Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Браганець Оксана Анатоліївна

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Дослідження узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі

спеціальність 113 «Прикладна математика»
галузь знань 11 «Математика та статистика»

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Науковий керівник: д. ф.-м. н., проф. **Іксанов Олександр Маратович**

Київ – 2026

АНОТАЦІЯ

Браганець О. А. Дослідження узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі . — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 — Прикладна математика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2026.

Дисертацію присвячено аналізу узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, а також розвитку теорії ітерованих збурених випадкових блукань.

Ми досліджуємо послідовність узгоджених схем «кулі-в-комірках» у випадковому середовищі. Комірки утворюють ієрархічну вкладену структуру, причому у кожному поколінні міститься нескінченна кількість комірок, а ймовірності потраплення в них є випадковими і формуються шляхом послідовної фрагментації одиничної маси. Гнедін та Іксанов (2020) встановили багатовимірну функціональну центральну граничну теорему з центруванням для сукупних кількостей зайнятих комірок у початкових поколіннях при зростанні кількості куль. Ми доводимо аналогічний результат, у якому центрування не потрібне, а граничні процеси не є гаусівськими. Як застосування, розглядається послідовність схем зайнятості, породжена процедурою ламання палиці.

Далі ми розглядаємо проміжні покоління послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці. А саме, ймовірності потраплення у комірки першого покоління задаються формулою $P_k = W_1 W_2 \cdot \ldots \cdot W_{k-1}(1 - W_k)$ для $k \in \mathbb{N}$, де W_1, $W_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини W, що набуває значень у $(0, 1)$. Нескінченна схема «кулі-в-комірках» у першому поколінні відома як сито Бернуллі. Ми припускаємо, що математичне сподівання $|\log W|$ є нескінченним, а хвіст розподілу випадкової величини $|\log W|$ правильно змінюється на нескінченності. Позначимо через $K_n(j)$ кількість зайнятих комірок у поколінні j, якщо кинуто n куль. Називатимемо покоління j промі-

жними, якщо $j = j_n \to \infty$ та $j_n = o((\log n)^a)$ при $n \to \infty$ для відповідного $a > 0$. Ми доводимо, що для деяких проміжних поколінь j скінченновимірні розподіли процесу $(K_n(\lfloor j_n u \rfloor))_{u>0}$ після належної нормалізації слабко збігаються при $n \to \infty$ до скінченновимірних розподілів потраекторного інтеграла Лебега–Стільтьєса, інтеграндом якого є експоненційна функція, а інтегратором — обернений стійкий субординатор. Ця частина дисертації продовжує напрям досліджень, започаткований у статтях Buraczewski, Dovgay та Iksanov (2020) і Iksanov, Marynych та Samoilenko (2022), де випадкова величина $|\log W|$ мала скінченний другий момент, а також у статті Iksanov, Marynych та Rashytov (2022), де величина $|\log W|$ мала скінченне математичне сподівання, але нескінченний другий момент.

Невід'ємною складовою дослідження послідовностей узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процесом ламання палиці, є теорія ітерованих збурених випадкових блукань. Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\geq 1}$ — незалежні однаково розподілені випадкові вектори з довільно залежними додатними компонентами та $T_k := \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1} + \eta_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Називатимемо випадкову послідовність $(T_k)_{k\geq 1}$ (глобально) збуреним випадковим блуканням. Розглянемо загальний гіллястий процес, породжений послідовністю $(T_k)_{k\geq 1}$, і позначимо через $Y_j(t)$ кількість особин j-го покоління з моментами народження $\leq t$. Припускаючи, що $\operatorname{Var} \xi_1 \in (0, \infty)$, та дозволяючи розподілу η_1 бути довільним, ми доводимо *закон повторного логарифма* для $Y_j(t)$. Зокрема, отримано закон повторного логарифма для лічильного процесу випадкової послідовності $(T_k)_{k\geq 1}$. Останній результат був раніше встановлений у статті Iksanov, Jedidi та Bouzeffour (2017) за додаткової умови існування скінченного моменту $\mathbb{E}\eta_1^a < \infty$ для деякого $a > 0$. У цій дисертації показано, що зазначене додаткове припущення не потрібне.

Ключові слова: випадкове середовище, закон повторного логарифма, загальний гіллястий процес, збурені випадкові блукання, ітеровані збурені випадкові блукання, нескінченна схема зайнятості, неперервність за Гьольдером, процес дробового ефекту, процедура ламання палиці, сито Бернуллі, слабка збіжність скінченновимірних розподілів, слабка збіжність у просторі Скорохода, теорія відновлення, узгоджені схеми зайнятості у випадковому середовищі, функціональна гранична теорема.

SUMMARY

Braganets O. A. Investigation of nested occupancy schemes in random environment. — Manuscript.

Dissertation for the scientific level of Doctor of Philosophy in specialty 113 – "Applied Mathematics". – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2026.

The thesis is devoted to the analysis of nested occupancy schemes in a random environment and also contributes to a theory of iterated perturbed random walks.

We investigate a nested balls-in-boxes scheme in a random environment. The boxes follow a nested hierarchy, with infinitely many boxes in each level, and the hitting probabilities of boxes are random and obtained by iterated fragmentation of a unit mass. Gnedin and Iksanov (2020) obtained a multivariate functional central limit theorem with centering for the cumulative occupancy counts in low levels as the number of balls becomes large. We prove a counterpart of their result, in which centering is not needed and the limit processes are not Gaussian. An application is given to the scheme generated by a residual allocation model.

Next, we consider intermediate levels of the scheme generated by a residual allocation model. That is, the hitting probabilities of the first-level boxes are given by a stick-breaking model $P_k = W_1 W_2 \cdot \ldots \cdot W_{k-1}(1 - W_k)$ for $k \in \mathbb{N}$, where W_1, $W_2, \ldots$ are independent copies of a random variable W taking values in $(0,1)$. The infinite balls-in-boxes scheme in the first level is known as Bernoulli sieve. We assume that the mean of $|\log W|$ is infinite and the distribution tail of $|\log W|$ is regularly varying at ∞. Denote by $K_n(j)$ the number of occupied boxes in the jth level provided that there are n balls and call the level j intermediate, if $j = j_n \to \infty$ and $j_n = o((\log n)^a)$ as $n \to \infty$ for appropriate

$a > 0$. We prove that, for some intermediate levels j, the finite-dimensional distributions of the process $(K_n(\lfloor j_n u \rfloor))_{u>0}$, properly normalized, converge weakly as $n \to \infty$ to those of a pathwise Lebesgue-Stieltjes integral, with the integrand being an exponential function and the integrator being an inverse stable subordinator. The present paper continues the line of investigation initiated in the articles Buraczewski, Dovgay and Iksanov (2020) and Iksanov, Marynych and Samoilenko (2022) in which the random variable $|\log W|$ has a finite second moment, and Iksanov, Marynych and Rashytov (2022) in which $|\log W|$ has a finite mean, yet an infinite second moment.

An integral component of the study of the nested occupancy schemes in the random environment generated by the stick-breaking process is a theory of iterated perturbed random walks. Let $(\xi_k, \eta_k)_{k\geq 1}$ be independent identically distributed random vectors with arbitrarily dependent positive components and $T_k := \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1} + \eta_k$ for $k \in \mathbb{N}$. We call the random sequence $(T_k)_{k\geq 1}$ a (globally) perturbed random walk. Consider a general branching process generated by $(T_k)_{k\geq 1}$ and let $Y_j(t)$ denote the number of the jth generation individuals with birth times $\leq t$. Assuming that $\operatorname{Var} \xi_1 \in (0, \infty)$ and allowing the distribution of η_1 to be arbitrary, we prove *a law of the iterated logarithm* (LIL) for $Y_j(t)$. In particular, a LIL for the counting process of $(T_k)_{k\geq 1}$ is obtained. The latter result was previously established in the article Iksanov, Jedidi and Bouzeffour (2017) under the additional assumption that $\mathbb{E}\eta_1^a < \infty$ for some $a > 0$. In this thesis, we show that the aforementioned additional assumption is not needed.

Keywords: Bernoulli sieve, functional limit theorem, general branching process, Hölder continuity, infinite occupancy scheme, iterated perturbed random walk, law of the iterated logarithm, nested infinite occupancy scheme in random environment, perturbed random walk, random environment, renewal theory, residual allocation model, shot noise process, weak convergence in the Skorokhod space, weak convergence of finite-dimensional distributions.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації:

1. Braganets, O., Iksanov, A.: A limit theorem for a nested infinite occupancy scheme in random environment. Austrian Journal of Statistics **52**, 1–12 (2023).

2. Braganets, O., Iksanov, A.: On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking: the case of heavy tails. Probability and Mathematical Statistics **45**(1), 1 – 32 (2025).

3. Braganets, O.: Laws of the iterated logarithm for iterated perturbed random walks. Modern Stochastics: Theory and Applications **13**(1), 19 – 38 (2026).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Braganets, O. A limit theorem for a nested infinite occupancy scheme in random environment. International Conference of Young Mathematicians: тези доп., June 1–3, 2023, Kyiv, Ukraine, The Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, https://www.imath.kiev.ua/ ∼young/youngconf2023/.

2. Браганець, О. Дослідження узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці. XI Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Об’єднані наукою: перспективи міждисциплінарних досліджень»: тези доп.,21-22 листопада, 2024, КНУ ім. Тараса Шевченка.

3. Braganets, O. Laws of the iterated logarithm for iterated perturbed random walks. International Conference of Young Mathematicians: XXIII Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2025» при КНУ ім. Т. Шевченка. Збірник матеріалів конференції, ст. 20-21, Київ, Україна (2025).

4. Braganets, O. Laws of the iterated logarithm for iterated perturbed random walks. International Conference of Young Mathematicians: тези доп., June

4–6, 2025, Kyiv, Ukraine, The Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, https://www.imath.kiev.ua/∼young/youngconf2025/.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\square$ – завершення доведення

$\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbb{N}_0$ – множина невід'ємних цілих чисел

м.н. – майже напевно

$\mathbb{P}\{A\}$ – ймовірність події A

$\mathbb{E}X$ – математичне сподівання випадкової величини X

$\operatorname{Var} X$ – дисперсія випадкової величини X

$\mathbb{1}_{\{A\}}$ – індикатор події A

$\overset{\mathrm{d}}{\to}$ – збіжність за розподілом в.в. та випадкових векторів

$\overset{\mathbb{P}}{\to}$ – збіжність за ймовірністю в.в. та випадкових векторів

$\xrightarrow{\text{f.d.d.}}$ – слабка збіжність скінченновимірних розподілів

$\Rightarrow$ – слабка збіжність випадкових елементів у функціональних просторах

$\overset{\mathrm{d}}{=}$ – рівність розподілів випадкових елементів

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, де $x_0 \in [-\infty, \infty]$, означає $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

$f(x) = O(g(x))$ при $x \to \infty$ означає $\varlimsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$

$f(x) = o(g(x))$ при $x \to \infty$ означає $\varlimsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{g(x)} = 0$

$\lfloor x \rfloor$ – ціла частина числа x

$\{x\}$ – дробова частина числа x

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq x\}$

$\log$ – натуральний логарифм

$\exp(x) = \mathrm{e}^x$ – показникова функція

$\limsup_{x\to\infty} f(x) = \varlimsup_{x\to\infty} f(x)$ — верхня границя

Γ – гамма-функція Ейлера

B – бета-функція Ейлера

$\binom{n}{k} = C_n^k$ – біноміальний коефіцієнт

$C((x_t))$ – множина граничних точок при $t \to \infty$ сім'ї дійсних чисел (x_t)

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Схема зайнятості, в якій кулі випадково розташовуються по певному набору комірок, — це проста урнова модель теорії ймовірностей, яка має широкий спектр застосувань у статистиці, комбінаториці та інформатиці. До таких застосувань, зокрема, належать: вибірка видів [14, 37], аналіз алгоритмів [24], теорія навчання [10] тощо.

Якщо кількість комірок (урн) у схемі розподілу є нескінченною, то таку конструкцію називають нескінченною схемою зайнятості (англ. infinite occupancy scheme). Подібні моделі виникають у багатьох задачах теорії ймовірностей і математичної статистики, зокрема при дослідженні розподілів частот, кластерних структур та випадкових розбиттів.

Дослідження цієї моделі розпочато у роботі Р. Р. Багадура [3], де встановлено закон великих чисел для кількості заповнених комірок. Подальший суттєвий розвиток теорії належить С. Карліну, який у роботі [56] отримав більш системні та глибокі результати, зокрема щодо асимптотичної поведінки числа зайнятих комірок та пов'язаних функціоналів. Його дослідження фактично сформували фундамент сучасної теорії нескінченних схем зайнятості та визначили основні напрями подальших досліджень у цій галузі. Важливий внесок у розвиток теорії був зроблений у роботі [29]. У згаданій статті міститься систематичний огляд нескінченних схем зайнятості, а також розроблено нові підходи до їхнього вивчення. О. Гнедін встановив тісний зв'язок таких схем із випадковими дискретними розподілами, структурою випадкових розбиттів та процедурою ламання палиці, що забезпечило не лише узагальнення класичних результатів, а й інтеграцію теорії нескінченних схем зайнятості в ширший контекст сучасної теорії ймовірностей та прикладної математики [27, 28, 32].

Згадаємо нещодавні дослідження, пов'язані з нескінченними схемами зайнятості. У роботах [16, 46] встановлено закони повторного та одинарного логарифма для декількох характеристик нескінченних схем зайнятості. J. Garza та Y. Wang у статті [26] доводять функціональну центральну граничну теорему для зважених процесів зайнятості.

Нехай тепер система комірок організована у вигляді вкладеної ієрархії, а ймовірності їх заповнення формуються шляхом послідовних розбиттів одиниці таких, що розбиття на кожному рівні ієрархії є підрозбиттям попереднього рівня. Конфігурації зайнятих комірок на кожному рівні цієї ієрархії природно інтерпретуються як послідовність узгоджених схем зайнятості. У статтях [42, 45] було введено послідовність узгоджених нескінченних схем зайнятості та доведено низку функціональних граничних теорем для числа зайнятих комірок та числа комірок, що містять фіксоване число куль, за припущення, що потрапляння куль у комірки першого рівня регулюється дискретними розподілами типу Вейбулла.

У випадку, коли розбиття одиниці здійснюються випадково, говорять про послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі. З суто математичної точки зору, такі моделі становлять інтерес, оскільки вони поєднують у собі характеристики як нескінченних схем зайнятості, так і зважених гіллястих процесів. Хоча ці два класи об'єктів є досить популярними, вони належать до різних напрямів теорії ймовірностей. Водночас їхня комбінація породжує нові ефекти, відсутні у кожному з компонентів окремо. Перейшовши до можливих застосувань, підкреслимо, що кількість зайнятих комірок у даному поколінні зваженого гіллястого процесу може інтерпретуватися як кількість типів, присутніх у вибірці певних «індивідів».

Якщо припустити, що тип індивіда передається його нащадкам, то кількість зайнятих комірок у послідовних поколіннях вкладеної схеми зайнятості моделює еволюцію числа різних типів у деякій популяції з плином часу.

Узгоджені схеми зайнятості у випадковому середовищі сьогодні активно досліджуються, зокрема, у роботах [15, 30, 47, 50, 55]. Перші дослідження цієї моделі [5, 17, 55] були зосереджені на вивченні поведінки поблизу межі дерева зваженого гіллястого процесу. Така постановка задачі дозволила авторам використати низку асимптотичних властивостей зважених гіллястих процесів, зокрема, збіжність мартингалу Біггінса та результати теорії великих відхилень. Зокрема, інформація про розподіл куль у початкових поколіннях не мала суттєвого значення, оскільки вона «губилася» на шляху від кореня до межі. У своїх роботах Бузингер (у контексті зважених гіллястих процесів з декількома типами) та Джозеф розглядали, серед іншого, збіжність майже напевно при прямуванні числа куль до нескінченності найменшого індекса покоління, в якому всі комірки містять не більше, ніж одну кулю. Іншими словами, йдеться про висоту піддерева зваженого гіллястого процесу, в межах якого неспадна послідовність $(K_n(j))_{j\in\mathbb{N}}$, де $K_n(j)$ - це кількість зайнятих комірок у j-му поколінні при киданні n куль, ще не досягає значення n. При цьому ці автори взагалі не досліджували слабку збіжність кількості зайнятих комірок. Бертван у теоремі 1 роботи [5] довів, що відношення $K_n(j_n)/f(n)$ майже напевно збігається до випадкової величини, яка включає як множник граничне значення мартингалу Біггінса (саме наявність цієї границі відображає вплив межі дерева). Тут f — функція, що правильно змінюється на нескінченності, задана в явному вигляді, а $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — послідовність цілих чисел, для якої виконується $\lim_{n\to\infty}\big(j_n - a\log n\big) = b$ для деяких $a > 0$ та $b \in \mathbb{R}$. У роботі [47] вивчалась збіжність $K_n(j)$ для пізніх поколінь, тобто поколінь j_n, що задовольняють $j_n = O(\log n)$ та $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

У роботі [30] досліджувалася вже поведінка поблизу кореня дерева зваженого гіллястого процесу. При цьому початковими були названі покоління, номер яких j є фіксованим числом. Було встановлено, що якщо належним чином центрований та нормалізований процес зайнятих комірок у першому поколінні слабко збігається у просторі Скорохода до деякого гаусівського процесу G, то процес зайнятих комірок у j-му поколінні, знову ж після центрування та нормалізації, слабко збігається до інтегрального функціоналу від G.

Роботи [15, 50] вивчають асимптотику $K_n(j)$ у проміжних поколіннях узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі. Проміжними називають покоління, індекси j_n яких задовольняють $j_n = o(\log n)$ та $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$. У цих статтях випадкові ймовірності комірок визначаються процедурою ламання палиці. Це означає, що випадкові ймовірності $(P_k)_{k\geq 1}$ у першому поколінні задаються так: $P_k = W_1 W_2 \cdot \ldots \cdot W_{k-1}(1 - W_k)$ для $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, де W_1, $W_2, \ldots$- незалежні копії випадкової величини W, що набуває значень у інтервалі $(0, 1)$. Дослідженню таких послідовностей присвячена також робота [9]. Моделі з використанням розподілів, породжених процедурою ламання палиці, виникають в багатьох прикладних областях науки, зокрема, у теорії випадкових розбиттів, генетиці, машинному навчанні. Однією з задач даної дисертації є доповнення та узагальнення результатів, отриманих у вищезазначених статтях.

Всі вищезазначені роботи демонструють багатство та складність стохастичної структури таких схем, однак на даний час повні результати отримані лише для окремих випадків. Це підкреслює необхідність подальшого системного вивчення моделі, адже очікується, що вона має широкий спектр як теоретичних застосувань, так і потенційних практичних імплементацій у прикладних задачах.

Невід'ємною складовою дослідження послідовностей узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процесом ламання палиці, є теорія ітерованих збурених випадкових блукань.

(Глобально) збурені випадкові блукання є нетривіальним, але природним узагальненням стандартних випадкових блукань. З одного боку, збурені випадкові блукання є цікавим і складним об'єктом дослідження. З іншого боку, такі блукання є допоміжним інструментом аналізу випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями, граток Бернуллі, систем масового обслуговування $G/G/\infty$ та інших моделей прикладної теорії ймовірностей. Елементи теорії збурених випадкових блукань, накопичені до 2016 року, викладені у монографії [39]. Перелік нещодавніх статей, присвячених різним аспектам таких блукань включає [2, 22, 51, 64, 66]. Наприклад, у роботі [2] доведено базові результати теорії відновлення для збурених випадкових блукань, що заклало основу подальших досліджень. У статті [64] збурені випадкові блукання використовуються для дослідження випадкових перестановок чисел. До цього переліку варто також віднести роботу [44], де доведено граничні теореми для збурених випадкових блукань; статтю [4], де досліджується максимум вагових сум уздовж шляхів дерева, що являють собою збурені випадкові блукання, а також роботу [8], присвячену арифметичним властивостям мультиплікативних збурених випадкових блукань, що породжуються цілочисельними випадковими величинами. У даній дисертації отримано декілька результатів, що доповнюють існуючу теорію збурених випадкових блукань.

Ітеровані збурені випадкові блукання на деревах загальних гіллястих процесів були визначені зовсім нещодавно у статті [15] та далі досліджувались у роботах [9, 53], Такі випадкові послідовності є цікавими як самостійний об'єкт дослідження. Крім того, вони є важливими складовими у дослідженні випадкових дерев та послідовностей узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процесом ламання палиці.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційну роботу було виконано у відповідності до плану наукових досліджень кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка. Тематика досліджень роботи відповідає спеціальності «Прикладна математика» галузі знань «Математика та статистика».

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є продовження розвинення теорії послідовностей узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі та внесок до теорії ітерованих збурених випадкових блукань. *Головним завданням* автора була розробка нових методів, необхідних для розв'язання декількох відкритих проблем, пов'язаних із послідовностями узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, а також знаходження належних підходів, що дозволили б довести закон повторного логарифму для ітерованих збурених випадкових блукань у повній загальності. *Об'єкт дослідження* – послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі та ітеровані збурені випадкові блукання, *предмет дослідження* – асимптотична поведінка кількості зайнятих комірок на різних рівнях ієрархії та аналоги деяких результатів теорії відновлення для ітерованих збурених випадкових блукань для випадків, що не були досліджені раніше.

Методи дослідження. Дослідження асимптотичної поведінки кількості зайнятих комірок у початкових та проміжних поколіннях полягає у доведенні слабкої збіжності у просторі Скорохода цих процесів до деякого граничного випадкового процесу. Не менш важливим є пошук конкретних прикладів процесів для ілюстрації отриманої збіжності та властивостей.

Дослідження властивостей ітерованих збурених випадкових блукань полягає у пошуку та доведенні аналогів результатів теорії відновлення для стандартних випадкових блукань, що справджуються для збурених випадкових блукань та/або ітерованих стандартних випадкових блукань, або їх посиленні. При цьому розв'язання деяких проблем вимагали розвинення нестандартних методів та підходів.

У дисертаційній роботі використовуються методи теорії ймовірностей та її розділів, зокрема:

- теорії відновлення;
- теорії випадкових блукань;
- теорії випадкових процесів;

- теорії функцій, що правильно змінюються,

та математичного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Наукова новизна даної дисертаційної роботи полягає у встановлені нових результатів для послідовностей узгоджених схем зайнятості та ітерованих збурених випадкових блукань. Серед основних результатів дисертаційної роботи слід виділити такі:

- доведено багатовимірну функціональну граничну теорему без центрування для кількості зайнятих комірок у початкових поколіннях для випадку, коли граничні процеси не є гаусівськими;
- для деяких проміжних рівнів доведено слабку збіжність скінченновимірних розподілів належним чином нормалізованого процесу зайнятих комірок для випадку, коли крок базового випадкового блукання не має середнього;
- встановлено закон повторного логарифма для лічильного процесу збурених випадкових блукань у повній загальності, тобто коли на збурення не накладається жодних умов;
- встановлено закон повторного логарифма для ітерованих збурених випадкових блукань.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають переважно теоретичну цінність. Методи, прийоми, думки та ідеї, що були використанні при доведенні теорем та лем, можуть бути корисними при подальших дослідженнях в області теорії ймовірностей, зокрема, в теорії випадкових процесів. Також одержані результати є значним кроком розвинення теорії узгоджених схем зайнятості та теорії ітерованих збурених випадкових блукань.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану досліджень та постановка задач належать науковому керівникові. Всі результати, що виносяться на захист, належать здобувачеві.

У статті [12], написаній у співавторстві з Іксановим О.М., Іксанову О.М. належать постановка задачі, ідея доведення допоміжної леми 3, оформлення фінальної версії статті та внесення редагувань згідно з рецензією.

У статті [13], написаній у співавторстві з Іксановим О.М., Іксанову О.М. належать постановка задачі, оформлення фінальної версії статті та внесення редагувань згідно з рецензією.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи доповідалися на конференціях, а саме:

- Результати розділу 1 - на міжнародній конференції “International Conference of Young Mathematicians at Institute of Mathematics of NAS of Ukraine” (1-3 червня 2023 року);
- Результати розділу 2 - на XI Всеукраїнській науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Об’єднані наукою: перспективи міждисциплінарних досліджень» (21-22 листопада 2024 року);
- Результати розділу 3 - на XXIII Міжнародній науково-практичній конференції «Шевченківська весна - 2025: Математика, Статистика та Механіка. Методика викладання математики. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз» (10 квітня 2025 року);
- Результати розділу 3 - на міжнародній конференції “International Conference of Young Mathematicians at Institute of Mathematics of NAS of Ukraine” (4–6 червня 2025 року).

Також основні результати дисертаційної роботи були висвітлені у міжнародних реферованих журналах, індексованих в наукометричних базах, а саме:

- результати розділу 1 у статті [12];
- результати розділу 2 у статті [13];

- результати розділу 3 у статті [11].

Структура та обсяг дисертаційної роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, трьох розділів та висновків. Кожен розділ складається з підрозділів. В кінці розділів містяться висновки до цих розділів. Формули, а також теореми, леми і твердження мають наскрізну нумерацію. Список використаних джерел містить **71** позицію та оформлений відповідно до стилю Springer MathPhys Style.

Подяка. Автор дисертації Браганець О.А. висловлює щиру вдячність своєму науковому керівникові — доктору фізико-математичних наук, професору Іксанову Олександру Маратовичу — за своєчасну та активну допомогу у плідній роботі над дослідженням, за влучні поради при оформленні статей та їх публікації, за надану в необхідній кількості мотивацію та за достатню підтримку протягом всього часу написання дисертаційної роботи. Також автор висловлює подяку всім колегам з кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики КНУ ім. Т. Шевченка за підтримку під час написання дисертації.

Розділ 1

Дослідження початкових поколінь узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі

1.1 Вступ

Кулі послідовно та незалежно одна від одної розміщуються у нескінченному масиві комірок $1, 2, \ldots$ так, що кожна куля потрапляє до комірки k з додатною ймовірністю p_k. При цьому

$$\sum_{k\geq 1} p_k = 1.$$

Цікавим є характер заповнення комірок після розміщення n куль. Цю класичну модель називають *нескінченною схемою зайнятості* або *схемою зайнятості Карліна* (Karlin's occupancy scheme) на честь фундаментального внеску С. Карліна у її дослідження [56].

Властивості цієї схеми зайнятості добре вивчені; детальні огляди можна знайти, зокрема, у статті [29] та монографії [39]. Останніми роками з'явилися більш складні та глибокі дослідження цієї моделі. Наприклад, J. Garza та Y. Wang у статті [26] розглядають *зважені процеси заповнення комірок* у класичній схемі Карліна. Зважена сума задається так

$$\mathcal{T}_n = \sum_{j=1}^{n} a_j D_{n,j},$$

де $D_{n,j}$ позначає кількість комірок, які містять рівно j куль з n наявних, а $(a_j)_{j\geq 1}$ – задана послідовність коефіцієнтів (ваг). Такі суми називаються в літературі зі схем зайнятості «separable statistics» або «divisible statistics». Вони вивчались, починаючи з кінця 1970-х років, зокрема, в роботах Медведєва [59], Івченка [54] та Мірахмедова [60], а також в контексті формули Юенса в роботах Манставічюса [58]. Робота [26] встановлює *функціональну центральну граничну теорему* для випадкового процесу, отриманого з $(\mathcal{T}_n)_{n\geq 1}$ після належного масштабування, тобто описує його асимптотичну поведінку як випадкового елементу в просторі Скорохода за певних обмежувальних умов, накладених на послідовність коефіцієнтів (a_j). Одним із головних застосувань отриманого результату є аналіз граничної поведінки випадкових перестановок, породжених *процесом китайського ресторану* (Chinese Restaurant Process) з двома параметрами. Запропонована авторами теорема узагальнює класичні результати для процесів зайнятості та забезпечує інструмент для дослідження динамічних моделей випадкових перестановок, що виникають у байєсівських непараметричних моделях та теорії випадкових розбиттів.

Існує також рандомізована версія класичної схеми зайнятості, в якій ймовірності потраплення в комірки є додатними випадковими величинами $(P_k)_{k\geq 1}$ з довільним спільним розподілом, що задовольняє умову

$$\sum_{k\geq 1} P_k = 1 \quad \text{м.н.}$$

Таку схему зайнятості називають нескінченною схемою зайнятості *у випадковому середовищі*.

В дисертаційній роботі будуть розглядатися *послідовності узгоджених (вкладених) схем зайнятості у випадковому середовищі*. Конструкцію зручно описувати з точки зору генеалогічної структури популяцій. Нехай $\mathcal{I}_0 := \{\varnothing\}$ буде початковим предком, а $\mathcal{I}_1 := \{1, 2, \ldots\}$ буде множиною комірок першого покоління з деякими випадковими ймовірностями потраплення P_1, $P_2, \ldots$. Тепер розділимо кожну комірку i на підкомірки $i1, i2, \ldots$ та визначимо ймовірності потраплення до них як

$$P(ik) = P_i P_k^{(i)} \quad \text{для } k \in \mathbb{N},$$

де $(P_k^{(i)})_{k\geq 1}$ є незалежною копією $(P_k)_{k\geq 1}$, а для різних i ці копії є незалежними. Ці підкомірки інтерпретуються як комірки другого покоління, які формують множину $\mathcal{I}_2$. Ми повторюємо цю процедуру для блоків кожного покоління, доки не буде побудовано ∞-арне дерево вкладених комірок $\cup_{k\in\mathbb{N}_0}\mathcal{I}_k$. Тут $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Зауважимо, що ймовірності потрапляння у комірки заданого покоління в сумі дорівнюють одиниці за побудовою, тобто $\sum_{v\in\mathcal{I}_j} P(v) = 1$ м.н. для кожного $j \in \mathbb{N}$ (ми ототожнюємо послідовності $(P(v))_{v\in\mathcal{I}_1}$ та $(P_i)_{i\in\mathbb{N}})$.

Ми припускаємо, що випадкові ймовірності потрапляння у комірки та результати розміщення куль визначені на спільному ймовірнісному просторі. Для $n, j, r \in \mathbb{N}$ позначимо через $K_{n,j,r}$ кількість комірок j-го покоління (кількість елементів $v \in \mathcal{I}_j$), що містять рівно r куль з n наявних. Покладемо

$$K_{n,j}(u) := \sum_{r=\lceil n^{1-u}\rceil}^{n} K_{n,j,r}, \quad u \in [0,1].$$

Таким чином, $K_{n,j}(u)$ - це кількість комірок, що містять не менше $\lceil n^{1-u}\rceil$ куль, де $\lceil x\rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \geq x\}$ для $x \in \mathbb{R}$. З ймовірністю один випадкова функція $u \mapsto K_{n,j}(u)$ є неспадною та неперервною справа, отже, належить простору $\mathcal{D} := \mathcal{D}([0,1])$. Тут і далі для інтервалу $I \subseteq [0,\infty)$ ми позначаємо через $\mathcal{D}(I)$ простір Скорохода на I, тобто множину функцій, визначених на I, що є неперервними справа та мають лівобічні границі в кожній точці (якщо інтервал I замкнений ліворуч, то існування лівобічної границі у лівій межі інтервалу не припускається). Ми вважаємо, що простір $\mathcal{D}$ наділений J_1-топологією. Вичерпну інформацію про J_1-топологію на $\mathcal{D}$ можна знайти у книзі [6].

1.2 Попередні дослідження

Послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі вперше зустрічаються в статті [5]. Серед іншого, там доведено, що, якщо n та j прямують до нескінченності таким чином, що $j \sim a \log n$, де a — деяка додатна константа, то $K_{n,j}(1)$ — кількість зайнятих комірок у j-му поколінні — задовольняє центральну граничну теорему з *випадковим центруванням*, коли кількість куль n прямує до ∞. Нехай $H_{n,j}$ позначає номер першого покоління, в якому всі комірки містять менше ніж j куль із n наявних, а $G_{n,j}$ — номер першого покоління, в якому існує комірка, що містить менше ніж j куль. При цьому $G_{n,j}$ вивчається для випадку, коли кількість комірок першого покоління є скінченною, а $H_{n,j}$ — для довільної кількості комірок. У статті [55] досліджується м.н. асимптотична поведінка цих двох випадкових величин при $n \to \infty$. Виявляється, що $H_{n,j}$ та $G_{n,j}$ мають порядок $\log n$ при $n \to \infty$, а їх асимптотика залежить від j, коли j менше за критичне значення j^*, та не залежать від j, коли j більше за j^*. У статті [17] розглядаються подібні задачі в більш загальному випадку зваженого гіллястого процесу з декількома типами.

Три вищезгадані статті досліджують *пізні покоління* узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, тобто покоління, індекси j яких мають порядок $\log n$. У статті [47] наведено повну класифікацію режимів м.н. збіжності для кількості зайнятих комірок у пізніх поколіннях і, тим самим, доповнено попередні результати, отримані в роботі [5].

Статті [15] та [50] присвячені дослідженню *проміжних поколінь* узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі. За припущення, що ймовірності потрапляння у комірки задаються процедурою ламання палиці, слабка збіжність скінченновимірних розподілів належним чином центрованих та нормалізованих процесів $(K_{n,\lfloor j_n t \rfloor}(1))_{t>0}$ отримана у статті [50] у випадку $j_n = o((\log n)^{1/2})$ та $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Слабший варіант такої збіжності, з $j_n = o((\log n)^{1/3})$ та $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$, з'явився раніше в роботі [15].

У публікації [30] розглядаються *початкові покоління* (чиї номери j не залежать від n) узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі. Зокрема, доведено багатовимірну функціональну центральну граничну теорему для належним чином центрованого та нормалізованого процесу $((K_{n,1}(u))_{u\in[0,\,1]}, (K_{n,2}(u))_{u\in[0,\,1]}, \ldots)$. При цьому слабка границя кожної координати є м.н. неперервним гаусівським процесом.

Для порівняння з нашим результатом наведемо твердження, отримане Гнедіним та Іксановим у статті [30]. Для заданої сукупності випадкових величин $(P_k)_{k\geq 1}$ покладемо для $t \geq 0$

$$N(t) := \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{P_k \geq \mathrm{e}^{-t}\}}$$

та $V(t) := \mathbb{E}N(t)$. Позначимо через $G := (G(s))_{s\geq 0}$ центрований гаусівський процес, на який накладаються певні умови, точні формулювання яких можна знайти статті [30]. Для кожного $u > 0$ та $j \geq 2$ покладемо

$$R_1^{(u)}(s) := G(s), \quad R_j^{(u)}(s) := \int_{[0,\,s]} (s-y)^{u(j-1)} \mathrm{d}G(y), \quad s \geq 0.$$

Символом $\Rightarrow$ будемо позначати слабку збіжность у функціональному просторі. Вищезгадане твердження (теорема 2.1 у статті [30]) виглядає так.

