}$
500	$7.05 * 10^{-3}$	$1.494 * 10^{-3}$	$5.959 * 10^{-4}$

Таблиця 2.3

Відносні похибки розв'язку псевдопараболічного рівняння в L_2.

Наведемо таблицю відносних похибок у нормі простору $L_2([0,T];H^1(\Omega))$.

m \ n	10	25	50
25	$2.479 * 10^{-2}$	$9.08 * 10^{-3}$	$6.558 * 10^{-3}$
50	$2.206 * 10^{-2}$	$6.257 * 10^{-3}$	$3.711 * 10^{-3}$
100	$2.071 * 10^{-2}$	$4.864 * 10^{-3}$	$2.3 * 10^{-3}$
500	$1.964 * 10^{-2}$	$3.764 * 10^{-3}$	$1.183 * 10^{-3}$

Таблиця 2.4

Відносні похибки розв'язку псевдопараболічного рівняння в H^+.

Праві частини з простору $W_*^-([0,1])$ містять дельта-функції, зосереджені в точках відрізка в окремі моменти часу. Наведемо графіки наближеного розв'язку, для $f(x,t) = 2\sin(\pi x)(t+\pi^2 e^t-\pi^2-\pi^2 t)+0.002\delta(x-\frac{1}{2})\times\delta(t-\frac{1}{2})$. на останній ітерації перед імпульсом і на першій ітерації після нього.

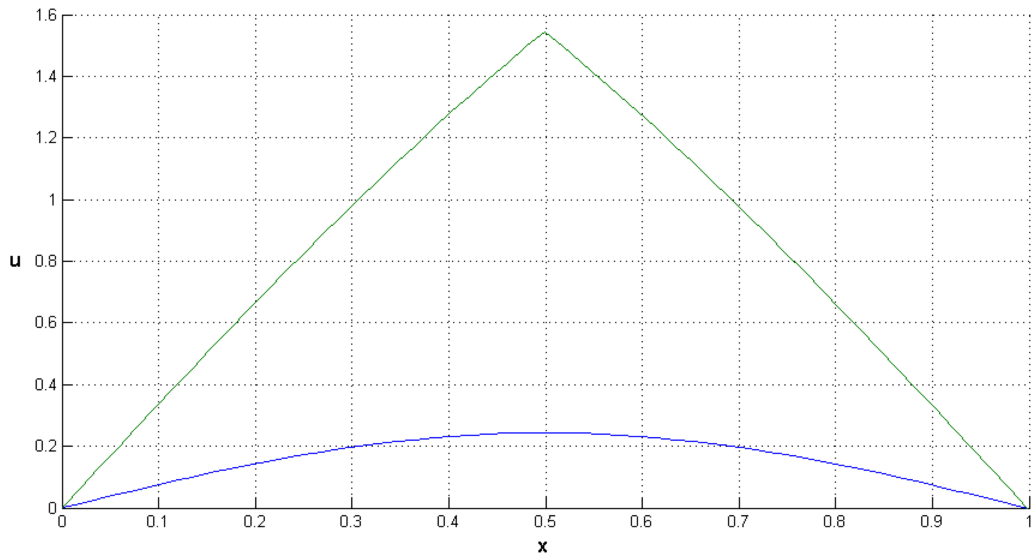

Рис. 2.4. Розв'язок псевдопараболічного рівняння перед точково-імпульсним впливом (синій) і після нього (зелений)

Як бачимо, розв'язок зазнає суттєвих змін не тільки в значенні, а й у гладкості.

2.3. Псевдогіперболічні інтегро-диференціальні рівняння

2.3.1. Основні позначення і простори. Розглянемо початково-крайову задачу

$$\mathcal{L}u \equiv u_{tt} - \Delta u_t - \Delta u + \mathcal{I}u = f, \tag{2.28}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.29}$$

Тут $u = u(x,t)$ — шукана функція стану, $(x,t) \in Q$, $f = f(x,t)$; Δ — оператор Лапласа, що діє за просторовими змінними;

$$\mathcal{I}u = -\int\limits_0^t m(t,s)\Delta u(x,s)\,ds.$$

Нехай $C_s^\infty, s \in \{0,T\}$ — лінійні множини нескінченно диференційовних функцій, що задовольняють умови:

$$u|_{x\in\partial\Omega}=0,\quad u|_{t=s}=0,\quad u_t|_{t=s}=0. \tag{2.30}$$

Позначимо через W^+ (W^+_*) і H^+ (H^+_*) поповнення C_0^∞ (C_T^∞) за нормами

$$\|u\|_{W^+}=\left(\sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2\ dQ\right)^{\frac{1}{2}},\quad \|u\|_{H^+}=\left(\int_Q\sum_{i=1}^n u_t^2+u_{x_i}^2\ dQ\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Простори W^+, W^+_*, H^+ і H^+_* щільно вкладаються в L_2, що випливає з умов (2.30) і нерівності Фрідріхса. Позначимо через W^-, W^-_*, H^- і H^-_* негативні простори, побудовані за L_2 і відповідними позитивними просторами. Мають місце ланцюжки щільних вкладень

$$W^+\subset H^+\subset L_2\subset H^-\subset W^-,\quad W^+_*\subset H^+_*\subset\ L_2\subset H^-_*\subset W^-_*.$$

Формально спряженим до $\mathcal{L}$ є оператор

$$\mathcal{L}^*v=v_{tt}-\Delta v_t-\Delta v+\mathcal{I}^*v,$$

де

$$\mathcal{I}^*v=\int_t^T m(t,s)\Delta v(x,s)\ ds.$$

Позначимо $M=\max|m(t,s)|$.

2.3.2. Апріорні оцінки й теорема розв'язності.

Лема 2.22. *Для $u\in W^+$ справедлива нерівність*

$$\|\mathcal{L}u\|_{H^-_*}\leqslant C\|u\|_{W^+}.$$

Доведення. Достатньо довести нерівність для функцій з множини C_0^∞, яка є щільною у W^+. Доведемо окремо неперервність кожного доданка оператора $\mathcal{L}$, використовуючи нерівність Коші-Буняковського й інтегрування частинами з урахуванням початкових і крайових умов.

$$\|u_{tt}\|_{H_*^-} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(u_{tt}, v)_{L_2}|}{\|v\|_{H_*^+}} = \sup_{v\neq 0} \frac{|(u_t, v_t)_{L_2}|}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{v\neq 0} \frac{\|u_t\|_{L_2}\|v_t\|_{L_2}}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant \|u_t\|_{L_2} \leqslant C\|u\|_{W^+}.$$

$$\|-\Delta u_t\|_{H_*^-} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\int_Q \nabla u_t \cdot \nabla v \; dQ|}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant \|u\|_{W^+},$$

де $\nabla u \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$.

$$\|-\Delta u\|_{H_*^-} = \sup_{v\neq 0} \frac{|\int_Q \nabla u \cdot \nabla v \; dQ|}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant C\|u\|_{W^+};$$

нерівності $\|u_{x_i}\|_{L_2} \leqslant C\|u_{tx_i}\|_{L_2}$ забезпечуються умовою $u|_{t=0} = 0$.

Тепер оцінимо інтегральні доданки:

$$\left\| -\int\limits_0^t m(t,s)\Delta u(x,s) \; ds \right\|_{H_*^-} = \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\left(\int_0^t m(t,s)\Delta u(x,s) \; ds, v\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{H_*^+}} =$$

$$= \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\left(\int_0^t m(t,s)\nabla u(x,s) \; ds, \nabla v\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{v\neq 0} \frac{\left|\left(\int_0^t |\nabla u(x,s)| \; ds, |\nabla v|\right)_{L_2}\right|}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant MT \sup_{v\neq 0} \frac{|(|\nabla u|, |\nabla v|)_{L_2}|}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant$$

$$\leqslant MT \sup_{v\neq 0} \frac{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} H_0^1(\Omega)}{\|v\|_{H_*^+}} \leqslant \|u\|_{W_*^+},$$

оскільки $H_0^1(\Omega) \leqslant \|v\|_{H_*^+}$.

Додаючи всі нерівності, одержуємо твердження леми. □

Лема 2.23. *Для* $v \in W_*^+$ *справедлива нерівність*

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{H^-} \leqslant C\|u\|_{W_*^+}.$$

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 2.22.

Леми 2.22, 2.23 дають змогу розширити за неперервністю оператори $\mathcal{L}$ і $\mathcal{L}^*$ і розглядати їх як неперервні відображення $W^+ \to H_*^-$ і $W_*^+ \to H^-$.

Лема 2.24. *Для $u \in H^+$ має місце оцінка $\|\mathcal{L}u\|_{H_*^-} \geqslant C\|u\|_{H^+}$.*

Доведення. Доведемо лему для функцій з C_0^∞. Розглянемо інтегральне перетворення, що кожному елементу $u \in C_0^\infty$ ставить у відповідність елемент $v \in C_T^\infty$, який є розв'язком задачі Коші

$$-u_t = e^{pt}(v - v_t + v_{tt}),$$

$$v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0.$$

де p — деяка додатна стала, значення якої буде підібрано пізніше. Легко бачити, що $v \in C_T^\infty$. Крім того,

$$u_{tt} = -pe^{pt}(v - v_t + v_{tt}) - e^{pt}(v_t - v_{tt} + v_{ttt}).$$

Щоб довести потрібне твердження, обґрунтуємо ланцюжок нервіностей

$$\|\mathcal{L}u\|_{H_*^-}\|v_t\|_{H_*^+} \geqslant |(\mathcal{L}u, v_t)_{L_2}| \geqslant C\|v_t\|_{H^+}^2 \geqslant C\|u\|_{H^+}^2.$$

Ліва нерівність — це нервіність Коші-Шварца. Права є очевидною. Щоб довести середню, розглянемо білінійну форму

$$(\mathcal{L}u, v_t)_{L_2} = (u_{tt}, v_t)_{L_2} - (\Delta u_t, v_t)_{L_2} - (\Delta u, v_t)_{L_2} + (\mathcal{I}u, v_t)_{L_2}.$$

Оцінимо спочатку перший доданок цієї рівності.

$$(u_{tt}, v_t)_{L_2} = \left(-pe^{pt}(v - v_t + v_{tt}) - e^{pt}(v_t - v_{tt} + v_{ttt}), v_t\right)_{L_2} = I_1 + ... + I_6.$$

$$I_1 = -p\int\limits_Q e^{pt} v v_t \, dQ = pe^{pt}v^2|_{t=0}^{t=T} - I_1 + p^2\int\limits_Q e^{pt}v^2 \, dQ =$$

$$= \frac{p}{2}v^2|_{t=0} + \frac{p^2}{2}\int\limits_Q e^{pt}v^2 \, dQ.$$

$$I_2 = p \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ.$$

$$I_3 = -p \int\limits_Q e^{pt} v_{tt} v_t \, dQ = -p e^{pt} v_t^2 |_{t=0}^{t=T} - I_3 + p^2 \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ =$$

$$= \frac{p}{2} v_t^2 |_{t=0} + \frac{p^2}{2} \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ.$$

$$I_4 = - \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ.$$

$$I_5 = \int\limits_Q e^{pt} v_{tt} v_t \, dQ = e^{pt} v_t^2 |_{t=0}^{t=T} - I_5 + p \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ =$$

$$= \frac{p}{2} v_t^2 |_{t=0} - \frac{p}{2} \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ.$$

$$I_6 = - \int\limits_Q e^{pt} v_{ttt} v_t \, dQ = -e^{pt} v_{tt} v_t^2 |_{t=0}^{t=T} + \int\limits_Q e^{pt} v_{tt}^2 \, dQ + p \int\limits_Q e^{pt} v_{tt} v_t \, dQ.$$

При цьому

$$I_6^0 = \int\limits_Q e^{pt} v_{tt}^2 \, dQ = e^{pt} v_t^2 |_{t=0} - I_6^0 - p \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ,$$

тому

$$I_6 = v_{tt} v_t |_{t=0} + \int\limits_Q e^{pt} v_{tt}^2 \, dQ - \frac{p}{2} v_t^2 |_{t=0} - \frac{p^2}{2} \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ.$$

Отже,

$$I_1 + ... + I_6 = \frac{p^2}{2} \int\limits_Q e^{pt} v^2 \, dQ + \left(\frac{p}{2} - 1 \right) \int\limits_Q e^{pt} v_t^2 \, dQ +$$

$$= \int\limits_Q e^{pt} v_{tt}^2 \, dQ + \frac{p}{2} v^2 |_{t=0} + \frac{p}{2} v_t^2 |_{t=0}.$$

Далі оцінимо

$$(-\Delta u_t, v_t)_{L_2} = (\nabla u_t, \nabla v_t)_{L_2} = \int\limits_Q e^{pt} \nabla (v - v_t + v_{tt}) \cdot \nabla v_t \, dQ = I_7 + I_8 + I_9.$$

