УДК 518.85
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.39

Рець В.О., аспірант

Розв'язання задачі комівояжера на основі методу відпалу з урахуванням нечіткості сприйняття плину часу

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 83000, м.Київ, Глушкова 4д,
e-mail: vadym.rets@gmail.com

V.O. Rets, post-graduate

Solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 83000, Kyiv, Glushkova st., 4d,
e-mail: vadym.rets@gmail.com

У статті досліджується використання нечітких чисел і методу відпалу для пошуку розв'язків задачі комівояжера з урахуванням суб'єктивного сприйняття плину часу в реальних умовах руху, що дозволяє сформулювати нечітку оптимізаційну задачу для знаходження найкращого значення цільової функції, яка визначається величиною необхідного для подорожі між містами часу. Задача комівояжера (traveling salesman problem, TSP) — це класична задача комбінаторної оптимізації, яка передбачає пошук найкоротшого або найбільш швидкого маршруту між набором міст. Для формалізації невизначеності та неточності вхідних даних, пов'язаної з впливом суб'єктивності в оцінках тривалості необхідних проміжків часу, використовуються нечіткі числа. Їх застосування обумовлено можливістю конструктивного формулювання обмежень реального світу та факторів, які можуть вплинути на результат розв'язування задачі. Розглянуто метод відпалу для оптимізації розв'язків задачі комівояжера шляхом поступового зниження енергії системи, що дозволяє досліджувати різні розв'язки та уникати локальних мінімумів. Отримано результати, які підтвердили ефективність цього підходу. Розроблено програму, яка використовувалася для порівняння результатів задачі комівояжера з використанням чітких і нечітких чисел на основі методу відпалу. Отримано висновок, який свідчить, що використання нечітких чисел, зокрема трикутних та параболічних, із методом відпалу призводить до покращення результатів задачі порівняно з використанням чітких чисел за умов припущення реалістичності моделі з можливими відхиленнями від очікуваного фіксованого середнього. Представлено та проаналізовано результати обчислень програми, що демонструє потенціал цього підходу для реальних оптимізаційних процесів з використанням неточних або невизначених даних та врахуванням суб'єктивних оцінок в параметрах, зокрема, при вимірюванні швидкості плину часу.

Ключові слова: задача комівояжера, нечіткі числа, метод відпалу, комбінаторна оптимізація, суб'єктивне сприйняття плину часу, неточність, невизначеність.

This paper investigates the use of fuzzy numbers and the annealing method to improve the results of the traveling salesman problem (TSP) by more accurately representing real-world circumstances, where the value of the objective function represents the subjective perception of the length of the time interval required to travel between cities. TSP is a classic combinatorial optimization problem that involves finding the shortest route between a set of cities. Fuzzy numbers are used to model input inaccuracy and uncertainty, as they allow for a more detailed representation of real-world constraints and factors that may affect the problem. The annealing method is used to optimize the TSP solution by gradually decreasing the temperature of the system, which allows exploring different solutions and avoiding getting stuck in local minima. To demonstrate the effectiveness of this approach, a Python program was developed that was used to compare the results of the TSP problem using crisp and fuzzy numbers using the annealing method. The results show that the use of fuzzy numbers, particularly triangular and parabolic, with the annealing method leads to a significant improvement in the results of the TSP problem compared to the use of crisp numbers, assuming a model is called realistic if it has possible deviations from the expected fixed mean. Computational results of the program are presented and analyzed, demonstrating the potential of this approach for real-world optimization problems involving imprecise or uncertain data and which can be particularly applied to the optimization of processes with subjective time perception.

Keywords: traveling salesman problem, fuzzy numbers, simulated annealing, combinatorial optimization, subjective perception of time, imprecision, uncertainty.

Статтю представив д.т.н. Кудін В.І.

Вступ. Спосіб прийняття рішень в соціумі в багатьох випадках залежить від емоційного стану людини. Почуття подібні орієнтиру, який визначається метою, на яку впливають різні фактори. Емоції можуть бути причиною поведінки, яка підходить для конкретної ситуації, навіть для випадків, коли вона не є найефективнішою, але дозволяє уникнути будь-яких наслідків, які можуть виникнути через перевищення певного часового обмеження.