Твердження 1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

$$b_0 + b_1 t^{\omega-\varepsilon_1} \leq V(t) - ct^{\omega} \leq a_0 + a_1 t^{\omega-\varepsilon_2}$$

для всіх $t \geq 0$ *та деяких констант* $c,\, \omega,\, a_0,\, a_1 > 0$, $0 < \varepsilon_1,\, \varepsilon_2 \leq \omega$ *та* $b_0,\, b_1 \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E} \sup_{s\in[0,\,t]} (N(s) - V(s))^2 = O(t^{2\gamma}), \quad t \to \infty \tag{1.1}$$

для деякого $\gamma \in (\omega - \min(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2), \omega)$,

$$\Big(\frac{N(ut) - c(ut)^{\omega}}{at^{\gamma}}\Big)_{u\geq 0} \;\Rightarrow\; (G(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у J_1*-топології на* $\mathcal{D}([0,\infty))$ *для деякого* $a > 0$ *та тієї самої константи* γ*, що і у* (1.1)*. Тоді*

$$\bigg(\Big(\frac{K_{n,j}(u) - c_j(u\log n)^{\omega j}}{ac_{j-1}(\log n)^{\gamma+\omega(j-1)}}\Big)_{u\in[0,1]}\bigg)_{j\in\mathbb{N}} \;\Rightarrow\; \big((R_j^{(\omega)}(u))_{u\in[0,1]}\big)_{j\in\mathbb{N}}, \quad n \to \infty$$

у J_1 продакт топології на $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, де

$$c_j := \frac{(c\Gamma(\omega+1))^j}{\Gamma(\omega j+1)}, \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

а Γ — гамма-функція Ейлера.

Послідовності узгоджених схем зайнятості, породжені дискретними розподілами типу Вейбулла, досліджуються у статті [42]. У цій роботі встановлено функціональну граничну теорему для процесу зайнятих комірок у початкових поколіннях моделі. Отриманий результат описує асимптотичну поведінку цього процесу після відповідного масштабування та вказує відповідну слабку границю у просторі Скорохода.

У статті [45] продовжено дослідження вкладених схем зайнятості того ж типу (породжених розподілами Вейбулла). Автори доводять багатовимірні функціональні центральні граничні теореми для векторів, компоненти яких описують кількість комірок, що містять щонайменше 1 кулю, 2 кулі, $\ldots$, а також кількість комірок, що містять рівно 1 кулю, 2 кулі, $\ldots$. Граничними процесами є матричнозначні гаусівські процеси з явно заданими коваріаціями та крос-коваріаціями. Таким чином, робота [45] узагальнює результати статті [42], розкриваючи детальнішу структуру флуктуацій у вкладених схемах Карліна, породжених дискретними розподілами типу Вейбулла.

1.3 Основний результат

Головною метою цього розділу є доведення функціональної граничної теореми для вектора випадкових процесів

$$((K_{n,1}(u))_{u\in[0,\,1]}, (K_{n,2}(u))_{u\in[0,\,1]}, \ldots),$$

які належним чином нормалізуються *без центрування*. Одним із наслідків накладених припущень є те, що слабка границя кожного компонента є м.н. неспадним процесом, який, зокрема, не може бути гаусівським. Таким чином, хоча наша постановка задачі виглядає близькою до розглянутої у статті

[30], підходи та ідеї, використані тут і в роботі [30], місцями досить сильно відрізняються.

Оскільки основний результат цього розділу стосується збіжності нецентрованих процесів $K_{n,j}$, то природно, що і наші припущення є "нецентрованими". Припустимо, що

- функція V правильно змінюється на нескінченності:
$$V(t) \ \sim \ t^{\alpha}\ell(t), \quad t \to \infty \tag{1.2}$$
для деякого $\alpha \geq 0$ та деякої функції ℓ, що повільно змінюються на нескінченності;

- друга моментна функція процесу N, належним чином нормалізована, є рівномірно обмеженою:
$$\sup_{t \geq 1} \frac{\mathbb{E}(N(t))^2}{(V(t))^2} < \infty; \tag{1.3}$$

- масштабований процес N слабко збігається у просторі Скорохода:
$$\Big(\frac{N(ut)}{V(t)}\Big)_{u \geq 0} \ \Rightarrow \ (\mathcal{W}(u))_{u \geq 0}, \quad t \to \infty \tag{1.4}$$
у J_1-топології на $\mathcal{D}([0, \infty))$, де $(\mathcal{W}(u))_{u \geq 0}$ — м.н. локально неперервний за Гьольдером процес з показником $\beta \in (0, 1]$.

Нагадаємо, що процес $(\mathcal{W}(u))_{u \geq 0}$ є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником β, якщо для кожного $T > 0$ існує м.н. скінченна випадкова величина M_T така, що для всіх $x, y \in [0, T]$
$$|\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(y)| \leq M_T |x - y|^{\beta} \quad \text{м.н.}$$

Покладемо
$$\mathcal{W}_j(u) := \int_{[0,\, u]} (u - y)^{\alpha(j-1)} \mathrm{d}\mathcal{W}(y), \quad u \geq 0, j \in \mathbb{N},$$
де інтеграл існує як потраєкторний інтеграл Лебега-Стілтьєса. Зауважимо, що $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}$.

Сформулюємо основний результат цього розділу.

Теорема 2. *Припустимо, що умови* (1.2)*,* (1.3) *та* (1.4) *виконуються. Тоді*

$$\Big(\Big(\frac{K_{n,j}(u)}{(\log n)^{\alpha j}(\ell(\log n))^{j}}\Big)_{u\in[0,\,1]}\Big)_{j\in\mathbb{N}} \ \Rightarrow\ \Big(c_{j-1}(\mathcal{W}_j(u))_{u\in[0,\,1]}\Big)_{j\in\mathbb{N}}, \quad n\to\infty$$

у J_1 *продакт топології на* $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$*, де*

$$c_j := \frac{(\Gamma(1+\alpha))^j}{\Gamma(1+\alpha j)}, \quad j\in\mathbb{N}_0, \tag{1.5}$$

а Γ *— гамма-функція Ейлера.*

Після ознайомлення з доведенням теореми 2.1 у статті [30] стає зрозумілим, що методи, використані там, недостатні для доведення теореми 2. Тому були розроблені нові підходи, описані в цьому розділі.

1.4 Допоміжні твердження

Далі ми наводимо низку підготовчих результатів, які потім використовуються для доведення теореми 2, що міститься у підрозділі 1.5. Застосування теореми 2 до схеми зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці, наведено наприкінці розділу.

Для заданої сукупності випадкових величин $(P_k)_{k\geq1}$ покладемо $T_k := -\log P_k$. Тоді

$$N(t) = \sum_{k\geq1}\mathbb{1}_{\{P_k\geq \mathrm{e}^{-t}\}} = \sum_{k\geq1}\mathbb{1}_{\{T_k\leq t\}}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Нехай $j\in\mathbb{N}$, а $(P(v))_{v\in\mathcal{I}_j}$ — ймовірності потрапляння у коміркиj-го покоління (означення комірок наведене у підрозділі 1.1). Аналогічно до N, визначимо лічильну функцію комірок j-го покоління:

$$N_j(t) := \sum_{v\in\mathcal{I}_j}\mathbb{1}_{\{P(v)\geq \mathrm{e}^{-t}\}}, \quad t\geq 0 \tag{1.6}$$

та покладемо $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$ для $t\geq 0$. Зазначимо, що $N_1 = N$ та $V_1 = V$. Ось базовий рекурсивний розклад, який буде суттєво використовуватися протягом усієї дисертації:

$$N_j(t) = \sum_{k\geq1}N_{j-1}^{(k)}(t-T_k), \quad t\geq0,\ j\geq2, \tag{1.7}$$

де $(N_{j-1}^{(1)}(t))_{t\geq 0}$, $(N_{j-1}^{(2)}(t))_{t\geq 0}, \ldots$ — незалежні копії $(N_{j-1}(t))_{t\geq 0}$, які також не залежать від $T_1, T_2, \ldots$. Переходячи до математичних сподівань, маємо

$$V_j(t) = \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y), \quad t \geq 0,\ j \geq 2, \tag{1.8}$$

тобто V_j є j-кратною згорткою Лебега-Стілтьєса функції V.

У наступній лемі встановлюється асимптотична поведінка $V_j(t)$ при $t \to \infty$.

Лема 3. *Припустимо, що виконується умова* (1.2)*. Тоді для кожного* $j \in \mathbb{N}$

$$V_j(t) \ \sim\ c_j t^{\alpha j}(\ell(t))^j, \quad t \to \infty, \tag{1.9}$$

де константи c_j *визначені рівністю* (1.5).

Доведення. При $j = 1$ твердження леми збігається з формулою (1.2). Нехай $j \geq 2$ та $\hat{V}(s) := \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}V(t)$ для $s > 0$ — перетворення Лапласа-Стілтьєса функції V. Враховуючи (1.8) та той факт, що перетворення Лапласа-Стілтьєса згортки фунцій є добутком їх перетворень Лапласа-Стілтьєса, отримуємо

$$(\hat{V}(s))^j = \int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}V_j(t), \quad s > 0. \tag{1.10}$$

За теоремою Карамати (теорема 1.7.1 книги [7]) співвідношення (1.2) є еквівалентним такому

$$\hat{V}(s) \ \sim\ \Gamma(1+\alpha)s^{-\alpha}\ell(1/s), \quad s \to 0+\,.$$

Отже,

$$(\hat{V}(s))^j \ \sim\ \big(\Gamma(1+\alpha)\big)^j s^{-\alpha j}\big(\ell(1/s)\big)^j, \quad s \to 0+\,.$$

Зазначимо, що ℓ^j — це функція, що повільно змінюється на нескінченності, див. твердження 1.3.6 (ii) книги [7]. З огляду на (1.10), ще одне застосування теореми 1.7.1 книги [7] дає (1.9). □

Нижче встановлюється рівномірна обмеженість других моментних функцій нормалізованих процесів N_j.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (1.2) *та* (1.3)*. Тоді для кожного* $j \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\geq 1} \frac{\mathbb{E}(N_j(t))^2}{(V_j(t))^2} < \infty. \tag{1.11}$$

Доведення. Використаємо математичну індукцію. Згідно з умовою (1.3) нерівність (1.11) виконується з $j = 1$. Припускаючи її справедливість для $j = i - 1$, ми покажемо, що (1.11) також виконується з $j = i$.

Враховуючи, що $\mathbb{E}(N_i(t))^2 = \mathbb{E}\big(N_i(t) - V_i(t)\big)^2 + (V_i(t))^2$, достатньо довести, що

$$\sup_{t\geq 1} \frac{\mathbb{E}(N_i(t) - V_i(t))^2}{(V_i(t))^2} < \infty. \tag{1.12}$$

Спочатку ми наводимо зручне зображення для $I(t) := \mathbb{E}\big(N_i(t) - V_i(t)\big)^2$. Використовуючи рівність (1.7), отримуємо

$$\begin{aligned}
I(t) = \mathbb{E}\Big(&\sum_{k\geq 1}\big(N_{i-1}^{(k)}(t-T_k) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_k)\big)\Big)^2 \\
&= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\big(N_{i-1}^{(k)}(t-T_k) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_k)\big)^2 \\
+ 2\sum_{r\geq 1}\sum_{s>r}&\mathbb{E}\Big(\big(N_{i-1}^{(r)}(t-T_r) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_r)\big)\big(N_{i-1}^{(s)}(t-T_s) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_s)\big)\Big) \\
&= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}\big(N_{i-1}^{(k)}(t-T_k) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_k)\big)^2.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Ця рівність є наслідком

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\big(N_{i-1}^{(r)}(t-T_r) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_r)\big)\big(N_{i-1}^{(s)}(t-T_s) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_s)\big)\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(\big(N_{i-1}^{(r)}(t-T_r) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_r)\big)\big(N_{i-1}^{(s)}(t-T_s) - \mathbb{E}V_{i-1}(t-T_s)\big)|\mathcal{G}_s\Big)\Big] = 0
\end{aligned}$$

м.н. для $r < s$, де $\mathcal{G}_s$ - це σ-алгебра, породжена $N_{i-1}^{(1)}, \ldots, N_{i-1}^{(s-1)}$ та $(T_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Тут ми використали рівність $\mathbb{E}X = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\big)$, що виконується для довільної випадкової величини X з $\mathbb{E}|X| < \infty$ та довільної σ-алгебри $\mathcal{G}$. Вираз у перших дужках є $\mathcal{G}_s$-вимірним, а умовне середнє виразу в других дужках дорівнює 0 м.н., оскільки величина T_s є $\mathcal{G}_s$-вимірною, а процес $N_{i-1}^{(s)}$ не залежить від $\mathcal{G}_s$.

Далі, з (1.13) випливає, що

$$I(t) \le \sum_{k\ge1} \mathbb{E}(N_{i-1}^{(k)}(t-T_k))^2 = \int_{[0,\,t]} \mathbb{E}(N_{i-1}(t-x))^2 \mathrm{d}V(x).$$

Нерівність (1.11) з $j = i-1$ означає, що $\mathbb{E}(N_{i-1}(t))^2 \le C(V_{i-1}(t))^2$ для всіх $t \ge 1$ та деякої константи $C \in (0,\infty)$. Отже,

$$\int_{[0,\,t-1]} \mathbb{E}(N_{i-1}(t-x))^2 \mathrm{d}V(x) \le C \int_{[0,\,t]} (V_{i-1}(t-x))^2 \mathrm{d}V(x) \le CV_{i-1}(t)V_i(t)$$
$$= o((V_i(t))^2), \quad t\to\infty,$$

використовуючи монотонність V_{i-1} для останньої нерівності та лему 3 для асимптотичного співвідношення. Використовуючи монотонність
$y \mapsto \mathbb{E}(N_{i-1}(y))^2$ та лему 3, ми робимо висновок, що

$$\int_{(t-1,t]} \mathbb{E}(N_{i-1}(t-x))^2 \mathrm{d}V(x) \le \mathbb{E}(N_{i-1}(1))^2(V(t)-V(t-1)) = o((V_i(t))^2)$$

при $t\to\infty$. Це завершує доведення (1.12). $\square$

Нехай $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ — необов'язково монотонна послідовність невід'ємних випадкових величин. Визначимо лічильний процес $(M(t))_{t\ge0}$ цієї послідовності так: $M(t) := \sum_{k\ge0} \mathbb{1}_{\{Y_k\le t\}}$ для $t \ge 0$. Будемо припускати, що $M(t) < \infty$ м.н. для всіх $t \ge 0$. Для функції $h \in \mathcal{D}([0,\infty))$ покладемо

$$X(t) := \int_{[0,\,t]} h(t-y)\mathrm{d}M(y), \quad t\ge 0.$$

У термінології статті [52] $(X(t))_{t\ge0}$ — це *загальний процес дробового ефекту* для лічильного процесу M з функцією відгуку h. Зараз ми наведемо дещо виправлену версію теореми 1 статті [52], у якій містяться достатні умови, сформульовані у термінах функції відгуку h та лічильного процесу M, за яких належним чином нормалізований загальний процес дробового ефекту задовольняє функціональну граничну теорему у просторі Скорохода. Формулювання у статті [52] містить додаткове припущення, яке насправді непотрібне і тут випущене.

Твердження 5. *Зафіксуємо* $\alpha > 0,\ \lambda \in (0, 1]$ *та* $\beta \geq 0$. *Нехай* $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *— неспадна функція, що правильно змінюється на* ∞ *з показником* β, *та* $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *— незростаюча функція, що правильно змінюється на* ∞ *з показником* $-\alpha$. *Припустимо, що* $(a(t)M(ut))_{u\geq 0} \Rightarrow (V_\lambda(u))_{u\geq 0}$ *при* $t \to \infty$ *у* J_1*-топології на* $\mathcal{D}([0, \infty))$, *де* $(V_\lambda(u))_{u\geq 0}$ *— випадковий процес, що не спадає, є локально неперервним за Гьольдером з показником* λ *та задовольняє рівність* $V_\lambda(0) = 0$ *м.н. Тоді*

$$\Big(\frac{a(t)}{h(t)} X(ut)\Big)_{u\geq 0} \ \Rightarrow\ \Big(\int_{[0,\, u]} (u-y)^\beta \mathrm{d}V_\lambda(y)\Big)_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у J_1*-топології на* $\mathcal{D}([0, \infty))$.

1.5 Доведення основного результата

З леми 3 випливає, що при $n \to \infty$

$$\frac{K_{n,j}(u)}{(\log n)^{\alpha j}(\ell(\log n))^j} \sim c_j \frac{K_{n,j}(u)}{V_j(\log n)} = c_j \frac{K_{n,j}(u) - N_j(u \log n) + N_j(u \log n)}{V_j(\log n)}.$$

Отже, теорема 2 є безпосереднім наслідком таких двох результатів.

Теорема 6. *Припустимо, що виконуються умови* (1.2), (1.3) *та* (1.4). *Тоді*

$$\Big(\Big(\frac{N_j(ut)}{V_j(t)}\Big)_{u\geq 0}\Big)_{j\in\mathbb{N}} \ \Rightarrow\ \Big(\frac{c_{j-1}}{c_j} \big(\mathcal{W}_j(u)\big)_{u\geq 0}\Big)_{j\in\mathbb{N}}, \quad t \to \infty$$

у J_1 *продакт топології на* $(\mathcal{D}([0, \infty)))^{\mathbb{N}}$, *де константи* c_j *задаються рівністю* (1.5).

Твердження 7. *Припустимо, що виконуються умови* (1.2), (1.3) *та* (1.4). *Тоді для кожного* $j \in \mathbb{N}$

$$\sup_{u\in[0,\, 1]} \frac{|K_{n,j}(u) - N_j(u \log n)|}{V_j(\log n)} \ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0, \quad n \to \infty,$$

де $\overset{\mathbb{P}}{\to}$ *позначає збіжність за ймовірністю.*

Доведення теореми 6. Ми стверджуємо, що достатньо довести слабку збіжність скінченновимірних розподілів. Згідно з прийомом Крамера—Вольда задача зводиться до того, щоб показати, що для будь-яких $i, m \in \mathbb{N}$, будь-яких невід'ємних $\beta_{r,k}$, $r, k \in \mathbb{N}$, $r \le i$, $k \le m$ та будь-яких невід'ємних $u_{r,k}$, $r, k \in \mathbb{N}$, $r \le i$, $k \le m$,

$$\sum_{r=1}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{N_r(u_{r,k}t)}{V_r(t)} \overset{\mathrm{d}}{\to} \sum_{r=1}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{c_{r-1}}{c_r}\mathcal{W}_r(u_{r,k}), \quad t \to \infty, \tag{1.14}$$

де $\overset{\mathrm{d}}{\to}$ позначає одновимірну збіжність за розподілом. Оскільки використовується J_1 продакт топологія на $(\mathcal{D}([0,\infty)))^{\mathbb{N}}$, щільність розподілів процесів, що збігаються, забезпечується щільністю розподілів їхніх координат. Останнє гарантується зауваженням 2.1 статті [71], оскільки для кожного $j \in \mathbb{N}$ та кожного $t > 0$ випадкова функція $u \mapsto N_j(ut)$ є м.н. неспадною на $[0, \infty)$, а граничний процес $\mathcal{W}_j$ є м.н. неперервним (це можна легко перевірити).

Використовуючи (1.7), запишемо для $t \in \mathbb{R}$ та $j \ge 2$,

$$N_j(t) = \sum_{k\ge1}N_{j-1}^{(k)}(t-T_k) = \sum_{k\ge1}(N_{j-1}^{(k)}(t-T_k)-V_{j-1}(t-T_k))+\sum_{k\ge1}V_{j-1}(t-T_k)$$
$$=: X_j(t) + Y_j(t).$$

Ми доведемо, що при $t \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{m}\beta_{1,k}\frac{N_1(u_{1,k}t)}{V_1(t)}+\sum_{r=2}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{Y_r(u_{r,k}t)}{V_r(t)} \overset{\mathrm{d}}{\to} \sum_{r=1}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{c_{r-1}}{c_r}, \mathcal{W}_r(u_{r,k}) \tag{1.15}$$

та що для кожного $j \in \mathbb{N}$

$$\frac{X_j(t)}{V_j(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t \to \infty. \tag{1.16}$$

Із цих граничних співвідношень буде випливати (1.14). Зауважимо, що внаслідок правильної зміни на нескінченності функції V_j, співвідношення (1.16) гарантує, що для кожного $u \ge 0$,

$$\frac{X_j(ut)}{V_j(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t \to \infty.$$

Доведення (1.15). Оскільки

$$Y_r(u_{r,k}t) = \int_{[0,\,u_{r,k}]} V_{r-1}(t(u_{r,k}-y))\mathrm{d}_y N(ty), \quad t \ge 0$$

та

$$\mathcal{W}_r(u_{r,k})=\int_{[0,\,u_{r,k}]}(u_{r,k}-y)^{\alpha(r-1)}\mathrm{d}\mathcal{W}(y),$$

співвідношення (1.15) є еквівалентним такому

$$\sum_{k=1}^{m}\beta_{1,k}\frac{N_1(u_{1,k}t)}{V_1(t)}+\sum_{r=2}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{V_{r-1}(t)V(t)}{V_r(t)}\int_{[0,u_{r,k}]}\frac{V_{r-1}(t(u_{r,k}-y))}{V_{r-1}(t)}\mathrm{d}\frac{N(ty)}{V(t)}$$
$$\overset{\mathrm{d}}{\to}\sum_{k=1}^{m}\beta_{1,k}\mathcal{W}(u_{1,k})+\sum_{r=2}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{c_{r-1}}{c_r}\int_{[0,u_{r,k}]}(u_{r,k}-y)^{\alpha(r-1)}\mathrm{d}\mathcal{W}(y),\quad t\to\infty. \tag{1.17}$$

Нехай $(t_n)_{n\geq 1}$ — довільна послідовність додатних чисел, що задовольняє $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$. За теоремою Скорохода про зображення із умови (1.4) випливає, що існують процеси $((\tilde{N}_{t_n}(y))_{y\geq 0})_{n\geq 1}$, що мають такі самі розподіли, що і $\left(\left(\frac{N(t_ny)}{V(t_n)}\right)_{y\geq 0}\right)_{n\geq 1}$, та процес $\tilde{\mathcal{W}}$, що має той самий розподіл, що і $\mathcal{W}$. При цьому

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{N}_{t_n}(y)=\tilde{\mathcal{W}}(y)\quad \text{м.н. на }\ \mathcal{D}([0,\infty)). \tag{1.18}$$

Співвідношення (1.17) буде встановлене, якщо ми зможемо показати, що

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{m}\beta_{1,k}\tilde{N}_{t_n}(u_{1,k})$$
$$+\sum_{r=2}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{V_{r-1}(t_n)V(t_n)}{V_r(t_n)}\int_{[0,u_{r,k}]}\frac{V_{r-1}(t_n(u_{r,k}-y))}{V_{r-1}(t_n)}\mathrm{d}\tilde{N}_{t_n}(y)\Big)$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\beta_{1,k}\tilde{\mathcal{W}}(u_{1,k})+\sum_{r=2}^{i}\sum_{k=1}^{m}\beta_{r,k}\frac{c_{r-1}}{c_r}\int_{[0,u_{r,k}]}(u_{r,k}-y)^{\alpha(r-1)}\mathrm{d}\tilde{\mathcal{W}}(y)\quad\text{м.н.} \tag{1.19}$$

Згідно з (1.18) перша сума зліва збігається м.н. до першої суми справа. Для $r\geq 2$ процес Y_r є загальним процесом дробового ефекту з функцією відгуку V_{r-1} та лічильним процесом N, див. означення у абзаці перед твердженням 5. Функція V_{r-1} не спадає та, за лемою 3, правильно змінюється на ∞ з показником $\alpha(r-1)$. Функція $1/V$ не зростає та, за припущенням, правильно змінюється на ∞ з показником $-\alpha$. Процес $\mathcal{W}$ є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником $\beta \in (0, 1]$. Таким чином, процес Y_r задовольняє всі припущення твердження 5, і застосування цього результату дає

$$\Big(\frac{Y_r(ut)}{V_{r-1}(t)V(t)}\Big)_{u\geq 0} \ \Rightarrow\ (\mathcal{W}_{r-1}(u))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на $\mathcal{D}([0,\infty))$ або еквівалентно

$$\Big(\frac{Y_r(ut)}{V_r(t)}\Big)_{u\geq 0} \ \Rightarrow\ \frac{c_{r-1}}{c_r}(\mathcal{W}_{r-1}(u))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty$$

оскільки

$$V_{r-1}(t)V(t) \ \sim\ (c_{r-1}/c_r)V_r(t), \quad t\to\infty$$

за лемою 3. Це означає, що кожен член у лівій частині (1.19), який відповідає одному $r = 2, 3, ..., i$, збігається м.н. до відповідного члена у правій частині (1.19). Це доводить (1.19) і, отже, (1.15).

Доведення (1.16). Зафіксуємо довільне ціле число $j \geq 2$. Згідно з нерівністю Маркова достатньо довести, що $\mathbb{E}(X_j(t))^2 = o((V_j(t))^2)$ при $t\to\infty$. Використовуючи (1.13), отримуємо

$$\mathbb{E}(X_j(t))^2 = \int_{[0,\,t]} \mathrm{Var}\,(N_{j-1}(t-x))\mathrm{d}V(x) = \int_{[0,\,t-1]} \ldots + \int_{(t-1,\,t]} \ldots.$$

З (1.11) випливає, що $\mathrm{Var}\,(N_{j-1}(t)) \leq \mathbb{E}(N_{j-1}(t))^2 \leq C(V_{j-1}(t))^2$ для деякої додатної константи C та $t\geq 1$. Отже,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_j(t))^2 &\leq C\int_{[0,\,t]}(V_{j-1}(t-x))^2\mathrm{d}V(x) + \sup_{y\in[0,\,1]}\mathbb{E}(N_{j-1}(y))^2(V(t)-V(t-1))\\ &\leq CV_{j-1}(t)V_j(t) + \mathbb{E}(N_{j-1}(1))^2V(t) = o((V_j(t))^2), \quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Тут друга нерівність обґрунтовується монотонністю V_{j-1} та (1.8), а остання рівність забезпечується лемою 3. □

Доведення твердження 7. Зафіксуємо довільне $j\in\mathbb{N}$. Згідно з твердженням 3.6 статті [30], для $n\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{s\in[0,\,1]}|K_{n,\,j}(s) - N_j(s\log n)|\Big|(P(v))_{v\in\mathcal{I}_j}\Big)$$

$$\leq 4\big(N_j(\log n) - N_j(\log(y_0 n(\log n)^{-2}))\big) + 2N_j(\log n)(\log n)^{-1}$$
$$+ \int_1^\infty x^{-2}(N_j(\log(nx)) - N_j(\log n))\mathrm{d}x$$
$$+ 2 \sup_{s\in[0,\,1]}(N_j(s\log n + 1) - N_j(s\log n - 1)), \quad (1.20)$$

де $y_0 \in (0, 1)$ — детермінована константа, яка не залежить ні від n, ні від $(P(v))_{v\in\mathcal{I}_j}$.

З огляду на теорему 6 та лему 3 при $n \to \infty$

$$\Big(\frac{N_j(s\log n + 1)}{V_j(\log n)}, \frac{N_j(s\log n - 1)}{V_j(\log n)}\Big)_{s\geq 0} \Rightarrow ((c_{j-1}/c_j)\mathcal{W}_j(s), (c_{j-1}/c_j)\mathcal{W}_j(s))_{s\geq 0}$$

у J_1-топології на $\mathcal{D}([0,\infty)) \times \mathcal{D}([0,\infty))$, звідки

$$\frac{\sup_{s\in[0,\,1]}(N_j(s\log n + 1) - N_j(s\log n - 1))}{V_j(\log n)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad n \to \infty.$$

Для завершення доведення, згідно з нерівністю Маркова достатньо показати, що математичне сподівання кожного з перших трьох доданків у (1.20), поділене на $V_j(\log n)$, збігається до 0 при $n \to \infty$.

Для першого доданка це випливає з того факту, який є наслідком леми 3, що функція $t \mapsto V_j(\log t)$ повільно змінюється на ∞. Для другого доданка це тривіально. Для третього запишемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\int_1^\infty x^{-2}(N_j(\log(nx)) - N_j(\log n))\mathrm{d}x}{V_j(\log n)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_1^\infty x^{-2}\frac{V_j(\log(nx))}{V_j(\log n)}\mathrm{d}x - 1 = \int_1^\infty x^{-2}\lim_{n\to\infty}\frac{V_j(\log(nx))}{V_j(\log n)}\mathrm{d}x - 1 = 0,$$

використавши повільну зміну функції $t \mapsto V_j(\log t)$ для останньої рівності. Передостання рівність обґрунтовується теоремою Лебега про мажоровану збіжність у поєднанні з теоремою Поттера (теорема 1.5.6(і) книги [7]): $V_j(\log(nx))/V_j(\log n) \leq 2x^{1/2}$ для всіх $x \geq 1$ та великих n.

□

1.6 Застосування основного результата

Одна з найпопулярніших нескінченних схем занятості у випадковому середовищі називається *браткою Бернуллі*. У цій схемі ймовірності $(P_k)_{k\geq 1}$ визначаються процедурою ламання палиці:

$$P_k = W_1 W_2 \cdot \ldots \cdot W_{k-1}(1 - W_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{1.21}$$

де W_1, $W_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини W, яка набуває значень у $(0, 1)$.

Гратка Бернуллі була введена у статті [34] як стохастична модель розміщення куль по випадково сформованих «комірках» (інтервалах), довжини яких дорівнюють P_1, $P_2, \ldots$. Зазначимо, що послідовність $(P_k)_{k\geq 1}$ утворює розбиття одиниці у тому сенсі, що $\sum_{k\geq 1} P_k = 1$ майже напевно.

Гратка Бернуллі була предметом інтенсивного вивчення протягом останніх двох десятиліть. Огляди основних результатів і попередніх робіт наведено у статті [31] та монографії [39]. Подальші дослідження, спрямовані на встановлення функціональних граничних теорем, асимптотичних властивостей кількості зайнятих комірок та інших характеристик моделі, містяться у роботах [2, 41, 65]. Крім того, у статтях [22, 64, 66] гратка Бернуллі використовується як ключовий інструмент для побудови та аналізу стохастичних структур, пов'язаних із випадковими перестановками, а також дослідження регенеративних властивостей відповідних процесів.

Надалі ми обговоримо зв'язок гратки Бернуллі з декількома класичними об'єктами дослідження комбінаторної теорії ймовірностей, а також наведемо короткий огляд результатів, отриманих у статтях [2, 64].

Нехай $\mathfrak{S}_n$ — симетрична група порядку n. Для $\theta > 0$ випадкові перестановки Юенса (також відомі як θ-зсунуті випадкові перестановки) утворюють параметричне сімейство $\Pi_n := \Pi_n(\theta)$ випадкових об'єктів, що набувають значення у множині $\mathfrak{S}_n$ з ймовірностями

$$\mathbb{P}\{\Pi_n = \sigma\} = \frac{\Gamma(\theta)\theta^{|\sigma|}}{\Gamma(n+\theta)}, \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

де $|\sigma|$ позначає кількість циклів у перестановці σ, а Γ — це гамма-функція Ейлера. Зрозуміло, що $\Pi_n(1)$ є рівномірною випадковою перестановкою із значеннями у $\mathfrak{S}_n$, для якої всі $n!$ перестановок рівноймовірні. Для $r = 1, \ldots, n$ позначимо через $C_{n,r}$ кількість циклів довжини r у Π_n. Спільний розподіл випадкових величин $C_{n,1}, \ldots, C_{n,n}$ задається славнозвісною формулою Юенса. Ця формула застосовується у генетиці популяцій для знаходження ймовірностей того, що різні алелі зустрічаються у вибірці задану кількість разів. Відомо, що перестановки Юенса можна задавати за допомогою процедури (процесу) китайського ресторану. Нові ймовірнісні аспекти процесу китайського ресторану були досліджені у зовсім нещодавніх роботах [23, 25].

Позначимо через $K^*_{n,r}$ кількість комірок гратки Бернуллі, що містять рівно r куль з n наявних. Зв'язок між граткою Бернуллі та перестановками Юенса виникає, якщо випадкову величину W вибрати такою, що вона має бета-розподіл з параметрами $\theta > 0$ та 1, тобто

$$\mathbb{P}\{W \in \mathrm{d}x\} = \theta x^{\theta-1}\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\, \mathrm{d}x.$$

У цьому випадку (див. приклад 2 у статті [33]) справджується рівність розподілів

$$(K^*_{n,1}, \ldots, K^*_{n,n}) \overset{\mathrm{d}}{=} (C_{n,1}, \ldots, C_{n,n}).$$

Також у цьому випадку кажуть, що послідовність $(P_k)_{k\geq 1}$ має $\mathrm{GEM}(\theta)$-розподіл (на честь Гріффітса, Енгена та МакКлоскі), і що ця послідовність, впорядкована за спаданням, має розподіл Пуассона–Діріхле з параметром θ.

Основний об'єкт дослідження статті [2] — це процес зайнятих комірок у гратці Бернуллі $(K^*_n(t))_{t\in[0,1]}$, що задається так:

$$K^*_n(t) := \sum_{r=1}^{\lfloor n^t \rfloor} K^*_{n,r}, \quad t \in [0,1].$$

Припускаючи, що розподіл $|\log W|$ належить області притягання стійкого розподілу, автори доводять функціональні граничні теореми для центрованого та нормалізованого процесу K^*_n. Зокрема, якщо $\mu := \mathbb{E}|\log W| < \infty$

та $\sigma^2 := \operatorname{Var} |\log W| \in (0, \infty)$, то виконується функціональна центральна гранична теорема

$$\left(\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2 \log n}} \right)_{t\in[0,1]} \Rightarrow (B(t))_{t\in[0,1]}, \quad n \to \infty$$

в J_1-топології на $\mathcal{D}$, де $(B(t))_{t\in[0,1]}$ — стандартний броунівський рух, а центрування u_n задається так

$$u_n(t) := \mu^{-1} \int_{(1-t)\log n}^{\log n} \mathbb{P}\{|\log(1-W)| \le s\}\, \mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N},\ t \in [0,1].$$

Якщо ж $\mathbb{P}\{|\log W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x)$ при $x \to \infty$ для деякої константи $\alpha \in (1,2)$ та деякої функції ℓ, що повільно змінюється на нескінченності, то з тим самим центруванням процес зайнятих комірок задовольняє функціональну граничну теорему зі стійким граничним процесом:

$$\left(\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha} c(\log n)} \right)_{t\in[0,1]} \Rightarrow (S_\alpha(t))_{t\in[0,1]}, \quad n \to \infty$$

в M_1-топології на $\mathcal{D}$, де c — додатна функція, що задовольняє

$$\lim_{x\to\infty} c(x)^{-\alpha} x \ell(c(x)) = 1,$$

та $(S_\alpha(t))_{t\in[0,1]}$ — спектрально негативний α-стійкий процес Леві.