Маємо

$$I_7 = \int\limits_Q e^{pt}\nabla v\cdot\nabla v_t\ dQ = e^{pt}\nabla v^2|_{t=0}^{t=T} - J_7 + p\int\limits_Q e^{pt}\nabla v^2\ dQ =$$

$$= \frac{1}{2}\nabla v^2|_{t=0} + \frac{p}{2}\int\limits_Q e^{pt}\nabla v^2\ dQ,$$

де $\nabla v^2 = \nabla v\cdot\nabla v$.

$$I_8 = \int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t^2\ dQ.$$

$$I_9 = -\int\limits_Q e^{pt}\nabla v_{tt}\nabla v_t\ dQ = -e^{pt}\nabla v_t^2|_{t=0}^{t=T} - J_9 + p\int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t^2\ dQ =$$

$$\frac{1}{2}\nabla v_t^2|_{t=0} + \frac{p}{2}\int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t^2\ dQ.$$

Тепер дослідимо доданки

$$(-\Delta u, v_t)_{L_2} = (\nabla u, \nabla v_t)_{L_2} = -(\nabla u_t, \nabla v)_{L_2} =$$

$$\int\limits_Q e^{pt}\nabla(v - v_t + v_{tt})\cdot\nabla v\ dQ = I_{10} + I_{11} + I_{12}.$$

$$I_{10} = \int\limits_Q e^{pt}\nabla v^2\ dQ.$$

$$I_{11} = -\int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t\cdot\nabla v\ dQ = -I_7.$$

$$I_{12} = \int\limits_Q e^{pt}\nabla v_{tt}\cdot\nabla v\ dQ = e^{pt}\nabla v_t\cdot\nabla v|_{t=0}^{t=T} - I_{12}^0 - p\int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t^2\ dQ,$$

де

$$I_{12}^0 = \int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t\cdot\nabla v\ dQ = -J_7.$$

Отже,

$$I_{12} = -\nabla v_t\cdot\nabla v|_{t=0} + \frac{p}{2}\nabla v^2|_{t=0} + \frac{p}{2}\int\limits_Q e^{pt}\nabla v^2\ dQ - \int\limits_Q e^{pt}\nabla v_t^2\ dQ.$$

Загалом маємо

$$I_1 + ... + I_{12} = \int\limits_Q e^{pt} v_{tt}^2 \, dQ + R_1(p) \int\limits_Q e^{pt} \nabla v_t^2 \, dQ + Q_1,$$

де $R_1(p) \sim p$, а $Q_1 \geqslant 0$.

Нарешті, оцінимо інтегральну частину оператора, використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\nu)}{\partial \nu} \, dt$$

і співвідношення між u_t й v. Маємо

$$(\mathcal{I}u, v_t)_{L_2} = -\int\limits_Q \int\limits_0^t m(t,s) \Delta u \, ds v_t \, dQ = (\mathcal{I}u, v_t)_{L_2} =$$

$$= \int\limits_Q \int\limits_0^t m(t,s) \nabla u \, ds \nabla v_t \, dQ =$$

$$= -\int\limits_Q \nabla v_t \int\limits_0^t m(t,s) \int\limits_0^s e^{p\nu} \nabla (v - v_\nu + v_{\nu\nu}) \, d\nu \, ds \, dQ =$$

$$I_{13} + I_{14} + I_{15}.$$

Дослідимо окремо кожний з доданків, застосовуючи лему 2.1.

$$|I_{13}| = \left| \int\limits_Q \nabla v_t \int\limits_0^t m(t,s) \int\limits_0^s e^{p\nu} \nabla v(x,\nu) \, d\nu \, ds \, dQ \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t \int\limits_0^s e^{p\nu} |\nabla v(x,\nu)| \, d\nu \, ds \, dQ =$$

$$= M \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t \int\limits_\nu^t e^{p\nu} |\nabla v(x,\nu)| \, ds \, d\nu \, dQ \leqslant$$

$$= MT \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t e^{p\nu} |\nabla v(x,\nu)| \, d\nu \, dQ \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MT}{2} \sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int\limits_Q \nabla v_t^2 + \nabla v^2 \, dQ \right).$$

Аналогічно

$$|I_{14}| = \left| \int\limits_Q \nabla v_t \int\limits_0^t m(t,s) \int\limits_0^s e^{p\nu} \nabla v_\nu \, d\nu \, ds \, dQ \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t \int\limits_0^s e^{p\nu} |\nabla v_\nu| \, d\nu \, ds \, dQ =$$

$$= M \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t \int\limits_\nu^t e^{p\nu} |\nabla v_\nu| \, ds \, d\nu \, dQ \leqslant$$

$$= MT \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t e^{p\nu} |\nabla v_\nu| \, d\nu \, dQ \leqslant$$

$$\leqslant MT \sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int\limits_Q \nabla v_t^2 \, dQ \right).$$

Нарешті,

$$|I_{15}| = \left| \int\limits_Q \nabla v_t \int\limits_0^t m(t,s) \int\limits_0^s e^{p\nu} \nabla v_{\nu\nu} \, d\nu \, ds \, dQ \right| \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t \int\limits_0^s e^{p\nu} |\nabla v_{\nu\nu}| \, d\nu \, ds \, dQ =$$

$$= M \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t \int\limits_\nu^t e^{p\nu} |\nabla v_{\nu\nu}| \, ds \, d\nu \, dQ \leqslant$$

$$= MT \int\limits_Q |\nabla v_t| \int\limits_0^t e^{p\nu} |\nabla v_{\nu\nu}| \, d\nu \, dQ \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MT}{2} \sqrt{\frac{T}{p}} \left(\int\limits_Q \nabla v_t^2 + \nabla v_{tt}^2 \, dQ \right).$$

Отже, $I_{13} + I_{14} + I_{15} = R_2(p)$, де $R_2(p) \sim p^{-\frac{1}{2}}$ при $p \to \infty$. Це означає, що можна вибрати достатньо велике p, для якого $R_1(p) + R_2(p) \geqslant 1$, і тоді

$$(\mathcal{L}u, v_t)_{L_2} \geqslant \int\limits_Q e^{pt} (v_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n v_{tx_i}^2) \, dQ \geqslant C \|v_t\|_{H_*^+},$$

що завершує доведення. □

Аналогічно доводиться

Лема 2.25. *Для $v \in H_*^+$ має місце оцінка $\|\mathcal{L}^* v\|_{H^-} \geqslant C \|v\|_{H_*^+}$.*

Наслідком теореми 2.3 є

Теорема 2.12. *Для довільного $f \in H_*^-$ рівняння $\mathcal{L}u = f$ має єдиний розв'язок.*

Зауваження 2.8. Аналогічно до розглянутого модельного прикладу можна дослідити й більш загальне псевдогіперболічне рівняння

$$u_{tt} + \mathcal{A}u + \mathcal{B}u + \mathcal{I}u = f$$

з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1,$$

крайовою умовою $u|_{\partial\Omega} = 0$, де оператори $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ і $\mathcal{I}$ задовольняють такі самі умови, як і у пседопараболічному рівнянні. Крім того, для такого псевдогіперболіного оператора можна одержати апріорні нерівності у таких самих нормах, як для оператора псевдопараболічного типу (для чисто диференціальних операторів це зроблено у [43]).

Зауваження 2.9. Окрім теорем розв'язності, апріорні оцінки використовуються при дослідженні оптимізаційних задач [31]. Теореми керованості, подібні до наведених для псевдопараболічного рівняння, можна одержати й для псевдогіперболічного й параболічного рівнянь.

2.4. Висновки

1) Для параболічного інтегро-диференціального рівняння вдосконалено abc-метод доведення апріорних нерівностей, що дало змогу довести ці нерівності при достатньо загальних припущеннях щодо коефіцієнтів оператора. Зокрема, одержана теорема розв'язності охоплює усі найпоширеніші види ядер інтегральної частини. Додатково доведено апріорні нерівності для випадку, коли значення інтегро-диференціального оператора належать класу функцій, інтегровних з квадратом за часом і сингулярних за просторовою змінною. Для цього випадку також доведено слабку збіжність методу Гальоркіна.

2) Доведено узагальнену розв'язність псевдопараболічного й псевдогіперболічного інтегро-диференціальних рівнянь.

2) Реалізовано напівдискретний метод Гальоркіна для параболічного й псевдопараболічного рівнянь. При проведенні обчислювального експерименту з'ясовано (а також теоретично обґрунтовано), що розв'язки цих рівнянь мають суттєво іншу поведінку, аніж розв'язки їх диференціальних аналогів.

Наслідками одержаних теорем розв'язності є теореми точної й асимптотичної керованості.

РОЗДІЛ 3
ДРОБОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальні рівняння з дробовою похідною за часом привертають значну увагу науковців, що пов'язано, зокрема, з дедалі ширшим колом застосувань цих рівнянь у природознавстві (див. підрозділ 1.3). Разом з тим, як і для інтегро-диференціальних рівнянь, практично не відомі результати щодо збіжності чисельних методів для дробових рівнянь з негладкими за часом правими частинами. Цю проблему частково розв'язано у підрозділі 3.1.

Щодо рівнянь змінних порядків, то вони взагалі є практично не дослідженими. У підрозділі 3.2 одержано теорему слабкої розв'язності початково-крайової задачі для такого рівняння. Крім того, реалізовано метод Гальоркіна з дискретизацією одночасно за просторовими і часовими змінними.

3.1. Рівняння субдифузії сталого порядку

Абстрактні теореми розв'язності для дробових еволюційних рівнянь з похідною Рімана-Ліувілля одержано у [58]. Проте застосований метод не пов'язаний з побудовою послідовності наближень, яка збігається до розв'язку початково-крайової задачі, тому проблема побудови й обґрунтування чисельних методів залишається відкритою. Цій проблемі присвячено ряд публікацій, див. напр. [81], а також [92] (для опуклих многогранних областей).

У цьому підрозділі обґрунтовано слабку збіжність гальоркінських наближень для слабкої постановки початково-крайової задачі для рівняння дифузії з похідною Капуто, а також встановлено, що розв'язок задачі неперервний за часом зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій.

3.1.1. Основні позначення. Розглянемо задачу

$$ {}^*D_0^\alpha u + \mathcal{A}u = f, \tag{3.1} $$

$$ u|_{t=0} = 0. \tag{3.2} $$

Тут $u : [0,T] \to H$ — невідома функція зі значеннями у гільбертовому просторі функцій змінної $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, ${}^*D_0^\alpha$ — похідна Капуто порядку α за часом з початком у точці 0, $\alpha \in (0,1)$, $\mathcal{A}$ — еліптичний диференціальний оператор другого порядку, що діє за змінною x:

$$ (\mathcal{A}\varphi)(x) = -\sum_{i,j=1}^{N} (a_{ij}(x)\varphi_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\varphi_{x_i} + a(x)\varphi. $$

Припустимо, що $\mathcal{A}$ визначений на просторі $H_0^1(\Omega)$ і задається коерцитивною білінійною формою $a(\cdot,\cdot)$. Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначимо двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$.

Введемо еволюційні дробові за часом соболєвські простори

$$ W_0^{\alpha,p}([0,T],H) = \{u \in L_p([0,T],H) | {}^*D_0^\alpha u \in L_p([0,T],H), u(0) = 0\}, $$

де H — гільбертів простір, з нормою $\|u\|_{W_0^{\alpha,p}([0,T],H)} = \|{}^*D_0^\alpha u\|_{L_p([0,T],H)}$.

3.1.2. Слабка розв'язність і гальоркінські наближення. Розглянемо випадок негладкої правої частини рівняння.

Означення 3.1. Слабким розв'язком задачі (3.1)-(3.2) з правою частиною $f \in L_p([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$ назвемо елемент $u \in L_p([0,T], H_0^1(\Omega)) \bigcap \bigcap W_0^{\alpha,p}([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$, що задовольняє тотожність

$$ \langle {}^*D_0^\alpha u(t), v\rangle + a(u(t),v) = \langle f(t), v\rangle \tag{3.3} $$

для довільного $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та майже всіх $t \in [0,T]$, а також початкову умову $u(0) = 0$.

Зауважимо, що завдяки однорідності початкової умови похідна Капуто збігається з похідною Рімана-Ліувілля. Крім того, сформульоване означення слабкої розв'язності рівносильне строгій L_p-розв'язності [58] у просторі $H_0^{-1}(\Omega)$. Тому при зроблених припущеннях щодо оператора $\mathcal{A}$ справедлива теорема існування та єдиності розв'язку.