На ці фактори слід звернути особливу увагу у процесах формування та вдосконалення багатьох теоретичних ідей у галузі моделювання людської поведінки, однією з яких є адаптація фізичних і математичних моделей до реального життя. Це дає можливість поєднати силу обчислювальних методів з особливостями людської поведінки. Такого роду задачі є поширеними у контексті застосування методів і алгоритмів штучного інтелекту, створення систем підтримки прийняття рішень, вирішення питань розподілу ресурсів з урахуванням людського фактору тощо.

Час є важливим ресурсом у діяльності, яка передбачає участь людини. Оцінка часових інтервалів є фундаментальною для розуміння часових рамок, навіть якщо точні межі інтервалу можуть бути не визначені, доки процес не досягне певної стадії. Таким чином, період часу зазвичай визначається невизначеним інтервалом, який можна приблизно передбачити, враховуючи характер плину часу, якщо розглядати задані межі інтервалу як даність. Щоб виміряти часові інтервали, їх можна виразити такими фразами, як «швидка відповідь», «звичайний часовий відлік» або «тривале очікування». Це означає, що при вирішенні задач, які вимагають вербальних термінів для посилання на час, важливо брати до уваги варіацію часу. Зрозуміло, що емоції мають великий вплив на розуміння часу в процесах, які залучають людину [1].

Для того, щоб знайти найбільш успішне чи ефективне рішення проблем, необхідно враховувати фактори, що впливають на емоції людини і, отже, на швидкість сприйняття часу, розподіл ресурсів і календарне планування. У роботі пропонується розробити підхід до формалізації обліку плину часу на основі нечітких чисел і застосувати його для вирішення певних задач нечіткої оптимізації, пов’язаних із врахуванням нечіткого сприйняття часу, що виникає внаслідок суб’єктивності та нерегулярності часового відліку.

Задача комівояжера. Задача комівояжера (traveling salesman problem, TSP) є однією з найвідоміших обчислювальних задач оптимізації. Завдання полягає в тому, щоб для заданої кількості міст знайти найкоротший маршрут, що проходить через кожне місто рівно один раз. Пошук такого шляху було сформульовано у вигляді математичної задачі в 1930 році й досі є однією з найбільш інтенсивно досліджуваних проблем оптимізації [2].

Кількість альтернативних шляхів для TSP з *n* вузлами, де вузли – це місто, а ребра – вартість переміщення між двома містами, становить *(n-1)!*. Отже, навіть для невеликих проблем, як, наприклад, представлена лише з 20 вузлами, кількість альтернативних шляхів становить близько 1.2×10^{17}, для перегляду яких шляхом повного перебору немає відповідних обчислювальних потужностей.

Математичне формулювання типової проблеми комівояжера може бути показано у рівнянні:

$$\mathrm{Z} = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{d}_{ij}\mathrm{x}_{ijt}$$

Тут:

- n – кількість зупинок, які необхідно відвідати; кількість вузлів у мережі
- i, j, k – індекси зупинок, які можуть приймати цілі значення від 1 до n
- t – період часу або крок у маршруті між зупинками
- x_{ijt} – 1, якщо шлях від i до j використовується на t кроці маршруту, 0 в іншому випадку
- d_{ij} – відстань або вартість шляху від зупинки i до зупинки j

Сформульована задача оптимізації може бути розв’язана за допомогою жадібного алгоритму або будь-якого з доступних алгоритмів оптимізації, таких як генетичний алгоритм, пошук табу, оптимізація колонії мурашок, алгоритм розгалуження та зв’язку тощо [3].

Динамічна задача комівояжера (DTSP) – це TSP, яка визначається динамічною матрицею вартості (відстані) таким чином:

$$D(t) = \{d_{ij}(t)\}_{\{n(t)\times n(t)\}}$$

де $d_{ij}(t)$ — вартість від міста (вузла) i до міста j, у момент часу t. У цьому визначенні кількість міст $n(t)$ і матриця витрат залежать від часу. Динамічна задача комівояжера полягає в тому, щоб знайти маршрут з мінімальною вартістю, який містить усі $n(t)$ вузлів.