Автори статті [64] вводять клас перестановок Π на $\mathbb{N}$, для яких існує випадкова зростаюча послідовність "точок регенерації"

$$0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$$

така, що обмеження перестановки на блоках $\Pi|_{(T_{k-1}, T_k]}$ для різних k є незалежними та однаково розподіленими. Такі перестановки є аналогом регенеративних процесів у "некомбінаторній" теорії ймовірностей. Показано, що розподіл регенеративної перестановки повністю визначається розподілом довжини першого блоку T_1 та розподілом перестановки на цьому блоці, і, навіть більш важливо у поточному контексті, що деякі регенеративні випадкові перестановки можна згенерувати за допомогою гратки Бернуллі.

Метою цього підрозділу є застосування теореми 2 до послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці. Припустимо, що ймовірності потрапляння у комірки першого покоління задаються формулою (1.21). Припустимо додатково, що розподіл випадкової величини W задовольняє співвідношення

$$\mathbb{P}\{|\log W| > x\} \ \sim\ x^{-\rho}L(x), \quad x \to \infty \tag{1.22}$$

для деякої константи $\rho \in (0,1)$ та деякої функції L, що повільно змінюються на ∞.

Визначимо випадковий процес $\mathcal{Z}_\rho^{\leftarrow}$ рівністю

$$\mathcal{Z}_\rho^{\leftarrow}(u) := \inf\{v \geq 0 : \mathcal{Z}_\rho(v) > u\}, \quad u \geq 0, \tag{1.23}$$

де $(\mathcal{Z}_\rho(v))_{v\geq 0}$ — ρ-стійкий субординатор з $-\log \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\mathcal{Z}_\rho(1)} = \Gamma(1-\rho)s^\rho$ для $s \geq 0$.

Перевіримо тепер, що за припущень (1.21) та (1.22) умови (1.2), (1.3) та (1.4) теореми 2 виконуються з $\alpha = \rho$, $\ell(t) = (\Gamma(1-\rho)\Gamma(1+\rho)L(t))^{-1}$ та $\mathcal{W} = \Gamma(1-\rho)\Gamma(1+\rho)\mathcal{Z}_\rho^{\leftarrow}$.

Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\geq 1}$ — незалежні копії випадкового вектора (ξ, η) з додатними довільно залежними компонентами. Позначимо через $(S_k)_{k\geq 0}$ стандартне випадкове блукання зі стрибками ξ_k, що стартує в нулі, тобто $S_0 := 0$ та $S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Покладемо

$$T_k := S_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Випадкова послідовність $(T_k)_{k\geq 1}$ відома в літературі як (глобально) збурене випадкове блукання. Огляд раніше відомих результатів для *загальних* глобально збурених випадкових блукань, а також новий результат наведені у розділі 3. Якщо ймовірності $P_1, P_2, \ldots$ визначаються рівністю (1.21), то

$$T_k^* := -\log P_k = |\log W_1| + \ldots + |\log W_{k-1}| + |\log(1-W_k)|, \quad k \in \mathbb{N},$$

тобто $(T_k^*)_{k\geq 1}$ є окремим випадком глобально збуреного випадкового блукання з

$$(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|). \tag{1.24}$$

У залишку цього підрозділу $N(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{T^*_k \leq t\}}$ та $V(t) = \mathbb{E}N(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{T^*_k \leq t\}$, $t \in \mathbb{R}$, для конкретної послідовності $(T^*_k)_{k\geq 1}$, визначеної вище.

Умова (1.2). Запишемо для $s > 0$

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{T_k \leq t\}\Big) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\eta}\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\mathrm{e}^{-sS_k} = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\eta}(1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi})^{-1}.$$

Звідси

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}\Big(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}\{T_k \leq t\}\Big) \ \sim\ (1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi})^{-1}, \quad s \to 0+\,.$$

Застосуємо це граничне співвідношення до (ξ, η), що визначаються рівністю (1.24). Згідно з наслідком 8.1.7 книги [7], співвідношення (1.22) є еквівалентним такому

$$1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s|\log W|} \ \sim\ \Gamma(1-\rho)s^\rho L(1/s), \quad s \to 0+\,.$$

Отже,

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}V(t) \ \sim\ (1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s|\log W|})^{-1} \ \sim\ (\Gamma(1-\rho)s^\rho L(1/s))^{-1}, \quad s \to 0+\,.$$

Використовуючи теорему 1.7.1 книги [7], отримуємо

$$V(t) \ \sim\ \frac{1}{\Gamma(1-\rho)\Gamma(1+\rho)}\frac{t^\rho}{L(t)}, \quad t \to \infty, \tag{1.25}$$

тобто умова (1.2) дійсно виконується з $\alpha = \rho$ та $\ell(t) = (\Gamma(1-\rho)\Gamma(1+\rho)L(t))^{-1}$.

Умова (1.3). Оскільки $N(t) \leq 1 + \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{|\log W_1|+\ldots+|\log W_k| \leq t\}} =: \hat{N}(t)$ для $t \geq 0$ м.н., та згідно з теоремою 1.5 статті [48] припущення (1.22) гарантує виконання нерівності $\sup_{t\geq 1}(\mathbb{E}(\hat{N}(t))^2/(V(t))^2) < \infty$, то умова (1.3) виконується.

Умова (1.4). Згідно з пунктом (B4) теореми 3.2 статті [2]

$$(\mathbb{P}\{|\log W| > t\}N(tu))_{u\geq 0} \ \Rightarrow\ (\mathcal{Z}^{\leftarrow}_\rho(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у J_1-топології на $\mathcal{D}([0,\infty))$. З огляду на (1.25) останнє граничне співвідношення є еквівалентним такому

$$\Big(\frac{N(tu)}{V(t)}\Big)_{u\geq 0} \ \Rightarrow\ \Gamma(1-\rho)\Gamma(1+\rho)(\mathcal{Z}_\rho^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}, \quad t\to\infty.$$

Нарешті, згідно з лемою 3.4 роботи [62] процес $S_\rho^{\leftarrow}$ є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником, меншим за ρ.

Застосовуючи теорему 2, отримуємо такий результат.

Теорема 8. *Припустимо, що виконуються умови* (1.21) *та* (1.22). *Тоді при* $n\to\infty$

$$\begin{aligned}&\Big(\Big(\frac{(L(\log n))^j K_{n,j}(u)}{(\log n)^{\rho j}}\Big)_{u\in[0,\,1]}\Big)_{j\in\mathbb{N}}\\ &\Rightarrow\ \Big(\frac{1}{(\Gamma(1-\rho))^{j-1}\Gamma(1+\rho(j-1))}\Big(\int_{[0,\,u]}(u-y)^{\rho(j-1)}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\rho^{\leftarrow}(y)\Big)_{u\in[0,\,1]}\Big)_{j\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

в J_1 *продакт топології на* $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі досліджено початкові покоління узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, що є ієрархічним узагальненням класичної схеми зайнятості Карліна. На основі огляду існуючих результатів показано, що попередні дослідження здебільшого фокусувалися на проміжних та пізніх поколіннях, тоді як асимптотика різних характеристик у початкових поколіннях залишалася менш вивченою, особливо у випадку нецентрованих процесів та випадкових середовищ.

У цьому контексті введено набір припущень щодо правильної зміни функції V, рівномірної обмеженості певних моментів та слабкої збіжності масштабованого лічильного процесу випадкових ймовірностей у першому поколінні. На їх основі побудовано систему інтегральних граничних процесів $\mathcal{W}_j$, яка відображає накопичення флуктуацій у вкладених поколіннях. Були розроблені нові підходи, що дозволили сформулювати та довести нову функціональну граничну теорему для вектора нормалізованих (без центрування) процесів $(K_{n,j}(u))_{j\geq 1}$ при $n \to \infty$.

Основний результат розділу застосовано до граток Бернуллі. Подібним чином він може бути застосований до широкого класу узгоджених схем зайнятості.

Поточний розділ відкриває шляхи для подальшого вивчення флуктуацій у початкових поколіннях вкладених схем зайнятості та розширює спектр відомих асимптотичних режимів для таких моделей.

Розділ 2

Дослідження проміжних поколінь узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці

2.1 Вступ

Розглянемо нескінченну схему зайнятості у випадковому середовищі. Маємо масив занумерованих комірок $1, 2, ...$, у які послідовно та незалежно розміщуються кулі. Ймовірності потрапляння до комірок є випадковими величинами, що задаються процедурою ламання палиці або моделлю залишкового розподілу (residual allocation model):

$$P_k = W_1 W_2 \cdot \ldots \cdot W_{k-1}(1 - W_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

де W_1, $W_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини W, що набуває значень у $(0, 1)$. Така стохастична конструкція є базовою для генерування випадкових дискретних розподілів маси шляхом послідовного «відламування» часток від одиничного ресурсу. Вона лежить в основі багатьох важливих моделей, включаючи процеси Діріхле та моделі випадкових розбиттів. Модель залишкового розподілу відіграє ключову роль у баєсовій непараметричній статистиці, комбінаторній теорії ймовірностей та генетичних моделях, оскільки забезпечує природний і гнучкий спосіб опису випадкових частот або пропорцій.

Нескінченна схема зайнятості з ймовірностями потрапляння до комірок, що задаються рівністю (2.1), називається граткою Бернуллі. Вона є досить добре дослідженою, огляд відповідних результатів міститься у підрозділі 1.6.

Нагадаємо стисло конструкцію послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі. Конструкція визначається узгодженим розміщенням послідовності схем зайнятості на дереві зваженого гіллястого процесу. Нехай кожна комірка i першого рівня, розділяється на зліченну кількість підкомірок $i1, i2, \dots$, ймовірності потрапляння до яких кулі, що вже потрапила до комірки i, визначаються копією послідовності $(P_k)_{k\geq 1}$. При цьому для різних комірок ці копії є незалежними. Всі такі підкомірки утворюють друге покоління послідовності узгоджених схем зайнятості. Кожна комірка другого рівня розділяється на підкомірки за тим самим правилом, утворюється третій рівень, і так далі. Припускається, що випадкові ймовірності потрапляння у комірки та результати розміщення куль визначені на спільному ймовірнісному просторі.

У підрозділі 1.6 досліджувалась кількість зайнятих комірок у початкових поколіннях послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці. У цьому розділі ми будемо розглядати *проміжні покоління* послідовностей узгоджених схем зайнятості. Покоління називається проміжним, якщо його індекс (номер) $j = j_n$ залежить від числа n наявних куль та задовольняє співвідношення $j_n \to \infty$ та $j_n = o(\log n)$ при $n \to \infty$. Нехай $K_n(j)$ — кількість зайнятих комірок у j-му поколінні за умови розміщення n куль. Припустимо, що середнє значення випадкової величини $|\log W|$ є нескінченним, а хвіст розподілу $|\log W|$ правильно змінюється на ∞. За більш обмежувальної версії згаданого припущення ми досліджуємо поведінку розподілу $K_n(j)$ при великих n. Ми маємо справу з підмножиною проміжних поколінь, чиї індекси

$j = j_n$ задовольняють $j = j_n \to \infty$ та $j_n = o((\log n)^a)$ при $n \to \infty$ для деяких $a \in (0, 1)$. Аналогічна задача розв'язувалася у статтях [15, 50] у ситуації, коли величина $|\log W|$ має скінченний другий момент, та у статті [49] у ситуації, коли $|\log W|$ має скінченне середнє значення та нескінченний другий момент.

Згідно з теоремою 1 роботи [55] висота послідовності узгоджених схем зайнятості у (довільному) випадковому середовищі, що задається так $\tau_n := \inf\{j \geq 1 : K_n(j) = n\}$, має порядок $\log n$. Термін 'висота' виправдовується тим, що τ_n — це номер покоління, у якому вперше всі зайняті комірки містять в точності одну кулю. Звісно, цей факт продовжує виконуватися і в усіх подальших поколіннях. Асимптотична поведінка послідовності узгоджених схем зайнятості у (довільному) випадковому середовищі була досліджена у статтях [5, 47, 55].

У статті [15] отримано фундаментальні результати, що стосуються поведінки числа зайнятих комірок у *проміжних* поколіннях послідовності узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці. Ми вважаємо за корисне навести ці результати. Якщо випадкова величина W має рівномірний розподіл на $(0, 1)$, то послідовність $(P_k)_{k\geq 1}$ має $\mathrm{GEM}(1)$ розподіл. За такого припущення у теоремі 2.1 статті [15] доведена гранична теорема для $K_n(j)$ для *всіх* проміжних поколінь. Будемо писати $\overset{\text{f.d.d.}}{\longrightarrow}$ для позначення слабкої збіжності скінченновимірних розподілів. Також $\lfloor x \rfloor$ позначає цілу частину $x \in \mathbb{R}$.

Твердження 9. *Припустимо, що ймовірності $(P_k)_{k\geq 1}$ визначаються процедурою ламання палиці* (2.1) *з випадковою величиною W, що має рівномірний (неперервний) розподіл на $(0, 1)$. Нехай $(j_n)_{n\geq 1}$ — послідовність додатних чисел, що задовольняє співвідношення $j_n \to \infty$ та $j_n = o(\log n)$ при $n \to \infty$.*

Тоді виконується така гранична теорема

$$\left(\frac{\lfloor j_n\rfloor^{1/2}(\lfloor j_n u\rfloor-1)!(K_n(\lfloor j_n u\rfloor)-(\log n)^{\lfloor j_n u\rfloor}/\lfloor j_n u\rfloor!)}{(\log n)^{\lfloor j_n u\rfloor-1/2}}\right)_{u>0} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-uy}\,\mathrm{d}B(y)\right)_{u>0}, \quad n\to\infty,$$

де $(B(v))_{v\geq 0}$ *— стандартний броунівський рух.*

Нехай $d>0$. Нагадаємо, що розподіл додатної випадкової величини називається *d-арифметичним*, якщо він зосереджений на центрованій решітці $(nd)_{n\geq 1}$ і не зосереджений на $(nd_1)_{n\geq 1}$ для будь-якого значення $d_1>d$. Розподіл називається *неарифметичним*, якщо він не є d-арифметичним для всіх $d>0$.

У теоремі 2.5 статті [15], враховуючи більш загальний коефіцієнт ламання палиці W, було охоплено лише проміжні покоління в діапазоні $j_n = o((\log n)^{1/3})$.

Твердження 10. *Припустимо, що ймовірності* $(P_k)_{k\geq 1}$ *визначаються процедурою ламання палиці* (2.1)*, що розподіл* $|\log W|$ *є неарифметичним, що* $\sigma^2 := \mathrm{Var}(\log W)\in(0,\infty)$ *та що* $\mathbb{E}|\log(1-W)|<\infty$*. Нехай* $(j_n)_{n\geq 1}$ *— послідовність додатних чисел, що задовольняє* $j_n\to\infty$ *та* $j_n = o((\log n)^{1/3})$ *при* $n\to\infty$*. Тоді виконується така гранична теорема*

$$\left(\frac{\lfloor j_n\rfloor^{1/2}(\lfloor j_n u\rfloor-1)!\big(K_n(\lfloor j_n u\rfloor)-(\mu^{-1}\log n)^{\lfloor j_n u\rfloor}/\lfloor j_n u\rfloor!\big)}{(\sigma^2\mu^{-2\lfloor j_n u\rfloor-1}(\log n)^{2\lfloor j_n u\rfloor-1})^{1/2}}\right)_{u>0} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-uy}\,\mathrm{d}B(y)\right)_{u>0}, \quad n\to\infty,$$

де $(B(v))_{v\geq 0}$ *— стандартний броунівський рух, а* $\mu := \mathbb{E}|\log W|<\infty$.

Для $j\in\mathbb{N}$ ми використовуємо лічильний процес N_j, що був введений у формулі (1.6). У статті [50] основним результатом є центральна гранична теорема, подібна до твердження 10. Але вона виконується для більшої області проміжних поколінь $j_n = o((\log n)^{1/2})$ та потребує більш складного центрування. Також відсутнє припущення про неарифметичність розподілу $|\log W|$.

Твердження 11. *Припустимо, що ймовірності* $(P_k)_{k\geq 1}$ *визначаються процедурою ламання палиці* (2.1)*, що* $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\log W) \in (0,\infty)$ *та що* $\mathbb{E}|\log(1-W)| < \infty$*. Нехай* $(j_n)_{n\geq 1}$ *— послідовність додатних чисел, що задовольняє* $j_n \to \infty$ *та* $j_n = o((\log n)^{1/2})$ *при* $n \to \infty$*. Тоді виконується така гранична теорема*

$$\left(\frac{j_n^{1/2}(\lfloor j_n u\rfloor - 1)!\big(K_n(\lfloor j_n u\rfloor) - \mathbb{E}N_{\lfloor j_n u\rfloor}(\log n)\big)}{(\sigma^2\mu^{-2})^{\lfloor j_n u\rfloor - 1}(\log n)^{2\lfloor j_n u\rfloor - 1/2}}\right)_{u>0} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-uy}\,\mathrm{d}B(y)\right)_{u>0}, \quad n\to\infty,$$

де $(B(v))_{v\geq 0}$ *— стандартний броунівський рух, а* $\mu = \mathbb{E}|\log W| < \infty$*. При цьому центрування задовольняє співвідношення*

$$\mathbb{E}N_{\lfloor j_n u\rfloor}(\log n) \sim \frac{(\log n)^{\lfloor j_n\rfloor}}{(\lfloor j_n\rfloor)!\mu^{\lfloor j_n\rfloor}}, \quad n\to\infty.$$

Аналог цієї граничної теореми за умов

$$\mathbb{E}|\log W| < \infty \quad \text{та} \quad \sigma^2 = \mathrm{Var}(\log W) = \infty$$

випливає з теореми 1 статті [49], але не в повній загальності, а за додаткових припущень, накладених на розподіл W: розподіл випадкової величини $|\log W|$ належить області притягання α-стійкого розподілу для $\alpha \in (1,2]$; $\mathbb{E}\min(|\log(1-W)|, t) = O(t^a)$ при $t \to \infty$ для конкретного значення $a > 0$, визначеного у статті [49].

Метою даного розділу є доведення відповідної граничної теореми для випадку, коли $\mathbb{E}|\log W| = \infty$, а, отже, і $\mathrm{Var}(\log W) = \infty$. У такій постановці задача раніше не була розв'язана. Наші результати доповнюють існуючу теорію.

2.2 Припущення щодо розподілу W

Теорема 12, що є основним результатом цього розділу, буде сформульована за певних припущень щодо розподілу випадкового вектора $(|\log W|, |\log(1-$

$W)|)$. Ми вважаємо доцільним ввести припущення для довільного випадкового вектора (ξ, η), а потім використовувати це припущення для конкретного вибору $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$.

Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\geq 1}$ — незалежні копії випадкового вектора (ξ, η) з додатними довільно залежними компонентами. Нехай F та G — функції розподілу ξ та η відповідно. Позначимо через $(S_k)_{k\geq 0}$ стандартне випадкове блукання зі стрибками ξ_k, що стартує в нулі, тобто $S_0 = 0$ та $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ для $k \in \mathbb{N}$, та $(T_k)_{k\geq 1}$ — глобально збурене випадкове блукання, породжене випадковим вектором (ξ, η), тобто

$$T_k = S_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Зв'язок зі схемою зайнятості обґрунтовується тим фактом, що якщо $(P_k)_{k\geq 1}$ задається формулою (2.1), то $(-\log P_k)_{k\geq 1}$ є глобально збуреним випадковим блуканням з $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$.

Для послідовності $(T_k)_{k\geq 1}$ знову будемо використовувати її лічильну функцію $N(t) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}$ та середнє $V(t) = \mathbb{E}N(t)$ для $t \geq 0$. Зрозуміло, що

$$V(t) = \int_{[0,\,t]} G(t-y)\mathrm{d}U(y), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

де U є функцією відновлення, що задається так: $U(t) := \sum_{i\geq 0} \mathbb{P}\{S_i \leq t\}$ для $t \geq 0$.

Припустимо, що

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim ct^{-\alpha}, \quad t \to \infty \tag{2.3}$$

для деяких констант $c > 0$ та $\alpha \in (0, 1)$. Стандартний результат теорії відновлення стверджує, що останнє граничне співвідношення є еквівалентним такому:

$$U(t) \;\sim\; Ct^{\alpha}, \quad t \to \infty,$$

де $C = C_\alpha := (c\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha))^{-1}$, а Γ — гамма-функція Ейлера. Для доведення цього використовується рівність $\int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}U(t) = (1 - \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi})^{-1}$ для $s > 0$ та тауберова теорема Карамати (теорема 1.7.1 на с. 37 книги [7]).

Оскільки $\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}V(t) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\eta}(1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi})^{-1}$ для $s>0$, ті самі міркування дозволяють нам зробити висновок, що співвідношення (2.3) є еквівалентним такому: $V(t) \sim Ct^\alpha$ при $t \to \infty$. Незабаром стане зрозуміло, що асимптотична поведінка V першого порядку недостатня для наших поточних цілей, і що насправді нам потрібен двокомпонентний розклад V. У розділі 2.4 буде показано, що два припущення, наведені нижче, забезпечують необхідний розклад V.

Припущення A: $U(t) = Ct^\alpha + O(t^\rho)$ для деякої константи $\rho \in [0,\alpha)$.

Припущення B: Або $\limsup_{t\to\infty}(1-G(t))/(1-F(t)) = m_0 \in [0,\infty)$, або $m_0 = \infty$ та $\limsup_{t\to\infty} t^\theta(1-G(t)) = m_1 \in [0,\infty)$ (необхідно) для деякої константи $\theta \in (0,\alpha)$.

Нетривіальною проблемою є знаходження необхідних і достатніх умов для виконання Припущення A, сформульованих у термінах розподілу ξ. У випадку, коли розподіл ξ є абсолютно неперервним (відносно міри Лебега), достатні умови з використанням щільностей як функцій комплексного аргументу, можна знайти в статті [70]. У розділі 2.4 подано два набори нових достатніх умов, що відрізняються за своєю суттю.

Зазначимо, що при застосуванні до вектора $(\xi,\eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$ Припущення A та B регулюють поведінку розподілу W біля 0 та біля 1 відповідно. Якщо (а) $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s|\log W|} = \exp(-c\Gamma(1-\alpha)s^\alpha)$ для $s \geq 0$, тобто розподіл $|\log W|$ є α-стійким або (б) $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s|\log W|} = (1+(c/\kappa)\Gamma(1-\alpha)s^\alpha)^{-\kappa}$ для $s \geq 0$ та деякої константи $\kappa > 0$, то Припущення A виконується з $\rho = 0$, а Припущення B виконується з $m_0 = 0$. Це твердження буде доведено в розділі 2.4.

2.3 Основний результат

Нехай $\mathcal{Z}_\alpha^\leftarrow = (\mathcal{Z}_\alpha^\leftarrow(u))_{u\geq 0}$ позначає обернений α-стійкий субординатор, такий самий як у формулі (1.23), але з параметром α замість ρ. Відповідно $\mathcal{Z}_\alpha = (\mathcal{Z}_\alpha(u))_{u\geq 0}$ позначає α-стійкий субординатор з $-\log \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\mathcal{Z}_\alpha(1)} =$

$\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}$ для $s \geq 0$.

Теорема 12. *За припущень* A *та* B, *накладених на* $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$, *нехай* $(j_n)_{n\geq 1}$ — *послідовність додатних чисел, що задовольняє*

$$\lim_{n\to\infty} j_n = \infty \quad \textit{та} \quad j_n = o\left((\log n)^{\min(1/3,(\alpha-\beta)/(\alpha-\beta+1))}\right), \quad n \to \infty,$$

де $\beta = \rho$, *якщо* $m_0 < \infty$, *та* $\beta = \max(\rho, \alpha - \theta)$, *якщо* $m_0 = \infty$ *та* $m_1 < \infty$. *Тоді при* $n \to \infty$

$$\left(\frac{c j_n^{\alpha}}{\rho_{\lfloor j_n u\rfloor - 1}(\log n)^{\alpha\lfloor j_n u\rfloor}} K_n(\lfloor j_n u\rfloor)\right)_{u>0} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u y} \mathrm{d}\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0},$$

де

$$\rho_i := \frac{(C\Gamma(\alpha+1))^i}{\Gamma(\alpha i+1)}, \quad i \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}, \tag{2.4}$$

а Γ — *гамма-функція Ейлера.*

Обговоримо структуру граничного процесу в теоремі 12. З доведення стане зрозумілим, що інтегратор $\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}$ описує флуктуації належним чином нормалізованого процесу зайнятих комірок у першому поколінні. З ймовірністю один траєкторії процесу $\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}$ є неперервно сингулярними відносно міри Лебега. Підінтегральна функція $y \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha u y}$ утворюється регенеративною структурою дерева зваженого гіллястого процесу (на якому розміщується послідовність узгоджених схем зайнятості). Зокрема, згадана регенеративна структура робить процес $\big(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u y} \mathrm{d}\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}(y)\big)_{u>0}$ м.н. нескінченно диференційовним. Таким чином, при переході від першого покоління до проміжних поколінь флуктуації процесу зайнятих комірок згладжуються.

Оскільки $\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}(\mathcal{Z}_{\alpha}(y)) = y$ м.н., ми робимо висновок, що

$$\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u y} \mathrm{d}\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0} = \left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u \mathcal{Z}_{\alpha}(y)} \mathrm{d}y\right)_{u>0} \quad \text{м.н.}$$

Далі, завдяки властивості масштабування $\mathcal{Z}_{\alpha}$, при фіксованому $u > 0$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha u \mathcal{Z}_{\alpha}(y)} \mathrm{d}y \overset{\mathrm{d}}{=} (\alpha u)^{-\alpha} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathcal{Z}_{\alpha}(y)} \mathrm{d}y =: (\alpha u)^{-\alpha} I_{\alpha},$$

де $\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ позначає рівність розподілів. Останній інтеграл відомий у літературі як експоненційний функціонал від субординатора $\mathcal{Z}_\alpha$. Згідно з твердженням 3.3 статті [19]

$$\mathbb{E}(I_\alpha)^n = \frac{(n!)^{1-\alpha}}{(\Gamma(1-\alpha))^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

та, крім того, $\mathbb{E}\exp(sI_\alpha) < \infty$ для всіх $s > 0$. Можна показати (див. твердження 3.4(iv) статті [19]), що наведена вище моментна формула гарантує виконання рівності розподілів $\log I_\alpha + \log\Gamma(1-\alpha) \stackrel{\mathrm{d}}{=} X(1-\alpha)$, де $(X(u))_{u\geq 0}$ — це процес Леві з $X(1) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \log\mathcal{E}$, а $\mathcal{E}$ — випадкова величина з показниковим розподілом з середнім рівним одиниці. Наслідком цього спостереження є те, що розподіл I_α є абсолютно неперервним відносно міри Лебега.

Існує неформальний зв'язок між теоремою 12 та граничною теоремою для $K_n(j)$ з фіксованим j (теорема 8). Дійсно, припустимо, що $\mathbb{P}\{|\log W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x)$ при $x \to \infty$ для деякої константи $\alpha \in (0,1)$ та деякої функції ℓ, що повільно змінюються на ∞. Тоді звуження функціональної граничної теореми 8 до одновимірної граничної теореми, що отримується вибором $u = 1$, має вигляд

$$\left(\frac{(\ell(\log n))^j K_n(j)}{(\log n)^{\alpha j}}\right)_{j\geq 1} \stackrel{\mathrm{d}}{\longrightarrow} \left(\int_{[0,1]}(1-y)^{\alpha(j-1)}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\right)_{j\geq 1}, \quad n \to \infty,$$

де $\stackrel{\mathrm{d}}{\longrightarrow}$ позначає збіжність за розподілом. Зазначимо, що $(\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y/j))_{y\geq 0}$ має такий самий розподіл, як $(j^{-\alpha}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y))_{y\geq 0}$, і що для фіксованого значення $y > 0$ $\lim_{j\to\infty}(1-y/j)^{\alpha(j-1)} = \mathrm{e}^{-\alpha y}$. Отже,

$$\begin{aligned} j^\alpha &\int_{[0,1]}(1-y)^{\alpha(j-1)}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y) \\ &= j^\alpha \int_{[0,j]}(1-y/j)^{\alpha(j-1)}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y/j) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \int_{[0,j]}(1-y/j)^{\alpha(j-1)}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y). \end{aligned}$$

Переходячи до границі при $j \to \infty$, інтеграл, що стоїть у правій частині виразу, збігається за розподілом до випадкового інтеграла

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\alpha y}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y).$$

Отриманий результат узгоджується з теоремою 12, що описує граничну поведінку процесу у проміжних поколіннях.

Залишок розділу структурований так. У підрозділі 2.4 ми обговоримо Припущення A та B та їх наслідки. Підрозділ 2.5 містить допоміжні результати щодо загального гіллястого процесу, породженого глобально збуреним випадковим блуканням. Доведення теореми 12 наведено у підрозділі 2.6.

2.4 Наслідки припущень A та B

Спочатку покажемо, що Припущення A та B забезпечують двокомпонентний асимптотичний розклад V.

Лема 13. *Припустимо, що виконуються Припущення A та B. Тоді існує константа* $D > 0$ *така, що*

$$|V(t) - Ct^{\alpha}| \le Dt^{\beta}, \quad t \ge 0, \tag{2.5}$$

де $\beta = \rho$*, якщо* $m_0 < \infty$*;* $\beta = \max(\rho, \alpha - \theta)$*, якщо* $m_0 = \infty$ *та* $m_1 < \infty$*; константи* $C > 0$*,* $\alpha \in (0,1)$ *та* $\rho \in [0, \alpha)$ *визначені у формулюванні Припущення A; а константи* m_0*,* m_1 *та* $\theta \in (0, \alpha)$ *визначені у формулюванні Припущення B.*

Доведення. Припускаючи, що $\limsup_{t\to\infty}(1-G(t)/(1-F(t)) = m_0 \in [0,\infty)$, ми покажемо, що

$$\int_{[0,\,t]} (1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y) = O(1), \quad t \to \infty. \tag{2.6}$$

Дійсно, для $m_2 > m_0$ існує значення $t_0 > 0$ таке, що $1 - G(t) \le m_2(1 - F(t))$ для $t \ge t_0$. З огляду на це,

$$\int_{[0,\,t-t_0]} (1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y) \le m_2 \int_{[0,\,t]} (1 - F(t-y))\mathrm{d}U(y) = m_2.$$

Остання рівність є іншою формою запису рівняння відновлення для U. Дійсно, для $t \ge 0$

$$U(t) = \sum_{n\ge0} \mathbb{P}\{S_n \le t\} = \sum_{n\ge0} F^{*(n)}(t) = 1 + \sum_{n\ge1} F^{*(n)}(t) = 1 + F * U(t),$$

де $*$ позначає операцію згортки Лебега-Стілтьєса, зокрема, $F^{*(n)}$ позначає n-кратну згортку Лебега-Стілтьєса функції F з собою. Тому

$$1 = U(t) - F * U(t) = \int_{[0,\,t]} (1 - F(t-y))\mathrm{d}U(y).$$

Зазначимо між іншим, що остання рівність є еквівалентною такій:

$$\mathbb{P}\{\inf\{k \geq 0 : S_k > t\} < \infty\} = 1.$$

Використовуючи субадитивність U (див., наприклад, теорему 1.7 на с. 10 книги [61]), маємо

$$\int_{(t-t_0,\,t]} (1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y) \leq U(t) - U(t-t_0) \leq U(t_0). \tag{2.7}$$

Отже, співвідношення (2.6) виконується.

Рівність (2.2) є еквівалентною такій:

$$V(t) = U(t) - \int_{[0,\,t]} (1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y), \quad t \geq 0.$$

Тому з Припущення A випливає асимптотичний розклад $V(t) = Ct^{\alpha} + O(t^{\rho})$ при $t \to \infty$. Оскільки $V(0) = 0$, знайдеться константа $D > 0$ така, що нерівність $|V(t) - Ct^{\alpha}| \leq Dt^{\rho}$ виконується для всіх $t \geq 0$.

Припустимо тепер, що $m_0 = \infty$, і що $\limsup_{t\to\infty} t^{\theta}(1 - G(t)) = m_1 \in [0, \infty)$ для деякої константи $\theta \in (0, \alpha)$. Доведемо, що

$$\int_{[0,\,t]} (1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y) = O(t^{\alpha-\theta}), \quad t \to \infty. \tag{2.8}$$

Для заданих $m_3 > m_1$ та $C^* > C$ існує значення t_1 таке, що $U(t) \leq C^* t^{\alpha}$ та $1 - G(t) \leq m_3 t^{-\theta}$ для $t \geq t_1$. Ми вже знаємо (див. нерівність (2.7)), що субадитивність U забезпечує виконання співвідношення $\int_{(t-t_1,\,t]}(1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y) = O(1)$ при $t \to \infty$. Далі, інтегруючи частинами, отримуємо,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\,t-t_1]} (1 - G(t-y))\mathrm{d}U(y) \\
&\quad \leq m_3 \int_{[0,\,t-t_1]} (t-y)^{-\theta}\mathrm{d}U(y) = m_3 \int_{[t_1,\,t]} y^{-\theta}\mathrm{d}_y(U(t) - U(t-y)) = m_3 \\
&\times\left(t^{-\theta}(U(t)-U(0)) - t_1^{-\theta}(U(t)-U(t-t_1)) + \theta\int_{t_1}^{t}(U(t)-U(t-y))y^{-\theta-1}\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

Тут і надалі пишемо d_y замість d, коли є неоднозначність, тобто функція під диференціалом залежить від y та деяких інших змінних. Перший доданок — $O(t^{\alpha-\theta})$, а другий — $O(1)$. Для третього доданку, використовуючи субадитивність U, запишемо

$$\int_{t_1}^{t}(U(t)-U(t-y))y^{-\theta-1}\mathrm{d}y \le \int_{t_1}^{t} U(y)y^{-\theta-1}\mathrm{d}y \le C^* \int_{t_1}^{t} y^{\alpha-\theta-1}\mathrm{d}y = O(t^{\alpha-\theta}).$$

Таким чином, співвідношення (2.8) доведено. Повторюючи аргументацію з першої частини доведення, отримуємо (2.5) з $\beta = \max(\rho, \alpha-\theta)$. □

Нехай $(\mathcal{Z}_\alpha(u))_{u\ge 0}$ — α-стійкий субординатор, визначений на початку підрозділу 2.3. Тепер обговоримо два набори достатніх умов, що гарантують виконання Припущення A. Ідея отримання першого з них була підказана рецензентом статті [13] (автора дисертації та її наукового керівника). Зауважимо, що характеристичною фунцією випадкової величини $\mathcal{Z}_\alpha(1)$ є

$$\Phi_\alpha(v) := \mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\mathcal{Z}_\alpha(1)} = \exp(-\Gamma(1-\alpha)|v|^\alpha(\cos(\pi\alpha/2)-\mathrm{i}\sin(\pi\alpha/2)\operatorname{sgn} v)),\ \ v\in\mathbb{R}.$$

Лема 14. *Припустимо, що існують константи $a_1, a_2 > 0$ та $r \in (\alpha, 1]$ такі, що для всіх $v\in\mathbb{R}$, що задовольняють $|v|\le a_1$, виконується нерівність*

$$|\mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v\xi} - \Phi_\alpha(v)| \le a_2|v|^r. \tag{2.9}$$

Тоді Припущення A виконується з $\rho = 0$, якщо $r > 2\alpha$, з $\rho = \delta$ для довільного значення $\delta > 0$, якщо $r = 2\alpha$, та з $\rho = \lambda(2\alpha - r)$ для довільного значення $\lambda > 1$, що задовольняє $\lambda(2\alpha-r) < \alpha$, якщо $r < 2\alpha$.