Теорема 3.1. *Для довільного $f \in L_p([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$ існує і єдиний слабкий розв'язок задачі (3.1)-(3.2).*

Надалі припускатимемо, що $p > 2/\alpha$. Нехай q – таке число, для якого $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Побудуємо для задачі (3.1) нестаціонарний проекційний метод. Виберемо базис $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Задля простоти викладення припустимо, що цей базис ортонормований у просторі $L_2(\Omega)$. Розглянемо проекційні задачі

$$\langle {}^*D_0^\alpha u_m(t), w_j\rangle + a(u_m(t), w_j) = \langle f(t), w_j\rangle\,, \quad j = 1, ..., m, \tag{3.4}$$

з однорідними початковими умовами

$$u_m|_{t=0} = 0.$$

Ці елементи шукатимемо у вигляді $u_m(t) = \sum_{i=1}^m \psi_{im}(t) \cdot w_i$; тоді (3.4) перетворюється на систему звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку з невідомими $\psi_{im}(t)$, $i = 1, ..., m$, $t \in [0,T]$:

$${}^*D_0^\alpha \psi_{jm}(t) + \sum_{i=1}^m a(w_i, w_j)\psi_{im}(t) = \langle f(t), w_j\rangle\,, \quad j = 1, ..., m \tag{3.5}$$

$$\psi_{jm}|_{t=0} = 0.$$

Для дослідження послідовності розв'язків проекційних задач знадобиться

Теорема 3.2. *Нехай* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *і* $g \in L_p([0,T])^n$, *де* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді задача Коші*

$$({}^*D_0^\alpha z)(t) + Az(t) = g(t),$$

$$z(0) = 0.$$

має единий розв'язок $z \in W_p^\alpha([0,T])^n$, *де*

$$W_p^\alpha([0,T])^n = \left\{y = (y_1, ..., y_n)^T | {}^*D_0^\alpha y_i \in L_p([0,T]) \wedge y_i(0) = 0, i = \overline{1,n}\right\} -$$

векторний дробовий простір Соболева порядку α.

Доведення. У [49] доведено, що розв'язок розглядуваної задачі має вигляд

$$z(t) = \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-s)^\alpha, \alpha) g(s)\, ds, \tag{3.6}$$

де

$$E_\rho(B,\mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{B^k}{\Gamma(\frac{k}{\rho}+\mu)} -$$

матрична функція Міттаґ-Леффлера. Подання (3.6) має місце для довільної вимірної обмеженої вектор-функції g.

Щоб розширити оператор на весь простір $W_p^\alpha([0,T])^n$, зі значеннями у $L_p([0,T])^n$, достатньо довести пару оцінок

$$c_1\|z\|_{W^{\alpha,p}([0,T])^n} \leqslant \|g\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant c_2\|z\|_{W^{\alpha,p}([0,T])^n}, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Ліва нерівність безпосередньо випливає з нерівності трикутника і властивостей оператора дробового диференціювання у відповідних нормах (див. Розділ 1). Доведемо праву нерівність.

$$\|z\|_{W^{\alpha,p}([0,T])^n} = \|{}^*D_0^\alpha z\|_{L_p([0,T])^n} = \|Az + g\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant$$

$$\leqslant \|Az\|_{L_p([0,T])^n} + \|g\|_{L_p([0,T])^n}.$$

$$\|Az\|_{L_p([0,T])^n} = \left\| A \cdot \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-s)^\alpha, \alpha) g(s)\, ds \right\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|_*\|z\|_{L_p([0,T])^n},$$

де $\|\cdot\|_*$ – матрична норма, підпорядкована векторній нормі простору $L_p([0,T])^n$. Далі,

$$\|z\|_{L_p([0,T])^n} = \left\| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(A(t-s)^\alpha, \alpha) g(s)\, ds \right\|_{L_p([0,T])^n} =$$

$$= \left\| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t-s)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)} g(s)\, ds \right\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k (T-s)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+\alpha)} |g(s)|\, ds \right\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\frac{1}{\alpha}}(|A|^k (T-s)^\alpha, \alpha) \cdot |g(s)|\, ds \right\|_{L_p([0,T])^n} =$$

$$= \|I_0^\alpha (E_{\frac{1}{\alpha}}(|A|^k (T-t)^\alpha, \alpha) \cdot |g(t)|)\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant$$

$$\leqslant \|E_{\frac{1}{\alpha}}(|A|^k (T-t)^\alpha, \alpha) \cdot |g(t)|\|_{L_p([0,T])^n} \leqslant c_2 \||g(t)|\|_{L_p([0,T])^n}$$

(в останньому переході використано обмеженість дробового інтеграла).

□

Теорема 3.3. *Нехай $u : [0,T] \to H_+$ — абсолютно неперервне відображення, $H_+ \subset H_0 \subset H_-$ — гільбертове оснащення. Тоді для майже всіх $t \in [0,T]$ справедлива нерівність*

$$^*D_0^\alpha \|u(t)\|_{H_0}^2 \leqslant 2 \left\langle ^*D_0^\alpha u(t), u(t) \right\rangle,$$

де через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначено двоїстість між H_+ і H_-.

Доведення. Потрібно довести, що

$$\langle ^*D_0^\alpha u(t), u(t) \rangle - \frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \|u(t)\|_{H_0}^2 =$$

$$= \left\langle \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds, u(t) \right\rangle - \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{2\,\langle u'(s), u(s)\rangle}{(t-s)^\alpha}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\left\langle \int\limits_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds, u(t) \right\rangle - \int\limits_0^t \frac{\langle u'(s), u(s)\rangle}{(t-s)^\alpha}\, ds \right] \geqslant 0.$$

Далі маємо

$$\left\langle \int\limits_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds, u(t) \right\rangle - \int\limits_0^t \frac{\langle u'(s), u(s)\rangle}{(t-s)^\alpha}\, ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{\langle u'(s), u(t)\rangle}{(t-s)^\alpha}\, ds - \int\limits_0^t \frac{\langle u'(s), u(s)\rangle}{(t-s)^\alpha}\, ds = \int\limits_0^t \frac{\langle u'(s), u(t)-u(s)\rangle}{(t-s)^\alpha}\, ds =$$

$$\int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \left\langle u'(s), \int\limits_s^t u'(\nu)\, d\nu \right\rangle\, ds = \int\limits_0^t \left\langle u'(\nu), \int\limits_0^\nu \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds \right\rangle\, d\nu =$$

$$\int\limits_0^t (t-\nu)^\alpha \left\langle \frac{u'(\nu)}{(t-\nu)^\alpha}, \int\limits_0^\nu \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha}\, ds \right\rangle\, d\nu =$$

$$\int\limits_0^t (t-\nu)^\alpha \frac{d}{d\nu} \left\| \int\limits_0^\nu \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} d\nu \right\|^2 = \frac{\alpha}{2} \int\limits_0^t (t-\nu)^{\alpha-1} \left\| \int\limits_0^\nu \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} d\nu \right\|^2 d\nu \geqslant 0.$$

□

Для дійснозначних функцій цю нерівність доведено в [53]. Надалі у розділі припускатимемо, що вона виконується для гальоркінських наближень u_m.

Теорема 3.4. *Послідовність* (u_m) *збігається до розв'язку задачі (3.1)-(3.2) слабко в* $L_2([0,T], H_0^1(\Omega))$ *і* $*$*-слабко в* $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$.

Доведення. Домноживши (3.5) на $\psi_{jm}(t)$, просумувавши за $j = 1, ..., m$ і використавши нерівність Аліханова, одержимо

$$\frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \left\|u_m(t)\right\|^2_{L_2(\Omega)} + a(u_m(t), u_m(t)) \leqslant \langle {}^*D_0^\alpha u_m(t), u_m(t)\rangle + a(u_m(t), u_m(t)) =$$

$$= \langle f(t), u_m(t) \rangle \leqslant \|f(t)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\epsilon^2}\|f(t)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)} + \epsilon^2 \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right), \ \epsilon > 0.$$

Перегруповуючи доданки з урахуванням коерцитивності оператора $\mathcal{A}$, тобто нерівності $a(u_m(t), u_m(t)) \geqslant c_0 \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$, маємо

$$\frac{1}{2} {}^*D_0^\alpha \|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \left(c_0 - \frac{\epsilon^2}{2}\right)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leqslant \frac{1}{2\epsilon^2}\|f(t)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}.$$

Діючи дробово-інтегральним оператором порядку α, вибираючи ϵ з умови $c_0 - \frac{\epsilon^2}{2} > 0$ і застосовуючи нерівність Юнга для дійсних чисел, одержимо оцінку

$$\|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + \int\limits_0^t \frac{\left(2c_0 - \epsilon^2\right)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \leqslant \int\limits_0^t \frac{\|f(s)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}}{\epsilon^2 (t-s)^{1-\alpha}}\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_0^t \frac{\|f(s)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}}{\epsilon^{2p}}\, ds + \int\limits_0^t \frac{1}{(t-s)^{q(1-\alpha)}}\, ds \leqslant M$$

(обмеженість останнього інтеграла випливає з припущення $p > \frac{2}{\alpha}$). Таким чином, для деякого $M = M(\epsilon) > 0$ і майже всіх $t \in [0, T]$

$$\|u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant M,$$
$$\int\limits_0^t \frac{\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(t-s)^{1-\alpha}}\, ds \leqslant \frac{M}{2c_0 - \epsilon^2}.$$

З цих двох оцінок випливає обмеженість (u_m) у просторах $L_\infty([0, T], L_2(\Omega))$ і $L_2([0, T], H_0^1(\Omega))$. Справді,

$$\frac{2c_0 - \epsilon^2}{T^{1-\alpha}} \int\limits_0^t \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds \leqslant \int\limits_0^t \frac{\left(2c_0 - \epsilon^2\right)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(t-s)^{1-\alpha}} \leqslant M.$$

Покладаючи $t = T$, одержуємо

$$\frac{2c_0 - \epsilon^2}{T^{1-\alpha}} \int\limits_0^T \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\, ds \leqslant \int\limits_0^t \frac{\left(2c_0 - \epsilon^2\right)\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{(T-s)^{1-\alpha}} \leqslant M. \qquad (3.7)$$

Тому існують підпослідовінсть (u_{m_k}) й елемент $u \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega)) \bigcap L_2([0,T], H_0^1(\Omega))$, для яких $u_{m_k} \rightharpoonup u$ у $L_2([0,T], H_0^1(\Omega))$ і $u_{m_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u$ у $L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$.

Помноживши перший доданок (3.4) на $\varphi \in C^\infty([0,T])$, таке що $(I_T^{1-\alpha}\varphi)(t)|_{t=T} = 0$ ($I_T^{1-\alpha}$ – інтегральний оператор Рімана-Ліувілля з кінцем у точці T), проінтегрувавши по $[0,T]$ і застосувавши формулу дробового інтегрування частинами, а також здійснивши граничний перехід ($k \to \infty$), можна показати, що u є слабким розв'язком задачі (3.1)-(3.2). Оскільки такий розв'язок єдиний, звідси випливає збіжність усієї послідовності (u_m). □

3.1.3. Неперервність розв'язку. Дослідимо розв'язок початково-крайової задачі на неперервність.

Теорема 3.5. *Розв'язок u задачі (3.1)-(3.2) належить простору $C([0,T], L_2(\Omega))$.*

Доведення. Доведення здійснимо методом згладжень (усереднень). Для $\epsilon > 0$ покладемо

$$u_\epsilon = \eta^\epsilon * u,$$

де

$$\eta(x) = \begin{cases} C \cdot \exp\left(\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

$$\eta^\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta(\frac{t}{\epsilon})$$

а стала C вибирается з умови $\int \eta(t)\, dt = 1$.

Доозначимо u нулем на відрізках $[-\theta, 0)$ і $(T, T+\theta]$. Відомо [74], що для $u \in L_p([a,b], H)$ $u_\epsilon \to u$ за нормою простору $L_p([a,b], H)$, а самі усереднення належать класу $C^\infty([a,b], X)$. Тому можна застосувати нерівність Аліханова:

$$ {}^{*}D_0^{\alpha} \|u_\epsilon(t) - u_\delta(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant 2 \left({}^{*}D_0^{\alpha} u_\epsilon(t) - {}^{*}D_0^{\alpha} u_\delta(t), u_\epsilon(t) - u_\delta(t)\right)_{L_2(\Omega)}, $$

де $t \in [0, T]$.