Іншими словами, маючи всі $n(t)$ $(P_1, P_2, \ldots P_{n(t)})$ вузлів, і відповідну матрицю витрат

$$D = \{d_{ij}(t)\}, i, j = 1,2, \ldots, n(t),$$

потрібно знайти маршрут з мінімальною вартістю, що містить усі $n(t)$ точок, де t - це момент часу, $d_{ij}(t)$ - відстань між точками P_i та P_j:

$$min\left(d\big(T(t)\big)\right) = \min\left(\sum_{i=1}^{n(t)} d_{T_i,T_{i+1}}(t)\right)$$

де $T \in \{1, 2, \ldots, n(t)\}$ якщо $i \neq j$, то $T_i \neq T_j$, $T_{n(t)+1} = T_1$.

Зміна матриці витрат D з часом є неперервним процесом. Практично ж для побудови аналітичних моделей необхідно дискретизувати цей процес змін. Таким чином, D стає серією задач оптимізації:

$$D(t_k) = \{d_{ij}(t_k)\}_{n(t_k)\times n(t_k)}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$, з часовими вікнами $[t_k, t_{k+1}]$, де $\{t_k\}_{i=0}^{m}$ це послідовність часових точок.

Метод відпалу. Одним із методів розв'язку проблеми комівояжера за допомогою методики комбінаторної оптимізації є метод відпалу. За аналогією з процесом відпалу різних фізичних матеріалів, при якому шляхом підвищення його температури до високої, а потім поступового її зниження, в алгоритмі випадково збурюється вихідний шлях («нагрівання») для подальшого поступового зниження «температури» [4].

При моделюванні процесу відпалу аналогом температури вважається рівень випадковості, за допомогою якої вносяться зміни до шляху, який надалі покращується за своєю тривалістю. Коли «температура» процесу висока, відбуваються зміни для уникнення небезпеки потрапляння до локального мінімуму з подальшим контролем за оптимальним значенням при послідовному зниженні «температури». «Температура» спадає серією кроків за експоненціальним графіком спаду, при чому на кожному кроці температура нижча, ніж раніше.

Нечіткий облік часу. У повсякденному житті часто вживаються такі вирази, як «майже шість», «досить високий», «недостатньо короткий», щоб визначити певну величину в наближеному форматі. Такий спосіб оцінювання, як наслідок, потребує формалізації недостатньо чітко визначених оцінок для їх практичного застосування у математичних моделях. З цією метою можна використати поняття, які дозволяють подати суб'єктивне або інтуїтивне значення розмитих понять у конструктивному вигляді. Одним з таких понять формалізації невизначеності є нечіткі числа [5].

Нечіткі числа застосовуються для отримання результатів у задачах, пов'язаних із прийняттям рішень і аналізом. Нечіткі числа, визначені на числовому просторі, є розширенням дійсних чисел, мають свої властивості, які можна віднести до теорії чисел. Для розуміння нечітких чисел та їх підвидів – трикутних та параболічних чисел розглянемо поняття нечіткої множини.

Нехай E – множина зі скінченною або нескінченною кількістю елементів. Нехай A – множина, що міститься в E. Тоді множина впорядкованих пар $(x, \mu_A(x))$ задає нечітку підмножину $\widetilde{A}$ для E, де x – елемент в E, а $\mu_A(x)$ – ступінь приналежності x до A. Множина елементів з A, для яких $\mu_A(x)>0$, утворюють носій нечіткої множини (опорну множину).

Нечітке число є узагальненням звичайного дійсного числа. Воно відноситься до зв'язної множини можливих значень, де кожне можливе значення має власну вагу від 0 до 1. Таким чином, нечітке число є окремим випадком опуклої нормалізованої нечіткої множини на просторі дійсних чисел. Серед можливих типів нечітких чисел в роботі розглядаються трикутні та параболічні числа.

Нечітке число $\tilde{A} = (a, b, c)$ називається трикутним нечітким числом, якщо його функція належності виглядає наступним чином:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c \\ 0, & x > c \end{cases}$$

Над трикутними числами (рис. 1) можна визначити основні арифметичні дії для подальшого застосування у розрахунках.

Нехай $A = (a, b, c)$ і $B = (a1, b1, c1)$ — два трикутні числа. Тоді:

- Сума визначається як $A + B = (a{+}a1, b{+}b1, c{+}c1)$.
- Різниця визначається як $A - B = A + (-B) = (a{-}c1, b{-}b1, c{-}a1)$, де $-B = (-c1, -b1, -a1)$ визначається як число, протилежне B.