Доведення. Зауважимо спочатку, що для $t \ge 0$

$$\int_0^\infty \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cu)\le t\}\mathrm{d}u = Ct^\alpha. \tag{2.10}$$

Дійсно, використовуючи $\mathcal{Z}_\alpha(cu) \overset{\mathrm{d}}{=} (cu)^{1/\alpha}\mathcal{Z}_\alpha(1)$, маємо

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cu)\le t\}\mathrm{d}u &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{(cu)^{1/\alpha}\mathcal{Z}_\alpha(1)\le t\}\mathrm{d}u\\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{\frac{t^\alpha}{c(\mathcal{Z}_\alpha(1))^\alpha}\ge u\right\}\mathrm{d}u = \frac{1}{c}\mathbb{E}(\mathcal{Z}_\alpha(1))^{-\alpha}t^\alpha.\end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{E}e^{-s\mathcal{Z}_\alpha(1)} = e^{-\Gamma(1-\alpha)s^\alpha}$ для $s \geq 0$, то, використовуючи лему 27, наведену нижче, маємо

$$\mathbb{E}(\mathcal{Z}_\alpha(1))^{-\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-\Gamma(1-\alpha)s^\alpha} ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty e^{-\Gamma(1-\alpha)y} dy = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.$$

Об'єднавши дві останні формули, отримаємо (2.10).

Також зазначимо, що

$$0 \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cn) \leq t\} - \int_0^\infty \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cu) \leq t\} du \leq 1, \quad t \geq 0.$$

Отже, достатньо довести, що

$$\left| \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} - \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cn) \leq t\} \right| = O(t^\rho), \quad t \to \infty. \tag{2.11}$$

За твердженням 1 статті [63]

$$\sup_{x\geq 0} \left| \mathbb{P}\{S_n \leq n^{1/\alpha}x\} - \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(c) \leq x\} \right|$$
$$= \sup_{t\geq 0} \left| \mathbb{P}\{S_n \leq t\} - \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cn) \leq t\} \right| \leq Bn^{-\alpha^{-1}(r-\alpha)} \tag{2.12}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$ та константи $B > 0$, яка не залежить від n.

Випадок $r \in (2\alpha, 1)$ (у якому обов'язково $\alpha < 1/2$). Згідно з (2.12), співвідношення (2.11) виконується з $\rho = 0$.

Випадок $r \in (\alpha, 2\alpha)$, у якому $0 < \alpha^{-1}(r - \alpha) < 1$. Зафіксуємо будь-яке значення $\lambda > 1$, що задовольняє $\lambda(2\alpha - r) < \alpha$. Використовуючи (2.12), робимо висновок, що при $t \to \infty$

$$\left| \sum_{n=0}^{\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} - \sum_{n=0}^{\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor} \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cn) \leq t\} \right| \leq B \sum_{n=1}^{\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor} n^{-\alpha^{-1}(r-\alpha)} = O(t^{\lambda(2\alpha-r)}).$$

Ми стверджуємо, що при $t \to \infty$

$$\sum_{n\geq \lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor+1} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = o(1) \quad \text{та} \quad \sum_{n\geq \lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor+1} \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cn) \leq t\} = o(1). \tag{2.13}$$

Дійсно, згідно з нерівністю Маркова для кожного $u > 0$

$$\sum_{n\geq\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor+1}\mathbb{P}\{S_n\leq t\}\leq \mathrm{e}^{ut}\sum_{n\geq\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor+1}(\varphi(u))^n\leq\frac{\mathrm{e}^{ut+\log\varphi(u)t^{\lambda\alpha}}}{1-\varphi(u)},$$

де $\varphi(s):=\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi}$ для $s\geq 0$. Покладемо $u=1/t$. Тоді $(1-\varphi(1/t))^{-1}\sim (c\Gamma(1-\alpha))^{-1}t^{\alpha}$ при $t\to+\infty$. Оскільки $-t^{\lambda\alpha}\log\varphi(1/t)\sim c\Gamma(1-\alpha)t^{(\lambda-1)\alpha}$ при $t\to+\infty$, чисельник останньої центрованої формули суперекспоненційно швидко спадає до 0. Це доводить перше граничне співвідношення в (2.13). Аргументація для другого граничного співвідношення аналогічна.

Випадок $r=2\alpha<1$. У доведенні попереднього випадку виберемо будь-яке значення $\lambda>1$. Тоді

$$\Bigg|\sum_{n=0}^{\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor}\mathbb{P}\{S_n\leq t\}-\sum_{n=0}^{\lfloor t^{\lambda\alpha}\rfloor}\mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(cn)\leq t\}\Bigg|=O(\log t),\quad t\to\infty.$$

Також співвідношення (2.13) мають місце в цьому випадку. $\square$

Обговоримо можливі застосування леми 14. Припустимо, що $\xi\overset{\mathrm{d}}{=}\mathcal{Z}_\alpha(c)+\theta$ для невід'ємної випадкової величини θ, яка не залежить від $\mathcal{Z}_\alpha(c)$. Якщо $\mathbb{E}\theta<\infty$, то виконується нерівність (2.9) з $r=1$. Далі, якщо, скажімо $\alpha=3/4$, то виконується Припущення з $\rho=\lambda/2$ для будь-якого значення $\lambda\in(1,3/2)$. Якщо $\mathbb{P}\{\theta>t\}\sim\mathrm{const}\,t^{-\beta}$ при $t\to\infty$ для деякого $\beta\in(\alpha,1)$, то виконується нерівність (2.9) з $r=\beta$. Далі, якщо $\alpha=1/4$ та $\beta=3/4$, то виконується Припущення A з $\rho=0$.

Далі ми наводимо інші достатні умови, що гарантують виконання Припущення A, для спеціального класу розподілів ξ. Нехай $\xi\overset{\mathrm{d}}{=}\mathcal{Z}_\alpha(c)X^{1/\alpha}$, де X — додатна випадкова величина з середнім один, що не залежить від $\mathcal{Z}_\alpha(c)$ для деякого $c>0$.

Зауваження 15. *Це припущення еквівалентне тому, що стандартне випадкове блукання $(S_n)_{n\geq0}$ має такий самий розподіл, як і $(\mathcal{Z}_\alpha(c\hat{S}_n))_{n\geq0}$. Тут $\hat{S}_0:=0$, $\hat{S}_n:=X_1+\ldots+X_n$ для $n\in\mathbb{N}$, X_1, $X_2,\ldots$ – незалежні копії X, а $(\hat{S}_n)_{n\geq0}$ не залежить від $(\mathcal{Z}_\alpha(u))_{u\geq0}$.*

Доведення. Внаслідок того, що $\mathcal{Z}_\alpha$ є однорідним процесом з незалежними приростами, що задовольняє $\mathcal{Z}_\alpha(0) = 0$, послідовність $(\mathcal{Z}_\alpha(c\hat{S}_n))_{n\geq 0}$ є стандартним випадковим блуканням. Розподіли двох стандартних випадкових блукань однакові тоді і тільки тоді, коли розподіли їхніх стрибків однакові. Залишається зазначити, що $\mathcal{Z}_\alpha(c)X^{1/\alpha} \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{Z}_\alpha(cX_1)$, у чому можна переконатися за допомогою обчислення перетворень Лапласа. $\square$

Нагадаємо позначення $U(t) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_n \leq t\}$ для $t \geq 0$ та покладемо $\hat{U}(t) := \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{\hat{S}_n \leq t\}$ для $t \geq 0$. Знайдемо зв'язок між U та $\hat{U}$. Для цього нам потрібна така властивість: для фіксованого $t > 0$ $\mathcal{Z}_\alpha(ct)$ має такий самий розподіл, як і $t^{1/\alpha}\mathcal{Z}_\alpha(c)$. Як наслідок,

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{S_n \leq t\} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{\mathcal{Z}_\alpha(c\hat{S}_n) \leq t\} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{\hat{S}_n^{1/\alpha}\mathcal{Z}_\alpha(c) \leq t\} \\ &= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\{\hat{S}_n \leq (\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha}t^\alpha\} = \mathbb{E}\hat{U}\left((\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha}t^\alpha\right), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Використання формули (2.14) дозволяє нам навести достатні умови, які гарантують виконання Припущення A.

Лема 16. *Припустимо, що $\mathbb{E}X^\vartheta < \infty$ для деякої константи $\vartheta \in (1, 2]$. Тоді*

$$U(t) = Ct^\alpha + O(t^{\alpha(2-\vartheta)}), \quad t \to \infty,$$

тобто виконується Припущення A з $\rho = \alpha(2-\vartheta)$. Тут, як і раніше, $C = (c\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha))^{-1}$.

Доведення. Використаємо нерівність Лордена для $\hat{U}$. Хоча в багатьох джерелах вона формулюється лише для неарифметичних розподілів, вона справджується і має ту саму форму як для неарифметичних, так і для арифметичних розподілів (див. роботу [18] для доведення).

Якщо $\mathbb{E}X^2 < \infty$, то згідно з нерівністю Лордена $\hat{U}(t) \leq t + \mathbb{E}X^2$ для всіх $t \geq 0$ (нагадаємо, що $\mathbb{E}X = 1$ за припущенням). Отже, використовуючи (2.14), отримуємо

$$U(t) = \mathbb{E}\hat{U}\left((\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha}t^\alpha\right) \leq \mathbb{E}(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha}t^\alpha + \mathbb{E}X^2.$$

Залишається зазначити, що за лемою 27

$$\mathbb{E}(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} = \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-c\Gamma(1-\alpha)s^\alpha} \mathrm{d}s = C. \tag{2.15}$$

Таким чином, $U(t) \leq Ct^\alpha + \mathbb{E}X^2 = Ct^\alpha + O(1)$.

Якщо $\mathbb{E}X^\vartheta < \infty$ для деякого $\vartheta \in (1,2)$, то $\hat{U}(t) = t + O(t^{2-\vartheta})$ при $t \to \infty$, див., наприклад, формулу (3.13) на стор. 433 статті [9]. Зокрема, для деякого значення $t_0 > 0$ та константи $C^* > 0$ $\hat{U}(t) \leq t + C^* t^{2-\vartheta}$ при $t \geq t_0$. Використання (2.14) дає

$$\begin{aligned} U(t) \leq \mathbb{E}\big((\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} t^\alpha + C^*(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha(2-\vartheta)} t^{\alpha(2-\vartheta)}\big) \mathbb{1}_{\{(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} t^\alpha \geq t_0\}} \\ + \mathbb{E}\hat{U}((\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} t^\alpha) \mathbb{1}_{\{(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} t^\alpha < t_0\}} \leq Ct^\alpha + C^* \mathbb{E}(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha(2-\vartheta)} t^{\alpha(2-\vartheta)} \\ + \hat{U}(t_0) = Ct^\alpha + O(t^{\alpha(2-\vartheta)}), \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Тепер наведемо оцінку $U(t)$ знизу. Покладемо $\hat{\nu}(t) := \inf\{k \geq 1 : \hat{S}_k > t\}$ для $t \geq 0$, тобто це перший такий індекс k, що $\hat{S}_k > t$. З цього випливає, що $\hat{S}_{\hat{\nu}(t)} > t$ м.н. (зазначимо, що $\hat{\nu}(t) < \infty$ м.н. внаслідок того, що $\lim_{k\to\infty} \hat{S}_k = +\infty$ м.н.) Переходячи в останній рівності до математичних сподівань, отримаємо $\mathbb{E}\hat{S}_{\hat{\nu}(t)} \geq t$ для $t \geq 0$. Далі, згідно тотожності Уолда, $\mathbb{E}\hat{S}_{\hat{\nu}(t)} = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}\hat{\nu}(t) = \hat{U}(t)$. Нарешті, використовуючи (2.14), маємо $U(t) \geq \mathbb{E}\big((\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} t^\alpha = Ct^\alpha$ для $t \geq 0$. Це завершує доведення. $\square$

Далі покажемо, що Припущення A та B виконуються з $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$, якщо, наприклад,

(а) $|\log W| \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{Z}_\alpha(c)$ для деякої константи $c > 0$, тобто розподіл $|\log W|$ є α-стійким;

(б) $\varphi(s) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi} = (1 + (c/\kappa)\Gamma(1-\alpha)s^\alpha)^{-\kappa}$ для $s \geq 0$ та деяких констант $\alpha \in (0,1)$ та $\kappa > 0$.

В обох випадках $|\log W|$ має такий самий розподіл, як $\mathcal{Z}_\alpha(c) X^{1/\alpha}$. При цьому у випадку (а) $\mathbb{P}\{X = 1\} = 1$, а у випадку (б) X не залежить від $\mathcal{Z}_\alpha(c)$ та має гамма-розподіл з параметрами κ та κ.

Доведення. Тільки пункт (б) потребує доведення. Гамма-розподіл з параметрами κ та κ є абсолютно неперервним з щільністю h, що задається так:

$$h(x)=\frac{\kappa^{\kappa}}{\Gamma(\kappa)}x^{\kappa-1}\mathrm{e}^{-\kappa x}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Покладемо $g(s):=\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\mathcal{Z}_{\alpha}(c)}=\mathrm{e}^{-c\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}}$ для $s\geq 0$. Згідно з лемою 28, наведеною нижче,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\mathcal{Z}_{\alpha}(c)X^{1/\alpha}}=\int_0^{\infty}g(sy^{1/\alpha})h(y)\mathrm{d}y\\&=\frac{\kappa^{\kappa}}{\Gamma(\kappa)}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-y(c\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}+\kappa)}y^{\kappa-1}\mathrm{d}y=\frac{\kappa^{\kappa}}{\Gamma(\kappa)(c\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}+\kappa)^{\kappa}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{\kappa-1}\mathrm{d}t\\&\qquad=(1+(c/\kappa)\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha})^{-\kappa}.\end{aligned}$$

□

Таким чином, у випадку (а) $\mathbb{E}X^2=1$, а у випадку (б)

$$\mathbb{E}X^2=\int_0^{\infty}x^2\frac{\kappa^{\kappa}}{\Gamma(\kappa)}x^{\kappa-1}\mathrm{e}^{-\kappa x}\mathrm{d}x=\frac{\kappa^{\kappa}}{\Gamma(\kappa)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\kappa+1}}{\kappa^{\kappa+1}}\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{\kappa}=\frac{\kappa+1}{\kappa}<\infty.$$

Тому, згідно з лемою 16, виконується Припущення A з $\rho=0$.

Тепер, тимчасово ігноруючи випадки (а) та (б), покажемо, що припущення B виконується з $m_0=0$, якщо $1-F(x)=\mathbb{P}\{|\log W|>x\}\sim cx^{-\alpha}$ при $x\to\infty$ та $\mathbb{E}|\log W|^{-\gamma}<\infty$ для деякої константи $\gamma>0$. Дійсно, згідно з нерівністю Маркова

$$\begin{aligned}&1-G(x)=\mathbb{P}\{|\log(1-W)|>x\}\\&\quad=\mathbb{P}\{|\log W|<|\log(1-\mathrm{e}^{-x})|\}=\mathbb{P}\{|\log W|^{-\gamma}>|\log(1-\mathrm{e}^{-x})|^{-\gamma}\}\\&\qquad\leq\mathbb{E}|\log W|^{-\gamma}\,|\log(1-\mathrm{e}^{-x})|^{\gamma}\ \sim\ \mathbb{E}|\log W|^{-\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma x}\end{aligned}$$

при $x\to\infty$. Отже, $\lim_{x\to\infty}(1-G(x))/(1-F(x))=0$, якщо $\mathbb{E}|\log W|^{-\gamma}<\infty$.

Нагадаємо, що у випадку (а) $|\log W|\overset{\mathrm{d}}{=}\mathcal{Z}_{\alpha}(c)$. Знайдемо асимптотику $1-F(x)=\mathbb{P}\{\mathcal{Z}_{\alpha}(c)>x\}$ при $x\to\infty$. Оскільки $\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\mathcal{Z}_{\alpha}(c)}=\mathrm{e}^{-c\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}}$ для $s\geq 0$, то $1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\mathcal{Z}_{\alpha}(c)}\sim c\Gamma(1-\alpha)s^{\alpha}$ при $s\to 0+$. Згідно з наслідком 8.1.7 книги [7] з останнього випливає $1-F(x)\sim cx^{-\alpha}$ при $x\to\infty$. Також ми вже знаємо з рівності (2.15), що $\mathbb{E}(\mathcal{Z}_\alpha(c))^{-\alpha} < \infty$. Отже, у випадку (а) Припущення B виконується з $m_0 = 0$. Хоча нам і не потрібна така точність, зазначимо між іншим, що у випадку (а), припускаючи додатково, що константи c та α задовольняють $c\Gamma(1-\alpha) = 1$, згідно з лемою 1 статті [36] виконується таке асимптотичне співвідношення

$$\mathbb{P}\{|\log(1-W)| > x\} \ \sim \ c_1 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha x}{2(1-\alpha)}} \exp(-c_2 |\log(1-\mathrm{e}^{-x})|^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}), \quad x \to \infty$$

для явно відомих додатних констант c_1 та c_2.

У випадку (б)

$$\varphi(s) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{-s|\log W|} = \frac{1}{(1 + \frac{c}{\kappa}\Gamma(1-\alpha)s^\alpha)^\kappa}, \quad s \geq 0.$$

Тому

$$1 - \varphi(s) \ \sim \ c\Gamma(1-\alpha)s^\alpha, \quad s \to 0+.$$

Згідно з наслідком 8.1.7 книги [7] з останнього випливає $1 - F(x) \sim cx^{-\alpha}$ при $x \to \infty$. Використовуючи лему 27, наведену нижче, робимо висновок, що $\mathbb{E}X^{-\gamma} < \infty$ для всіх $\gamma \in (0, \min(\kappa, 1))$. Таким чином, знову ж таки виконується Припущення B з $m_0 = 0$. Зазначимо, що можна використати тауберові теореми для перетворень Лапласа для знаходження більш точної асимптотики $1 - G(x) = \mathbb{P}\{|\log(1-W)| > x\}$ при $x \to \infty$. Дійсно, використовуючи явний вигляд φ, маємо

$$\varphi(s) \ \sim \ \left(\frac{\kappa}{c\Gamma(1-\alpha)}\right)^\kappa \cdot \frac{1}{s^{\alpha\kappa}}, \quad s \to \infty.$$

За теоремою 1.7.1′ книги [7] останнє граничне співвідношення є еквівалентним такому

$$\mathbb{P}\{-\log W \leq x\} \ \sim \ \frac{\kappa^\kappa x^{\alpha\kappa}}{(c\Gamma(1-\alpha))^\kappa \Gamma(1+\alpha\kappa)}, \quad x \to 0+.$$

Отже,

$$\begin{aligned} 1 - G(x) = \mathbb{P}\{|\log(1-W)| > x\} &= \mathbb{P}\{-\log W < -\log(1-\mathrm{e}^{-x})\} \\ &\sim \ \frac{\kappa^\kappa}{(c\Gamma(1-\alpha))^\kappa \Gamma(1+\alpha\kappa)} \mathrm{e}^{-\alpha\kappa x}, \quad x \to \infty. \end{aligned}$$

Це підтверджує наш висновок про те, що $\lim_{x\to\infty}(1-G(x))/(1-F(x)) = 0$, і що Припушення B виконується.

2.5 Асимптотика функцій V_j

Для доведення теореми 12 необхідно залучити низку допоміжних результатів, що стосуються загального гіллястого процесу, породженого глобально збуреним випадковим блуканням T. Таким чином, твердження цього підрозділу становлять окремий внесок у розвиток теорії ітерованих збурених випадкових блукань. Далі подамо означення вказаного загального гіллястого процесу у популяційній інтерпретації. У момент часу 0 з'являється один індивідуум, предок. Особа, народжена в момент часу $s \geq 0$, має потомство, моменти народження якого мають такий самий розподіл, як $(s + T_k)_{k \geq 1}$. Усі індивідууми діють незалежно один від одного. Особа знаходиться в j-му поколінні, якщо вона має рівно j предків.

Для $t \geq 0$ та $j \in \mathbb{N}$ позначимо через $N_j(t)$ кількість осіб j-го покоління з часом народження меншим або рівним t та покладемо $V_j(t) := \mathbb{E}N_j(t)$. Для N_j та V_j виконуються розклади (1.7) та (1.8), де $N_1(t) = N(t)$, $V_1(t) = V(t)$ та $N_{j-1}^{(k)}(t)$ – це кількість осіб j-го покоління, які є нащадками індивідуума першого покоління з часом народження T_k, $k \in \mathbb{N}$, і чий час народження припадає на $[T_k, T_k + t]$. Згідно з властивістю розгалуження $(N_{j-1}^{(1)}(t))_{t \geq 0}$, $(N_{j-1}^{(2)}(t))_{t \geq 0}, \ldots$ є незалежними копіями $(N_{j-1}(t))_{t \geq 0}$, які також не залежать від T.

Решта цього підрозділу присвячена отриманню точних та асимптотичних оцінок для V_j. Тому для подальшого буде зручно, якщо ми подамо формулу (1.8) ще раз у цьому підрозділі:

$$V_j(t) = (V_{j-1} * V)(t) = \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y), \quad j \geq 2,\ t \geq 0. \tag{2.16}$$

Таким чином, $V_j = V^{*(j)}$ — це j-кратна згортка Лебега-Стілтьєса функції V з собою.

Згідно з лемою 13 Припущення A та B забезпечують виконання нерівності (2.5) для V. Тепер доведемо, що подібна нерівність виконується і для V_n, $n \geq 2$.

Лема 17. *Припустимо, що виконується нерівність* (2.5). *Тоді для* $n \in \mathbb{N}$ *та* $t \geq 0$

$$|V_n(t) - \rho_n t^{\alpha n}| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} \frac{(\Gamma(\alpha+1))^i (\Gamma(\beta+1))^{n-i}}{\Gamma(\alpha i + \beta(n-i)+1)} (Ct^\alpha)^i (Dt^\beta)^{n-i} \tag{2.17}$$

із константами ρ_n*, заданими формулою* (2.4).

Доведення. Скористаємося математичною індукцією. Для $n = 1$, нерівність (2.17) зводиться до (2.5). Припустимо, що (2.17) виконується з $n-1$ замість n. Використовуючи (2.16) для першої рівності, маємо

$$\begin{aligned} |V_n(t) - \rho_n t^{\alpha n}| &= \left| \int_{[0,\,t]} V_{n-1}(t-y) \mathrm{d}V(y) - \rho_n t^{\alpha n} \right| \\ &\leq \int_{[0,\,t]} |V_{n-1}(t-y) - \rho_{n-1}(t-y)^{\alpha(n-1)}| \mathrm{d}V(y) \\ &\quad + \left| \rho_{n-1} \int_{[0,\,t]} (t-y)^{\alpha(n-1)} \mathrm{d}V(y) - \rho_n t^{\alpha n} \right|. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Використовуючи припущення індукції, а потім інтегруючи частинами, отримуємо

$$A_n(t) := \int_{[0,\,t]} |V_{n-1}(t-y) - \rho_{n-1}(t-y)^{\alpha(n-1)}| \mathrm{d}V(y)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \frac{(\Gamma(\alpha+1))^i (\Gamma(\beta+1))^{n-1-i}}{\Gamma(\alpha i + \beta(n-1-i)+1)} \\ &\qquad \times D^{n-1-i} C^i \int_{[0,\,t]} (t-y)^{\alpha i + \beta(n-1-i)} \mathrm{d}V(y) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} \frac{(\Gamma(\alpha+1))^i (\Gamma(\beta+1))^{n-1-i}}{\Gamma(\alpha i + \beta(n-1-i)+1)} \\ &\qquad \times D^{n-1-i} C^i \int_0^t V(t-y) \mathrm{d}(y^{\alpha i + \beta(n-1-i)}). \end{aligned}$$

З огляду на (2.5)

$$\int_0^t V(t-y) \mathrm{d}(y^{\alpha i + \beta(n-1-i)}) \leq \int_0^t \big(C(t-y)^\alpha + D(t-y)^\beta\big) \mathrm{d}(y^{\alpha i + \beta(n-1-i)})$$

$$= C\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha i+\beta(n-1-i)+1)}{\Gamma(\alpha(i+1)+\beta(n-1-i)+1)}t^{\alpha(i+1)+\beta(n-1-i)} + D\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha i+\beta(n-1-i)+1)}{\Gamma(\alpha i+\beta(n-i)+1)}t^{\alpha i+\beta(n-i)},$$

звідки

$$\begin{aligned}
&A_n(t) \\
&\le \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{i+1}(\Gamma(\beta+1))^{n-1-i}}{\Gamma(\alpha(i+1)+\beta(n-1-i)+1)}D^{n-1-i}C^{i+1}t^{\alpha(i+1)+\beta(n-1-i)} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-1}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{i}(\Gamma(\beta+1))^{n-i}}{\Gamma(\alpha i+\beta(n-i)+1)}D^{n-i}C^{i}t^{\alpha i+\beta(n-i)} \\
&= (n-1)\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{n-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(n-1)+\beta+1)}DC^{n-1}t^{\alpha(n-1)+\beta} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2}\left(\binom{n-1}{i-1}+\binom{n-1}{i}\right)\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{i}(\Gamma(\beta+1))^{n-i}}{\Gamma(\alpha i+\beta(n-i)+1)}D^{n-i}C^{i}t^{\alpha i+\beta(n-i)} \\
&\quad + \frac{(\Gamma(\beta+1))^{n}}{\Gamma(\beta n+1)}D^{n}t^{\beta n} = (n-1)\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{n-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(n-1)+\beta+1)}DC^{n-1}t^{\alpha(n-1)+\beta} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{i}(\Gamma(\beta+1))^{n-i}}{\Gamma(\alpha i+\beta(n-i)+1)}D^{n-i}C^{i}t^{\alpha i+\beta(n-i)}. \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

Щоб отримати першу рівність, ми замінили змінну i на $i-1$ під першою сумою, що входить до першої нерівності, виділили член, який відповідає $i=n-1$, а також виділили член другої суми, який відповідає $i=0$. Далі для другого доданка формули (2.18) пишемо

$$\begin{aligned}
&\left|\rho_{n-1}\int_{[0,\,t]}(t-y)^{\alpha(n-1)}\mathrm{d}V(y)-\rho_n t^{\alpha n}\right| \\
&= \rho_{n-1}\left|\int_{[0,\,t]}(t-y)^{\alpha(n-1)}\mathrm{d}V(y) - C\int_{[0,\,t]}(t-y)^{\alpha}\mathrm{d}(y^{\alpha(n-1)})\right| \\
&= \left|\rho_{n-1}\int_0^t\big(V(t-y)-C(t-y)^{\alpha}\big)\mathrm{d}(y^{\alpha(n-1)})\right| \le D\rho_{n-1}\int_0^t(t-y)^{\beta}\mathrm{d}(y^{\alpha(n-1)}) \\
&= D\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{n-1}}{\Gamma(\alpha(n-1)+1)}\frac{\Gamma(\alpha(n-1)+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(n-1)+\beta+1)}t^{\alpha(n-1)+\beta} \\
&= \frac{(\Gamma(\alpha+1))^{n-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(n-1)+\beta+1)}DC^{n-1}t^{\alpha(n-1)+\beta},
\end{aligned}$$

використавши інтегрування частинами для другої рівності та (2.5) для першої нерівності. Сума останнього виразу та першого члена правої частини (2.19) дорівнює $n\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{n-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(n-1)+\beta+1)}DC^{n-1}t^{\alpha(n-1)+\beta}$, тобто члену суми в (2.17), що відповідає $i = n-1$. Доведення леми 17 завершено. $\square$

Також нам знадобиться така технічна оцінка.

Лема 18. *Нехай константи α, β, C та D є такими, як у формулі* (2.5). *Для $t \geq 0$ та додатного цілого числа j, що задовольняє умову*

$$2D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta} \leq C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}, \tag{2.20}$$

справедлива нерівність

$$\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^i(\Gamma(\beta+1))^{j-i}}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i)+1)}(Ct^\alpha)^i(Dt^\beta)^{j-i}$$
$$\leq 2DC^{j-1}j\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}t^{\alpha(j-1)+\beta}.$$

Доведення. Запишемо, відокремивши перший доданок суми,

$$\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^i(\Gamma(\beta+1))^{j-i}}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i)+1)}(Ct^\alpha)^i(Dt^\beta)^{j-i}$$
$$= DC^{j-1}j\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}t^{\alpha(j-1)+\beta}$$
$$+\sum_{i=0}^{j-2}\binom{j}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^i(\Gamma(\beta+1))^{j-i}}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i)+1)}(Ct^\alpha)^i(Dt^\beta)^{j-i}.$$

За умови, що t та j задовольняють (2.20), покажемо, що другий доданок у правій частині не більший, ніж перший. Дійсно, використовуючи нерівність

$$\binom{j}{i} \leq j^{j-i} \tag{2.21}$$

та (2.48), робимо висновок

$$\frac{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}{DC^{j-1}j(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)t^{\alpha(j-1)+\beta}}$$

$$\times \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \frac{(\Gamma(\alpha+1))^i (\Gamma(\beta+1))^{j-i}}{\Gamma(\alpha i + \beta(j-i)+1)} (Ct^\alpha)^i (Dt^\beta)^{j-i}$$

$$\le \frac{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}}{D\Gamma(\beta+1)j} \sum_{i=0}^{j-2} \left(\frac{D\Gamma(\beta+1)j}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}} \right)^{j-i} \frac{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}{\Gamma(\alpha i + \beta(j-i)+1)}$$

$$\le \frac{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}}{D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta}}$$

$$\times \sum_{i=0}^{j-2} \left(\frac{D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta}}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}} \right)^{j-i}$$

$$\le \frac{D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta}}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}}$$

$$\times \left(1 - \frac{D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta}}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}} \right)^{-1} \le 1.$$

Передостання нерівність отримується за допомогою оцінки $\sum_{i=0}^{j-2}(\ldots)^{j-i} \le \sum_{i\ge 2}(\ldots)^i$. Функція $x \mapsto x(1-x)^{-1}$ є зростаючою на $[0,1)$ та дорівнює 1 при $x = 1/2$. Цей факт у поєднанні з (2.20) дає останню нерівність, оскільки із (2.20) випливає

$$0 < \frac{D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta}}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}} \le \frac{1}{2}.$$

□

Тепер ми готові надати спрощення формули (2.17) для степенів згортки n та аргументів t, що задовольняють (2.20) з $j = n$.

Наслідок 19. *Припустимо, що виконується* (2.5)*. Тоді для $t \ge 0$ і натурального числа j, що задовольняють* (2.20)*,*

$$|V_j(t) - \rho_j t^{\alpha j}| \le 2DC^{j-1} j \frac{(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)} t^{\alpha(j-1)+\beta} \tag{2.22}$$

та

$$V_j(t) \le 5\rho_j t^{\alpha j}, \quad t \ge 0. \tag{2.23}$$

Доведення. Нерівність (2.22) є безпосереднім наслідком лем 17 та 18. Одна складова нерівності (2.22) має вигляд

$$V_j(t) \le \rho_j t^{\alpha j} + 2DC^{j-1} j \frac{(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)} t^{\alpha(j-1)+\beta}.$$

Щоб довести (2.23), оцінимо відношення доданків у правій частині останньої нерівності

$$\frac{2DC^{j-1}j(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)t^{\alpha(j-1)+\beta}}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)\rho_j t^{\alpha j}}$$
$$= \frac{2Dj\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha j+1)}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}$$
$$\le \frac{2Dj\Gamma(\beta+1)}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}}\cdot(\alpha j+1)^{\alpha-\beta} \le \frac{2(\alpha j+1)^{\alpha-\beta}}{(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta}}$$
$$\le 2\left(1+\frac{\alpha-\beta}{\alpha(j-1)+\beta+1}\right)^{\alpha} \le 4.$$

Тут перша нерівність випливає з леми 29, друга буквально повторює (2.20), а остання є наслідком $\frac{\alpha-\beta}{\alpha(j-1)+\beta+1} < 1$, що, у свою чергу, забезпечується $\alpha \in (0,1)$ та $\beta \ge 0$. □

Наслідок 20. *Припустимо, що виконується* (2.5). *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{y\ge t}\left|\frac{V_j(y)}{\rho_j y^{\alpha j}} - 1\right| = 0, \tag{2.24}$$

де $j = j(t)$ *задовольняє* $j(t) = o(t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}})$ *при* $t\to\infty$. *Зокрема,*

$$V_j(t) \ \sim \ \rho_j t^{\alpha j}, \quad t\to\infty. \tag{2.25}$$

Доведення. Якщо $j(t) = o(t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}})$ при $t\to\infty$, то (2.20) виконується для великих j і t, та

$$\sup_{y\ge t}\frac{DC^{j-1}j\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}y^{\alpha(j-1)+\beta}}{\rho_j y^{\alpha j}} \le \frac{DC^{j-1}j\frac{(\Gamma(\alpha+1))^{j-1}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha(j-1)+\beta+1)}}{\rho_j t^{\alpha-\beta}}$$
$$\sim \ \frac{D\Gamma(\beta+1)\alpha^{\alpha-\beta}j^{\alpha-\beta+1}}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}} \ \to \ 0$$

при $t\to\infty$. Тут використано стандартне асимптотичне співвідношення, що випливає зі стірлінгової асимптотики для гамма-функції,

$$\Gamma(x+a)/\Gamma(x) \sim x^a, \quad x\to\infty \tag{2.26}$$

для фіксованого $a>0$, де $x = 1+\alpha j-(\alpha-\beta)$ та $a = \alpha-\beta$. Таким чином, твердження наслідку випливає з (2.22). □

2.6 Доведення теореми 12

Почнемо зі встановлення кількох допоміжних результатів, які будуть використані в доведенні теореми 12.