Інтегруючи (з показником α), маємо

$$ \|u_\epsilon(t) - u_\delta(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u_\epsilon(0) - u_\delta(0)\|^2_{L_2(\Omega)} + $$

$$ +2 \int\limits_0^t \frac{\langle {}^{*}D_0^{\alpha} u_\epsilon(\tau) - {}^{*}D_0^{\alpha} u_\delta(\tau), u_\epsilon(\tau) - u_\delta(\tau)\rangle}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\, d\tau. $$

Оскільки $u \in L_\infty([0,T], L_2(\Omega))$, множина $\{u_\epsilon(0) | \epsilon > 0\}$ обмежена в нормі $L_2(\Omega)$. Дійсно, $u_\epsilon(0) = \int_0^T \eta^\epsilon(s) u(s)\ dt$. Оскільки $\int \eta^\epsilon(t)\ dt = 1$, за нерівністю Бохнера маємо

$$ \|u_\epsilon(0)\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \int\limits_0^T \eta^\epsilon(t) u_\epsilon(t)\ dt \right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \int\limits_0^T |\eta^\epsilon(t)|\, \|u_\epsilon(t)\|_{L_2(\Omega)}\ dt \leqslant $$

$$ \|u\|_{L_\infty([0,T], L_2(\Omega))} \int\limits_0^T |\eta^\epsilon(t)|\ dt = \|u\|_{L_\infty([0,T], L_2(\Omega))}. $$

Тому якщо вибрати послідовність $(\epsilon_n) : \epsilon_n \to 0$, то відповідно до властивості Банаха-Сакса знайдеться підпослідовність (n_k), така що

$$ \left\| \frac{\sum_{k=1}^m u_{\epsilon_{n_k}}(0)}{m} - u(0) \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad m \to \infty. $$

З іншого боку, як легко бачити,

$$ \left\| \frac{\sum_{k=1}^m u_{\epsilon_{n_k}}}{m} - u \right\|_{L_p([0,T], H_0^1(\Omega))} \to 0, \quad m \to \infty, $$

$$ \left\| \frac{\sum_{k=1}^m {}^{*}D_0^{\alpha} u_{\epsilon_{n_k}}}{m} - {}^{*}D_0^{\alpha} u \right\|_{L_p([0,T], H_0^{-1}(\Omega))} \to 0, \quad m \to \infty. $$

Позначимо через u_n $u_{\epsilon_{n_k}}$. Тоді можна записати

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u_n(0) - u_m(0)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+2\int\limits_0^t \frac{\langle {}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau), u_\epsilon(\tau) - u_m(\tau)\rangle}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|u_n(0) - u_m(s)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+2\int\limits_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|_{H_0^{-1}(\Omega)} \|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \|u_n(0) - u_m(s)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\, d\tau + \int\limits_0^t \frac{\|u_n(\tau) - u_m(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\, d\tau \quad (3.8)$$

(в останньому переході використано нерівність $2ab \leqslant a^2 + b^2$). Оцінимо окремо кожний з інтегралів.

$$\int\limits_0^t \frac{\|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^t \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}\, d\tau\right)^{\frac{2}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_0^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}}\, d\tau\right)^{\frac{1}{q}},$$

де останній інтеграл збіжний при $q(1-\alpha) < 1$, тобто $p > 2/\alpha$. Неважко переконатися, що $J(t,s) = \int_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}}\, d\tau$ є обмеженою функцією. З іншого боку,

$$\int\limits_0^t \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}\, d\tau \leqslant \int\limits_0^T \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau) - {}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}\, d\tau.$$

Аналогічно дослідимо другий доданок з (3.8).

$$\int\limits_0^t \frac{\|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^2_{H_0^1(\Omega)}}{|t-\tau|^{1-\alpha}}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_s^t \|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int\limits_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}}\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^T \|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}} \cdot \left(\int\limits_s^t \frac{1}{|t-\tau|^{q(1-\alpha)}}\,d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\int\limits_0^T \|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Отже,

$$\|u_n(t)-u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|u_n(0)-u_m(0)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+M\left[\left(\int\limits_0^T \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau)-{}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}} +\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^T \|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}}\right].$$

Переходячи до границі, одержуємо

$$\overline{\lim_{m,n\to\infty}}\sup_{t\in[0,T]}\|u_n(t)-u_m(t)\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m,n\to\infty}\|u_n(0)-u_m(0)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$\lim_{m,n\to\infty} M\left(\int\limits_0^T \|{}^*D_0^\alpha u_n(\tau)-{}^*D_0^\alpha u_m(\tau)\|^p_{H_0^{-1}(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}} +$$

$$+\lim_{m,n\to\infty} M\left(\int\limits_0^T \|u_n(\tau)-u_m(\tau)\|^p_{H_0^1(\Omega)}\,d\tau\right)^{\frac{2}{p}} = 0,$$

тобто u можна ототожнити (з точністю до множини міри 0) з границею послідовності (u_n) за нормою $\|\cdot\|_{C([0,T],L_2(\Omega))}$. $\square$

Зауваження 3.1. Неперервність розв'язку дає змогу розглядати задачі оптимального керування, зокрема, з критеріями якості вигляду

$$J(u) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - \widetilde{u}(t)\|_{L_2(\Omega)}, \quad J = \|u(T) - \omega\|_{L_2(\Omega)}.$$

3.2. Рівняння субдифузії змінного порядку

3.2.1. Постановка задачі й основні позначення. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ — обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q = \Omega \times [0,T]$. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}u) = f \tag{3.9}$$

з початковою й крайовою умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3.10}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.11}$$

де $u = u(x,t)$, $f = f(x,t)$, Δ — оператор Лапласа

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2},$$

а $D_0^{1-\alpha(x)}$ — похідна Рімана-Ліувілля порядку $1-\alpha(x)$ за часом. Припустимо також, що $\alpha, K \in C^2(\overline{\Omega})$, $\min_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x) > \frac{1}{2}$ і $\max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x) < 1$.

Перш за все, переформулюємо (3.9)–(3.11) як задачу з нульовою початковою умовою. Для цього зробимо заміну $\widetilde{u} = u - u_0$. Маємо задачу

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} - \Delta\left(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{u}\right) = F, \tag{3.12}$$

$$\widetilde{u}|_{t=0} = 0, \tag{3.13}$$

$$\widetilde{u}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.14}$$

де $F = f + \Delta\left(K(x)D_0^{1-\alpha(x)}u_0\right)$.

Проте у задачі (3.12)–(3.14) залишається дробова похідна за часом, на яку діє оператор Лапласа, що робить рівняння незручним для дослідження. У зв'язку з цим, введемо іншу функцію $\widetilde{v} = D_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{u}$. Оскільки $\widetilde{u}|_{t=0} = 0$, маємо ([94], лема 2.5) $\widetilde{u} = I_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{v}$, де $I_0^{1-\alpha(x)}$ позначає інтеграл Рімана-Ліувілля за t з нижньою межею 0.

Підставивши v у (3.12)–(3.14), одержуємо задачу

$$D_0^{\alpha(x)}\widetilde{v} - \Delta(K(x)\widetilde{v}) = F, \tag{3.15}$$

$$I_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{v}|_{t=0} = 0, \tag{3.16}$$

$$\widetilde{v}|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.17}$$

Щоб спростити її, виконаємо заміну $v = K(x)\widetilde{v}$. Оскільки

$$D_0^{\alpha(x)}\widetilde{v}(x,t) = D_0^{\alpha(x)}\left(\frac{v(x,t)}{K(x)}\right) = \frac{1}{K(x)}D_0^{\alpha(x)}v(x,t),$$

$$(I_0^{1-\alpha(x)}\widetilde{v}(x,t))|_{t=0} = \frac{1}{K(x)}(I_0^{1-\alpha(x)}v(x,t))|_{t=0},$$

одержимо задачу

$$\frac{1}{K(x)}D_0^{\alpha(x)}v - \Delta v = F, \tag{3.18}$$

$$I_0^{1-\alpha(x)}v|_{t=0} = 0, \tag{3.19}$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{3.20}$$

Зазначимо, що початкові умови, які включають інтеграли дробових порядків, є цілком стандартними для рівнянь з похідними Рімана-Ліувілля [114]. Розв'язок початкової задачі (3.9)–(3.11) при цьому можна подати у вигляді $u = u_0 + \frac{1}{K(x)}I_0^{1-\alpha(x)}v$. Нижче досліджується розв'язність задачі (3.18)–(3.20).

Позначимо через $H_0^1(\Omega)$ класичний соболєвський простір першого порядку функцій з нульовим слідом, в якому задано норму $\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla\varphi\|_{L_2(\Omega)}$, а через $H_0^{-1}(\Omega)$ спряжений до нього. Нехай також C_Ω — оптимальна стала у нерівності Пуанкаре $\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Omega \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Надалі позначатимемо, наприклад, через $\underline{g}$ й $\overline{g}$ мінімум і максимум функції g, а через C — додатну сталу, яка може бути різною в різних нерівностях. Через, наприклад, g_{x_i} позначатимемо частинну похідну функції g за змінною x_i.

3.2.2. Слабка розв'язність. Нагадаємо деякі властивості соболєвських просторів. Нехай $\mathcal{F}$ позначає перетворення Фур'є. Визначимо простір

$$H^\beta(\mathbb{R}) = \{g \in L_2(\mathbb{R}) | (1+\omega^2)^{\frac{\beta}{2}} (\mathcal{F}g)(\omega) \in L_2(\mathbb{R})\}$$

з нормою

$$\|g\|_{\beta,\mathbb{R}} = \|(1+\omega^2)^{\frac{\beta}{2}} (\mathcal{F}g)(\omega)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Тепер введемо простір

$$H^\beta([0,T]) = \{g \in L_2([0,T]) | \exists \widetilde{g} \in H^\beta(\mathbb{R}) : \widetilde{g}|_{[0,T]} = g\}$$

з нормою

$$\|g\|_\beta = \inf_{\widetilde{g} \in H^\beta(\mathbb{R}), \widetilde{g}|_{[0,T]} = g} \|\widetilde{g}\|_{\beta,\mathbb{R}}.$$

Позначимо через $C_0^\infty([0,T])$ множину нескінченно диференційновних функцій з компактним носієм у $(0,T)$. Нехай H_0^β — поповнення $C_0^\infty([0,T])$ за $\|g\|_\beta$. Через $H_l^\beta([0,T])$, $H_r^\beta([0,T])$ і $H_s^\beta([0,T])$ позначимо поповнення $C_0^\infty([0,T])$ за нормами

$$\|g\|_{\beta,l}^2 = \|g\|_{L_2([0,T])}^2 + \|D_0^\beta g\|_{L_2([0,T])}^2,$$

$$\|g\|_{\beta,r}^2 = \|g\|_{L_2([0,T])}^2 + \|D_T^\beta g\|_{L_2([0,T])}^2,$$

$$\|g\|_{\beta,c}^2 = (D_0^\beta g, D_T^\beta g)_{L_2([0,T])},$$

де D_T^{β} — похідна Рімана-Ліувілля з верхньою межею T.

У [101] доведено таке твердження:

Лема 3.1. *Нехай $\beta > 0$, $\beta \neq m + \frac{1}{2}, m \in \mathbb{N}$. Тоді простори $H_l^{\beta}([0,T])$, $H_r^{\beta}([0,T])$, $H_s^{\beta}([0,T])$ і $H_0^{\beta}([0,T])$ рівні у тому розумінні, що їхні норми еквівалентні.*

Крім того, справедливе таке твердження [28]:

Лема 3.2. *Якщо $0 < \beta < \frac{1}{2}$, то $H^{\beta}([0,T]) = H_0^{\beta}([0,T])$.*

Для дослідження задачі змінного порядку нам знадобляться соболєвські простори змінного порядку. Нехай $C_0^{\infty}(Q)$ — множина нескінченно диференційовних функцій з компактним носієм у Q, а $W^{\beta(\cdot),1}$ — поповнення $C_0^{\infty}(Q)$ за нормою

$$\|u\|^2_{\beta(\cdot),1} = \int\limits_Q (D_0^{\beta(x)} u(x,t))^2 + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}^2(x,t)\; dQ,$$

де $D_0^{\beta(x)}$ — правобічна похідна Рімана-Ліувілля за змінною t з нижньою межею 0, а β є функцією просторових змінних. Через $W^{-\beta(\cdot),-1}$ позначатимемо простір, спряжений до $W^{\beta(\cdot),1}$.