Іншими словами, протилежні трикутні числа, а також їх сума та різниця також є трикутними числами. Варто також зазначити, що результати обернення та множення трикутних чисел таку властивість не зберігають і не завжди представляють собою трикутні числа.

Параболічне число (рис. 1) задається аналогічно і має ті ж властивості, але має іншу функцію належності:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ -\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 + 1, & a \le x \le b \\ -\left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2 + 1, & b \le x \le c \\ 0, & x > c \end{cases}$$

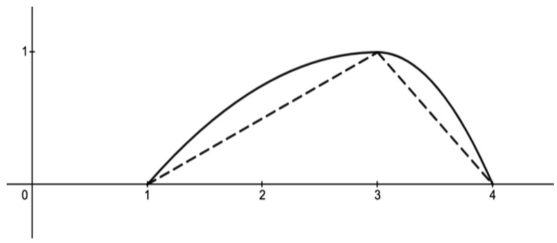

Рис. 1

Незважаючи на те, що інформацію про невизначеність можна формалізувати за допомогою нечітких чисел, процедура прийняття рішень має бути чіткою. Наприклад, кінцевий вихід нечітких систем та вибір відповідних рішень мають бути обґрунтовані на основі значення, що характеризується показником впевненості (важливості). Для отримання чіткого значення використовуються методи розрахунку рангів (дефазифікації) нечітких чисел, що по суті є чіткими числами-представниками, та можуть бути використані як узагальнені значення для подальших розрахунків. Одним із методів розрахунку рангу нечіткого числа є метод Ягера, за яким обчислюється ранг Ягера першого типу у вигляді [6]:

$$\mathrm{F1}(\tilde{A}) = \frac{\int_0^1 g(x)\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A}}(x)dx}$$

де *g(x)* — вагова функція, що вимірює важливість значення *x*. Якщо *g(x) = x*, індекс можна розглядати як геометричний центр $\tilde{A}$, як показано на малюнку 1. Опорою нечіткого числа в даному випадку є відрізок *[0, 1]*. Якщо опорні множини нечітких чисел, що порівнюються, не співпадають з *[0, 1]*, тоді їх можна масштабувати шляхом ділення кожного з чисел на $max[sup\ S_{\tilde{A}_i}]$, де $S_{\tilde{A}_i}$ позначає опорну множину *i*-того нечіткого числа. Використання цієї процедури масштабування дасть коефіцієнт $1/max[sup\ S_{\tilde{A}_i}]$ (1, якщо масштабування не використовується). Межі інтегрування в такому випадку будуть $min[inf\, S_{\tilde{A}_i}]$ та $max[sup\ S_{\tilde{A}_i}]$ відповідно.

Якщо *g(x) = x* та нечітке число є трикутним, індекс *F1* зводиться до простішого вигляду:

$$F1(\tilde{A}) = \frac{1}{3}(a + b + c),$$

а у випадку параболічного числа:

$$F1(\tilde{A}) = \frac{1}{8}(3a + 2b + 3c),$$

де $a = inf\, S_{\tilde{A}}$, $\mu_{\tilde{A}}(\mathrm{b}) = 1$, $c = sup\ S_{\tilde{A}}$.

Даний метод дефазифікації також називають методом центру тяжіння (COG, Center of Gravity) [7] (рис. 2). Серед інших відомих методів також варто зазначити метод бісектора площі (BOA, Bisector of Area) [8], за яким знаходиться таке значення *x*, щоб проведена через нього вертикальна лінія розділяла нечітке число на дві рівні за площею частини.