Нагадаємо, що функція $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ називається *безпосередньо інтегровною за Ріманом* (dRi) на $[0, \infty)$, якщо $\overline{\sigma}(h) < \infty$ для кожного $h > 0$ та $\lim_{h \to 0+}(\overline{\sigma}(h) - \underline{\sigma}(h)) = 0$, де

$$\overline{\sigma}(h) := h \sum_{n \geq 1} \sup_{(n-1)h \leq y < nh} f(y) \quad \text{та} \quad \underline{\sigma}(h) := h \sum_{n \geq 1} \inf_{(n-1)h \leq y < nh} f(y).$$

Функція $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ називається dRi на $\mathbb{R}$, якщо виконуються ті самі дві умови, але сумування у визначенні інтегральних сум йде по $n \in \mathbb{Z}$ замість $n \geq 1$.

Наступний результат випливає з доведення леми 4.5 статті [50].

Лема 21. *Нехай функція* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *— dRi на* $[0, \infty)$*, а* j *— додатне ціле число, що можливо залежить від* t *та можливо прямує до* ∞ *разом з* t*. Тоді*

$$\int_{[0,\, t]} f(t - y) \mathrm{d}V_j(y) = O\left(V_{j-1}(t)\right), \quad t \to \infty.$$

Далі наведемо O-оцінку для згортки Лебега-Стілтьєса показникової функції та V_j.

Лема 22. *Припустимо, що виконується умова* (2.5)*, та що* $j = j(t) = o(t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}})$ *при* $t \to \infty$*. Тоді*

$$\int_{(t,\, \infty)} \mathrm{e}^{t-y} \mathrm{d}V_j(y) = O\left(V_{j-1}(t)\right), \quad t \to \infty.$$

Доведення. Нехай $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ — dRi функція на $\mathbb{R}$, що задовольняє $h(t) = 0$ для $t > 0$. Спочатку пишемо, як у доведенні леми 4.6 статті [50]: для $t \geq 0$

$$\int_{(t,\, \infty)} h(t - y) \mathrm{d}V_j(y) = \int_{[0,\, t]} h_1(t - y) \mathrm{d}V_{j-1}(y) + \int_{(t,\, \infty)} h_2(t - y) \mathrm{d}V_{j-1}(y),$$

де $h_1(t)=\int_{(t,\infty)}h(t-y)\mathrm{d}V(y)$ та $h_2(t)=\int_{[0,\infty)}h(t-y)\mathrm{d}V(y)$ для $t\in\mathbb{R}$. За лемою A.1 статті [50] $h_1(t)\le b$ для деякої константи $b>0$ та всіх $t\ge 0$, звідки

$$\int_{[0,t]}h_1(t-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y)=O\left(V_{j-1}(t)\right),\quad t\to\infty.$$

Тепер покладемо $h(t)=\mathrm{e}^t\,\mathbb{1}_{(-\infty,0]}(t)$ та підкреслимо, що всі формули, наведені в попередній частині цього доведення, мають місце для цієї функції h. Зауважимо, що для $t\le 0$

$$\begin{aligned}h_2(t)&=\mathrm{e}^t\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}V(y)=\mathrm{e}^t\int_{[0,\infty)}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\Big(\sum_{k\ge1}\mathbb{P}\{T_k\le y\}\Big)\\&=\mathrm{e}^t\sum_{k\ge1}\mathbb{E}\mathrm{e}^{-T_k}=\mathrm{e}^t\sum_{k\ge1}\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\xi_1-\ldots-\xi_{k-1}-\eta_k}=\mathrm{e}^t\sum_{k\ge1}\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\eta}\left(\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\xi}\right)^{k-1}=\kappa\mathrm{e}^t,\end{aligned}$$

де $\kappa:=\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\eta}(1-\mathbb{E}\mathrm{e}^{-\xi})^{-1}$. Інтегрування частинами дає

$$\begin{aligned}&\int_{(t,\infty)}h_2(t-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y)\\&\quad=\kappa\int_{(t,\infty)}\mathrm{e}^{t-y}\mathrm{d}V_{j-1}(y)=-\kappa V_{j-1}(t)+\kappa\int_t^\infty\mathrm{e}^{t-y}V_{j-1}(y)\mathrm{d}y=:\kappa C_j(t)\end{aligned}$$

для $t\ge 0$. Згідно з наслідком 20, нерівність (2.5) разом з нашим вибором $j=j(t)$ забезпечує (2.24). З огляду на (2.24) для заданого $\varepsilon>0$ та достатньо великих t отримуємо

$$0\le C_j(t)\le -V_{j-1}(t)+(1+\varepsilon)\rho_{j-1}\int_t^\infty\mathrm{e}^{t-y}y^{\alpha(j-1)}\mathrm{d}y.$$

До останнього інтегралу застосуємо інтегрування частинами $\lfloor\alpha(j-1)\rfloor+1$ разів:

$$\begin{aligned}&\int_t^\infty\mathrm{e}^{t-y}y^{\alpha(j-1)}\mathrm{d}y=t^{\alpha(j-1)}+\alpha(j-1)\int_t^\infty\mathrm{e}^{t-y}y^{\alpha(j-1)-1}\mathrm{d}y\\&=t^{\alpha(j-1)}+\alpha(j-1)t^{\alpha(j-1)-1}+\ldots+\prod_{k=0}^{\lfloor\alpha(j-1)\rfloor}(\alpha(j-1)-k)\cdot\int_t^\infty\mathrm{e}^{t-y}y^{\{\alpha(j-1)\}-1}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

де $\{x\}$ позначає дробову частину $x\in\mathbb{R}$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$C_j(t) \le -V_{j-1}(t) + (1+\varepsilon)(C\Gamma(\alpha+1))^{j-1}$$
$$\times\Bigg(\sum_{k=0}^{\lfloor\alpha(j-1)\rfloor}\frac{t^{\alpha(j-1)-k}}{\Gamma(\alpha(j-1)+1-k)} + \frac{1}{\Gamma(\{\alpha(j-1)\})}\int_t^\infty \mathrm{e}^{t-y}y^{\{\alpha(j-1)\}-1}\mathrm{d}y\Bigg).$$

Вираз у дужках асимптотично еквівалентний $t^{\alpha(j-1)}/\Gamma(\alpha(j-1)+1)$, якщо $j(t) = o(t)$ при $t\to\infty$. Отже, згадуючи, що згідно з (2.25) (що виконується згідно з наслідком 20) маємо $V_{j-1}(t) \sim \rho_{j-1}t^{\alpha(j-1)}$ при $t\to\infty$, робимо висновок, що $\limsup_{t\to\infty}(C_j(t)/\ V_{j-1}(t)) \le \varepsilon$. Тому $C_j(t) = o(V_{j-1}(t))$ при $t\to\infty$ внаслідок довільності ε. $\square$

Наведений нижче результат буде використаний у доведенні теореми 24, також сформульованої нижче.

Лема 23. *Припустимо, що виконується умова* (2.5), $j = j(t)\to\infty$ *та* $j(t) = o(t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}})$ *при* $t\to\infty$. *Тоді*

$$\lim_{s\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\frac{j^\alpha}{\rho_{j-1}t^{\alpha j}}\int_{(st/j,\,t]}y^\alpha\mathrm{d}\big(-V_{j-1}(t-y)\big) = 0.$$

Доведення. Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\frac{j^\alpha}{\rho_{j-1}t^{\alpha j}}\int_{(st/j,\,t]}y^\alpha\mathrm{d}\big(-V_{j-1}(t-y)\big) = \frac{s^\alpha V_{j-1}(t(1-s/j))}{\rho_{j-1}t^{\alpha(j-1)}}$$
$$+\frac{\alpha j^\alpha}{\rho_{j-1}t^{\alpha j}}\int_{st/j}^t V_{j-1}(t-y)y^{\alpha-1}\mathrm{d}y.$$

З огляду на співвідношення (2.24), що виконується згідно з наслідком 20,

$$\frac{s^\alpha V_{j-1}(t(1-s/j))}{\rho_{j-1}t^{\alpha(j-1)}} \ \sim\ s^\alpha(1-s/j)^{\alpha(j-1)}\ \to\ s^\alpha\mathrm{e}^{-\alpha s},\quad t\to\infty.$$

Права частина збігається до 0 при $s\to\infty$. Далі за допомогою (2.17) ми робимо висновок, що

$$\frac{j^\alpha}{\rho_{j-1}t^{\alpha j}}\int_{st/j}^{t}V_{j-1}(t-y)y^{\alpha-1}\mathrm{d}y \le \frac{j^\alpha}{\rho_{j-1}t^{\alpha j}}\Bigg(\int_{st/j}^{t}\rho_{j-1}(t-y)^{\alpha(j-1)}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y$$
$$+\int_{st/j}^{t}\sum_{i=0}^{j-2}\binom{j-1}{i}\frac{(\Gamma(\alpha+1))^i(\Gamma(\beta+1))^{j-i-1}}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i-1)+1)}$$
$$\times\,(C(t-y)^\alpha)^i(D(t-y)^\beta)^{j-i-1}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y\Bigg). \quad (2.27)$$

Скориставшись заміною змінних, отримуємо для першого доданка, що при $t\to\infty$

$$\frac{j^\alpha}{t^{\alpha j}}\int_{st/j}^{t}(t-y)^{\alpha(j-1)}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y=\int_{s}^{j}(1-y/j)^{\alpha(j-1)}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y \;\to\; \int_{s}^{\infty}\mathrm{e}^{-\alpha y}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y.$$

При цьому виконання граничного співвідношення забезпечується теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Права частина збігається до 0 при $s\to\infty$. Використовуючи нерівність $y^{\alpha-1}\le(st/j)^{\alpha-1}$ для $y\in[st/j,t]$, робимо висновок, що другий доданок в (2.27) не перевищує

$$\frac{j^\alpha}{\rho_{j-1}t^{\alpha j}}\left(\frac{st}{j}\right)^{\alpha-1}\sum_{i=0}^{j-2}\binom{j-1}{i}\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^i(D\Gamma(\beta+1))^{j-i-1}}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i-1)+1)}$$
$$\times\frac{(t-st/j)^{\alpha i+\beta(j-i-1)+1}}{\alpha i+\beta(j-i-1)+1}$$
$$=s^{\alpha-1}j\sum_{i=0}^{j-2}\binom{j-1}{i}\frac{\Gamma(\alpha(j-1)+1)}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i-1)+1)}\left(\frac{D\Gamma(\beta+1)t^\beta}{C\Gamma(\alpha+1)t^\alpha}\right)^{j-i-1}$$
$$\times\frac{(1-s/j)^{\alpha i+\beta(j-i-1)+1}}{\alpha i+\beta(j-i-1)+1}$$
$$\le\frac{s^{\alpha-1}}{\beta}\sum_{i=0}^{j-2}\binom{j-1}{i}\frac{\Gamma(\alpha(j-1)+1)}{\Gamma(\alpha i+\beta(j-i-1)+1)}\left(\frac{D\Gamma(\beta+1)t^\beta}{C\Gamma(\alpha+1)t^\alpha}\right)^{j-i-1}$$
$$\le\frac{s^{\alpha-1}}{\beta}\sum_{i=0}^{j-2}\left((j-1)(\alpha(j-1)+1)^{\alpha-\beta}\frac{D\Gamma(\beta+1)}{C\Gamma(\alpha+1)t^{\alpha-\beta}}\right)^{j-i-1}$$

$$\leq \frac{s^{\alpha-1}}{\beta}\frac{D\Gamma(\beta+1)}{C\Gamma(\alpha+1)}(j-1)\Big(\frac{\alpha(j-1)+1}{t}\Big)^{\alpha-\beta}$$
$$\times\left(1-\frac{D\Gamma(\beta+1)}{C\Gamma(\alpha+1)}(j-1)\Big(\frac{\alpha(j-1)+1}{t}\Big)^{\alpha-\beta}\right)^{-1} \to 0, \quad t\to\infty.$$

Ми скористалися нерівностями $0 < (1-s/j)^{\alpha i+\beta(j-i-1)+1} \leq 1$ та $\frac{1}{\alpha i+\beta(j-i-1)+1} \leq \frac{1}{\beta j}$ для отримання першої нерівності у останній центрованій формулі, формулою (2.21) та лемою 29 для отримання другої. Наше припущення $j(t) = o(t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}})$ при $t\to\infty$ тягне за собою $\lim_{t\to\infty}(j(t)-1)((\alpha(j(t)-1)+1)/t)^{\alpha-\beta} = 0$, тим самим обґрунтовуючи граничне співвідношення. □

Значна частина доведення теореми 12 охоплюється теоремами 24 та 26, наведеними далі.

Теорема 24. *Припустимо, що виконується* (2.5)*, $j = j(t) \to \infty$ та $j(t) = o(t^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}})$ при $t\to\infty$. Тоді*

$$\left(\frac{c(j(t))^{\alpha}}{\rho_{\lfloor j(t)u\rfloor-1}t^{\alpha\lfloor j(t)u\rfloor}}\sum_{r\geq 1}V_{\lfloor j(t)u\rfloor-1}(t-T_r)\,\mathbb{1}_{\{T_r\leq t\}}\right)_{u>0}$$
$$\overset{\text{f.d.d.}}{\longrightarrow}\left(\int_{[0,\,\infty)}\mathrm{e}^{-\alpha uy}\mathrm{d}\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0}, \quad t\to\infty$$

з константами ρ_n, заданими формулою (2.4)*. Тут $\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}$ — обернений α-стійкий субординатор.*

Доведення теореми 24 використовує допоміжний технічний результат, який є незначним переформулюванням леми А.5 статті [38]. Нехай $\mathcal{D}([0,\infty))$ позначає простір Скорохода, визначений в кінці підрозділу 1.1.

Лема 25. *Для кожного $k\in\mathbb{N}$ нехай $y_k : [0,\infty)\to\mathbb{R}$ — неперервна справа обмежена та неспадна функція. Припустимо, що $\lim_{k\to\infty}x_k = x$ на $\mathcal{D}([0,\infty))$, та що для кожного $t\geq 0$ $\lim_{k\to\infty}y_k(t) = y(t)$, де $y:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ — обмежена неперервна функція. Тоді для всіх $a,b\geq 0$, $a<b$*

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[a,\,b]}x_k(t)\mathrm{d}y_k(t) = \int_{[a,\,b]}x(t)\mathrm{d}y(t).$$

Доведемо теорему 24.

Доведення. Для спрощення позначень ми пишемо j замість $j(t)$. Згідно з прийомом Крамера—Вольда та рівністю

$$\int_{[0,\,\infty)} \mathrm{e}^{-\alpha u y}\mathrm{d}\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y) = \alpha u \int_0^\infty \mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\mathrm{e}^{-\alpha u y}\mathrm{d}y, \quad u>0,$$

отриманою за допомогою інтегрування частинами, достатньо показати, що для будь-якого $\ell \in \mathbb{N}$, будь-яких додатних $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ та будь-яких $0 < u_1 < \ldots < u_\ell$ при $t \to \infty$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \frac{cj^\alpha \sum_{r\geq 1} V_{\lfloor ju_i \rfloor -1}(t-T_r)\,\mathbb{1}_{\{T_r\leq t\}}}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha\lfloor ju_i\rfloor}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \alpha u_i \int_0^\infty \mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}\mathrm{d}y,$$

де, як і раніше, $\xrightarrow{\mathrm{d}}$ позначає збіжність за розподілом. Запишемо для будь-якого значення $s>0$ та достатньо великих t

$$\begin{aligned}
\frac{cj^\alpha \sum_{r\geq 1} V_{\lfloor ju_i \rfloor -1}(t-T_r)\,\mathbb{1}_{\{T_r\leq t\}}}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha\lfloor ju_i\rfloor}} &= \frac{cj^\alpha \int_{[0,\,t]} V_{\lfloor ju_i\rfloor -1}(t-y)\mathrm{d}N(y)}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha\lfloor ju_i\rfloor}} \\
&= \frac{cj^\alpha \int_{[0,\,t]} N(y)\mathrm{d}_y(-V_{\lfloor ju_i\rfloor -1}(t-y))}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha\lfloor ju_i\rfloor}} \\
= \frac{1}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha(\lfloor ju_i\rfloor-1)}} \int_{[0,\,s]} &\frac{cN(yt/j)}{(t/j)^\alpha}\mathrm{d}_y(-V_{\lfloor ju_i\rfloor -1}(t(1-y/j))) \\
&+ \frac{cj^\alpha}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha\lfloor ju_i\rfloor}} \int_{(st/j,\,t]} N(y)\mathrm{d}_y(-V_{\lfloor ju_i\rfloor -1}(t-y)).
\end{aligned}$$

Використовуючи (2.24), отримуємо для кожного фіксованого $y>0$ при $t \to \infty$

$$\begin{aligned}
V_{\lfloor ju_i\rfloor -1}\left(t\left(1-\frac{y}{j}\right)\right) \;&\sim\; \rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha(\lfloor ju_i\rfloor -1)} \left(1-\frac{y}{j}\right)^{\alpha(\lfloor ju_i\rfloor -1)} \\
&\sim\; \rho_{\lfloor ju_i\rfloor -1} t^{\alpha(\lfloor ju_i\rfloor -1)}\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

За єдиного припущення $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim ct^{-\alpha}$ при $t\to\infty$, застосування частини (B.4) теореми 3.2 статті [2] дає

$$\big(c(t/j)^{-\alpha}N(yt/j)\big)_{y\geq 0} \;\Rightarrow\; \left(\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\right)_{y\geq 0}, \quad t\to\infty$$

у J_1-топології на $\mathcal{D}([0,\infty))$. Тут ми використали той факт, що припущення, накладені на j, забезпечують, що $\lim_{t\to\infty}(t/j(t)) = \infty$. Нехай $(t_k)_{k\geq 1}$ — будь-яка послідовність додатних чисел, що задовольняє $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$. Згідно з теоремою Скорохода про зображення існують $\hat{\mathcal{Z}}_\alpha^{\leftarrow}$ — версія $\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}$ та $((\hat{N}_{t_k}(y))_{y\geq 0})_{k\geq 1}$ — версія $((c(t_k/j(t_k))^{-\alpha}N(yt_k/j(t_k)))_{y\geq 0})_{k\geq 1}$ такі, що для всіх $T>0$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{y\in[0,\,T]}|\hat{N}_{t_k}(y)-\hat{\mathcal{Z}}_\alpha^{\leftarrow}(y)|=0 \quad \text{м.н.}$$

З огляду на (2.28)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{V_{\lfloor j(t_k)u_i\rfloor-1}(t_k(1-y/j(t_k)))}{\rho_{\lfloor j(t_k)u_i\rfloor-1}t_k^{\alpha(\lfloor j(t_k)u_i\rfloor-1)}}=\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}.$$

Використовуючи лему 25 з $x_k=\hat{N}_{t_k}$, $x=\hat{\mathcal{Z}}_\alpha^{\leftarrow}$ та y_k та y, що є такими самими функціями як в лівій та правій частинах останньої формули відповідно, отримуємо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\rho_{\lfloor j(t_k)u_i\rfloor-1}t_k^{\alpha(\lfloor j(t_k)u_i\rfloor-1)}}\int_{[0,\,s]}\hat{N}_{t_k}(y)\mathrm{d}_y(-V_{\lfloor j(t_k)u_i\rfloor-1}(t_k(1-y/j(t_k))))$$
$$=\alpha u_i\int_0^s\hat{\mathcal{Z}}_\alpha^{\leftarrow}(y)\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}\mathrm{d}y \quad \text{м.н.}$$

Оскільки розбіжна послідовність $(t_k)_{k\geq 1}$ є довільною, то з цього випливає

$$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\frac{1}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor-1}t^{\alpha(\lfloor ju_i\rfloor-1)}}\int_{[0,\,s]}c(t/j)^{-\alpha}N(yt/j)\mathrm{d}_y(-V_{\lfloor ju_i\rfloor-1}(t(1-y/j)))$$
$$\xrightarrow{\mathrm{d}}\ \sum_{i=i}^{\ell}\lambda_i\alpha u_i\int_0^s\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}\mathrm{d}y,\quad t\to\infty.$$

З огляду на

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\alpha u_i\int_0^s\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i\alpha u_i\int_0^\infty\mathcal{Z}_\alpha^{\leftarrow}(y)\mathrm{e}^{-\alpha u_i y}\mathrm{d}y \quad \text{м.н.},$$

залишається довести, що для всіх $\varepsilon>0$

$$\lim_{s\to\infty}\limsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\frac{j^\alpha}{\rho_{\lfloor ju_i\rfloor-1}t^{\alpha\lfloor ju_i\rfloor}}\int_{(st/j,\,t]}N(y)\mathrm{d}_y(-V_{\lfloor ju_i\rfloor-1}(t-y))>\varepsilon\Big\}=0.$$

Зважаючи на те, що $\mathbb{E}N(y)=V(y)\leq 2Cy^\alpha$ для великих y, це граничне співвідношення забезпечується нерівністю Маркова та лемою 23. $\square$

Теорема 26. *Припустимо, що виконується* (2.5)*, та що* $t \mapsto j(t)$ *— функція, що набуває значень у* $\mathbb{N}$ *та задовольняє* $j(t) = o(t^{1/3})$ *та* $j(t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$*. Тоді*

$$\frac{(j(t))^{\alpha}}{\rho_{j(t)-1} t^{\alpha j(t)}} \left(N_{j(t)}(t) - \sum_{r \geq 1} V_{j(t)-1}(t - T_r)\, \mathbb{1}_{\{T_r \leq t\}} \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty.$$

Доведення. Хоча схема доведення аналогічна доведенню теореми 3.1 статті [50], технічні деталі місцями суттєво відрізняються.

Для $j \in \mathbb{N}$ та $t \geq 0$ покладемо $D_j(t) := \operatorname{Var} N_j(t)$ та

$$I_j(t) := \mathbb{E} \left(\sum_{r \geq 1} V_{j-1}(t - T_r)\, \mathbb{1}_{\{T_r \leq t\}} - V_j(t) \right)^2$$

з домовленістю, що $V_0(t) = 1$ для $t \geq 0$, і таким чином $I_1(t) = D_1(t)$. Скористаємося формулою: для $j \geq 2$ та $t \geq 0$

$$\begin{aligned} D_j(t) &= \mathbb{E} \left(\sum_{r \geq 1} (N_{j-1}^{(r)}(t - T_r) - V_{j-1}(t - T_r))\, \mathbb{1}_{\{T_r \leq t\}} \right)^2 \\ &+ \mathbb{E} \left(\sum_{r \geq 1} V_{j-1}(t - T_r)\, \mathbb{1}_{\{T_r \leq t\}} - V_j(t) \right)^2 = \int_{[0,\,t]} D_{j-1}(t - y) \mathrm{d}V(y) + I_j(t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Ітеруючи (2.29), отримаємо

$$\int_{[0,\,t]} D_{j-1}(t - y) \mathrm{d}V(y) = \sum_{k=1}^{j-1} \int_{[0,\,t]} I_k(t - y) \mathrm{d}V_{j-k}(y), \quad j \geq 2,\ t \geq 0. \tag{2.30}$$

Спочатку покажемо, що I_j обмежена зверху невід'ємною та неспадною функцією. Скористаємось нерівністю, отриманою при доведенні теореми 3.1 статті [50],

$$\begin{aligned} I_j(t) &\leq V_{j-1}(t) V_j(t) + 2 \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t - y) V_j(t - y) \mathrm{d}U(y) - (V_j(t))^2 \\ &\leq V_{j-1}(t) V_j(t) + 2 \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t - y) V_j(t - y) \mathrm{d}U(y). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Покладемо $\tilde{U}(x) := \sum_{i\geq 1}\mathbb{P}\{S_i \leq x\}$ для $x \in \mathbb{R}$ і зауважимо, що $U(x) = \tilde{U}(x) + 1$ для $x \geq 0$. З Припущення A та рівності $\tilde{U}(0) = 0$ випливає

$$\tilde{U}(x) \leq Cx^{\alpha} + C_1 x^{\rho}, \quad x \geq 0$$

для деякої константи $C_1 > 0$. Використовуючи інтегрування частинами та останню нерівність, маємо

$$\begin{aligned}\int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)V_j(t-y)\mathrm{d}U(y) &= V_{j-1}(t)V_j(t) \\ &+ \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)V_j(t-y)\mathrm{d}\tilde{U}(y) = V_{j-1}(t)V_j(t) \\ &+ \int_{[0,\,t]} \tilde{U}(t-y)\mathrm{d}(V_{j-1}(y)V_j(y)) \leq V_{j-1}(t)V_j(t) \\ + C\int_{[0,\,t]}(t-y)^{\alpha}\mathrm{d}(V_{j-1}(y)V_j(y)) &+ C_1\int_{[0,\,t]}(t-y)^{\rho}\mathrm{d}(V_{j-1}(y)V_j(y)).\end{aligned}$$

З огляду на це, знову інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned}I_j(t) &\leq V_{j-1}(t)V_j(t) + 2\int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)V_j(t-y)\mathrm{d}U(y) \\ &\leq 3V_{j-1}(t)V_j(t) + 2C\alpha\int_0^t V_{j-1}(y)V_j(y)(t-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y \\ &+ 2C_1\rho\int_0^t V_{j-1}(y)V_j(y)(t-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y =: h_j(t). \qquad (2.32)\end{aligned}$$

Функція h_j — це невід'ємна та неспадна функція, яку ми шукали. Поєднуючи (2.32) з (2.29) та (2.30), робимо висновок

$$\begin{aligned}D_{j-1}(t) &= \sum_{k=1}^{j-2}\int_0^t I_k(t-y)\mathrm{d}V_{j-k-1}(y) + I_{j-1}(t) \\ &\leq \sum_{k=1}^{j-2} h_k(t)V_{j-k-1}(t) + h_{j-1}(t), \quad j \geq 2,\ t \geq 0. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Далі ми отримуємо оцінку згори для h_j (і для D_j), яка справедлива для великих аргументів. Зафіксуємо $j \in \mathbb{N}$ та $s \geq 0$, що задовольняють

$$2D\Gamma(\beta+1)j(\alpha(j-1)+\beta+1)^{\alpha-\beta} \leq C\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha-\beta}, \qquad (2.34)$$

а також
$$2(\alpha(j-2)+1)^{2\alpha} \le C\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}, \tag{2.35}$$
$$3(2\alpha j+1)^{\alpha} \le 2C\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}, \tag{2.36}$$
$$C_1\Gamma(\rho)(2\alpha j+1)^{\alpha-\rho} \le \Gamma(\alpha+1)s^{\alpha-\rho} \tag{2.37}$$

та
$$j \ge 1/\alpha + 2. \tag{2.38}$$

Оскільки $j = j(s) = o(s^{1/2})$ при $s \to \infty$, ці нерівності виконуються при великих s.

Покладемо $r := 5^2$. З огляду на (2.34) та (2.23) робимо висновок, що для $1 \le k \le j$
$$V_{k-1}(s)V_k(s) \le r\rho_{k-1}\rho_k s^{\alpha(2k-1)}.$$

Підставимо цю нерівність у (2.32):
$$\begin{aligned} h_k(s) &\le 3r\rho_{k-1}\rho_k s^{\alpha(2k-1)} + 2C\alpha r\rho_{k-1}\rho_k \int_0^s s^{\alpha(2k-1)}(s-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y \\ &\quad + 2C_1\rho r\rho_{k-1}\rho_k \int_0^s s^{\alpha(2k-1)}(s-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ &= 3r\rho_{k-1}\rho_k s^{\alpha(2k-1)} + 2rC\alpha\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k} \\ &\quad + 2rC_1\rho\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\rho)\mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\rho)s^{2\alpha k-\alpha+\rho}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

де B – бета-функція Ейлера. Другий доданок праворуч має найвищий порядок. Розглянемо співвідношення першого та другого доданків у (2.39):
$$\begin{aligned} \frac{3r\rho_{k-1}\rho_k s^{\alpha(2k-1)}}{2rC\alpha\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}} &= \frac{3\Gamma(2\alpha k+1)}{2C\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha(2k-1)+1)s^{\alpha}} \\ &\le \frac{3(2\alpha k+1)^{\alpha}}{2C\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}} \le \frac{3(2\alpha j+1)^{\alpha}}{2C\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha}} \le 1, \end{aligned}$$

де перша нерівність обґрунтовується лемою 29, а остання нерівність — це (2.36). Співвідношення третього та другого доданків у (2.39) можна оцінити так:

$$\frac{2rC_1\rho\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\rho)s^{2\alpha k-\alpha+\rho}}{2rC\alpha\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}}$$
$$= \frac{C_1\Gamma(\rho)\Gamma(2\alpha k+1)}{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha-\rho}\Gamma(2\alpha k-\alpha+\rho+1)} \le \frac{C_1\Gamma(\rho)(2\alpha k+1)^{\alpha-\rho}}{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha-\rho}}$$
$$\le \frac{C_1\Gamma(\rho)(2\alpha j+1)^{\alpha-\rho}}{\Gamma(\alpha+1)s^{\alpha-\rho}} \le 1,$$

де перша нерівність випливає з леми 29, а остання нерівність забезпечується (2.37). Нерівність (2.39) у поєднанні з двома оцінками дозволяє зробити висновок, що для $1 \le k \le j$

$$h_k(s) \le 6rC\alpha\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}$$
$$=: C_2\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}.$$

Далі з (2.33) отримуємо

$$D_{j-1}(s) \le C_2\rho_{j-2}\rho_{j-1}\mathrm{B}(\alpha(2j-3)+1,\alpha)s^{2\alpha(j-1)}$$
$$+\sum_{k=1}^{j-2} C_2\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}V_{j-k-1}(s). \quad (2.40)$$

За допомогою (2.4) та (2.23) запишемо

$$\sum_{k=1}^{j-2}\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}V_{j-k-1}(s)$$
$$\le 5\sum_{k=1}^{j-2}\rho_{k-1}\rho_k \mathrm{B}(\alpha(2k-1)+1,\alpha)s^{2\alpha k}\rho_{j-k-1}s^{\alpha(j-k-1)}$$
$$= 5\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{j-2}\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{j+k-2}\Gamma(\alpha(2k-1)+1)}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\alpha(j-k-1)+1)\Gamma(2\alpha k+1)}$$
$$\times s^{\alpha(j+k-1)}$$
$$\le 5(2\alpha+1)\Gamma(\alpha)\sum_{k=1}^{j-2}\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{j+k-2}}{(\Gamma(\alpha(k-1)+1))^2\Gamma(\alpha(j-k-1)+1)}s^{\alpha(j+k-1)}.$$
$$(2.41)$$

Для обґрунтування останньої нерівності ми використовуємо той факт, що гамма-функція Γ зростає на $[2, \infty)$, звідки для $k \geq 1$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha k+1)} = \frac{\alpha k+1}{\Gamma(\alpha k+2)} \leq \frac{\alpha k+1}{\Gamma(\alpha(k-1)+2)}$$
$$= \frac{\alpha k+1}{(\alpha(k-1)+1)\Gamma(\alpha(k-1)+1)} \leq \frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)}$$

та

$$\frac{\Gamma(\alpha(2k-1)+1)}{\Gamma(2\alpha k+1)} = \frac{\Gamma(\alpha(2k-1)+2)}{\Gamma(2\alpha k+2)} \frac{2\alpha k+1}{\alpha(2k-1)+1}$$
$$\leq \frac{2\alpha k+1}{\alpha(2k-1)+1} \leq \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}.$$

Праву частину (2.41), без урахування мультиплікативної константи, можна оцінити згори так:

$$\frac{1}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2} \sum_{k=1}^{j-2} \frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{j+k-2}(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}{(\Gamma(\alpha(k-1)+1))^2\Gamma(\alpha(j-k-1)+1)} s^{\alpha(j+k-1)}$$
$$\leq \frac{\mathrm{const}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2} \sum_{k=1}^{j-2} (C\Gamma(\alpha+1))^{j+k-2}(\alpha(j-2)+1)^{2\alpha(j-k-1)} s^{\alpha(j+k-1)}. \tag{2.42}$$

Тут і далі const позначає константу, значення якої не є суттєвим і може бути різним у різних виразах. Остання нерівність є наслідком

$$\frac{\Gamma(\alpha(j-2)+1)}{\Gamma(\alpha(k-1)+1)} \leq (\alpha(j-2)+1)^{\alpha(j-k-1)},$$

що випливає з леми 29 та нерівності $\frac{1}{\Gamma(\alpha(j-k-1)+1)} \leq \frac{1}{\min_{z\in[1,2]}\Gamma(z)} < \infty$ для $1 \leq k \leq j-2$ (мінімум не може дорівнювати 0, оскільки $\Gamma(z)$ – це момент порядку $z-1$ експоненціально розподіленої випадкової величини із середнім один). Продовжуємо, обмежуючи згори праву частину (2.42) без мультиплікативної константи:

$$\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}s^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}\sum_{k=1}^{j-2}\left(\frac{(\alpha(j-2)+1)^{2\alpha}}{C\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}\right)^{j-k-1}$$

$$= \frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}s^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}\sum_{k=1}^{j-2}\left(\frac{(\alpha(j-2)+1)^{2\alpha}}{C\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}\right)^{k}$$

$$\le \frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}s^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}\sum_{k\ge1}\left(\frac{(\alpha(j-2)+1)^{2\alpha}}{C\Gamma(\alpha+1)s^\alpha}\right)^{k}$$

$$\le \frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}s^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}.$$

Тут остання нерівність забезпечується умовою (2.35). Поєднуючи це з (2.40), робимо висновок, що

$$D_{j-1}(s) \le C_2\rho_{j-2}\rho_{j-1}\mathrm{B}(\alpha(2j-3)+1,\alpha)s^{2\alpha(j-1)} + \frac{\mathrm{const}(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}s^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}.$$

Умова (2.38) тягне за собою $2j \ge 1/\alpha + 3$. Це разом з монотонністю гамма-функції на $[2,\infty)$ доводить

$$\frac{\Gamma(\alpha)(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}}{\Gamma^2(\alpha(j-2)+1)\rho_{j-2}\rho_{j-1}\mathrm{B}(\alpha(2j-3)+1,\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha(j-1)+1)\Gamma(\alpha(2j-2)+1)}{\Gamma(\alpha(j-2)+1)\Gamma(\alpha(2j-3)+1)} \ge 1$$

і,таким чином,

$$D_{j-1}(s) \le \mathrm{const}\,\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}s^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}. \tag{2.43}$$

З урахуванням (2.43) робимо висновок

$$\int_{[0,\,t]} D_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y) = \int_{[0,\,t-j]} D_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y) + \int_{(t-j,\,t]} D_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y)$$

$$\le \mathrm{const}\,\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}\int_{[0,\,t]}(t-y)^{2\alpha(j-1)}\mathrm{d}V(y) + \max_{s\in[0,\,j]} D_{j-1}(s)\,U(j). \tag{2.44}$$

Ми скористалися нерівністю $V(t)-V(t-j) \le U(j)$, див. формулу (40) статті [9] та її доведення. Інтегруючи частинами, а потім застосовуючи (2.5), ми оцінюємо останній інтеграл так:

$$\int_{[0,\,t]} (t-y)^{2\alpha(j-1)} \mathrm{d}V(y) \le 2\alpha(j-1) \int_0^t (Cy^\alpha + Dy^\beta)(t-y)^{2\alpha(j-1)-1}\mathrm{d}y$$
$$= 2\alpha(j-1)(C\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\alpha+1)t^{\alpha(2j-1)} + D\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\beta+1)t^{2\alpha(j-1)+\beta}$$
$$= O\left(j\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\alpha+1)t^{\alpha(2j-1)}\right), \quad t\to\infty.$$

Щоб обґрунтувати останню рівність, зауважимо, що при $j, t \to \infty$,

$$\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\alpha+1)t^{\alpha(2j-1)} \;\sim\; \mathrm{const}\,\frac{t^{\alpha(j-1)}}{j^{\alpha+1}},$$

$$\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\beta+1)t^{2\alpha(j-1)+\beta} \;\sim\; \mathrm{const}\,\frac{t^{2\alpha(j-1)+\beta}}{j^{\beta+1}}.$$

Отже, $\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\beta+1)t^{2\alpha(j-1)+\beta} = o(\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\alpha+1)t^{\alpha(2j-1)})$ внаслідок $j = j(t) = o(t^{1/3})$. Таким чином, перший доданок у правій частині (2.44) має порядок

$$\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2} j\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\alpha+1)t^{\alpha(2j-1)}.$$

Добуток цього виразу та квадрата нормалізації, що фігурує в теоремі, прямує до нуля за припущення $j = j(t) = o(t^{1/3})$ при $t \to \infty$:

$$\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3} j\mathrm{B}(2\alpha(j-1),\alpha+1)t^{\alpha(2j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}\frac{j^{2\alpha}}{\rho_{j-1}^2 t^{2\alpha j}}$$
$$= \frac{\Gamma(2\alpha(j-1))}{\Gamma(\alpha(2j-1)+1)}\frac{(\Gamma(\alpha(j-1)+1))^2}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}\frac{j^{2\alpha+1}}{Ct^\alpha} \;\sim\; \frac{\alpha^{2\alpha}}{C2^{\alpha+1}}\frac{j^{3\alpha}}{t^\alpha} \;\to\; 0, \quad t\to\infty.$$

Далі, використовуючи (2.43) і (2.23), маємо

$$\max_{s\in[0,\,j]} D_{j-1}(s)U(j) \le \left(D_{j-1}(j) + (V_{j-1}(j))^2\right)U(j)$$
$$\le \left(\mathrm{const}\,\frac{(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3} j^{2\alpha(j-1)}}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2} + r\rho_{j-1}^2 j^{2\alpha(j-1)}\right)U(j). \quad (2.45)$$

Припущення A гарантує те, що $U(j) \sim Cj^\alpha$ при $j\to\infty$. Тепер ми покажемо, що права частина (2.45), помножена на квадрат нормалізації, прямує до нуля, якщо $j = j(t) = o(t)$ та $j(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Почнемо з першого доданка:

$$\frac{j^{2\alpha j}(C\Gamma(\alpha+1))^{2j-3}}{\rho_{j-1}^2 t^{2\alpha j}(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}U(j) = \frac{1}{C\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{j}{t}\right)^{2\alpha j}$$
$$\times \frac{(\Gamma(\alpha(j-1)+1))^2}{(\Gamma(\alpha(j-2)+1))^2}U(j) \sim \frac{\alpha^{2\alpha}}{C\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{j}{t}\right)^{2\alpha j} j^{3\alpha} \ \to \ 0, \quad t \to \infty,$$

оскільки $(j/t)^{2\alpha j}$ сходиться до нуля швидше, ніж будь-який від'ємний степінь j. Що стосується другого члена в (2.45), міркуючи аналогічно, робимо висновок

$$\frac{j^{2\alpha j}}{t^{2\alpha j}}U(a_j) \ \sim \ \left(\frac{j}{t}\right)^{2\alpha j} Cj^{\alpha} \ \to \ 0, \quad t \to \infty.$$

Застосування нерівності Маркова завершує доведення теореми 26. □

Ми готові довести теорему 12.