Лема 3.3. *Якщо $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, то $\Delta\left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0\right) \in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$.*

Доведення. Можна безпосередньо перевірити, що

$$\Delta\left(D_0^{1-\alpha(x)} u_0\right) = \Delta\left(\frac{u_0(x)}{\Gamma(\alpha(x)) t^{1-\alpha(x)}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(A_{i,1}(x) t^{\alpha(x)-1} + A_{i,2}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln t + A_{i,3}(x) t^{\alpha(x)-1} \ln^2 t\right),$$

де

$$A_{i,1}(x) = \frac{\partial^2 u_0(x)}{\partial x_i^2} \Gamma(\alpha(x)) + 2 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \Gamma(\alpha(x))}{\partial x_i},$$

$$A_{i,2}(x) = 2 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \Gamma(\alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i} +$$

$$+ u_0(x) \frac{\partial (\Gamma(\alpha(x)) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i})}{\partial x_i} + u_0(x) \frac{\partial \Gamma(\alpha(x))}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_i},$$

$$A_{i,3}(x) = u_0(x)\Gamma(\alpha(x))\left(\frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_i}\right)^2,$$

причому $A_{i,j} \in H_0^{-1}(\Omega)$ завдяки припущенням щодо u_0 й α. Щоб довести лему, достатньо показати, що $\Delta\left(D_0^{1-\alpha(x)}u_0\right) \in L_2([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$. Спочатку розглянемо доданки $A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ двоїстість між $H_0^{-1}(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$. Маємо

$$\int_0^T \|A_{i,1}(x)t^{\alpha(x)-1}\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}\,dt = \int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\left\langle A_{i,1}\cdot t^{\alpha(x)-1},\varphi\right\rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt =$$

$$= \int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\left\langle A_{i,1}, t^{\alpha(x)-1}\varphi\right\rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|A_{i,1}\|_{H_0^{-1}(\Omega)}\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt =$$

$$= \|A_{i,1}\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}\int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt.$$

Зауважимо, що

$$\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^N\left(\int_\Omega (t^{\alpha(x)-1}\varphi_{x_i} + t^{\alpha(x)-1}\ln t\cdot\alpha_{x_i}\varphi)^2\,dx\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^N\left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2}\varphi^2_{x_i} + 2t^{2\alpha(x)-2}\ln^2 t\cdot\alpha^2_{x_i}\varphi^2\,dx\right). \quad (3.21)$$

З іншого боку, можна вибрати таке δ, що $2\alpha(x)-\delta > 1\ \forall x\in\Omega$, а також таке $\mu = \mu(\delta) < 1$, що $\ln^2 t \leqslant t^{-\delta}$ для $t < \mu$. Для таких δ й μ має місце

$$\int_0^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt = \int_0^\mu \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt +$$

$$\int_\mu^T \left(\sup_{\varphi\neq 0}\frac{\|t^{\alpha(x)-1}\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}}\right)^2\,dt = I_1 + I_2.$$

Тепер оцінимо ці два інтеграли окремо, використовуючи (3.21) і нерівність $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

$$I_1 \leqslant \int\limits_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \; dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \; dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{t^{2\underline{\alpha}-2} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_{x_i}^2 \; dx} + \sqrt{t^{2\underline{\alpha}-2-\delta} \cdot \sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \; dx}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \; dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_0^\mu \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{t^{\underline{\alpha}-1}\sqrt{\sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_{x_i}^2 \; dx} + t^{\underline{\alpha}-1-\frac{\delta}{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^N \int_\Omega \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \; dx}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \; dt \leqslant$$

$$2 \int\limits_0^\mu \left(t^{\underline{\alpha}-1} + M_1 t^{\underline{\alpha}-1-\frac{\delta}{2}} \right)^2 \; dt,$$

де $M_1 = C_\Omega \sum_{i=1}^N \overline{\alpha_{x_i}^2}$. Отже,

$$I_1 \leqslant 2 \int\limits_0^\mu t^{2\underline{\alpha}-2} + 2Mt^{2\underline{\alpha}-2-\frac{\delta}{2}} + M^2 t^{2\underline{\alpha}-2-\delta} \; dt < \infty.$$

Більше того,

$$I_2 \leqslant \int\limits_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega 2t^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + 2t^{2\alpha(x)-2} \ln^2 t \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \; dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \; dt \leqslant$$

$$\leqslant 2 \int\limits_\mu^T \left(\sup_{\varphi \neq 0} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\int_\Omega \mu^{2\alpha(x)-2}\varphi_{x_i}^2 + \mu^{2\alpha(x)-2} \ln^2 \mu \cdot \alpha_{x_i}^2 \varphi^2 \; dx \right)}}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} \right)^2 \; dt \leqslant$$

$$2(T-\mu)M_2^2,$$

де $M_2 = \mu^{\underline{\alpha}-1}\sqrt{1 + C_\Omega^2 \ln^2 \mu \cdot \sum_{i=1}^N \overline{\alpha_{x_i}^2}}$. З цих оцінок випливає, що $\|A_{i,1}(x) t^{\alpha(x)-1}\|^2_{L_2([0,T],H_0^1(\Omega))} = \|A_{i,1}\|^2_{H_0^{-1}(\Omega)}(I_1 + I_2) < \infty$.

Аналогічними міркуваннями можна переконатись, що $A_{i,2}(x)t^{\alpha(x)-1}\ln t$ і $A_{i,3}(x)t^{\alpha(x)-1}\ln^2 t$ також належать простору $L_2([0,T], H_0^{-1}(\Omega))$. $\square$

Лема 3.4. *Якщо* $v \in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, *то* $(I_0^{1-\alpha(x)}v)|_{t=0} = 0$ *у* $L_2(\Omega)$.

Доведення. Достатньо показати, що $\|I_0^{1-\alpha(\cdot)}v(\cdot,t)\|^2_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to 0$. Маємо

$$\int\limits_{\Omega} \left(I_0^{1-\alpha(x)}v(x,t)\right)^2 dx = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(x))}\int\limits_0^t \frac{v(x,s)}{(t-s)^{\alpha(x)}}\,ds\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^t \frac{v(x,s)}{(t-s)^{\alpha(x)}}\,ds\right)^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\Omega}\left(\|v(x,\cdot)\|_{H^{\alpha(x)}([0,t])}\left\|\frac{1}{(t-\cdot)^{\alpha(x)}}\right\|_{L_{r}(x)([0,t])}\right)^2 dx,$$

де $r(x) = 2/(1+\alpha(x))$, і використано вкладення $H^{\frac{\alpha}{2}}([0,t])$ у $L_{r'}([0,t])$ з $r' = 2/(1-\alpha(x))$ [103]. Звідси

$$\int\limits_{\Omega}\left(I_0^{1-\alpha(x)}v(x,t)\right)^2 dx \leqslant C\max_{x\in\Omega}\left\|\frac{1}{(t-\cdot)^{\alpha(x)}}\right\|^2_{L_{r}(x)([0,t])}\|v(x,\cdot)\|^2_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)} \to 0,$$

а отже

$$\left\|\frac{1}{(t-\cdot)^{\alpha(x)}}\right\|_{L_{r}(x)([0,t])} \to 0$$

рівномірно на Ω при $t \to 0$. □

Зауваження 3.2. Доведення леми 3.4 повторює міркування доведення леми 2.2, [103].

Лема 3.5. *[103] Нехай* $0 < \beta < 2$, $\beta \neq 1$, *а* $g, h \in H_0^{\frac{\beta}{2}}([0,T])$. *Тоді*

$$\left\langle D_0^{\beta}g, h\right\rangle_{H_0^{-\frac{\beta}{2}}\times H_0^{\frac{\beta}{2}}} = (D_0^{\frac{\beta}{2}}g, D_T^{\frac{\beta}{2}}h)_{L_2},$$

де простори й відповідні білінійні форми визначені на $[0,T]$.

Зауваження 3.3. Відповідно до леми 3.1, твердження леми 3.5 справедливе також для $g, h \in H^{\frac{\beta}{2}}([0,T])$, якщо при цьому $\beta < \frac{1}{2}$.

Тепер розглянемо слабку постановку (3.18)–(3.20). Позначимо

$$b(v,w)=\int\limits_Q \frac{1}{K(x)} D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}} v\cdot D_T^{\frac{\alpha(x)}{2}} w+\nabla v\cdot\nabla w\, dQ,$$

де ∇ — градієнт за просторовими змінними.

З леми 3.5 випливає, що для гладких v і w тотожність

$$b(v,w)=(D_0^{\alpha(\cdot)}v+\Delta v,w)_{L_2(Q)}$$

виконується для довільного $w\in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$.

Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}$ двоїстість між $W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$ і $W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$.

Означення 3.2. Під слабким розв'язком задачі (3.18)–(3.20) розумітимемо v, для якого

$$b(v,w)=\langle F,w\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}.$$

Теорема 3.6. *Нехай $F\in W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)$. Тоді задача (3.18)–(3.20) має єдиний розв'язок $v\in W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, причому*

$$\|v\|_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)}\leqslant C\|F\|_{W^{-\frac{\alpha(\cdot)}{2},-1}(Q)}.$$

Доведення. Відомо [103], що для $g\in H^\beta([0,T])$, $\beta<\frac{1}{2}$

$$(D_0^\beta g, D_T^\beta g)_{L_2([0,T])}\geqslant C_1\cos(\pi\beta)\|g\|^2_{H^\beta([0,T])}$$

для деякого $C_1>0$. Отже, використовуючи цю оцінку з $\beta=\frac{\alpha(x)}{2}$ і додатність оператора Δ, одержуємо

$$b(v,v)\geqslant C\int\limits_\Omega \frac{1}{K(x)}\cos\left(\frac{\pi\alpha(x)}{2}\right)\int\limits_0^T (D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}}v(x,t))^2\,dt\,dx+\int\limits_Q \nabla v\cdot\nabla v\,dQ\geqslant$$

$$\geqslant C\cos\left(\frac{\pi\overline{\alpha}}{2}\right)\int\limits_Q (D_0^{\frac{\alpha(x)}{2}}v(x,t))^2\,dQ+\int\limits_0^T\|v(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\,dt\geqslant C\|v\|^2_{W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)}.$$

Неперервність білінійної форми $b(\cdot,\cdot)$ перевіряється безпосередньо; отже, існування і єдиність розв'язку задачі випливає з леми Вішика-Лакса-Мільґрама. $\square$

Наслідок 3.1. *Задача (3.18)–(3.20) має єдиний розв'язок* $u \in I_0^{1-\alpha(\cdot)}(W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q))$.

Зауваження 3.4. Виконання початкової умови (3.19) забезпечується лемою 3.4.

Зауваження 3.5. Відповідно до леми 3.3, теорема 3.6 дає змогу розглядати неоднорідні початкові умови (3.10) з $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

3.2.3. Метод Гальоркіна. Побудуємо схему просторово-часової дискретизації системи (3.18)–(3.20). Виберемо базис $\{\vartheta_i\}_{i=1}^{\infty}$ у просторі $W^{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}(Q)$, позначимо через $W^{m,n}$ лінійну оболонку $\{\vartheta_{1,1}, ..., \vartheta_{m,n}\}$ й розглянемо наближення

$$v^{m,n}(x,t) = \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j}\vartheta_{i,j}(x,t),$$

де $c_{i,j}$ — невідомі коефіцієнти, які визначаються з системи

$$b(v^{i,j}, w^{k,l}) = \left\langle F, w^{k,l} \right\rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1} \ \ \forall w^{k,l} \in W^{m,n},$$

яка є системою лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j} b(\vartheta_{i,j}, \vartheta_{k,l}) = \langle F, \vartheta_{k,l} \rangle_{\frac{\alpha(\cdot)}{2},1}, \quad i,k = \overline{1,m}, j,l = \overline{1,n}. \tag{3.22}$$

Тоді наближений розв'язок задачі (3.9)–(3.11) виражається за формулою

$$u^{m,n}(x,t) = u_0(x) + \frac{1}{K(x)} \sum_{i,j=1}^{m,n} c_{i,j} (I_0^{1-\alpha(x)} \vartheta_{i,j})(x,t) \tag{3.23}$$

Оскільки $b(\cdot,\cdot)$ коерцитивна, система (3.22) має єдиний розв'язок.

Покладемо $\vartheta_{i,j}(x,t) = \psi_i(t) \cdot \omega_j(x)$, де $\{\psi_i\}$ й $\{\omega_j\}$ — лійнійно незалежні системи функцій у $H^{\overline{\alpha}/2}([0,T])$ й $H_0^1(\Omega)$ відповідно. А саме, виберемо $\psi_i(t) = \widetilde{P}_{i-1}(t)$ — зміщені многочлени Лежандра на $[0,1]$ (без обмеження загальності можна вважати, що $T = 1$). Цей вибір зумовлено тим, що для степеневої функції відомі аналітичні формули дробового диференціювання й інтегрування, що дає змогу легко застосувати формулу (3.23). Крім того, многочлени Лежандра ортогональні у просторі $L_2([0,1])$, що спрощує обчислення білінійної форми $b(\widetilde{P}_i(t)\cdot\omega_j(x), \widetilde{P}_k(t)\cdot\omega_l(x))$.

Якість запропонованого методу при моделюванні реальних процесів аномальної дифузії має стати предметом подальших досліджень. Нижче подано результати його тестування на кількох наборах вхідних даних.

Покладемо $\Omega = (0,1)$, $u_0(x) = 0$, $K(x) = 1$, а порядок рівняння задамо у вигляді $\alpha(x) = 0.6 + 0.3\exp(-8(x-0.5)^2,$. Розглянемо такі праві частини:

1. $F_1(x,t) = \left(\frac{2}{K(x)\Gamma(3-\alpha(x))}t^{2-\alpha(x)} + 4\pi^2t^2\right)\sin(2\pi x)$. У цьому випадку $u(x,t) = t^2\sin(2\pi x)$.