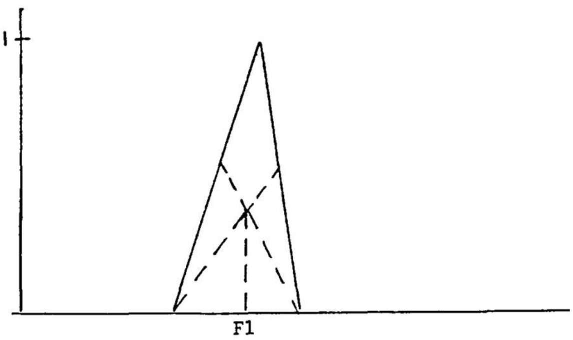

Рис. 2

Пропозиція. Враховуючи, що «вартість» подорожі між містами у часовому вимірюванні може різнитись в залежності від ситуації, більш точним представленням такої вартості може бути задано у вигляді трикутних або параболічних чисел. Якщо в якості вартості обрати суб'єктивне сприйняття часу, відносна тривалість подорожі між містами може змінюватись в залежності від факторів, що впливають на шлях – затори, погана погода, тощо. Зауважимо, що навіть у більш простому сприйнятті динамічної тривалості дороги між містами, коли вимірюється фактичний час, що потрібен на подолання шляху із рекомендованою середньою швидкістю, ті ж фактори змінюють дану тривалість, і тому є сенс представляти досліджуваний час шляху у вигляді трикутних чи параболічних чисел.

Використовуючи один із комбінаторних методів наближеного розв'язку задачі комівояжера у поєднанні з нечіткими числами (та відповідним методом розрахунку їх рангу), можна досягнути ефективного результату з побудови оптимального шляху з врахуванням динамічних особливостей доріг між пунктами призначення.

При цьому, якісніші розрахунки можна отримати при використанні нечітких параболічних чисел, оскільки їх сутність є більш наближеною до реальності. Для суб'єктивної переоцінки чи недооцінки сприйняття плину часу справедливе правило: чим більше можливе відхилення у сприйнятті, тим менша ймовірність його отримання. Для чисельної реалізації дій алгоритму відпалу над нечіткими числами, що задають облік часового сприйняття тривалості руху між містами, використовуються операції за наведеними вище схемами, а утворені при цтому різні маршрути порівнюються між собою за допомогою знаходження та порівняння рангів нечітких чисел одним із вказаних методів.

Результати. В ході дослідження було реалізовано описаний алгоритм на основі методу відпалу з використанням нечітких чисел для представлення суб'єктивного сприйняття плину часу на ділянках доріг між містами. Для проведення чисельних розрахунків запропоновано багатопотокову реалізацію мовою Python. В процесі роботи обирається метод вираховування рангу нечітких чисел та порівняння значень рангів різних методів (використання пікової абсциси, BOA, COG) із середнім значенням випадкових проходжень. Зроблено висновок, що найкращий результат отримано методом центру тяжіння (COG). Порівняння методів оцінки маршруту наведено у таблиці, де випадковий маршрут характеризує час руху за маршрутом з урахуванням середньої швидкості, розрахований маршрут – отриману оцінку тривалості обраним методом:

Метод	Випадковий маршрут	Розрахований маршрут
Пікова абсциса	5367.78	5046.0
BOA (трикутні НЧ)	5332.54	5291.72
BOA (параб. НЧ)	5369.91	5341.70
COG (трикутні НЧ)	5332.40	**5332.86**
COG (параб. НЧ)	5369.67	**5368.72**

Під час роботи програми відбувається порівняння трьох можливих підходів для пошуку розв'язків (використання чітких, трикутних та параболічних чисел відповідно). В якості початкових умов було використано бібліотеку TSPLib, яка має в своєму каталозі відомі умови TSP у вигляді масивів координат або матриць умовних відстаней між містами. Нечіткі початкові умови були згенеровані випадковим чином з можливим відхиленням від очікуваного значення в обидві сторони. Для перевірки запропонованого підходу проводилось порівняння часу найкращих побудованих результатів для кожного типу нечітких чисел з середнім значенням витраченого часу 10^5 випадкових проходжень побудованим маршрутом. Результати роботи наведено у таблиці:

Задача	Тип чисел	Очікуваний час	Фактичний час
u16	чіткі	6859.0	7247.38
	трик.	6859.0	7129.38
	параб.	6859.0	**7128.92**
gr4	чітк.	5046.0	5369.57
	трик.	5071.0	5369.30
	параб.	5070.0	**5363.88**
pr76	чітк.	108273.0	115105.75
	трик.	108894.0	**114102.55**
	параб.	109295.0	114563.41
rd100	чітк.	8185.0	8653.50
	трик.	7975.0	**8390.85**
	параб.	8049.0	8447.22
rd400	чітк.	18070.0	19087.33
	трик.	18089.0	19008.33
	параб.	17808.0	**18713.72**

Таким чином, зроблено висновок, що використання нечітких чисел у алгоритмі відпалу дозволяє отримати констуктивні результати при розв'язуванні задачі комівояжера з нечіткими вхідними параметрами.