Доведення теореми 12. Рівність (2.1) еквівалентна такій:

$$|\log P_k| = |\log W_1| + \ldots + |\log W_{k-1}| + |\log(1-W_k)|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже, $(|\log P_k|)_{k\geq 1}$ — це глобально збурене випадкове блукання, породжене випадковим вектором $(|\log W|, |\log(1-W)|)$, що в позначеннях підрозділу 2.2 означає, що $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$.

Скористаємося розкладом

$$K_n(\lfloor j_n u\rfloor) = \big(K_n(\lfloor j_n u\rfloor) - N_{\lfloor j_n u\rfloor}(\log n)\big)$$
$$+ \left(N_{\lfloor j_n u\rfloor}(\log n) - \sum_{r\geq 1} V_{\lfloor j_n u\rfloor - 1}(\log n - T_r)\, \mathbb{1}_{\{T_r \leq \log n\}}\right)$$
$$+ \sum_{r\geq 1} V_{\lfloor j_n u\rfloor - 1}(\log n - T_r)\, \mathbb{1}_{\{T_r \leq \log n\}} =: Y_1(n,u) + Y_2(n,u) + Y_3(n,u).$$

Достатньо показати, що при $n \to \infty$

$$\frac{j_n^{\alpha} Y_i(n,u)}{\rho_{\lfloor j_n u\rfloor - 1}(\log n)^{\alpha \lfloor j_n u\rfloor}} \ \xrightarrow{\mathbb{P}} \ 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.46}$$

де $\xrightarrow{\mathbb{P}}$ позначає збіжність за ймовірністю, та що

$$\left(\frac{c j_n^{\alpha} Y_3(n,u)}{\rho_{\lfloor j_n u\rfloor - 1}(\log n)^{\alpha \lfloor j_n u\rfloor}}\right)_{u>0} \xrightarrow{\text{f.d.d.}} \left(\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\alpha u y} \mathrm{d}\mathcal{Z}_{\alpha}^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0}.$$

Застосуємо теореми 24 та 26, а також леми 21 та 22. При цьому ми замінюємо t на $\log n$ та вибираємо будь-яку розбіжну додатну функцію $t \mapsto j(t)$, яка задовольняє $j(\log n) = j_n$ та $j(t) = o(t^{\min\left(\frac{1}{3}, \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta+1}\right)})$ при $t \to \infty$. Згідно з лемою 13, нерівність (2.5) є наслідком Припущеннь A та B. З огляду на це, співвідношення (2.46) з $i = 2$ випливає з теореми 26. Слабка збіжність скінченновимірних розподілів нормалізованого процесу Y_3 забезпечується теоремою 24. З огляду на нерівність Маркова, співвідношення (2.46) з $i = 1$ буде виконуватися, якщо ми можемо довести, що при фіксованому $u > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{j_n^\alpha \mathbb{E}|K_n(\lfloor j_n u \rfloor) - N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log n)|}{\rho_{\lfloor j_n u \rfloor -1}(\log n)^{\alpha \lfloor j_n u \rfloor}} = 0.$$

У розділі 6 статті [15], див. початок стор. 21, було показано, що

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|K_n(\lfloor j_n u \rfloor) - N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log n)| \\ &\qquad \le n \int_{(n,\,\infty)} x^{-1} \mathrm{d}(\mathbb{E}N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log x)) + \int_{[1,\,n]} \mathrm{e}^{-n/x} \mathrm{d}(\mathbb{E}N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log x)).\end{aligned}$$

Згідно з лемою 22, застосованою в конкретному випадку $(\xi, \eta) = (|\log W|, |\log(1-W)|)$, так що $V_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log x) = \mathbb{E}N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log x)$ для $x \ge 1$, ми отримуємо при $n \to \infty$

$$n \int_{(n,\infty)} x^{-1} \mathrm{d}(\mathbb{E}N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log x)) = \int_{(\log n,\infty)} e^{\log n - x} \mathrm{d}V_{\lfloor j_n u \rfloor}(x) = O\left(V_{\lfloor j_n u \rfloor -1}(\log n)\right)$$

для кожного фіксованого $u > 0$. Функція f, що задається так $f(x) = \exp(-\mathrm{e}^x)$ для $x \in \mathbb{R}$, є спадною та інтегровною за Лебегом на $[0, \infty)$. Отже, вона є dRi на $[0, \infty)$, див., наприклад, лему 6.2.1 (a) монографії [39]. За лемою 21 з таким чином визначеною функцією f маємо при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}&\int_{[1,\,n]} \mathrm{e}^{-n/x} \mathrm{d}(\mathbb{E}N_{\lfloor j_n u \rfloor}(\log x)) \\ &\qquad = \int_{[0,\,\log n]} \exp(-\mathrm{e}^{\log n - x}) \mathrm{d}V_{\lfloor j_n u \rfloor}(x) = O\left(V_{\lfloor j_n u \rfloor -1}(\log n)\right)\end{aligned}$$

для кожного фіксованого $u > 0$. Використовуючи (2.25) та припущення про швидкість зростання j_n, з якого випливає, що $j_n = o(\log n)$ при $n \to \infty$, ми

робимо висновок
$$\frac{j_n^\alpha V_{\lfloor j_n u\rfloor -1}(\log n)}{\rho_{\lfloor j_n u\rfloor -1}(\log n)^{\alpha\lfloor j_n u\rfloor}} \sim \frac{j_n^\alpha}{(\log n)^\alpha} \to 0, \quad n\to\infty,$$
таким чином отримуючи (2.46) з $i=1$. Доведення теореми 12 завершено. □

2.7 Декілька технічних результатів

Наведена нижче формула є стандартною, див., наприклад, формулу (A7) статті [48].

Лема 27. *Нехай $\gamma>0$ та η — додатна випадкова величина з перетворенням Лапласа ℓ. Тоді*
$$\mathbb{E}\eta^{-\gamma} = \frac{\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\int_0^\infty s^{\gamma-1}\ell(s)\mathrm{d}s,$$
де Γ — гамма-функція Ейлера. Тут обидві частини рівності можуть бути нескінченними.

Для зручності посилання у основному тексті наведемо формулу для перетворення Лапласа добутку незалежних невід'ємних випадкових величин.

Лема 28. *Нехай ξ_1 та ξ_2 — невід'ємні незалежні випадкові величини з функціями розподілу F_1 та F_2 і перетвореннями Лапласа ℓ_1 та ℓ_2. Тоді для $s\ge 0$*
$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi_1\xi_2} = \int_{[0,\infty)}\ell_1(sy)\mathrm{d}F_2(y) = \int_{[0,\infty)}\ell_2(sy)\mathrm{d}F_1(y). \tag{2.47}$$

Доведення. Використовуючи незалежність ξ_1 та ξ_2, маємо для $s\ge 0$
$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{-s\xi_1\xi_2} = \int_{[0,\infty)}\mathbb{E}\mathrm{e}^{-sy\xi_1}\mathrm{d}\mathbb{P}\{\xi_2\le y\} = \int_{[0,\infty)}\ell_1(sy)\mathrm{d}F_2(y).$$
Помінявши місцями ξ_1 та ξ_2, отримуємо другу рівність у (2.47). □

Наостанок наведемо одну оцінку для гамма-функції.

Лема 29. *Для $x,y\ge 0$*
$$\frac{\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(x+1)} \le (x+1+y)^y. \tag{2.48}$$

Доведення. Якщо $y = 0$, то нерівність виконується. Нехай $y \in \mathbb{N}$. Використовуючи рівність

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z > 0, \tag{2.49}$$

маємо

$$\frac{\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(x+1)} = (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+1) \leq (x+y)^y \leq (x+1+y)^y.$$

Тепер припустимо, що $y \notin \mathbb{N}$. Тоді за нерівністю Вендела [69]

$$\frac{\Gamma(x+1+\{y\})}{\Gamma(x+1)} \leq (x+1)^{\{y\}},$$

де $\{y\}$ – дробова частина y. З цього та (2.49) випливає

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(x+1)} &= (x+y) \cdot \ldots \cdot (x+1+\{y\})\frac{\Gamma(x+1+\{y\})}{\Gamma(x+1)} \\ &\leq (x+y)^{\lfloor y \rfloor}(x+1)^{\{y\}} \leq (x+1+y)^y.\end{aligned}$$

$\square$

Зауваження 30. *Вивчення доведення попередньої леми демонструє, що для $x \geq 0$, $y \geq 1$*

$$\frac{\Gamma(x+1+y)}{\Gamma(x+1)} \leq (x+y)^y.$$

Висновки до Розділу 2

У цьому розділі було досліджено асимптотичну поведінку кількості зайнятих комірок у проміжних поколіннях послідовностей узгоджених схем зайнятості, породжених процедурою ламання палиці з випадковим коефіцієнтом W, за умови, що правий хвіст розподілу випадкової величини $|\log W|$ правильно змінюється на нескінченності з від'ємним показником, більшим за -1, та додаткових більш технічних умов. Основна увага зосереджена на режимах, у яких номер покоління $j = j_n$ зростає разом із кількістю наявних куль n, але повільніше за деяку додатну степінь логарифма. Це дозволило охопити широкий діапазон проміжних поколінь, що не підпадали під дію раніше відомих результатів, отриманих для випадків більш легких хвостів розподілів $|\log W|$.

У розділі сформульовано та доведено граничну теорему (теорему 12), яка встановлює слабку збіжність скінченновимірних розподілів нормалізованого процесу $(K_n(\lfloor j_n u \rfloor))_{u>0}$ до скінченновимірних розподілів інтегрального функціонала оберненого стійкого субординатора. Отриманий граничний процес суттєво відрізняється від гаусівських границь, характерних для випадків із легким хвостом, та відображає фундаментальний вплив важких хвостів на структуру флуктуацій у моделі. Також показано, що перехід від першого покоління до проміжних поколінь призводить до згладжування стохастичних коливань.

Крім того, у розділі обґрунтовано умови, необхідні для застосування граничної теореми, зокрема, припущення щодо функції відновлення глобально збуреного випадкового блукання, породженого випадковим вектором $(|\log W|, |\log(1-W)|)$, а також наведено допоміжні результати для загальних гіллястих процесів, породжених глобально збуреними випадковими блуканнями. Отримані результати заповнюють прогалину у теорії ітерованих збурених випадкових блукань для випадку, коли стрибок відповідного стандартного випадкового блукання має нескінченне середнє, та доповнюють відомі граничні твердження для проміжних поколінь у сценаріях з легким хвостом.

Розділ 3

Закони повторного логарифма для ітерованих збурених випадкових блукань

3.1 Вступ

Збурені випадкові блукання є важливим узагальненням стандартних випадкових блукань, що поєднують накопичувальні стохастичні ефекти з додатковими випадковими збуреннями. Ця модель має суттєве теоретичне значення в сучасній теорії ймовірностей, зокрема, у вивченні граничних теорем, функціональних перетворень і рекурсивних стохастичних структур. Водночас вони широко застосовуються в прикладних галузях — актуарній математиці та фінансовій інженерії (моделювання процесів ризику і прибутку з випадковими шоками), теорії надійності (опис деградації систем із випадковими пошкодженнями), теорії масового обслуговування (випадкові затримки в обробленні запитів), а також у біології та фізиці (моделі руху частинок у випадковому середовищі).

Нагадаємо визначення тут. Нехай знову, як і у підрозділі 2.5, $(\xi_k, \eta_k)_{k\geq 1}$ — незалежні копії випадкового вектора (ξ, η) з додатними довільно залежними компонентами, $(S_k)_{k\geq 0}$ — стандартне випадкове блукання зі стрибками ξ_k, що стартує в нулі, тобто

$$S_0 = 0 \quad \text{та} \quad S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

і $(T_k)_{k\geq 1}$ — збурене випадкове блукання, породжене випадковим вектором (ξ, η), тобто

$$T_k = S_{k-1} + \eta_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Збурені випадкові блукання є цікавим об'єктом досліджень. Огляд результатів, накопичених до 2016 року, міститься у монографії [39].

Серед нещодавних досліджень є стаття [51], у якій проаналізовано асимптотичну поведінку максимумів збурених випадкових блукань, а також пов'язаних із ними часткових сум випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями (divergent perpetuities). Авторами встановлено функціональні граничні теореми у просторі Скорохода із топологією M_1, зокрема, описано умови, за яких згадані максимуми після належної нормалізації збігаються за розподілом до максимумів стійких процесів Леві, або екстремальних процесів, або більш екзотичних процесів, що є функціоналами перших двох. Крім того, робота уточнює зв'язок між максимумами збурених випадкових блукань та частковими сумами випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями. Як наслідок, доведено функціональні граничні теореми для логарифмів таких часткових сум.

У статті [44] автори досліджують властивості трьох функціоналів, визначених на збурених випадкових блуканнях $(T_n)_{n\geq 1}$:
$\tau(t) = \inf\{n \geq 1 : T_n > t\}$ – часу першого проходження у інтервал (t, ∞);
$N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$ - числа відвідин проміжка $(-\infty, t]$ та
$\rho(t) = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$ – часу останнього візиту до інтервалу $(-\infty, t]$.
Основне припущення полягає в тому, що $\mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$. У згаданій роботі вказано необхідні та достатні умови для виконання слабкого та посиленого законів великих чисел для $\tau(t)$. Якщо умови, що гарантують виконання слабкого закону не виконуються, то за додаткового припущення правильної зміни правого хвоста розподілу η доведено функціональну граничну теорему у просторі Скорохода для належним чином нормалізованого процесу $(\tau(ut))_{u\geq 0}$. Далі показано, що посилені закони великих чисел для $N(t)$ і $\rho(t)$ виконуються за єдиного припущення, що ці випадкові величини є майже

напевно скінченними. Нарешті, за умов виконання слабких законів та додаткових природних припущень автори [44] доводять слабку збіжність скінченновимірних розподілів належним чином центрованих та нормалізованих процесів $(\tau(ut))_{u\geq 0}$ та $(\rho(ut))_{u\geq 0}$, а також функціональну граничну теорему у просторі Скорохода для $(N(ut))_{u\geq 0}$. У той час як центрування $\mu^{-1}ut$, необхідне для $(\tau(ut))_{u\geq 0}$ та $(\rho(ut))_{u\geq 0}$, є аналогічним до випадку стандартних випадкових блукань (тобто без збурень), центрування для процесу $(N(ut))_{u\geq 0}$ є складнішим.

Також інтерес становить мультиплікативний аналог збурених випадкових блукань, що досліджується в нещодавній статті [8], де незалежні однаково розподілені вектори $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ набувають значень у $\mathbb{N}^2$. Визначено мультиплікативне випадкове блукання

$$\Pi_0 := 1, \quad \Pi_k := \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

та збурену послідовність

$$\Theta_k := \Pi_{k-1}\eta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

У роботі досліджуються арифметичні властивості множин $\{\Pi_1, \ldots, \Pi_n\}$ та $\{\Theta_1, \ldots, \Theta_n\}$, зокрема, поведінка лічильних процесів, що задаються так:

$$S_k(p) := \lambda_p(\Pi_k) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_p(\xi_j), \qquad p \in \mathcal{P}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$T_k(p) := \lambda_p(\Theta_k) = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_p(\xi_j) + \lambda_p(\eta_k), \qquad p \in \mathcal{P}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\lambda_p(n)$ — показник степеня простого числа p у розкладі числа n, а $\mathcal{P}$ — множина простих чисел. Доведено, що за відповідних моментних умов процеси $(S_{\lfloor ut \rfloor}(p))_{u\geq 0}$ та $(T_{\lfloor ut \rfloor}(p))_{u\geq 0}$ задовольняють функціональні центральні граничні теореми. Зокрема,

$$\left(\frac{S_{\lfloor ut \rfloor}(p) - ut\,\mathbb{E}[\lambda_p(\xi)]}{\sqrt{t}}\right)_{u\geq 0} \Longrightarrow (W_p(u))_{u\geq 0}, \quad t \to \infty$$

у просторі Скорохода, де W_p — центрований броунівський рух. Аналогічне граничне співвідношення виконується і для $(T_{\lfloor ut \rfloor}(p))_{u \geq 0}$ за додаткового моментного припущення, накладеного на розподіл η. Також у статті [8] досліджена поведінка процесів найменшого спільного кратного. Зокрема, доведено, що за певних припущень, включаючи $\mathbb{E} \log \eta < \infty$ (що гарантують, що внесок розподілу ξ домінує над внеском розподілу η),

$$\Big(\frac{\log \text{НСК}(\Theta_1, \ldots, \Theta_{\lfloor tu \rfloor}) - \mu ut}{\sqrt{t}}\Big)_{u \geq 0} \overset{\text{f.d.d.}}{\longrightarrow} (\sigma W(u))_{u \geq 0}, \quad t \to \infty$$

у розумінні збіжності скінченновимірних розподілів, де $\sigma^2 := \mathrm{Var}\,(\log \xi) \in (0, \infty)$, $\mu := \mathbb{E} \log \xi < \infty$ та $(W(u))_{u \geq 0}$ є стандартним броунівським рухом. Якщо ж внесок розподілу збурення домінує, то поведінка $\log$ НСК змінюється: після належної нормалізації скінченновимірні розподіли слабко збігаються до скінченновимірних розподілів

$$\left(\sum_{p \in \mathcal{P}_0} M_p(u) \log p \right)_{u \geq 0},$$

де $\mathcal{P}_0$ — множина «домінуючих» простих чисел, а M_p — певний екстремальний процес.

Предметом дослідження цього розділу є закони повторного логарифма. Це група результатів у теорії ймовірностей, які описують граничну флуктуаційну поведінку сум незалежних (або залежних) випадкових величин та більш загальних випадкових послідовностей або процесів. Фактично вони є результатами про швидкість збіжності у посилених законах великих чисел. Закони повторного логорифма мають глибоке практичне значення, особливо у статистиці, стохастичному моделюванні, фінансах, машинному навчанні та теорії алгоритмів.

Для випадку послідовності сум незалежних випадкових величин, що мають однаковий двоточковий розподіл, відповідний результат був доведений О. Я. Хінчиним у 1924 році. Першу ж теорему більш загального типу довів А. М. Колмогоров у 1929 році.

Твердження 31. *Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ є взаємно незалежними випадковими величинами зі скінченними дисперсіями $b_k := \operatorname{Var} \xi_k$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k).$$

Якщо при $n \to \infty$ виконуються співвідношення $B_n \to \infty$ та $|\xi_n| < m_n = o\left(\sqrt{\dfrac{B_n}{\log \log B_n}}\right)$, то послідовність $(S_n)_{n \geq 1}$ задовольняє закон повторного логарифма, тобто

$$\mathbb{P}\left\{ \limsup_{n \to \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2B_n \log \log B_n}} = 1 \right\} = 1.$$

Кожен закон повторного логарифма, зокрема закон Колмогорова, описує асимптотичні у сенсі майже напевно межі флуктуацій у складних системах. Він встановлює точну межу між закономірними стохастичними флуктуаціями та дійсно аномальними відхиленнями, що робить його одним із фундаментальних результатів сучасної теорії ймовірностей з широкими прикладними наслідками.

До відомих законів повторного логарифма належать також:

- закон Гартмана–Вінтнера — це закон повторного логарифма для сум незалежних однаково розподілених доданків (також доданки можуть бути "майже" однаково розподілені) [35];
- закон Штрассена (для броунівського руху) [68];
- закон повторного логарифма для мартингалів [67];
- узагальнення для розподілів з нескінченним другим моментом [57].

До цього часу закони повторного логарифма відкривають у все нових моделях. Наприклад, у роботі [1] доведено закон повторного логарифма для лакунарних (lacunary) тригонометричних рядів, на коефіцієнти яких накладено умови арифметичного типу. У статті [46] встановлено закон повторного логарифма для числа комірок, що містять фіксовану кількість куль у нескінченній схемі зайнятості Карліна. У роботі [20] отримано закон повторного логарифма для L_p - норм оцінок ядрового типу емпіричної функції розподілу (приклад застосування закону повторного логарифма у непараметричній статистиці).

Першою задачею цього розділу є вдосконалення відомого закону повторного логарифма для збурених випадкових блукань. Другою задачею є доведення закона повторного логарифма для *ітерованих* збурених випадкових блукань. Такі процеси виникають природним чином у контексті дослідження гіллястих процесів, випадкових дерев, рекурсивних схем Карліна та інших стохастичних структур, що описують еволюцію систем із багаторівневою або ієрархічною випадковістю. Ітеровані збурені випадкові блукання мають застосування у дослідженнях складних випадкових алгоритмів, еволюційних моделей і теорії інформації, де важливою є взаємодія між послідовними рівнями випадкових впливів. У нещодавній статті [4] використовується саме такий гіллястий процес для побудови розв'язків рівняння нерухомої точки типу

$$R \overset{\mathrm{d}}{=} \max\{Q, \max_{1\le i\le N} C_i R_i\},$$

де $R_1, R_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини R, а $(Q, N, \{C_i\})$ — випадковий вектор коефіцієнтів. Після логарифмування отримується рівняння Ліндлі для розподілів:

$$W \overset{\mathrm{d}}{=} \max\{Y, \max_{1\le i\le N} (X_i + W_i)\},$$

де $W = \log R$, $X_i = \log C_i$, $Y = \log Q$.

3.2 Основні результати

Визначимо лічильний процес $Y := (Y(t))_{t\ge 0}$ для послідовності $(T_k)_{k\ge 1}$ із формули (3.1) так:

$$Y(t) := \sum_{k\ge 1} \mathbb{1}_{\{T_k\le t\}}, \quad t\ge 0.$$

Він є одним з основних об'єктів дослідження теорії збурених випадкових блукань. Більшість фундаментальних результатів класичної теорії відновлення було узагальнено на випадок збурених випадкових блукань. Зокрема, теорема 3.2(B1) статті [2] встановлює функціональну центральну граничну теорему для процесу Y. Одновимірній версії цього результату відповідає, аналогічно до класичної теорії відновлення, закон повторного логарифма, що отримується додаванням до нормалізації центральної граничної теореми мультиплікативного множника, що є коренем з повторного логарифма від нормалізації. В результаті виникають асимптотично обмежені випадкові функції, множиною часткових границь яких є детермінований сегмент, симетричний відносно 0, майже напевно.

Закон повторного логарифма для центрованих та нормалізованих величин $Y(t)$ при $t \to \infty$ *вздовж натуральних чисел* було доведено у твердженні 2.3 статті [41]. Доведення ґрунтується на припущенні, що $\mathbb{E}\eta^a < \infty$ для деякого $a > 0$. Нижче наведемо точне формулювання цього результату.

Для сім'ї (x_t) дійсних чисел позначимо через $C((x_t))$ множину її граничних точок при $t \to \infty$.

Твердження 32. *Припустимо, що* $\sigma^2 := \operatorname{Var}\xi \in (0, \infty)$ *та* $\mathbb{E}\eta^a < \infty$ *для деякого* $a > 0$. *Тоді*

$$C\left(\left(\frac{Y(n) - m^{-1}\int_0^n \mathbb{P}\{\eta \le y\}\,dy}{(2\sigma^2\mu^{-3} n \log\log n)^{1/2}} : n \ge 3\right)\right) = [-1, 1] \quad \text{м.н.},$$

де $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$.

У наступній теоремі ми продемонструємо, що припущення про існування скінченного моменту випадкової величини η, яке використовується в твердженні 32, насправді не є необхідним. Крім того, ми розширимо область застосування закону повторного логарифма, показавши його справедливість не лише при $t \to \infty$ уздовж натуральних чисел, а й при $t \to \infty$ уздовж додатних дійсних чисел. Таким чином, буде отримано остаточну версію закону повторного логарифма для величин $Y(t)$.

Теорема 33. *Припустимо, що* $\sigma^2 = \operatorname{Var}\xi \in (0,\infty)$. *Тоді*

$$C\Bigg(\Bigg(\frac{Y(t)-\mu^{-1}\int_0^t \mathbb{P}\{\eta \le y\}\mathrm{d}y}{(2\sigma^2\mu^{-3}t\log\log t)^{1/2}}\ :\ t>\mathrm{e}\Bigg)\Bigg) = [-1,1] \quad \text{м.н.},$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$.

Наступним результатом цього розділу є закон повторного логарифма для ітерованих збурених гіллястих блукань. Розглянемо загальний гіллястий процес, породжений випадковою послідовністю $(T_k)_{k\ge1}$. Вважаємо, що числа $(T_k)_{k\ge1}$ — це моменти народження індивідуумів першого покоління. Кожен з них народжує нащадків, моменти народження яких, відносно часу народження батька, утворюють незалежну копію T. Ці індивідууми народжують третє покоління, і так далі за таким самим правилом (див. підрозділ 2.5).

Нехай $Y_j(t)$ — кількість осіб j-го покоління з часом народження $\le t$. Спираючись на роботу [9], ми називаємо послідовність процесів $((Y_j(t))_{t\ge0})_{j\ge2}$ ітерованим збуреним випадковим блуканням. При цьому, аналогічно до підрозділу 2.5, для $t \ge 0$ $Y_1(t) = Y(t)$ і виконується такий розклад

$$Y_j(t) = \sum_{r\ge1} Y_{j-1}^{(r)}(t-T_r)\,\mathbb{1}_{\{T_r\le t\}}, \quad j\ge 2, \tag{3.2}$$

де $Y_{j-1}^{(r)}(t)$ – кількість індивідуумів j-го покоління, які є нащадками особи першого покоління з часом народження T_r, народжених не пізніше часу t. Покладемо $V(t) = \mathbb{E}Y(t)$ та $V_j(t) = \mathbb{E}Y_j(t)$ для $t \ge 0, j \ge 1$. Переходячи в (3.2) до математичних сподівань, ми робимо висновок, що для $j \ge 2$ та $t \ge 0$

$$V_j(t) = (V_{j-1} * V)(t) = \int_{[0,\,t]} V_{j-1}(t-y)\mathrm{d}V(y), \tag{3.3}$$

де $*$ позначає операцію згортки.

Ітеровані збурені випадкові блукання становлять самостійний інтерес як об'єкт дослідження (див., зокрема, статті [9, 53]). Крім того, вони відіграють ключову роль як допоміжний інструмент у вивченні послідовностей нескінченних схем зайнятості у випадковому середовищі; докладні результати з цього напряму подані в роботах [15, 50].

Окрему увагу в літературі було приділено ітерованим стандартним випадковим блуканням, які можна розглядати як окремий випадок ітерованих збурених випадкових блукань, що відповідає вибору $\eta = \xi$. Нещодавно в статті [43] для цих процесів було встановлено закон повторного логарифма. Розвиваючи цей напрям досліджень, далі ми формулюємо та доводимо закон повторного логарифма для належним чином центрованих та нормалізованих величин $Y_j(t)$. Отриманий результат можна розглядати як природне узагальнення згаданого закону повторного логарифма для ітерованих стандартних випадкових блукань на більш широкий клас процесів.

Сформулюємо другий основний результат даного розділу.

Теорема 34. *Припустимо, що* $\sigma^2 = \operatorname{Var}\xi \in (0,\infty)$*. Тоді для* $j \geq 2$

$$C\bigg(\bigg(\frac{Y_j(t) - V_j(t)}{(2((2j-1)(j-1)!)^{-1}\sigma^2\mu^{-2j-1}t^{2j-1}\log\log t)^{1/2}} \,:\, t > \mathrm{e}\bigg)\bigg) = [-1,1] \tag{3.4}$$

м.н., де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$*.*

Хоча початок нашого доведення теореми 34 подібний до доведення теореми 1.1 у статті [43], подальші технічні деталі суттєво відрізняються. Основна складність полягає в тому, що розподіл η є довільним. Накладання припущення про скінченність моменту додатного порядку величини η значно спростило б міркування.

Залишок розділу структурований так. Після доведення теореми 33 у підрозділі 3.3 ми наводимо низку допоміжних результатів у підрозділі 3.4, а потім доводимо теорему 34 у підрозділі 3.5.

3.3 Доведення теореми 33

Зарезервуємо позначення n для цілих чисел та позначення t для дійсних чисел. Для $t \in \mathbb{R}$ покладемо $F(t) := \mathbb{P}\{\eta \leq t\}$ та

$$\nu(t) := \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t\}}\,. \tag{3.5}$$

Зазначимо, що $F(t)=0$ та $\nu(t)=0$ для $t<0$. Для $t>\mathrm{e}$ запишемо

$$Y(t)-\mu^{-1}\int_0^t F(y)\mathrm{d}y = Y(t)-\int_{[0,\,t]}F(t-y)\mathrm{d}\nu(y)$$
$$+\int_{[0,\,t]}F(t-y)\mathrm{d}(\nu(y)-\mu^{-1}y) =: X(t)+Z(t)$$

та покладемо $a(t):=(2\sigma^2\mu^{-3}t\log\log t)^{1/2}$. У твердженні 2.3 статті [41] доведено, що

$$C\big(\big(Z(n)/a(n)\ :\ n\geq 3\big)\big)=[-1,1]\quad \text{м.н.} \tag{3.6}$$

Це співвідношення вірне незалежно від того, чи $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ для деякого $a>0$, чи $\mathbb{E}\eta^a=\infty$ для всіх $a>0$. Покажемо, що зі співвідношення (3.6) випливає

$$C\big(\big(Z(t)/a(t)\ :\ t>\mathrm{e}\big)\big)=[-1,1]\quad \text{м.н.}, \tag{3.7}$$

тобто (3.6) виконується також для дійсних аргументів. Для заданого $t\geq 4$ існує $n\in\mathbb{N}$ таке, що $t\in(n-1,n]$. Звідси за монотонністю

$$\frac{Z(t)}{a(t)}\leq\frac{Z(n)+\mu^{-1}\int_{n-1}^n F(y)\mathrm{d}y}{a(n-1)}\leq\frac{Z(n)+\mu^{-1}}{a(n-1)}\quad \text{м.н.}$$

Аналогічно,

$$\frac{Z(t)}{a(t)}\geq\frac{Z(n-1)-\mu^{-1}}{a(n)}\quad \text{м.н.}$$

Робимо висновок, що (3.7) дійсно виконується.