2. $F_2(x,t) = \sqrt{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha(x)} t^{\frac{1-2\alpha}{4}} J_{\frac{1}{2}-\alpha(x)}(\pi\sqrt{t}) - 2\sin(2\pi\sqrt{t})$, де J_ν — функція Бесселя першого роду порядку ν. У цьому випадку $u(x,t) = \sin(\pi\sqrt{t})\cdot x(x-1)$.

3. $F_3(x,t) = \frac{\pi t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\left({}_1F_1(1;2-\alpha(x);i\pi x) + {}_1F_1(1;2-\alpha(x);-i\pi x)\right)x(x-1) - 2\sin(\pi t)$, де ${}_1F_1$ — вироджена гіпергеометрична функція Куммера. У цьому випадку $u(x,t) = \sin(\pi t)\cdot x(x-1)$.

Ці формули можна перевірити, скориставшись таблицями дробових похідних ([41], с.140; [70], с.193). У таблиці наведено результати чисельного розв'язування задачі (3.18)–(3.20): відносні похибки у дискретизованій нормі просторів $L_2([0,T];L_2(\Omega))$ (похибка 1) і $L_2([0,T];H^1(\Omega))$ (похибка 2) для $m = 11$ (многочлени Лежандра до 10 степеню), $n = 50$.

права частина	похибка 1	похибка 2
F_1	$1.186 * 10^{-3}$	$2.503 * 10^{-3}$
F_2	$2.525 * 10^{-2}$	$8.859 * 10^{-3}$
F_3	$1.377 * 10^{-3}$	$4.551 * 10^{-3}$

Таблиця 3.1

Відносні похибки розв'язку зміннопорядкового рівняння дифузії

Зауваження 3.6. Оскільки F_2 має особливість при $t = 0$, похибка чутлива до точності інтегрування при обчисленні правої частини (3.22).

Зауваження 3.7. Може здатись природною ідея дискретизації за часом

$$v^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} \psi_i(t)\omega_i(x), \tag{3.24}$$

де ψ_i — невідомі коефіцієнти, залежні від часу. Проте насправді така дискретизація неможлива: підставивши (3.24) у (3.18), одержимо сім'ю систем звичайних диференціальних рівнянь дробового порядку

$$\mathbf{B}D_0^{\alpha(x)}\Psi_m + \mathbf{A}\Psi_m = \mathbf{F},$$

де $\Psi_m = (\psi_i, ..., \psi_m)^T$, $\mathbf{F}(t) = (\langle F(t), \omega_j \rangle)^T$, $\mathbf{B} = \{(\omega_i, \omega_j)_{L_2(\Omega)}\}_{i,j=1}^m$ і $\mathbf{A} = \{a(\omega_i, \omega_j)\}_{i,j=1}^m$.

Отже, замість однієї такої системи сталого порядку відносно функцій ψ_i, одержано сім'ю систем, параметризовану змінною $x \in \Omega$. Це означає, що ψ_i має залежати від x, що суперечить поданню (3.24).

Однією з задач математичної фізики є моделювання дифузії в умовах відсутності джерел і стоків. Математично ця ситуація моделюється рівнянням з початковими й крайовими умовами і нульовою правою частиною. На рис. 3.1–3.2 наведено результати обчислювального експерименту для задачі (3.9)–(3.10) з $u_0(x) = \sin \pi x$ зі змінним порядком $\alpha(x) = 0.6 + 0.3\exp(-8(x-0.5)^2)$.

На відміну від розв'язку аналогічної задачі сталого порядку, розв'язок зміннопорядкового рівняння спадає у різних точках з різною швидкістю. Поступово посередині відрізка утворюється „жолоб", де концентрація має локальний мінімум. Це пояснюється тим, що порядок α можна інтерпретувати як швидкість дифузії. З тих зон, де вона нижча, частинки „вимиваються" швидше. Втім, цей ефект проявляється при достатньо великих t, а при малих t спостерігається протилежне — там, де порядок

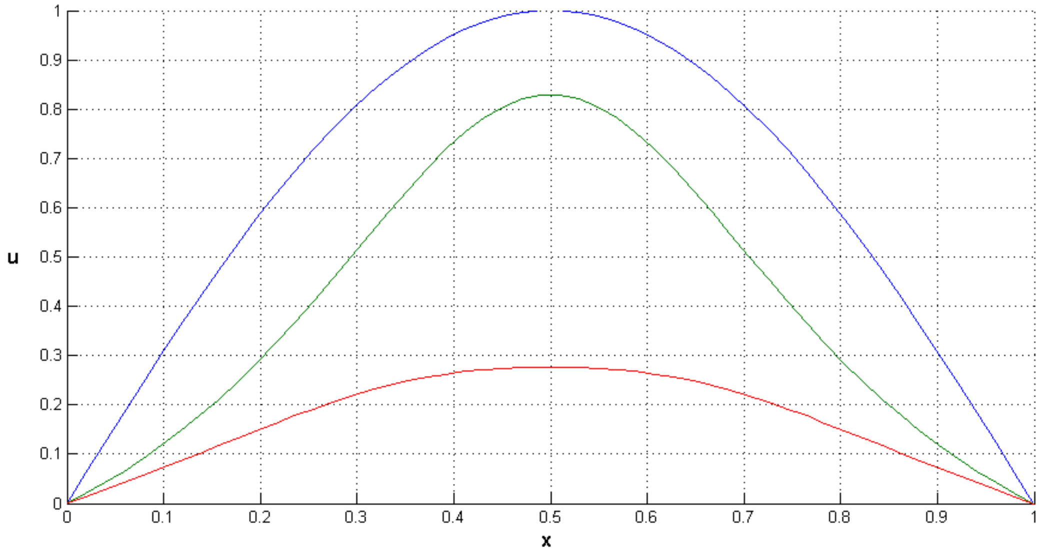

Рис. 3.1. Розв'язок зміннопорядкового рівняння дифузії в моменти $t = 0$ (синій), $t = 0.02$ (зелений) і $t = 0.1$ (червоний).

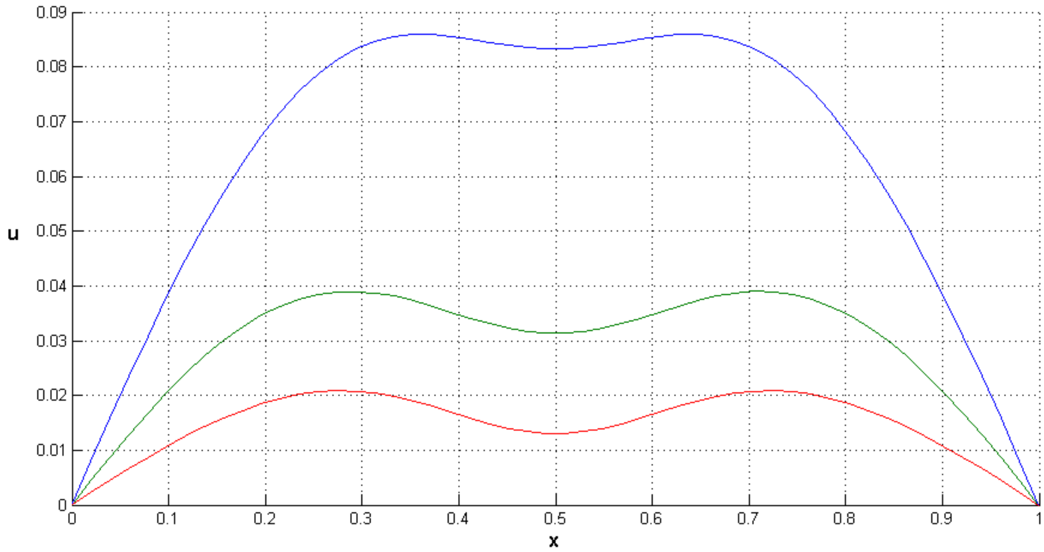

Рис. 3.2. Розв'язок зміннопорядкового рівняння дифузії в моменти $t = 0.25$ (синій), $t = 0.5$ (зелений) і $t = 1$ (червоний).

вищий, дифузія спочатку є повільнішою. На теоретичному рівні у найпростішому випадку це описано у [65], а на рис. 3.1 помітно при порівнянні зеленого ($t = 0.02$) і синього ($t = 0$) графіків. Отже, результати обчислювального експерименту можна вважати узгодженими з теорією аномальної дифузії.

3.3. Висновки

1) Для рівняння субдифузії сталого порядку доведено неперервність розв'язку зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій. Цей результат може бути застосовано, зокрема, для дослідження задач фінального керування. Доведено збіжність методу Гальоркіна для випадку сингулярної за простором правої частини, але у слабшій нормі, аніж норма простору, якому належить розв'язок.

2) Доведено слабку розв'язність рівняння субдифузії змінного порядку. Для цього запропоновано заміну, що зводить рівняння до вигляду, який можна досліджувати подібно до рівнянь сталих порядків. Побудовано просторово-часовий метод Гальоркіна і проведено обчислювальний експеримент, який проілюстрував специфічні властивості зміннопорядкових моделей математичної фізики.

3) До перспективних напрямків розвитку теорії аномальної дифузії в неоднорідних середовищах можна віднести послаблення обмежень на гладкість початкового стану і порядку рівняння (аж до розривних функцій; в такому випадку потрібно встановити, які умови спряження найадекватніше відображають фізичні властивості системи). Крім того, цікавою проблемою є дослідження розв'язності рівняння реакції-субдифузії зі змінним коефіцієнтом реакції.

ВИСНОВКИ

Для декількох типів нелокальних за часом рівнянь математичної фізики одержано теореми існування та єдиності розв'язку, а також збіжності методу Гальоркіна. А саме:

— abc-методом одержано апріорні нерівності у негативних нормах для параболічного, псевдопараболічного й псевдогіперболічного інтегро-диференціальних операторів. Наслідками цих нерівностей є теореми існування та єдиності розв'язків у різних соболєвських просторах;

— для параболічного й псевдопараболічного інтегро-диференціальних рівнянь у слабкій постановці побудовано й реалізовано метод Гальоркіна, а також доведено його збіжність;

— доведено неперервність (зі значеннями у просторі інтегровних з квадратом функцій просторової змінної) розв'язку рівняння субдифузії з похідною Капуто, чим обґрунтовано можливість розглядати задачі фінального керування. Доведено слабку збіжність методу Гальоркіна у випадку правої частини з класу L_p;

— за допомогою леми Вішика-Лакса-Мільґрама одержано теорему слабкої розв'язності рівняння субдифузії змінного порядку.

— для рівняння субдифузії змінного порядку запропоновано й реалізовано чисельний метод, який дав змогу проілюструвати нетривіальні властивості розв'язку, пов'язані з просторовою неоднорідністю порядку рівняння.

Одержані результати можуть бути використані для моделювання й оптимізації ередитарних систем. Підхід, застосований у дисертаційній роботі, може бути поширений на рівняння більш загального вигляду.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анікушин А.В. Траекторно-фінальна керованість гіперболічними системами в різних класах узагальнених функцій / А.В. Анікушин, Д.А. Номіровський // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. – №3. – 2008. – С.119–124.
2. Анікушин А.В. Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу / А.В. Анікушин // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — №3. — С. 3–16.
3. Анікушин А.В. Узагальнена розв'язність лінійних інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного типу / А.В. Анікушин // Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. – №3. – 2010. – С.163–168.
4. Анікушин А.В. Узагальнена розв'язність одного інтегро-диференціального рівняння / А.В. Анікушин // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – №1. – 2014. – С.88–95.
5. Анікушин А.В. Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь / А.В. Анікушин //Вісник Київського університету, серія: фізико-математичні науки. – №4. – 2013. – С.60–65.
6. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
7. Булавацкий В.М. Математическое моделирование динамики одного неравновесного диффузионного процесса на основе интегро-дифференцирования дробного порядка / В. М. Булавацкий, А. В. Гладкий // Кибернетика и системный анализ. - 2015. - Т. 51, № 1. - С. 155–161.