Висновки. У цій статті досліджується використання нечітких чисел і методу відпалу для пошуку розв'язку задачі комівояжера, яка передбачає пошук найкоротшого за часом маршруту для заданого набору міст. Нечіткі числа використовуються для моделювання неточності та невизначеності вхідних даних, для знаходження розв'язків запропоновано метод відпалу. Проаналізовано отримані на основі розробленої програми мовою Python розв'язки. Проведено порівняння результатів задачі TSP з використанням чітких і нечітких чисел за допомогою методу відпалу. Наведено результати чисельних експериментів. які показують що використання нечітких чисел, зокрема трикутних і параболічних, з методом відпалу призводить до значного покращення результатів задачі TSP порівняно з використанням чітких чисел. Цей підхід можна застосувати до реальних проблем оптимізації, пов'язаних із неточними або невизначеними даними, і може бути корисним для оптимізації процесів із суб'єктивним сприйняттям часу. Зроблено висновок про необхідність подальших досліджень з використанням теорії нечітких чисел, зокрема у напрямку правильного вибору типу чисел у відповідності до умов поставленої задачі.

Список використаних джерел

1. Schirmer, A.. How emotions change time// Frontiers in Integrative Neuroscience. – 2011. - № 5. - P.58.
2. Schrijver, Alexander. On the history of combinatorial optimization (till 1960)/ In K. Aardal; G.L. Nemhauser; R. Weismantel (eds.). Handbook of Discrete Optimization (PDF). Amsterdam: Elsevier, 2005. - Pp. 1–68.
3. Matai, R., Singh, S. P., & Mittal, M. L. Traveling salesman problem: an overview of applications, formulations, and solution approaches/ Traveling salesman problem, theory and applications. – 2010. - 1. - Pp. 11–17.
4. Grabusts, P., Musatovs, J., & Golenkov, V. The application of simulated annealing method for optimal route detection between objects// Procedia Computer Science. - 2019. – 149. - Pp. 95-101.
5. Heilpern, S. Representation and application of fuzzy numbers// Fuzzy sets and Systems. - 1997. - 91(2). - Pp.259-268.
6. Zadeh L. Fuzzy sets // Information and Control. - 1965. – 8. -Pp. 338–353.
7. Allahviranloo, Tofigh, and Rahim Saneifard. Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity, 2012. - Pp. 57-67.
8. Nejad, Ali Mahmodi, and Mashaallah Mashinchi. Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and the right sides of fuzzy number// Computers & Mathematics with Applications. – 2011. – V. 61. - No. 2. - Pp. 431-442.

References

1. Schirmer, A. (2011). How emotions change time. Frontiers in Integrative Neuroscience, 5, p.58.
2. Schrijver, Alexander (2005). On the history of combinatorial optimization (till 1960). In K. Aardal; G.L. Nemhauser; R. Weismantel (eds.). Handbook of Discrete Optimization (PDF). Amsterdam: Elsevier. pp. 1–68.
3. Matai, R., Singh, S. P., & Mittal, M. L. (2010). Traveling salesman problem: an overview of applications, formulations, and solution approaches. Traveling salesman problem, theory and applications, 1. pp. 11–17.
4. Grabusts, P., Musatovs, J., & Golenkov, V. (2019). The application of simulated annealing method for optimal route detection between objects. Procedia Computer Science, 149, pp. 95-101.
5. Heilpern, S. (1997). Representation and application of fuzzy numbers. Fuzzy sets and Systems, 91(2), pp.259-268.
6. Zadeh L. (1965). Fuzzy sets, Information and Control, 8: pp. 338–353.
7. Allahviranloo, Tofigh, and Rahim Saneifard (2012). Defuzzification method for ranking fuzzy numbers based on center of gravity: pp. 57-67.
8. Nejad, Ali Mahmodi, and Mashaallah Mashinchi (2011). Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and the right sides of fuzzy number. Computers & Mathematics with Applications 61, no. 2: pp. 431-442.

Надійшла до редколегії 10 червня 2023