Залишається оцінити доданок $X(t)$ при $t\to\infty$. Відомо (див. доведення теореми 3.2 у статті [2]), що

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1/2}\left(Y(n)-\int_{[0,\,n]}F(n-y)\mathrm{d}\nu(y)\right)=0\quad \text{м.н.},$$

якщо $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ для деякого $a>0$. Зазначимо, що це граничне співвідношення може не виконуватися, якщо $\mathbb{E}\eta^a=\infty$ для всіх $a>0$. Наприклад, із зауваження 4.4 статті [44] випливає, що верхня границя в останній центрованій формулі дорівнює $+\infty$ м.н., коли $\mathbb{P}\{\xi=c\}=1$ для деякого $c>0$ та $\lim_{t\to\infty}(\log\log t)(1-F(t))=1$.

Доведення теореми 3.2 у статті [2] оперує степеневими моментами та значною мірою спирається на припущення $\mathbb{E}\eta^a<\infty$ для деякого $a>0$.

Без такого припущення потрібне інше доведення, яке оперує експоненційними, а не степеневими моментами. Залишок цього підрозділу присвячено встановленню співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}(X(t)/b(t)) = 0 \quad \text{м.н.}, \tag{3.8}$$

що і завершить доведення теореми. Тут $b(t) := (t\log\log t)^{1/2}$ для $t > \mathrm{e}$.

Зафіксуємо довільні $u \neq 0$ та $t > 0$. Покладемо $W_0 := 1$ та для $j \in \mathbb{N}$

$$W_j := \exp\Big(u\sum_{k=0}^{j-1}(\mathbb{1}_{\{\eta_{k+1}+S_k\le t\}} - F(t-S_k)\,\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}) \\ - (u^2\mathrm{e}^{|u|}/2)\sum_{k=0}^{j-1}(1-F(t-S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\Big).$$

Позначимо через $\mathcal{G}_0$ тривіальну σ-алгебру та для $j \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{G}_j$ σ-алгебру, породжену випадковими векторами $(\xi_k, \eta_k)_{1\le k\le j}$. Зауважимо, що змінна W_j є $\mathcal{G}_j$-вимірною для $j \in \mathbb{N}_0$.

Нагадаємо, що послідовність $(X_j, \mathcal{G}_j)_{j\ge 0}$ називається *супермартингалом*, якщо виконуються такі умови:

(1) для всіх $j \in \mathbb{N}_0$ випадкова величина X_j є $\mathcal{G}_j$-вимірною;

(2) для всіх $j \in \mathbb{N}_0$ виконується нерівність

$$\mathbb{E}(X_{j+1} \mid \mathcal{G}_j) \le X_j \quad \text{м.н.}$$

Тепер доведемо, що $(W_j, \mathcal{G}_j)_{j\ge 0}$ є додатним супермартингалом. Дійсно, записуючи $\mathbb{E}_j(\cdot)$ замість $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G}_j)$ та використовуючи нерівність

$$\mathrm{e}^x \le 1 + x + x^2\mathrm{e}^{|x|}/2, \quad x \in \mathbb{R}$$

у поєднанні з

$$\mathbb{E}_{j-1}\big(\mathbb{1}_{\{\eta_j+S_{j-1}\le t\}} - F(t-S_{j-1})\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}}\big) = 0 \quad \text{м.н.},$$

робимо висновок

$$\mathbb{E}_{j-1}\exp\big(u(\mathbb{1}_{\{\eta_j+S_{j-1}\le t\}}-F(t-S_{j-1})\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}})\big)$$
$$\le 1+(u^2/2)\mathbb{E}_{j-1}(\mathbb{1}_{\{T_j\le t\}}-F(t-S_{j-1}))^2$$
$$\times\exp(|u(\mathbb{1}_{\{T_j\le t\}}-F(t-S_{j-1})\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}})|)\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}}.$$

Оскільки $|\,\mathbb{1}_{\{T_j\le t\}}-F(t-S_{j-1})\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}}\,|\le 1$ м.н. та

$$\mathbb{E}_{j-1}(\mathbb{1}_{\{T_j\le t\}}-F(t-S_{j-1}))^2=F(t-S_{j-1})(1-F(t-S_{j-1})),$$

то права частина не перевищує

$$1+(u^2\mathrm{e}^{|u|}/2)F(t-S_{j-1})(1-F(t-S_{j-1}))\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}}$$
$$\le 1+(u^2\mathrm{e}^{|u|}/2)(1-F(t-S_{j-1}))\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}}$$
$$\le\exp((u^2\mathrm{e}^{|u|}/2)(1-F(t-S_{j-1}))\,\mathbb{1}_{\{S_{j-1}\le t\}}).$$

Для отримання останнього рядка ми скористалися нерівністю $1+x\le\mathrm{e}^x$, що виконується для $x\ge 0$. Таким чином, ми довели, що для $j\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_{j-1}(W_j/W_{j-1})\le 1\quad\text{м.н.},$$

а отже, $\mathbb{E}_{j-1}W_j\le W_{j-1}$ м.н., тобто $(W_j,\mathcal{G}_j)_{j\ge 0}$ справді є додатним супермартингалом.

Як наслідок, м.н. границя

$$\lim_{j\to\infty}W_j=:W_\infty=\exp\Big(uX(t)-(u^2\mathrm{e}^{|u|}/2)\sum_{k\ge 0}(1-F(t-S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\Big)$$

задовольняє $\mathbb{E}W_\infty\le\mathbb{E}W_0=1$. Тобто для фіксованих $u\in\mathbb{R}$ та $t>0$

$$\mathbb{E}\exp\Big(uX(t)-(u^2\mathrm{e}^{|u|}/2)\sum_{k\ge 0}(1-F(t-S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\Big)\le 1.\qquad(3.9)$$

Нам також знадобиться ще один допоміжний результат:

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\sum_{k\ge 0}(1-F(t-S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}=0\quad\text{м.н.}\qquad(3.10)$$

Доведення. Щоб довести (3.10), запишемо для фіксованого $a > 0$ та $t > a$

$$\sum_{k\geq 0}(1 - F(t - S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = \sum_{k\geq 0}(1 - F(t - S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t-a\}} + \sum_{k\geq 0}(1 - F(t - S_k))\,\mathbb{1}_{\{t-a<S_k\leq t\}}. \quad (3.11)$$

Перший доданок не перевищує

$$\sum_{k\geq 0}(1 - F(a))\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t-a\}} = (1 - F(a))\nu(t - a) \leq (1 - F(a))\nu(t),$$

а другий доданок у (3.11) дорівнює

$$\sum_{k\geq 0}(1 - F(t - S_k))\big(\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} - \mathbb{1}_{\{S_k\leq t-a\}}\,\big) \leq \nu(t) - \nu(t - a).$$

Отже,

$$\sum_{k\geq 0}(1 - F(t - S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} \leq (1 - F(a))\nu(t) + (\nu(t) - \nu(t - a)).$$

Згідно з посиленим законом великих чисел для процесів відновлення $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\nu(t) = \mu^{-1}$ м.н. та $\lim_{t\to\infty} t^{-1}(\nu(t)-\nu(t-a)) = \mu^{-1}-\mu^{-1} = 0$ м.н. Таким чином, для кожного фіксованого $a > 0$

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-1}\sum_{k\geq 0}(1 - F(t - S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} \leq \mu^{-1}(1 - F(a)) \quad \text{м.н.}$$

Спрямовуючи $a \to \infty$, отримуємо рівність (3.10). $\square$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та покладемо $t_n := \exp(n^{3/4})$ для $n \in \mathbb{N}$. Спочатку доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty}(X(t_n)/b(t_n)) = 0 \quad \text{м.н.} \quad (3.12)$$

Для цього для $n \geq 3$ визначимо подію

$$A_n := \{X(t_n) > \varepsilon b(t_n)\}.$$

Згідно з рівністю (3.10) маємо для великих n

$$\sum_{k\geq 0}(1 - F(t_n - S_k))\,\mathbb{1}_{\{S_k\leq t_n\}} \leq (\varepsilon^2/8)t_n.$$

Використовуючи цю нерівність, отримуємо для довільного $u > 0$ та великих n

$$\begin{aligned}A_n = \{uX(t_n) - (u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) \sum_{k\geq 0}(1 - F(t_n - S_k))\, \mathbb{1}_{\{S_k \leq t_n\}}\\ > \varepsilon u b(t_n) - (u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) \sum_{k\geq 0}(1 - F(t_n - S_k))\, \mathbb{1}_{\{S_k \leq t_n\}}\}\\ \subseteq \{uX(t_n) - (u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) \sum_{k\geq 0}(1 - F(t_n - S_k))\, \mathbb{1}_{\{S_k \leq t_n\}}\\ > \varepsilon u b(t_n) - (\varepsilon^2/8)(u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) t_n\} =: B_n.\end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Маркова в поєднанні з (3.9), робимо висновок, що

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{B_n\} \leq \exp\Big(- \varepsilon u b(t_n) + (\varepsilon^2/8)(u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) t_n\Big)\\ \times \mathbb{E} \exp\Big(uX(t_n) - (u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) \sum_{k\geq 0}(1 - F(t_n - S_k))\, \mathbb{1}_{\{S_k \leq t_n\}}\Big)\\ \leq \exp\Big(- \varepsilon u b(t_n) + (\varepsilon^2/8)(u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) t_n\Big).\end{aligned}$$

Нехай $\rho > 0$ задовольняє рівність $\exp(8\varepsilon^{-1}\rho) = 3/2$. Для великих $x > 0$ виконується нерівність $x^{-1} \log\log x \leq \rho$. Покладемо

$$u = 8\varepsilon^{-1}(t_n^{-1} \log\log t_n)^{1/2}.$$

Тоді

$$-\varepsilon u b(t_n) + (\varepsilon^2/8)(u^2 \mathrm{e}^{|u|}/2) t_n \leq -8 \log\log t_n + 4\mathrm{e}^{8\varepsilon^{-1}\rho} \log\log t_n = -2 \log\log t_n.$$

Отже, $\mathbb{P}\{B_n\} \leq \exp(-2 \log\log t_n) = n^{-3/2}$, і з цього випливає, що ряд $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\{B_n\}$ збігається. Тому також $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\{A_n\} < \infty$, і за лемою Бореля-Кантеллі $\limsup_{n\to\infty}(X(t_n)/b(t_n)) \leq 0$ м.н.

Протилежна нерівність для нижньої границі доводиться аналогічно. Починаємо із подій $A_n^* := \{-X(t_n) > \varepsilon b(t_n)\}$ та демонструємо тим самим способом, що й вище, що $A_n^* \subseteq B_n^*$, де B_n^* відрізняється від B_n тільки доданком $-uX(t_n)$ замість $uX(t_n)$.

Залишається показати, що (3.12) можна розширити до (3.8). Для цього достатньо довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sup_{u\in[t_n,\, t_{n+1}]} |X(u) - X(t_n)|}{t_n^{1/2}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3.13}$$

Дійсно, (3.13) у поєднанні з (3.12) тягне за собою

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sup_{u\in[t_n,\, t_{n+1}]} |X(u)|}{b(t_n)} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Це доводить (3.8), оскільки для достатньо великих n,

$$\frac{|X(t)|}{b(t)} \le \frac{\sup_{u\in[t_n,\, t_{n+1}]} |X(u)|}{b(t_n)} \quad \text{м.н.}$$

щоразу, коли $t \in [t_n,\, t_{n+1}]$.

Позначимо через $I = I_n$ послідовність додатних цілих чисел, яку буде вибрано пізніше. Для $j \in \mathbb{N}_0$ та $n \in \mathbb{N}$ визначимо сім'ю точок, що розбивають відрізок $[t_n, t_{n+1}]$ на 2^j однакових частин, а саме покладемо

$$F_j(n) := \{v_{j,m}(n) := t_n + 2^{-j} m (t_{n+1} - t_n) : 0 \le m \le 2^j\}.$$

Далі будемо писати $v_{j,\,m}$ замість $v_{j,\,m}(n)$. Помітимо, що $F_j(n) \subseteq F_{j+1}(n)$. Для довільного $u \in [t_n, t_{n+1}]$, визначимо найближчу до u зліва точку розбиття:

$$u_j := \max\{v \in F_j(n) : v \le u\} = t_n + 2^{-j}(t_{n+1} - t_n) \left\lfloor \frac{2^j (u - t_n)}{t_{n+1} - t_n} \right\rfloor .$$

Важливим спостереженням є те, що або $u_{j-1} = u_j$, або $u_{j-1} = u_j - 2^{-j}(t_{n+1} - t_n)$. Гарантовано $u_j = v_{j,m}$ для деякого $0 \le m \le 2^j$ так, що або $u_{j-1} = v_{j,m}$, або $u_{j-1} = v_{j,m-1}$. Запишемо

$$\begin{aligned}
&\sup_{u\in[t_n,\, t_{n+1}]} |X(u) - X(t_n)| \\
&\quad = \max_{0\le j\le 2^I - 1} \sup_{z\in[0,\, v_{I,\,j+1} - v_{I,\,j}]} |(X(v_{I,\,j}) - X(t_n)) + (X(v_{I,\,j} + z) - X(v_{I,\,j}))| \\
&\qquad \le \max_{0\le j\le 2^I - 1} |X(v_{I,\,j}) - X(t_n)| \\
&\qquad\quad + \max_{0\le j\le 2^I - 1} \sup_{z\in[0,\, v_{I,\,j+1} - v_{I,\,j}]} |X(v_{I,\,j} + z) - X(v_{I,\,j})| \quad \text{м.н.}
\end{aligned}$$

Для $u \in F_I(n)$

$$|X(u) - X(t_n)| = \Big| \sum_{j=1}^{I} (X(u_j) - X(u_{j-1})) + X(u_0) - X(t_n) \Big|$$
$$\le \sum_{j=0}^{I} \max_{1 \le m \le 2^j} |X(v_{j,m}) - X(v_{j,m-1})|.$$

За допомогою цих нерівностей отримуємо

$$\sup_{u \in [t_n, t_{n+1}]} |X(u) - X(t_n)| \le \sum_{j=0}^{I} \max_{1 \le m \le 2^j} |X(v_{j,m}) - X(v_{j,m-1})|$$
$$+ \max_{0 \le j \le 2^I - 1} \sup_{z \in [0, v_{I,j+1} - v_{I,j}]} |X(v_{I,j} + z) - X(v_{I,j})| \quad \text{м.н.} \quad (3.14)$$

Спочатку покажемо, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \ge 1} \mathbb{P}\Big\{ \sum_{j=0}^{I} \max_{1 \le m \le 2^j} |X(v_{j,m}) - X(v_{j,m-1})| > \varepsilon t_n^{1/2} \Big\} < \infty. \quad (3.15)$$

Нехай $\ell \in \mathbb{N}$. В якості підготовки знайдемо оцінку згори для $\mathbb{E}(X(u) - X(v))^{2\ell}$, $u, v > 0$, $u > v$. Зазначимо, що величина $X(u) - X(v)$ дорівнює м.н. границі $\lim_{j \to \infty} R(j, u, v)$, де $(R(j, u, v), \mathcal{G}_j)_{j \ge 0}$ — мартингал, визначений рівностями

$$R(0, u, v) := 0,$$
$$R(j, u, v) := \sum_{k=0}^{j-1} (\mathbb{1}_{\{v < \eta_{k+1} + S_k \le u\}} - F(u - S_k) + F(v - S_k)), \quad j \in \mathbb{N},$$

та, як і раніше, $\mathcal{G}_0$ позначає тривіальну σ-алгебру та для $j \in \mathbb{N}$ $\mathcal{G}_j$ позначає σ-алгебру, породжену $(\xi_k, \eta_k)_{1 \le k \le j}$. Нагадаємо, що $F(t) = 0$ для $t < 0$. За нерівністю Буркхольдера-Девіса-Ганді, що пов'язує моменти мартингала з моментами його квадратичної варіації (див., наприклад, теорему 11.3.2 у книзі [21])

$$\mathbb{E}(X(u)-X(v))^{2\ell} \le C\Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}\big((R(k+1,u,v)-R(k,u,v))^2|\mathcal{G}_k\big)\Big)^\ell + \sum_{k\ge 0}\mathbb{E}(R(k+1,u,v)-R(k,u,v))^{2\ell}\Big)$$

$$= C\Big(\mathbb{E}\Big(\sum_{k\ge 0}(F(u-S_k)-F(v-S_k))(1-F(u-S_k)+F(v-S_k))\Big)^\ell + \sum_{k\ge 0}\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{v<\eta_{k+1}+S_k\le u\}}-F(u-S_k)+F(v-S_k))^{2\ell}\Big) =: C(A(u,v)+B(u,v))$$

для деякої додатної константи C. Нехай $f\,:\,[0,\infty)\to[0,\infty)$ — локально обмежена функція. У доведенні леми A.3 статті [2] показано, що $\mathbb{E}(\nu(1))^\ell<\infty$, та що

$$\mathbb{E}\Big(\int_{[0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell \le \mathbb{E}(\nu(1))^\ell\Big(\sum_{n=0}^{\lfloor t\rfloor}\sup_{y\in[n,\,n+1)}f(y)\Big)^\ell. \tag{3.16}$$

Далі, використовуючи нерівність $(a+b)^p\le 2^{p-1}(a^p+b^p)$, $a,b\ge 0$, $p\ge 1$, маємо

$$A(u,v) = \mathbb{E}\Big(\sum_{k\ge 0}(F(u-S_k)-F(v-S_k))(1-F(u-S_k)+F(v-S_k))\Big)^\ell$$

$$= \mathbb{E}\Big(\int_{(v,\,u]}F(u-y)(1-F(u-y))\mathrm{d}\nu(y) + \int_{[0,\,v]}(F(u-y)-F(v-y))(1-F(u-y)+F(v-y))\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell$$

$$\le 2^{\ell-1}\Big(\mathbb{E}\Big(\int_{(v,\,u]}F(u-y)(1-F(u-y))\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell + \mathbb{E}\Big(\int_{[0,\,v]}(F(u-y)-F(v-y))(1-F(u-y)+F(v-y))\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell$$

$$\le 2^{\ell-1}\Big(\mathbb{E}\Big(\int_{[0,\,u]}\mathbb{1}_{[0,\,u-v)}(u-y)\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell + \mathbb{E}\Big(\int_{[0,\,v]}(F(u-y)-F(v-y))\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell\Big) =: 2^{\ell-1}(A_1(u,v)+A_2(u,v)).$$

Використовуючи (3.16) з $t=u$ та $f(y)=\mathbb{1}_{[0,\,u-v)}(y)$ і потім з $t=v$ та

$f(y) = F(u-v+y) - F(y)$, робимо висновок, що

$$A_1(u,v) \le \mathbb{E}(\nu(1))^\ell \Big(\sum_{n=0}^{\lfloor u \rfloor} \sup_{y\in[n,\,n+1)} \mathbb{1}_{[0,\,u-v)}(y) \Big)^\ell = \mathbb{E}(\nu(1))^\ell (\lceil u-v \rceil)^\ell,$$

де $\lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \ : \ n \ge x\}$, та

$$\begin{aligned} A_2(u,v) &\le \mathbb{E}(\nu(1))^\ell \Big(\sum_{n=0}^{\lfloor v \rfloor} \sup_{y\in[n,\,n+1)} (F(u-v+y) - F(y)) \Big)^\ell \\ &\le \mathbb{E}(\nu(1))^\ell \Big(\sum_{n=0}^{\lfloor v \rfloor} (F(\lceil u-v \rceil + n + 1) - F(n)) \Big)^\ell \\ &= \mathbb{E}(\nu(1))^\ell \Big(\sum_{n=0}^{\lceil u-v \rceil} (F(\lfloor v \rfloor + 1 + n) - F(n)) \Big)^\ell \le \mathbb{E}(\nu(1))^\ell (\lceil u-v \rceil + 1)^\ell. \end{aligned}$$

Нарешті, оскільки $0 \le \mathbb{1}_{\{v<\eta_{k+1}+S_k\le u\}} - F(u-S_k) + F(v-S_k) \le 1$, то

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \sum_{k\ge 0} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{v<\eta_{k+1}+S_k\le u\}} - F(u-S_k) + F(v-S_k))^{2\ell} \\ &\le \sum_{k\ge 0} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{v<\eta_{k+1}+S_k\le u\}} - F(u-S_k) + F(v-S_k))^2 \le 2\mathbb{E}\nu(1)(\lceil u-v \rceil + 1) \\ &\le 2\mathbb{E}\nu(1)(\lceil u-v \rceil + 1)^\ell. \end{aligned}$$

Отже,

$$\mathbb{E}(X(u) - X(v))^{2\ell} \le C_1(\lceil u-v \rceil + 1)^\ell. \tag{3.17}$$

Зауважимо, що $v_{j,\,m} - v_{j,\,m-1} = 2^{-j}(t_{n+1} - t_n)$. Покладемо

$$I = I_n := \lfloor \log_2(2^{-1}(t_{n+1} - t_n)) \rfloor.$$

Ми стверджуємо, що існує константа $C_2 > 0$ така, що $C_1(\lceil 2^{-j}(t_{n+1} - t_n) \rceil + 1)^\ell \le C_2 2^{-j\ell}(t_{n+1} - t_n)^\ell$ при $j \in \mathbb{N}$, $j \le I$. Справді,

$$\begin{aligned} (\lceil 2^{-j}(t_{n+1} - t_n) \rceil + 1)^\ell \le (2^{-j}(t_{n+1} - t_n) + 2)^\ell &\le 2^{\ell-1}(2^{-j\ell}(t_{n+1} - t_n)^\ell + 2^\ell) \\ &\le 2^\ell 2^{-j\ell}(t_{n+1} - t_n)^\ell \end{aligned}$$

внаслідок того, що $2^{-j}(t_{n+1} - t_n) \ge 2$ для $j \le I$. Застосовуючи (3.17), отримаємо для невід'ємного цілого $j \le I$

$$\mathbb{E}(X(v_{j,\,m}) - X(v_{j,\,m-1}))^{2\ell} \le C_1(\lceil 2^{-j}(t_{n+1} - t_n) \rceil + 1)^\ell \le C_2 2^{-j\ell}(t_{n+1} - t_n)^\ell. \tag{3.18}$$

Як наслідок

$$\mathbb{E}\Big(\max_{1\le m\le 2^j}(X(v_{j,m})-X(v_{j,m-1}))^{2\ell}\Big)\le\sum_{m=1}^{2^j}\mathbb{E}(X(v_{j,m})-X(v_{j,m-1}))^{2\ell}$$
$$\le C_2 2^{-j(\ell-1)}(t_{n+1}-t_n)^\ell.$$

За нерівністю трикутника для $L_{2\ell}$-норми,

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=0}^{I}\max_{1\le m\le 2^j}|X(v_{j,m})-X(v_{j,m-1})|\Big)^{2\ell}$$
$$\le\Big(\sum_{j=0}^{I}\big(\mathbb{E}\big(\max_{1\le m\le 2^j}(X(v_{j,m})-X(v_{j,m-1}))^{2\ell}\big)\big)^{1/(2\ell)}\Big)^{2\ell}$$
$$\le C_2(t_{n+1}-t_n)^\ell\Big(\sum_{j\ge 0}2^{-j(\ell-1)/(2\ell)}\Big)^{2\ell}=:C_3(t_{n+1}-t_n)^\ell.$$

Далі, за нерівністю Маркова,

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{j=0}^{I}\max_{1\le m\le 2^j}|X(v_{j,m})-X(v_{j,m-1})|>\varepsilon t_n^{1/2}\Big\}\le C_3\varepsilon^{-2\ell}t_n^{-\ell}(t_{n+1}-t_n)^\ell.$$

Оскільки $t_n^{-1}(t_{n+1}-t_n)\sim(3/4)n^{-1/4}$ при $n\to\infty$, то, поклавши, наприклад, $\ell=6$, отримуємо звідси (3.15). Використовуючи лему Бореля-Кантеллі, робимо висновок, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{j=0}^{I}\max_{1\le m\le 2^j}|X(v_{j,m})-X(v_{j,m-1})|}{t_n^{1/2}}=0\quad\text{м.н.}$$

Тепер перейдемо до аналізу другого доданка в (3.14). Покладемо $M(t):=\int_{[0,\,t]}F(t-y)\mathrm{d}\nu(y)$ для $t\ge 0$. Використовуючи рівність $X(t)=Y(t)-M(t)$ та м.н. монотонність Y та M, отримуємо

$$\sup_{z\in[0,\,v_{I,j+1}-v_{I,j}]}|X(v_{I,j}+z)-X(v_{I,j})|$$
$$\le\sup_{z\in[0,\,v_{I,j+1}-v_{I,j}]}(Y(v_{I,j}+z)-Y(v_{I,j}))$$
$$+\sup_{z\in[0,\,v_{I,j+1}-v_{I,j}]}(M(v_{I,j}+z)-M(v_{I,j}))$$
$$=(Y(v_{I,j+1})-Y(v_{I,j}))+(M(v_{I,j+1})-M(v_{I,j})).$$

Зауважимо, що

$$\max_{0\le j\le 2^I-1}(Y(v_{I,j+1})-Y(v_{I,j}))\le \max_{0\le j\le 2^I-1}|X(v_{I,j+1})-X(v_{I,j})| \\ +\max_{0\le j\le 2^I-1}(M(v_{I,j+1})-M(v_{I,j})).$$

Отже, згідно з лемою Бореля-Кантеллі достатньо довести, що для всіх $\varepsilon>0$

$$\sum_{n\ge 1}\mathbb{P}\{\max_{0\le j\le 2^I-1}(M(v_{I,j+1})-M(v_{I,j}))>\varepsilon t_n^{1/2}\}<\infty \tag{3.19}$$

та

$$\sum_{n\ge 1}\mathbb{P}\Big\{\max_{0\le j\le 2^I-1}|X(v_{I,j+1})-X(v_{I,j})|>\varepsilon t_n^{1/2}\Big\}<\infty. \tag{3.20}$$

Міркування, подібні тим, що були наведені вище, дозволяють стверджувати, що для $u,v>0$, $u>v$,

$$\mathbb{E}(M(u)-M(v))^\ell=\mathbb{E}\Big(\int_{(v,u]}F(u-y)\mathrm{d}\nu(y)+\int_{[0,v]}(F(u-y)-F(v-y))\mathrm{d}\nu(y)\Big)^\ell \\ \le 2^{\ell-1}\mathbb{E}(\nu(1))^\ell(\lceil u-v\rceil+1)^\ell.$$

Як наслідок, для невід'ємного цілого числа $j\le I$ та деякої константи $C_4>0$

$$\mathbb{E}(M(v_{I,j+1})-M(v_{I,j}))^\ell\le C_4 2^{-I\ell}(t_{n+1}-t_n)^\ell.$$

Згідно з нерівністю Маркова та нашим вибором I

$$\mathbb{P}\{\max_{0\le j\le 2^I-1}(M(v_{I,j+1})-M(v_{I,j}))>\varepsilon t_n^{1/2}\}\le C_4\varepsilon^{-\ell}2^{-I(\ell-1)}t_n^{-\ell/2}(t_{n+1}-t_n)^\ell \\ \le C_4\varepsilon^{-\ell}2^{2(\ell-1)}t_n^{-\ell/2}(t_{n+1}-t_n).$$

Отже, нерівність (3.19) виконується при виборі $\ell>2$. Щоб довести (3.20), використаємо (3.18), що дозволяє нам зробити висновок, що

$$\mathbb{P}\{\max_{0\le j\le 2^I-1}|X(v_{I,j+1})-X(v_{I,j})|>\varepsilon t_n^{1/2}\}\le C_2\varepsilon^{-2\ell}2^{-I(\ell-1)}t_n^{-\ell}(t_{n+1}-t_n)^\ell \\ \le C_2\varepsilon^{-2\ell}2^{2(\ell-1)}t_n^{-\ell}(t_{n+1}-t_n).$$

Вибравши $\ell>1$, отримуємо формулу (3.20).

Доведення теореми 33 завершено.

3.4 Допоміжні результати для доведення теореми 34

Для доведення теореми 34 потрібні деякі допоміжні результати щодо ітерованих збурених випадкових блукань. Лема 35 є відомим результатом, див. твердження 1 статті [53].

Лема 35. *Припустимо, що* $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$. *Тоді для фіксованого* $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{V_j(t)}{t^j} = \frac{1}{j!\mu^j}. \tag{3.21}$$

Нагадаємо, що функція відновлення U, що вже зустрічалася у підрозділі 2.2, задається так:

$$U(t) = \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{S_k \leq t\} \quad \text{для } t \geq 0. \tag{3.22}$$

Лема 36. *Для довільних* $x, h > 0$ *та* $k \in \mathbb{N}$

$$V_k(x+h) - V_k(x) \leq U(h)(V(x+h))^{k-1}. \tag{3.23}$$

Доведення. Використаємо математичну індукцію. Для $k = 1$ запишемо

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \int_{[0,\,x+h]} U(x+h-y)\mathrm{d}F(y) - \int_{[0,\,x]} U(x-y)\mathrm{d}F(y) \\ &= \int_{(x,\,x+h]} U(x+h-y)\mathrm{d}F(y) + \int_{[0,\,x]} (U(x+h-y) - U(x-y))\mathrm{d}F(y) \\ &\leq U(h)(F(x+h) - F(x)) + U(h)F(x) \leq U(h). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Передостання нерівність випливає із субадитивності функції відновлення U (див. теорему 1.7 на стор. 10 книги [61]) та її монотонності.

Припустимо, що нерівність (3.23) виконується для $k \leq l-1$. Зауважимо, що з (3.3) випливає, що $V_{l-1}(h) \leq (V(h))^{l-1} \leq U(h)(V(x+h))^{l-2}$ для $l \geq 2$ та $h \geq 0$. Скориставшись цією нерівністю та припущенням індукції, отримуємо

$$\begin{aligned} V_l(x+h) - V_l(x) = \int_{[0,\,x]} &(V_{l-1}(x+h-y) - V_{l-1}(x-y))\mathrm{d}V(y) \\ &+ \int_{(x,x+h]} V_{l-1}(x+h-y)\mathrm{d}V(y) \end{aligned}$$

$$\leq U(h)\int_{[0,\,x]}(V(x+h-y))^{l-2}\mathrm{d}V(y)+V_{l-1}(h)(V(x+h)-V(x))$$
$$\leq U(h)(V(x+h))^{l-2}\cdot V(x)+U(h)(V(x+h))^{l-2}(V(x+h)-V(x))$$
$$=U(h)(V(x+h))^{l-1}.$$

□

Лема 37. *Припустимо, що* $\mathrm{Var}\,\xi\in(0,\infty)$. *Тоді для* $k\in\mathbb{N}$

$$a_k(t):=\mathrm{Var}\,Y_k(t)=O(t^{2k-1}),\quad t\to\infty. \tag{3.25}$$

Доведення. Доведемо методом математичної індукції. Для $k=1$ запишемо

$$Y_1(t)-V_1(t)=\sum_{j\geq 1}(\mathbb{1}_{\{\eta_j+S_{j-1}\leq t\}}-F(t-S_{j-1}))+(\sum_{j\geq 0}F(t-S_j)-V_1(t))$$
$$=:I_1(t)+I_2(t).$$

Зауважимо, що $\mathrm{Var}\,Y_1(t)=\mathbb{E}(Y_1(t)-V_1(t))^2\leq 2(\mathbb{E}(I_1(t))^2+\mathbb{E}(I_2(t))^2)$. Нехай U — функція відновлення, визначена у формулі (3.22). Маємо

$$\mathbb{E}(I_1(t))^2=\int_{[0,\,t]}F(t-y)(1-F(t-y))\mathrm{d}U(y)\leq\int_{[0,\,t]}(1-F(t-y))\mathrm{d}U(y).$$

Якщо $\mathbb{E}\eta=\infty$, то з леми 6.2.9 монографії [39] з $r_1=0$ та $r_2=1$ випливає

$$\int_{[0,\,t]}(1-F(t-y))\mathrm{d}U(y)\sim\frac{1}{\mu}\int_0^t(1-F(y))\mathrm{d}y=o(t),\quad t\to\infty,$$

де $\mu=\mathbb{E}\xi<\infty$. Якщо $\mathbb{E}\eta<\infty$, то $\int_{[0,\,t]}(1-F(t-y))\mathrm{d}U(y)=O(1)$ при $t\to\infty$ за ключовою теоремою відновлення. Таким чином, у будь-якому випадку $\mathbb{E}(I_1(t))^2=o(t)$ при $t\to\infty$.

У доведенні леми 4.2 статті [30] показано, що

$$\mathbb{E}\sup_{s\in[0,\,t]}(\nu(s)-U(s))^2=O(t),\quad t\to\infty, \tag{3.26}$$

де $(\nu(s))_{s\geq 0}$ - випадковий процес, визначений формулою (3.5). Тому майже напевно

$$|I_2(t)| = \Big|\int_{[0,\,t]} F(t-y)\mathrm{d}(\nu(y)-U(y))\Big| = \Big|\int_{[0,\,t]} (\nu(t-y)-U(t-y)\mathrm{d}F(y)\Big| \leq$$
$$\leq \int_{[0,\,t]} |\nu(t-y)-U(t-y)|\mathrm{d}F(y) \leq \sup_{s\in[0,\,t]} |\nu(s)-U(s)|\cdot F(t)$$
$$\leq \sup_{s\in[0,\,t]} |\nu(s)-U(s)|. \quad (3.27)$$

Таким чином, згідно з (3.26) $\mathbb{E}(I_2(t))^2 \leq \mathbb{E}\sup_{s\in[0,\,t]}(\nu(s)-U(s))^2 = O(t)$ при $t\to\infty$. Ми довели, що $a_1(t) = O(t)$ при $t\to\infty$.