8. Вишик М.И. О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений / М.И. Вишик // Математический сборник. – 1951. – Т.29. – С. 615–676.
9. Вітюк Н.Я. Імпульсно-точкове керування деякими системами з розподіленими параметрами / Н.Я. Вітюк, С.І. Ляшко // Доклады АН УССР. Сер. А. физ.-мат. и техн. науки. – 1985. – №8. – С. 61–63.
10. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
11. Гуляницький А.Л. Узагальнена розв'язність інтегро-диференціальних рівнянь псевдопараболічного типу / А.Л. Гуляницький // IX міжнародна міждисциплінарна науково-практична конференція "Шевченківська весна-2011". – Київ, 2011. – С. 37–38.
12. Hulianytskyi A.L. A priori estimates for Sobolev-type integro-differential operators / A.L. Hulianytskyi, V.V. Semenov // XV Internetional Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation". – Kyiv, 2011. – P. 35.
13. Гуляницький А.Л. Інтегро-диференціальні системи псевдопараболічного типу: апріорні оцінки та імпульсно-точкова керованість / А.Л. Гуляницький, В.В. Семенов // Доп. НАН Укр. — 2012. — №4. — С. 43–49.
14. Гуляницкий А.Л. Слабая разрешимость и сходимость метода Галёркина для дробного уравнения диффузии [Електронний ресурс] / А.Л. Гуляницкий // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / МГУ имени Ломоносова. – Москва, 2013. – Режим доступу: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2013/2188/62015_4f82.pdf. – Дата звернення: 13.04.2016. – Назва з екрана.
15. Hulianytskyi A.L. On the convergence of the Galerkin method for equations with memory / A.L. Hulianytskyi // The Humboldt Kolleg "The

Education and Science and their Role in Social and Industrial Progress of Society"(young scientists poster section). – Kyiv, 2014. – P. 16.

16. Гуляницький А.Л., Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь / А.Л. Гуляницький // Журн. обчисл. та приклад. математики. – 2014. – №.1. – С.105–112.
17. Гуляницький А.Л. Збіжність методу Гальоркіна для параболічних інтегро-диференціальних рівнянь / А.Л. Гуляницький // VII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – Київ, 2014. – С. 45.
18. Гуляницький А.Л. Слабкі розв'язки і збіжність методу Гальоркіна для дробового рівняння дифузії / А.Л. Гуляницький // Доповіді НАН України. – 2015. – №.3. – С.32–39.
19. Hulianytskyi A.L. Weak Solvability and Galerkin Discretization of a Variable-order Diffusion Equation / A.L. Hulianytskyi // Mathematics for Life Sciences. – Rivne, 2015. – P. 17.
20. Гуляницький А.Л., Слабка розв'язність і просторово-часова дискретизація для змінnопорядкового рівняння дифузії / А.Л. Гуляницький // Журн. обчисл. та приклад. математики. – 2015. – №.3. – С.116–126.
21. Гуляницький А.Л. Слабка розв'язність і метод Гальоркіна для змінnопорядкового рівняння дифузії / А.Л. Гуляницький // VIII Міжнародна наукова конференція імені І. І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". – Київ, 2015. – С. 44.
22. Диденко В.П. О краевых задачах для многомерных гиперболических уравнений с вырождением / В.П. Диденко // ДАН СССР.– 1972.– Т.205.– № 4. – С. 763–766.
23. Диденко В.П. Краевые задачи для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа / В.П. Диденко. Автореф. дисс. . . . докт. физ.-мат. наук. – Киев, 1974.

24. Дюво Г. Неравенства в механике и физике / Г.Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
25. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А Ладыженская. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
26. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970. – 288 с.
27. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
28. Лионс Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э.Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.
29. Лопушанская Г.П. Задача Коши для уравнений с дробной производной по времени в пространстве обобщенных функций / Г.П. Лопушанская, А.О. Лопушанский, Г.О. Пасичник // Сиб. мат. журн. — 2011. — Т.62, №6. — С. 1288–1299.
30. Ляшко С.И. О разрешимости псевдопараболических уравнений / С.И. Ляшко // Изв. высш. уч. зав. Сер. математика. — 1985. — №9. — С. 71–72.
31. Ляшко С.И. Обобщенное управление линейными системами / С.И. Ляшко — К.: Наукова думка, 1998. — 465 с.
32. Ляшко С.И. Обобщенные решения операторных уравнений / С.И. Ляшко, Д.А. Номировский, Ю.И. Петунин, В.В. Семенов — М.: ООО “И.Д. Вильямс“, 2009. – 192 с.
33. Ляшко С.И. Оптимальное импульсно-точечное управление динамикой вязкой стратифицированной жидкости / С.И. Ляшко, С.Е. Редько // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 11. – С. 1890–1897.
34. Ляшко С.И. Обобщенное решение и оптимальное управление в системах, описывающих динамику вязкой стратифицированной

жидкости / Ляшко С.И., Номировский Д.А. // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 1. – С. 84–91.

35. Ляшко С.І. Про розв'язність псевдопараболічних рівнянь / С.І. Ляшко, В.В. Семенов // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. — 2001. — Вип. 1. — С. 245–254.
36. Маліцький Ю.В. До теорії узагальнених розв'язків операторних рівнянь / Ю.В. Маліцький, В.В. Семенов // III Міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» (присвячена пам'яті академіка НАНУ І.І. Ляшка), Україна, Київ, 11-12 вересня 2009 р., Матеріали конференції, Київ. – 2009. – С. 52.
37. Маловичко В.А. О краевых задачах для вырождающихся псевдопараболических и псевдогиперболических систем / В.А. Маловичко // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, №12. – С. 2120–2124.
38. Номировский Д.А. О единственной разрешимости псевдогиперболических уравнений с сингулярными правыми частями / Д.А. Номировский // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, №6. — С. 827–839.
39. Номировский Д.А. О гомеоморфизмах, осуществляемых некоторыми дифференциальными операторами с частными производными / Д.А. Номировский // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, №12. — С. 1707–1716.
40. Номировский Д.А. О единственной разрешимости волновых систем в различных классах обобщенных функций / Д.А. Номировский // Матем. заметки. — 2006. — №4. — С. 582–595.
41. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. — Минск.: Наука и техника, 1987. — 688 с.
42. Свешников А.Г. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. — М.: Физматлит, 2007. — 734 с.

43. Семенов В. В. Варіаційні проблеми та узагальнена оптимізація лінійних систем : дис. докт. фіз.-мат. наук : 01.05.01 / Семенов Володимир Вікторович – Київ, 2010. – 328 с.

44. Семенов В.В. Імпульсна керованість деяких лінійних розподілених систем типу С.Л. Соболєва / В.В. Семенов // Доповіді НАН України. — 2001. — №12. — С.77–82.

45. Сибатов Р.Т. Дробно-дифференциальный подход к описанию дисперсионного переноса в полупроводниках / Р.Т Сибатов, В.В. Учайкин // Успехи физических наук. — 2009. — Т. 179, №10. — с. 1079–1104.

46. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

47. Учайкин В.В. Метод дробных производных / В.В. Учайкин. — Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. — 512 с.

48. Фалалеев М.В Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых протранствах и их приложение в математической теории упругости / М.В. Фалалеев, С.С, Орлов // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика» — 2011. — Т.4, №1. — С. 118–134.

49. Чикрий А.А., Матичин И.И. Представление решений линейных систем с дробными производными Римана-Лиувилля, Капуто и Миллера-Росса / А.А. Чикрий А.А., И.И. Матичин // Проблемы управления и информатики. — 2008. — №3. — С. 133–142.

50. Abad E. Reaction-subdiffusion model of morphogen gradient formation / E. Abad, K. Lindenberg, S.B. Yuste // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 82. — P. 061123-1–061123-9.

51. Anh V. Analysis of a discrete non-Markovian random walk approximation for the time fractional diffusion equation / V. Ahn, F. Liu, S. Shen, I. Turner // Anziam J. — 2005. — Vol. 46 E. — P 488–504.

52. Anh V. Detailed analysis of an explicit conservative difference approximation for the time fractional diffusion equation / V. Ahn, F. Liu, S. Shen, I. Turner // Journal of Applied Mathematics and Computing. — 2006. — Vol. 22, Iss. 3. — P 1–19.
53. Alikhanov A.A. A Priori Estimates for Solutions of Boundary Value Problems for Fractional-Order Equations / A.A. Alikhanov // Differential Equtaions. — 2010. — №5 (46). — P. 660–666.
54. Anikushyn A.V. Generalized Solvability of Parabolic Integro-Differential Equations / A.V. Anikushyn, A.L. Hulianytskyi // Differential Equations. — 2014. — №1 (50). — P. 98–
55. Anikushyn A.V. Generalized Optimal Control for Systems Described by Linear Integro-Differential Equations with Nonnegative Definite Integral Operators / A.V. Anikushyn // Journal of Automation and Information Sciences. – Vol. 46. – 2014. – Iss.6. – P.58–67.
56. Barkai E. Fractional Kramers Equation / E. Barkai, J.L. Silbey // J. Phys. Chem. B. — 2000. — Vol. 104. — P. 3866–3874.
57. Bartol T.M. Anomalous Diffusion of Single Particles in Cytoplasm / B.M. Regner, D. Vucinic, C. Domnisoru, T.M. Bartol, M.W. Hetzer, D.M. Tartakovsky, T.J. Sejnowski // Biophysical Journal. — 2013. — Vol. 104. — P.1652–1660.
58. Bazhlekova, E.G. Fractional Evolution Equations in Banach Spaces, PhD Thesis, / E.G. Bazhlekova // — Eindhoven: Press Facilities of Eindhoven University of Technology, 2001. — 107 p.
59. Berkowitz B. Physical pictures of transport in heterogeneous media: Advection-dispersion, random-walk, and fractional derivative formulations / B. Berkowitz, J. Klafter, R. Metzler, H. Scher // Water resources research. — 2002. — Vol. 38, No. 10. — P. 9-1–9-12.
60. Blumen A. Stochastic pathway to anomalous diffusion / A. Blumen, J. Klafter, M.F. Schlesinger // Physical Review A. — 1987. — Vol. 35, No.7.

— P. 3081–3085.

61. Bresloff P.C. Stochastic models of intracellular transport / P.C. Bresloff, J.M. Newby // Rev. Mod. Phys. — 2013. — Vol. 85, Iss. 1. — P. 135–196.
62. Chechkin A. V. Retarding subdiffusion and accelerating superdiffusion governed by distributed-order fractional diffusion equations / A. V. Chechkin , R. Gorenflo, I.M. Sokolov // J.Phys. E. — 2002. — Vol. 66, Iss.4 . — P. 046129-1–046129-7.
63. Chechkin A.V. Fractional Fokker-Planck equation for ultraslow kinetics / A.V. Chechkin, J. Klafter, I.M. Sokolov // Europhysics Letters. — 2003. — No. 3. — P. 326–332.
64. Chechkin A.V. Distributed-order fractional kinetics / A. V. Checkin, J. Klafter, I. M. Sokolov // Acta Phys. Pol. A. — 2004. — Vol. 35., No. 4. — P. 1323–1341.
65. Chechkin A.V. Fractional diffusion in inhomogenous media / A. V. Chechkin , R. Gorenflo, I.M. Sokolov // J.Phys. A: Math. Gen. — 2005. — Vol. 38. — P. L679–L684.
66. Connolly J.A. Comparison of numerical methods for fractional differential equations / N.J. Ford, J.A. Connolly // Comm. Pure Appl. Anal. — 2006. — No. 5. — P. 289–307.
67. Craiem D.O. Fractional Calculus Applied to Model Arterial Viscoelasticity / D.O. Craiem, F.J. Rojo, J.M. Atienza, G.V. Guinea, R.L. Armentano // Latin American Applied Research — 2008. Vol. 38. — P. 141–145.
68. Da Prato G. Sommes d'operateurs lineaires et equations differentielles operationelles / G. Da Prato, P. Grisvard // J. Math. Pures Appl. — 1975. — Vol. 54. — 305–387.
69. Dieterich P. Anomalous dynamics of cell migration / P. Dieterich, R. Klages, R. Preuss, A. Schwab // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America — 2008. — No. 2. — P. 459–463.

70. Diethelm K. The Analysis of Fractional Differential Equations. / K. Diethelm — Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. — 244 p.
71. Diethelm K. Algorithms for the fractional calculus: A selection of numerical methods / K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, Yu. Luchko // Comp. Meth. in Mech. and Engin. — 2005. — Vol. 194. — P.743–773.
72. Dore G., On the closedness of the sum of two closed operators / G. Dore, A. Venni. // Math. Z. — 1987. — Vol. 196. — P. 189–201.
73. Eidelman S.D. Cauchy problem for fractional diffusion equations / S.D. Eidelman, A.N. Kochubei A.N // Differential Equations — 2004. — Vol. 199, № 2. — P. 211–255.
74. Evans L.C. Partial Differential Equations / L.C. Evans — Providence: American Mathematical Society, 1998. — 662 p.
75. Ervin V. Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in R^d / V.J. Ervin, J.P.Roop // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 2007. — Vol. 23, Iss. 2. — P. 256–281.
76. Ewing R.E. Some new error estimates of a semidiscrete finite volume element method for parabolic integro-differential equation with nonsmooth initial data / R.E. Ewing, R.D. Lazarov, R.K. Sinha // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — Vol. 43, No. 6. — P. 2320–2343.
77. Fairweather G. Finite element methods for parabolic and hyperbolic integro-differential equations / E.G. Yanik, G. Fairweather // Nonlinear Anal., Theory, Methods and Appl. — 1998. — No. 12. — P. 785–809.
78. Falconer S. Subdiffusive master equation with space-dependent anomalous exponent and structural instability. / S.Falconer, S.Fedotov // Phys Rev E. — 2012. — Vol. 85, Iss. 3 — doi = 10.1103/PhysRevE.85.031132.
79. Fedotov S. Non-homogeneous random walks, subdiffusive migration of cells and anomalous chemotaxis / A. Ivanov, S. Fedotov, A. Y. Zubarev // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2013. — No.2. — P. 28–43.