Припустимо, що співвідношення (3.25) виконується для $k \leq l-1$. Скористаємося зображенням

$$Y_l(t) - V_l(t)$$
$$= \sum_{r\geq 1}\big(Y_{l-1}^{(r)}(t-T_r) - V_{l-1}(t-T_r)\big) + \big(\sum_{r\geq 1} V_l(t-T_r) - V_l(t)\big) =: J_l(t) + K_l(t),$$

що, зокрема, тягне за собою

$$a_l(t) = \mathbb{E}(Y_l(t)-V_l(t))^2 = \mathbb{E}(J_l(t))^2 + \mathbb{E}(K_l(t))^2.$$

Зазначимо, що згідно з індуктивним припущенням існують константи $A>0$ та $t_0>0$ такі, що $a_{l-1}(t)\leq At^{2l-3}$ для всіх $t\geq t_0$. Тому, використовуючи (3.21) та (3.24), маємо

$$\mathbb{E}(J_l(t))^2 = \int_{[0,\,t]} a_{l-1}(t-y)\mathrm{d}V(y)$$
$$= \int_{[0,\,t-t_0]} a_{l-1}(t-y)\mathrm{d}V(y) + \int_{(t-t_0,\,t]} a_{l-1}(t-y)\mathrm{d}V(y)$$
$$\leq A\int_{[0,\,t]}(t-y)^{2l-3}\mathrm{d}V(y) + \sup_{s\in[0,t_0]} a_{l-1}(s)(V(t)-V(t-t_0)) \leq At^{2l-3}V(t) + O(1)$$
$$= O(t^{2l-2}), \quad t\to\infty. \quad (3.28)$$

Далі

$$K_l(t) = \sum_{r\geq 0}\big(V_{l-1}(t-T_r) - (V_{l-1}*F)(t-S_{r-1})\big)$$
$$+ \big(\sum_{r\geq 0}(V_{l-1}*F)(t-S_{r-1}) - V_l(t))\big) =: K_{l1}(t) + K_{l2}(t).$$

Використовуючи $V_l = V_{l-1} * F * U$ та ті самі міркування, що й у (3.27), отримуємо нерівність, що виконується майже напевно

$$|K_{l2}(t)| = \Big| \int_{[0,\,t]} (V_{l-1} * F)(t-y)\mathrm{d}(\nu(y) - U(y)) \Big| \le \sup_{s\in[0,\,t]} |\nu(s) - U(s)| \cdot V_{l-1}(t).$$

Отже, враховуючи (3.21) та (3.26),

$$\mathbb{E}(K_{l2}(t))^2 \le \mathbb{E} \sup_{s\in[0,\,t]} (\nu(s) - U(s))^2 (V_{l-1}(t))^2 = O(t^{2l-1}), \quad t\to\infty.$$

Нарешті

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(K_{l1}(t))^2 &= \sum_{r\ge 1} \mathbb{E}\big(V_{l-1}(t-T_r) - (V_{l-1}*F)(t-S_{r-1})\big)^2 \\
&\le \sum_{r\ge 1} \Big[\mathbb{E}\big(V_{l-1}(t-T_r)\big)^2 + \mathbb{E}\big((V_{l-1}*F)(t-S_{r-1})\big)^2\Big] \\
&= \int_{[0,\,t]} \big(V_{l-1}(t-y)\big)^2 \mathrm{d}V(y) + \int_{[0,\,t]} \big((V_{l-1}*F)(t-y)\big)^2 \mathrm{d}U(y) \\
&\le \big(V_{l-1}(t)\big)^2 \cdot V(t) + \big((V_{l-1}*F)(t)\big)^2 \cdot U(t) = O(t^{2l-1}), \quad t\to\infty.
\end{aligned}$$

Для останньої рівності ми використали $(V_{l-1} * F)(t) \le V_{l-1}(t)$ для $t \ge 0$. Доведення леми 37 завершено. □

Нам також знадобляться два результати щодо стандартних випадкових блукань. Наступна лема є наслідком формули (33) статті [2] з $\eta = \xi$.

Лема 38. *Для довільних додатних b та c*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\nu(t+b) - \nu(t)}{t^c} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Лема 39. *Нехай $K_1,\ K_2 : [0,\infty) \to [0,\infty)$ — неспадні функції, та $K_1(t) \ge K_2(t)$ для $t \ge 0$. Припустимо, що*

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{K_1(t) + K_2(t)}{\int_0^t (K_1(y) - K_2(y))\mathrm{d}y} \le \lambda \in (0,\infty). \tag{3.29}$$

Тоді для всіх $c > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,t]} (K_1(t-y) - K_2(t-y))\mathrm{d}\nu(y)}{t^c \int_0^t (K_1(y) - K_2(y))\mathrm{d}y} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3.30}$$

Доведення. Використаємо розклад

$$\int_{[0,\,t]}(K_1(t-y)-K_2(t-y))\mathrm{d}\nu(y)=\int_{[0,\,\lfloor t\rfloor]}...+\int_{[\lfloor t\rfloor,\,t]}...=:I_1(t)+I_2(t).$$

Для $I_2(t)$ маємо

$$\begin{aligned}I_2(t)\le\int_{[\lfloor t\rfloor,\,t]}K_1(t-y)\mathrm{d}\nu(y)\le K_1(t-\lfloor t\rfloor)(\nu(t)-\nu(\lfloor t\rfloor))\\ \le K_1(1)(\nu(t)-\nu(t-1)).\end{aligned}$$

Отже, за лемою 38 для всіх $c>0$ $\lim_{t\to\infty}t^{-c}I_2(t)=0$ м.н. Залишається розглянути $I_1(t)$:

$$\begin{aligned}I_1(t)&=K_1(t)-K_2(t)+\sum_{j=0}^{\lfloor t\rfloor-1}\int_{(j,\,j+1]}(K_1(t-y)-K_2(t-y))\mathrm{d}\nu(y)\\ &\le K_1(t)-K_2(t)+\sum_{j=0}^{\lfloor t\rfloor-1}(K_1(t-j)-K_2(t-j-1))(\nu(j+1)-\nu(j))\\ &\le K_1(t)+\sup_{s\in[0,\,\lfloor t\rfloor]}(\nu(s+1)-\nu(s))\sum_{j=0}^{\lfloor t\rfloor-1}(K_1(t-j)-K_2(t-j-1))\\ &\le K_1(t)+\sup_{s\in[0,\lfloor t\rfloor]}(\nu(s+1)-\nu(s))\sum_{j=0}^{\lfloor t\rfloor-1}(K_1(\lfloor t\rfloor+1-j)-K_2(\lfloor t\rfloor-1-j))\\ &=\sup_{s\in[0,\lfloor t\rfloor]}(\nu(s+1)-\nu(s))\left(\int_2^{\lfloor t\rfloor}(K_1(y)-K_2(y))\mathrm{d}y+O(K_1(t)+K_2(t))\right).\end{aligned}$$

Застосовуючи лему 38 ще раз, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{I_1(t)}{t^c\int_0^t(K_1(y)-K_2(y))\mathrm{d}y}=0\quad\text{м.н.}$$

Доведення леми 39 завершено. □

3.5 Доведення теореми 34

Використаємо розклад: для $j\ge2,\ t\ge0$

$$Y_j(t)-V_j(t)=\sum_{k\ge1}\big(Y_{j-1}^{(k)}(t-T_k)-V_{j-1}(t-T_k)\big)+\sum_{k\ge1}V_{j-1}(t-T_k)-V_j(t).\quad(3.31)$$

Його перший доданок аналізується в твердженні 40.

Твердження 40. *Припустимо, що* $\operatorname{Var}\xi \in (0, \infty)$. *Тоді для* $j \geq 2$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k\geq 1}\big(Y_{j-1}^{(k)}(t-T_k) - V_{j-1}(t-T_k)\big)}{(t^{2j-1}\log\log t)^{1/2}} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Спочатку ми доведемо теорему 34 за допомогою твердження 40. Після цього буде наведено доведення твердження 40.

Доведення теореми 34. Згідно з твердженням 40 внесок першого доданка у формулі (3.31), нормалізованого функцією $(t^{2j-1}\log\log t)^{1/2}$, прямує до нуля при $t \to \infty$.

Для другого доданка у (3.31) запишемо

$$\sum_{k\geq 1} V_{j-1}(t-T_k) - V_j(t) = \int_{[0,\,t]} Y(t-x)\mathrm{d}V_{j-1}(x) - V_j(t)$$

$$= \int_{[0,\,t]} \big(Y(t-x)-(F*\nu)(t-x)\big)\mathrm{d}V_{j-1}(x) + \Big(\int_{[0,\,t]}(F*\nu)(t-x)\mathrm{d}V_{j-1}(x) - V_j(t)\Big)$$

$$=: A_1(t) + A_2(t).$$

Згідно з (3.8) $\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)-(F*\nu)(t)}{(t\log\log t)^{1/2}} = 0$ м.н., звідки

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{z\in[0,\,t]}\frac{|Y(z)-(F*\nu)(z)|}{(t\log\log t)^{1/2}} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Маючи це на увазі,

$$\frac{|A_1(t)|}{t^{j-1/2}(\log\log t)^{1/2}}$$

$$\leq \sup_{z\in[0,\,t]}\frac{|Y(z)-(F*\nu)(z)|}{(t\log\log t)^{1/2}}\cdot\frac{V_{j-1}(t)}{t^{j-1}} \longrightarrow 0 \quad \text{м.н.}, \quad t\to\infty,$$

$$\text{використовуючи } \frac{V_{j-1}(t)}{t^{j-1}} \longrightarrow \frac{1}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t\to\infty.$$

Далі

$$A_2(t) = (F*\nu*V_{j-1})(t) - V_j(t) = \int_{[0,\,t]}(F*V_{j-1})(t-x)\mathrm{d}(\nu(x)-U(x))$$

$$= \int_{[0,\,t]}(\nu(t-x)-U(t-x))\mathrm{d}(F*V_{j-1})(x).$$

Нагадаємо, що розподіл випадкової величини η є довільним. Зараз ми покажемо, що далі у цьому доведенні F можна замінити абсолютно неперервною функцією розподілу, яка має безпосередньо інтегровну за Ріманом (dRi) щільність.

Покладемо $G(x) := 1 - \mathrm{e}^{-x}$ для $x \geq 0$. Функція $H := F * G$ є абсолютно неперервною з щільністю $h(x) = \int_{[0,\,x]} \mathrm{e}^{-(x-y)}\mathrm{d}F(y)$ для $x \geq 0$. Оскільки $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ — dRi на $[0, \infty)$, то h — також dRi як згортка Лебега-Стілтьєса dRi функції та функції розподілу, див. лему 6.2.1 (c) в монографії [39]. Зазначимо, що $H(x) \leq F(x)$ для $x \geq 0$. Щоб показати, що ми можемо працювати з H замість F, достатньо перевірити, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(F * V_{j-1} * \nu)(t) - (H * V_{j-1} * \nu)(t)}{t^{j-1/2}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3.32}$$

та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(F * V_{j-1} * U)(t) - (H * V_{j-1} * U)(t)}{t^{j-1/2}} = 0. \tag{3.33}$$

Для рівності (3.33) запишемо

$$\begin{aligned}(F * V_{j-1} * U)(t) - (H * V_{j-1} * U)(t) &= \int_{[0,\,t]} (1 - G(t-x))\mathrm{d}V_j(x) \\ = \int_{[0,\,t]} \mathrm{e}^{-(t-x)}\mathrm{d}V_j(x) &\sim \Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y\Big) V_{j-1}(t) = V_{j-1}(t) \\ &\sim \frac{t^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t \to \infty,\end{aligned}$$

де асимптотичні рівності обґрунтовуються формулою (3.21) та теоремою 2 статті [53]. Отримане співвідношення доводить (3.33).

Для доведення (3.32) скористаємося лемою 39 з $K_1(t) = (F * V_{j-1})(t)$ та $K_2(t) = (H * V_{j-1})(t)$ для $t \geq 0$. Зауважимо, що $K_2(t) = \mathbb{E}K_1(t-\theta)\,\mathbb{1}_{\{\theta\leq t\}}$, де θ — випадкова величина з функцією розподілу G, і що

$$\begin{aligned}0 \leq \int_0^t (K_1(y) - K_2(y))\mathrm{d}y &= \int_0^t (K_1(y) - \mathbb{E}K_1(y-\theta)\,\mathbb{1}_{\{\theta\leq y\}})\mathrm{d}y \\ &= \int_0^t K_1(y)\mathrm{d}y \cdot \mathrm{e}^{-t} + \mathbb{E}\int_{t-\theta}^t K_1(y)\mathrm{d}y\,\mathbb{1}_{\{\theta\leq t\}}\,.\end{aligned}$$

Використовуючи співвідношення (3.21) у поєднанні з тауберовою теоремою Карамати (теорема 1.7.1 книги [7]), маємо

$$K_1(t) \sim K_2(t) \sim V_{j-1}(t) \sim \frac{t^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t \to \infty.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t K_1(y)\mathrm{d}y \cdot \mathrm{e}^{-t}}{K_1(t)} = 0$$

та, враховуючи монотонність,

$$\frac{\mathbb{E}\theta K_1(t-\theta)\, \mathbb{1}_{\{\theta\le t\}}}{K_1(t)} \le \frac{\mathbb{E}\int_{t-\theta}^t K_1(y)\mathrm{d}y\, \mathbb{1}_{\{\theta\le t\}}}{K_1(t)} \le \mathbb{E}\theta = 1.$$

За теоремою Лебега про мажоровану збіжність

$$\int_0^t (K_1(y) - K_2(y))\mathrm{d}y \sim K_1(t) \sim \frac{t^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}}, \quad t \to \infty.$$

Таким чином, умова (3.29) виконується з $\lambda = 2$. Отже, (3.32) виконується згідно з (3.30) з $c = 1/2$.

Із (3.32) та (3.33) випливає, що ми можемо досліджувати $\hat{A}_2(t) = \int_{[0,\,t]}(\nu(t-x) - U(t-x))\mathrm{d}(H * V_{j-1})(x)$ замість $A_2(t)$. Згідно з лемою 3.1 статті [43] існує версія стандартного броунівського руху $(W(t))_{t\ge0}$ така, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sup_{z\in[0,\,t]} |\nu(z) - U(z) - \sigma\mu^{-3/2}W(z)|}{(t\log\log t)^{1/2}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3.34}$$

Із цим конкретним процесом $(W(t))_{t\ge0}$ запишемо

$$\hat{A}_2(t) = \int_{[0,\,t]} \Big(\nu(t-x) - U(t-x) - \sigma\mu^{-3/2}W(t-x)\Big)\mathrm{d}(H * V_{j-1})(x)$$
$$+ \sigma\mu^{-3/2}\int_{[0,\,t]} W(t-x)\mathrm{d}(H * V_{j-1})(x) =: B_1(t) + \sigma\mu^{-3/2}B_2(t).$$

Тоді, використовуючи (3.34) та (3.21), маємо

$$|B_1(t)| \le \sup_{z\in[0,\,t]} |\nu(z) - U(z) - \sigma\mu^{-3/2}W(z)| \cdot (H * V_{j-1})(t)$$
$$\le \sup_{z\in[0,\,t]} |\nu(z) - U(z) - \sigma\mu^{-3/2}W(z)| \cdot V_{j-1}(t) = o((t^{2j-1}\log\log t)^{1/2}), \quad t \to \infty.$$

Залишається показати, що

$$C\left(\left(\frac{(j-1)!\mu^{j-1}B_2(t)}{(2(2j-1)^{-1}t^{2j-1}\log\log t)^{1/2}}\ :\ t>\mathrm{e}\right)\right)=[-1,1]\quad \text{м.н.}$$

Оскільки H абсолютно неперервна з dRi щільністю, то функція $H*V_{j-1}$ майже скрізь диференційовна з

$$(H*V_{j-1})'(x)=\int_{[0,\,x]}h(x-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y)\quad \text{для майже всіх } x\geq 0.$$

Отже,

$$\int_{[0,\,t]}W(t-x)\mathrm{d}(H*V_{j-1})(x)=\int_{[0,\,t]}W(t-x)(H*V_{j-1})'(x)\mathrm{d}x.$$

За теоремою 2 статті [53] для $j\geq 2$

$$\int_{[0,\,x]}h(x-y)\mathrm{d}V_{j-1}(y)\sim\int_0^\infty h(y)\mathrm{d}y\cdot\frac{x^{j-2}}{(j-2)!\mu^{j-1}}=\frac{x^{j-2}}{(j-2)!\mu^{j-1}},\quad x\to\infty. \tag{3.35}$$

Зокрема, $(H*V_{j-1})'$ правильно змінюється на нескінченності з показником $j-2$, і твердження 2.4 роботи [40] забезпечує виконання рівності

$$C\left(\left(\frac{(j-1)!\mu^{j-1}}{t^{j-1}}\frac{\int_{[0,\,t]}W(t-x)(H*V_{j-1})'(x)\mathrm{d}x}{(2(2j-1)^{-1}t\log\log t)^{1/2}}\ :\ t>\mathrm{e}\right)\right)=[-1,1]\quad \text{м.н.}$$

Тут ми використали те, що із співвідношення (3.35) випливає

$$(H*V_{j-1})(x)\sim\frac{x^{j-1}}{(j-1)!\mu^{j-1}},\quad x\to\infty,$$

див. твердження 1.5.8 книги [7]. Доведення теореми 34 завершено. □

Нарешті, ми доведемо твердження 40.

Доведення твердження 40. Покладемо

$$Z_j(t)=\sum_{k\geq 1}\left(Y_{j-1}^{(k)}(t-T_k)-V_{j-1}(t-T_k)\right)$$

для $t\geq 0$. Із співвідношення (3.25) випливає, що існують значення $t_0>0$ та $A>0$ такі, що $a_{j-1}(t)\leq At^{2j-3}$ для всіх $t\geq t_0$. Використовуючи такі ж міркування, як і в (3.28), маємо

$$\mathbb{E}(Z_j(t))^2=\int_{[0,\,t]}a_{j-1}(t-x)\mathrm{d}V(x)=O(t^{2j-2}),\quad t\to\infty. \tag{3.36}$$

З нерівності Маркова та (3.36) випливає, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left\{\frac{|Z_j(n^{3/2})|}{n^{(3/2)(j-1/2)}} > \varepsilon\right\} \leq \sum_{n\geq 1}\frac{\mathbb{E}(Z_j(n^{3/2}))^2}{\varepsilon^2 n^{3(j-1/2)}} < \infty.$$

Отже, за лемою Бореля-Кантеллі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Z_j(n^{3/2})}{n^{(3/2)(j-1/2)}} = 0 \quad \text{м.н.} \tag{3.37}$$

Залишається перейти від цілочисельного аргументу до неперервного. Для будь-якого $t \geq 0$ існує $n \in \mathbb{N}_0$ таке, що $t \in [n^{3/2}, (n+1)^{3/2})$. Використовуючи монотонність, маємо

$$\frac{Z_j(t)}{t^{j-1/2}} \leq \frac{Z_j((n+1)^{3/2})}{n^{(3/2)(j-1/2)}} + \frac{\int_{[0,\,(n+1)^{3/2}]} V_{j-1}((n+1)^{3/2}-x)\mathrm{d}Y(x) - \int_{[0,\,n^{3/2}]} V_{j-1}(n^{3/2}-x)\mathrm{d}Y(x)}{n^{(3/2)(j-1/2)}}.$$

Співвідношення (3.37) гарантує, що перший доданок у правій частині збігається до 0 м.н. при $n \to \infty$. Чисельник другого доданку дорівнює

$$\int_{(n^{3/2},(n+1)^{3/2}]} V_{j-1}((n+1)^{3/2}-x)\mathrm{d}Y(x) + \int_{[0,n^{3/2}]}(V_{j-1}((n+1)^{3/2}-x) - V_{j-1}(n^{3/2}-x))\mathrm{d}Y(x) =: X_{j,1}(n) + X_{j,2}(n).$$

За монотонністю, для $j \geq 2$

$$X_{j,1}(n) \leq V_{j-1}((n+1)^{3/2}-n^{3/2})(Y((n+1)^{3/2}) - Y(n^{3/2})) = O(n^{j/2+1}) = o(n^{(3/2)(j-1/2)})$$

м.н. при $n \to \infty$. Тут передостання рівність обґрунтовується нерівністю $Y(t) \leq \nu(t)$ для $t \geq 0$, посиленим законом великих чисел для процесів відновлення $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\nu(n) = \mu^{-1}$ м.н. та $V_{j-1}((n+1)^{3/2}-n^{3/2}) = O(n^{(j-1)/2})$ при $n \to \infty$, що випливає із (3.21).

Використовуючи (3.23), робимо висновок, що

$$X_{j,2}(n) \leq U((n+1)^{3/2}-n^{3/2})(V((n+1)^{3/2}))^{j-2}Y(n^{3/2}) = O(n^{(3/2)(j-2/3)}) = o(n^{(3/2)(j-1/2)})$$

м.н. при $n \to \infty$. Передостання рівність забезпечується елементарною теоремою відновлення, посиленим законом великих чисел для процесів відновлення та нерівністю $Y(t) \le \nu(t)$ для $t \ge 0$.

Ми показали, що

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-(j-1/2)} Z_j(t) \le 0 \quad \text{м.н.}$$

Аналогічні міркування доводять обернену нерівність для нижньої границі. Твердження 40 доведено. □

Висновки до розділу 3

У цьому розділі встановлено повну версію закону повторного логарифма для величин $Y(t)$, що є значеннями лічильного процесу збуреного випадкового блукання у моменти часу t. Відомий раніше закон повторного логарифма був доведений у випадку, коли $t \to \infty$ вздовж натуральних чисел, та за додаткової умови існування скінченного степеневого моменту збурення η. Нами показано, що ці обмеження не є необхідними: достатньою є лише скінченна дисперсія ξ, а сам закон повторного логарифма справджується для $t \to \infty$ вздовж додатних чисел. Наш результат дає точний опис меж флуктуацій процесу без додаткових припущень щодо розподілу η, що суттєво розширює область застосувань.

Другим основним результатом є закон повторного логарифма для ітерованих збурених випадкових блукань Y_j, $j \ge 2$, що виникають у гіллястих та ієрархічних стохастичних моделях. Отримана теорема узагальнює відомі закони повторного логарифма для ітерованих стандартних блукань на більш широкий клас процесів із довільними збуреннями η та визначає точний порядок флуктуацій $(t^{2j-1} \log\log t)^{1/2}$. Цей результат заповнює прогалину у теорії та встановлює асимптотичні межі поведінки процесів.

Методологічно робота у цьому розділі спирається на нові засоби контролю флуктуацій мартингалів і точні оцінки для ітерованих функцій відновлення, що дозволило відмовитися від моментних обмежень на η. Підсумовуючи, у даному розділі отримано остаточні форми законів повторного логарифма для збурених та ітерованих збурених блукань, що відкриває можливості для подальших застосувань у дослідженні випадкових дерев, рекурсивних структур, процесів у випадковому середовищі та моделей із багаторівневою випадковістю.

ВИСНОВКИ

Дана дисертаційна робота є внеском до теорії узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі та до розвитку теорії ітерованих збурених випадкових блукань. Досліджено граничну поведінку числа зайнятих комірок на початкових та проміжних рівнях узгоджених схем зайнятості у випадковому середовиші. Отримано закони повторного логарифма для лічильних процесів ітерованих збурених випадкових блукань.

Серед отриманих в дисертаційній роботі результатів слід виділити такі.

(1) Вперше доведено багатовимірну функціональну граничну теорему без центрування для кількості зайнятих комірок на початкових рівнях узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі. Наведено приклад використання отриманої теореми.

(2) Доведено збіжність скінченновимірних розподілів процесу зайнятих комірок на проміжних рівнях узгоджених схем зайнятості у випадковому середовищі, породженому процедурою ламання палиці.

(3) Отримано закон повторного логарифма для лічильного процесу збуреного випадкового блукання без жодних припущень щодо випадкової величини, що задає збурення.

(4) Також встановлено закони повторного логарифма для лічильних процесів початкових рівнів ітерованого збуреного випадкового блукання без жодних припущень щодо випадкової величини, що задає збурення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Aistleitner, C., Frühwirth, L., Prochno, J.: Diophantine conditions in the law of the iterated logarithm for lacunary systems. Probab. Theory Relat. Fields **192**, 545–574 (2025)

[2] Alsmeyer, G., Iksanov, A., Marynych, A.: Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. Stochastic Process. Appl. **127**(3), 995–1017 (2017)

[3] Bahadur, R.R.: On the number of distinct values in a large sample from an infinite discrete distribution. Proceedings of the National Institute of Sciences of India. Part A **26**, 67–75 (1960)

[4] Basrak, B., Conroy, M., Olvera-Cravioto, M., Palmowski, Z.: Importance sampling for maxima on trees. Stochastic Process. Appl. **148**, 139–179 (2022)

[5] Bertoin, J.: Asymptotic regimes for the occupancy scheme of the multiplicative cascades. Stochastic Process. Appl. **118**(9), 1586–1605 (2008)

[6] Billingsley, P.: Convergence of probability measures. Wiley (1999)

[7] Bingham, N., Goldie, C., Teugels, J.: Regular variation. Cambridge University Press (1987)

[8] Bohdanskyi, V., Bohun, V., Marynych, A., Samoilenko, I.: Arithmetic properties of multiplicative integer-valued perturbed random walks. Mod. Stoch. Appl. **11**, 133–148 (2024)

[9] Bohun, V., Iksanov, A., Marynych, A., Rashytov, B.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations. J. Appl. Probab. **59**, 421–446 (2022)

[10] Boucheron, S., Gardy, D.: An urn model from learning theory. Random Struct. Algorithms **10**, 43–69 (1997)

[11] Braganets, O.: Laws of the iterated logarithm for iterated perturbed random walks. Modern Stochastics: Theory and Applications **13**(1), 19–38 (2026)

[12] Braganets, O., Iksanov, A.: A limit theorem for a nested infinite occupancy scheme in random environment. Austrian J. Stat. **52**, 1–12 (2023)

[13] Braganets, O., Iksanov, A.: On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking: the case of heavy tails. Probab. Math. Stat. **45**(1), 1–32 (2025)

[14] Bunge, J., Fitzpatrick, M.: Estimating the number of species: A review. J. Amer. Statist. Assoc. **88**, 364–373 (1993)

[15] Buraczewski, D., Dovgay, B., Iksanov, A.: On intermediate levels of nested occupancy scheme in random environment generated by stick-breaking I. Electron. J. Probab. **25**, 1–24 (2020)

[16] Buraczewski, D., Iksanov, A., Kotelnikova, V.: Laws of the iterated and single logarithm for sums of independent indicators, with applications to the Ginibre point process and Karlin's occupancy scheme. Stochastic Process. Appl. **183**, article 104 597 (2025)

[17] Businger, S.: Asymptotics of the occupancy scheme in a random environment and its applications to tries. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **19**(1), 1–22 (2017)

[18] Carlsson, H., Nerman, O.: An alternative proof of Lorden's renewal inequality. Adv. in Appl. Probab. **18**, 1015–1016 (1986)

[19] Carmona, P., Petit, F., Yor, M.: Exponential functionals and principal values related to Brownian motion. Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana pp. 73–130 (1997)

[20] Cheng, F.: The law of the iterated logarithm for L_p-norms of kernel estimators of cumulative distribution functions. Mathematics **12**(7) (2024)

[21] Chow, Y., Teicher, H.: Probability theory: independence, interchangeability, martingales, 3rd edn. Springer (2003)

[22] Duchamps, J.J., Pitman, J., Tang, W.: Renewal sequences and record chains related to multiple zeta sums. Trans. Amer. Math. Soc. **371**, 5731–5755 (2019)

[23] Galganov, O., Ilienko, A.: Scaling limit for small blocks in the Chinese restaurant process. Stochastic Process. Appl. **192**, article 104 793 (2026)

[24] Gardy, D.: Occupancy urn models in the analysis of algorithms. J. Stat. Plan. Inference **101**, 95–105 (2002)

[25] Garza, J., Wang, Y.: Limit theorems for random permutations induced by Chinese restaurant processes **Preprint arxiv 2412.02162** (2024)

[26] Garza, J., Wang, Y.: A functional central limit theorem for weighted occupancy processes of the Karlin model. Stochastic Process. Appl. **188**, article 104 665 (2025)

[27] Gnedin, A.: The representation of composition structures. Ann. Probab. **32**(3), 2378–2389 (2004)

[28] Gnedin, A.: The Bernoulli sieve. Bernoulli **13**(4), 1124–1146 (2007)

[29] Gnedin, A., Hansen, B., Pitman, J.: Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes: general asymptotics and power laws. Probability Surveys **4**, 146 – 171 (2007)

[30] Gnedin, A., Iksanov, A.: On nested infinite occupancy scheme in random environment. Probab. Theory Related Fields **177**, 855–890 (2020)

[31] Gnedin, A., Iksanov, A., Marynych, A.: The Bernoulli sieve: an overview. Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **DMTCS Proceedings vol. AM, 21st International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods in the Analysis of Algorithms (AofA'10)**, 329–341 (2010)

[32] Gnedin, A., Pitman, J.: Exchangeable Gibbs partitions and Stirling triangles. J. Math. Sci. **138**(3), 5674–5685 (2005)

[33] Gnedin, A., Pitman, J.: Regenerative composition structures. Annals of Probability **33**(2), 445–479 (2005)

[34] Gnedin, A.V.: The Bernoulli sieve. Bernoulli **10**(1), 79–96 (2004)

[35] Hartman, P., Wintner, A.: The law of the iterated logarithm. Amer. J. Math. **63**, 169–176 (1941)

[36] Hawkes, J.: A lower Lipschitz condition for the stable subordinator. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **17**, 23–32 (1971)

[37] He, F., Gaston, K.: Estimating species abundance from occurrence. Amer. Nat. **156-5**, 553–559 (2000)

[38] Iksanov, A.: Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions. Stochastic Process. Appl. **123**, 1987–2010 (2013)

[39] Iksanov, A.: Renewal theory for perturbed random walks and similar processes. Birkhäuser (2016)

[40] Iksanov, A., Jedidi, W.: A law of the iterated logarithm for the number of blocks in regenerative compositions generated by gamma-like subordinators. Electron. Commun. Probab. **29**, article 74 (2024)

[41] Iksanov, A., Jedidi, W., Bouzeffour, F.: A law of the iterated logarithm for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. Statist. Probab. Lett. **126**, 244–252 (2017)

[42] Iksanov, A., Kabluchko, Z., Kotelnikova, V.: A functional limit theorem for nested Karlin's occupancy scheme generated by discrete Weibull-like distributions. J. Math. Anal. Appl. **507(2)**, article 125 798 (2022)

[43] Iksanov, A., Kabluchko, Z., Kotelnikova, V.: A law of the iterated logarithm for iterated random walks, with application to random recursive trees. ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **22**, 169–181 (2025)

[44] Iksanov, A., Kondratenko, O.: Limit theorems for globally perturbed random walks. Stoch. Models, to appear (2026). DOI https://doi.org/10.1080/15326349.2025.2499288

[45] Iksanov, A., Kotelnikova, V.: Small counts in nested Karlin's occupancy scheme generated by discrete Weibull-like distributions. Stochastic Process. Appl. **153**, 283–320 (2022)

[46] Iksanov, A., Kotelnikova, V.: A law of the iterated logarithm for small counts in Karlin's occupancy scheme. Mod. Stoch.: Theory Appl. **11**(2), 217–245 (2024)

[47] Iksanov, A., Mallein, B.: Late levels of nested occupancy scheme in random environment. Stoch. Models **38**(1), 130–166 (2022)

[48] Iksanov, A., Marynych, A., Meiners, M.: Moment convergence of first-passage times in renewal theory. Stat. Probab. Letters. **119**, 134–143 (2016)

[49] Iksanov, A., Marynych, A., Rashytov, B.: Stable fluctuations of iterated perturbed random walks in intermediate generations of a general branching process tree. Lithuanian Math. J. **62**, 447–466 (2022)

[50] Iksanov, A., Marynych, A., Samoilenko, I.: On intermediate levels of a nested occupancy scheme in a random environment generated by stick-breaking II. Stochastics **94**(7), 1077–1101 (2022)

[51] Iksanov, A., Pilipenko, A., Samoilenko, I.: Functional limit theorems for the maxima of perturbed random walk and divergent perpetuities in the M_1-topology. Extremes **20**(3), 567–583 (2017)

[52] Iksanov, A., Rashytov, B.: Functional limit theorem without centering for general shot-noise processes. Ukr. Math. J. **73**(2), 181–202 (2021)

[53] Iksanov, A., Rashytov, B., Samoilenko, I.: Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: Early generations. J. Appl. Probab. **60**(1), 45–67 (2023)

[54] Ivchenko, G.I.: Moments of separable statistics in a generalized distribution scheme. Mat. Zametki **39**(2), 283–294 (1986)

[55] Joseph, A.: A phase transition for the heights of the fragmentation tree. Random Structures Algorithms **39**(2), 247–274 (2011)

[56] Karlin, S.: Central limit theorems for certain infinite urn schemes. J. Math. Mech. **17**(4), 373–401 (1967)

[57] Klass, M.J.: Toward a universal law of the iterated logarithm, Part II. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **39**(2), 151–165 (1977)

[58] Manstavičius, E.: On a variance related to the Ewens sampling formula. Nonlinear Anal. Model. Control **16**(4), 441–451 (2011)

[59] Medvedev, Y.: Decomposable statistics in a multinomial scheme. II. Teor. Verojatnost. i Primenen. **22**(3), 623–631 (1977)

[60] Mirakhmedov, S.A.: Approximation of the distribution of multidimensional randomized divisible statistics by normal distributions. Theory Probab. Appl. **32**(2), 299–306 (1987)

[61] Mitov, K., Omey, E.: Renewal processes. Springer, Cham (2014)

[62] Owada, T., Samorodnitsky, G.: Functional central limit theorem for heavy tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. Ann, Probab. **43**(1), 240–285 (2015)

[63] Paulauskas, V.: Estimates of the remainder term in limit theorems in the case of stable limit law. Lith. Math. J. **14**, 127–146 (1974)

[64] Pitman, J., Tang, W.: Regenerative random permutations of integers. Ann. Probab. **47**, 1378–1416 (2019)

[65] Pitman, J., Yakubovich, Y.: Extremes and gaps in sampling from a GEM random discrete distribution. Electron. J. Probab. **26** (2017)

[66] Pitman, J., Yakubovich, Y.: Gaps and and interleaving of point processes in sampling from a residual allocation model. Bernoulli **25**, 3623–3651 (2019)

[67] Stout, W.F.: A martingale analogue of Kolmogorov's law of the iterated logarithm. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **15**, 279–290 (1970)

[68] Strassen, V.: Almost sure behavior of sums of independent random variables and martingales. In: Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. Probab., vol. 2, pp. 315–343. University of California Press, Berkeley, CA (1967)

[69] Wendel, J.G.: Note on the gamma function. Amer. Math. Monthly **55**, 563–564 (1948)

[70] Wong, J., Wong, R.: On asymptotic solutions of the renewal equation. J. Math. Analys. Appl. **53**, 243–250 (1976)

[71] Yamazato, M.: On a J_1-convergence theorem for stochastic processes on $D[0,\infty)$ having monotone sample paths and its applications. RIMS Kôkyûroku **1620**, 109–118 (2009). URL `http://hdl.handle.net/2433/140220`