80. Feller W. An introduction to probability theory and its applications, Volume 2 / W. Feller. — New York: Wiley, 1971. — 704 p.
81. Ford N.J. A finite element method for time fractional partial differential equations / N.J. Ford, J. Xiao, Y. Yan // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2011. — Vol. 14, № 3. — P. 454–474.
82. Ford N. The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy / N.J. Ford, C.A. Simpson // Numerical Algorithms — 2001. — Iss. 26. — P. 333–346.
83. Gorenflo R. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach / R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, P. Paradisi // Nonlinear Dynam. — 2002. — Vol. 29. — P. 129–143.
84. Jiang Y. High-order finite element methods for time-fractional partial differential equations / Y. Jiang, J. Ma // J. Comput. Appl. Math. — 2011. — Vol. 235. — P. 3285–3290.
85. Habetler T.J. A Finite Difference Method for Analyzing the Compression of Poro-Viseoelastic Media / G.J. Habetler, R.L. Schiffman // Computing. — 1970. — No. 6. — P. 342–348.
86. Heard M.L. Weak Solutions For a Class of Parabolic Integrodifferential Equations / M.L. Heard, S.M. Rankin // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — Iss. 139. — P.78–109.
87. Heibig A. On the existence of solutions to the fractional derivative equations $\frac{d}{dt} + Au = f$, of relevance to diffusion in complex systems / A. Heibig, L. I. Palade // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — 2012. — Vol. 17, No. 2. — P. 153–168.
88. Henry B.I. The accuracy and stability of an implicit solution method for the fractional diffusion equation / B.I. Henry, T.A.M. Langlands // J. Comput. Phys. — 2005. — Vol. 205. — P. 719–736.
89. Heymans N. Physical interpretation of initial conditions for fractional differential equations with Riemann-Liouville fractional derivatives /

N.Heymans, I.Podlubny // Rheol Acta. — 2006. — Vol. 45. — P. 765–771.

90. Hlavacek I. On the existence and uniqueness of solution of the Cauchy problem for linear integro-differential equations with operator coefficients / I. Hlavacek // Aplikace matematiky. — 1971. — Vol. 16, No. 1. — P. 64–80.
91. Horsthemke W. Kinetic equations for reaction-subdiffusion systems: Derivation and stability analysis / W.Horsthemke, A.Yadav // Phys. Rev. E. — 2006. — Iss. 74. — P. 066118-1 – 066118-10.
92. Jin B. Error Estimates for a Semidiscrete Finite Element Method for Fractional Order Parabolic Equations / B. Jin, R. Lazarov, Zhou // SIAM J. Numer. Anal. — 2013. — Vol. 51, No. 1. — P. 445–466.
93. Iomin A. Fractional Transport of Cancer Cells Due to Self-Entrapment by Fission / A.Iomin // Mathematical Modeling of Biological Systems. — 2007. — Vol. I. – P. 193–203.
94. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applictaions of Fractional Differential Equations — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 p.
95. Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent develpoments in the description of anomalous transport by fractional dynamics / R. Metzler, J. Klafter // J. Phys. A: Math. Gen. — 2004. — Iss. 37. — P. R161–R208.
96. Klafter J. The Random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Phys. Reports. — 2000. — Vol. 339. — P. 1–77.
97. Klyushin D.A. Generalized Solutions of Operator Equations and Extreme Elements / D.A. Klyushin, S.I. Lyashko, D.A. Nomirovskii, Y.I. Petunin. V.V. Semenov. — New York: Springer, 2011. — 202 p.
98. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion / A.N.Kochubei // Math. Anal. and Appl. — 2008. — Vol. 340. — P. 252–281.

99. Lax P.D. Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations / P.D. Lax, N. Milgram // Ann. Math. Studies. – 1954. – Vol. 33. – P. 167–190.
100. Lyashko S.I. Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters. / S.I. Lyashko. — Boston / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 466 p.
101. Xianjuan Li, Chuanju Xu A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation // SIAM J. Numer. Anal. — 2009. — Vol. 47, № 3. — P. 2108–2131.
102. Hong Li A nonconforming mixed finite element method for semilinear pseudo-hyperbolic partial integro-differential equations / Jingbo Yang, Hong Li, Yang Liu, Siriguleng He // International Journal of Mathematical, Computational, Physical, Electrical and Computer Engineering. — 2012. — Vol. 6, No. 8. — P.886–893.
103. Xianjuan Li, Existence and Uniqueness of the Weak Solution of the Space-Time Fractional Diffusion Equation and a Spectral Method Approximation / Xianjuan Li, Chuanju Xu // Commun. Comput. Phys. — 2010. — Vol. 8, № 5. — P. 1016–1051.
104. Lin Y. Ritz-Volterra projections to finite element spaces and applications to integro-differential and related equations / Y. Lin, V. Thomee, L.B. Wahlbin // SIAM J. Numer. Anal. — 1991. — Iss. 28. — P. 1047–1070.
105. Lions J.-L. Sur les problemes mixtes pour certains systemes paraboliques dans les ouverts non cylindriques / J.-L. Lions // Annales de l'institut Fourier. — 1957. – T. 7. – P. 143–182.
106. Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity./ F.Mainardi — London: Imperial College Press, 2010. — 347 p.
107. Mainardi F. The fundamental solution for the fractional diffusion-wave equation / F. Mainardi // Appl. Math. Lett. — 1996. — No. 9. — P. 23–28.

108. Mainardi F. The time-fractional diffusion-wave equation / F.Mainardi // Radiophysics and Quantum Electronics. — 1995. — Vol. 38, Iss. 1, — P. 13–24.
109. Montroll E.W. Anomalous transit-time dispersion in amorphous solids / E.W. Montroll, H. Scher // Phys. Rev. B. — 1975. — Vol.12, Iss.6. — P. 2455–2477.
110. Nomirovskii D. Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution / D. Nomirovskii // Journal of differential equations. — 2007. –Vol. 233, No. 1. – P. 1–21.
111. Nunziato J.W. On heat conduction in matreials with memory / J.W. Nunziato // Quaterly of Applied Mathematics. — 1971. — No. 7. — P. 187–204.
112. Pskhu A.V. The fundamental solution of a diffusion-wave equation of fractional order / A.V. Pskhu // Izv. Math. — 2009. — Vol. 73. — P. 351–392.
113. Pani A.K. Numerical methods for parabolic and hyperbolic partial differential equations / A.K. Pani, V. Thomee, L.B. Wahlbin // Journal of Integral Equations and Applications. — 1992. — Vol. 4, No. 42. — P. 533–584.
114. Podlubny I. Fractional Differential Equations / I.Podlubny — San Diego, Academic Press, 1999.
115. Podlubny I. Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation / I.Podlubny // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. — Vol. 5, No. 4. — P. 367–386.
116. Ross B. The development of fractional calculus 1695-1900 / B. Ross // Hist. Math., No. 4, — 1977. — P. 75–89.
117. Sagues F. Reaction-subdiffusion equations / F.Sagues, I.M. Sokolov, M.G. Schmidt // Phys. Rev. E. — 2006. — Vol. 73, Iss. 3. — P. 031102-1–031102-4.

118. Schneider W.R. Fractional diffusion and wave equations / W.R. Schneider, W. Wyss // Journal of Mathematical Physics. — 1989. — Vol. 30, Iss.1. — P. 134–144.

119. Shaw S. Towards adaptive finite element schemes for partial differential Volterra equation solvers / S.Shaw, J.R. Whiteman // Advances in Computational Mathematics. — 1996. — No. 6. — P. 309–323.

120. Sloan I.H. Time discretization of an intergo-differential equation of a parabolic type / I.H. Sloan, V. Thomee // SIAM J. Numer. Anal. — 1986. — Vol. 23, No. 5. — P. 1052–1061.

121. Sokolov I. M. Models of anomalous diffusion in crowded environments / I.M. Sokolov // Soft Matter. — 2012. — No. 8. — P. 9043–9052.

122. Thomee V. Long-time numerical solution of a parabolic equation with memory / V. Thomee, L.B. Wahlbin // Mathematics of computation. — 1974. — Vol. 62, No. 206. — P. 477–496.

123. Thomee V. Error Estimates for Semidiscrete Finite Element Methods for Parabolic Integro-Differential Equations / V. Thomee, N.-Y. Zhang // Mathematics of Computation. — 1989. — Vol. 53, No. 187. — P. 121–139.

124. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations / V.Volterra — London and Glasgow: Blackie and Son Limited, 1930. — 221 p.

125. Wyss W. The fractional diffusion equation / W. Wyss // J. Math. Phys. — 1986. — Vol. 27. — P. 2782–2785.

ДОДАТОК А. ДОВІДКА ПРО ВПРОВАДЖЕННЯ В НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Проректор з наукової роботи
Київського національного
університету
імені Тараса Шевченка

__________ проф. Мартинюк В.С.
«___» __________ 2016 р.

ДОВІДКА

про використання у навчальному процесі результатів дисертаційної роботи Гуляницького Андрія Леонідовича "Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю", представленої на здобуття наукового ступеню кандидата фізико-математичних наук за спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Наукові результати, одержані в процесі написання дисертаційної роботи Гуляницького Андрія Леонідовича "Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю", впроваджені у 2015-16 н.р. в навчальний процес кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні дисциплін "Математичне моделювання еволюційних процесів" (4 курс) і "Теорія оптимізації у функціональних просторах" (1 курс магістратури).

Заст. декана з навчально-методичної роботи факультету кібернетики к. ф.-м. н., доц. — О.Ф.Кашпур

Викладач курсів "Математичне моделювання еволюційних процесів" і "Теорія оптимізації у функціональних просторах" завідувач кафедри обчислювальної математики д. ф.-м. н., проф. — С.І.Ляшко

ДОДАТОК Б. ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ В НАУКОВО-ДОСЛІДНІЙ ТЕМІ №ДР 0112U008252

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Проректор з наукової роботи
Київського національного
університету
імені Тараса Шевченка
________ проф. Мартинюк В.С.
«____» ___________ 2016 р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Гуляницького Андрія Леонідовича "Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю", представленої на здобуття наукового ступеню кандидата фізико-математичних наук за спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Результати дисертаційної роботи Гуляницького А.Л. "Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю" були використані при виконанні науково-дослідної теми "Методи якісного аналізу та алгоритми для некласичних варіаційних задач" (№ДР 0112U008252, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2012 р.). Для псевдопараболічного інтегро-диференціального рівняння одержано негативні апріорні оцінки та досліджено питання імпульсно-точкової керованості систем, що описуються цими рівняннями.

Заст. декана з наукової роботи
факультету кібернетики
к. ф.-м. н. — О.А.Капустян

Керівник НДР
д. ф.-м. н., проф. — В.В.Семенов

Завідувач кафедри обчислювальної математики
д. ф.-м. н., проф. — С.І.Ляшко

ДОДАТОК В. ДОВІДКА ПРО ВИКОРИСТАННЯ В НАУКОВО-ДОСЛІДНІЙ ТЕМІ №ДР 0115U000165

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

м. Київ

"ЗАТВЕРДЖУЮ"
Проректор з наукової роботи
Київського національного
університету
імені Тараса Шевченка

__________ проф. Мартинюк В.С.

«___» ___________ 2016 р.

ДОВІДКА

про впровадження результатів дисертаційної роботи Гуляницького Андрія Леонідовича "Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю", представленої на здобуття наукового ступеню кандидата фізико-математичних наук за спеціальність 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Результати дисертаційної роботи Гуляницького А.Л. "Якісний аналіз і чисельне моделювання систем з пам'яттю" були використані при виконанні науково-дослідної теми "Моделювання та оптимізація диференціальних та інтегро-диференціальних систем з розподіленими параметрами" (№ДР 0115U000165, виконувалась у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка у 2015 р.). Зокрема, в рамках теми розроблено й доведено збіжність чисельного методу типу Гальоркіна для пошуку розв'язку диференціального рівняння з дробовою похідною за часом.

Заст. декана з наукової роботи факультету кібернетики к. ф.-м. н. — О.А.Капустян

Керівник НДР д. ф.-м. н., проф. — Д.А.Номіровський

Завідувач кафедри обчислювальної математики д. ф.-м. н., проф. — С.І.Ляшко