МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Остапенко Віталій Іванович

УДК 519.21

ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ГАРМОНІЗОВАНИХ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор **МОКЛЯЧУК Михайло Павлович**, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, професор кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор **ЄЛЕЙКО Ярослав Іванович**, Львівський національний університет імені Івана Франка, завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики;

Офіційні опоненти: кандидат фізико-математичних наук, доцент **МЛАВЕЦЬ Юрій Юрійович**, ДВНЗ "Ужгородський національний університет", доцент кафедри кібернетики та прикладної математики.

Захист відбудеться 02 жовтня 2017 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий 01 вересня 2017 р.

В.о. вченого секретаря
спеціалізованої вченої ради Станжицький О.М.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія оцінок функціоналів стохастичних процесів має довгу історію та результати як теоретичного так і практичного характеру. Задачі побудови оцінок функціоналів від стаціонарних процесів та послідовностей були поставлені та розроблені у працях А.М.Колмогорова, Н. Вінера. Про застосування стаціонарних процесів в інженерії, метеорології, економіці та ін. можна знайти в роботах А. Яглома. Останнім часом виникає необхідність побудови моделей, що використовують нестаціонарні процеси. Задачі оцінювання невідомих значень гармонізованих стохастичних послідовностей та процесів досліджувались у роботах С. Камбаніса, С. Камбаніса та Е. Масрі, Й. Хосойа, А. Верона, М. Пурахмаді та ін. Інтерес до цих процесів викликаний можливим застосуванням до теорії обробки сигналів та системного аналізу.

Проте у вище згаданих роботах розв’язки суттєво використовують припущення, що вигляд спектральних щільностей стохастичних послідовностей та процесів точно відомий. Однак, у реальних задачах на практиці такою інформацією дослідник зазвичай не володіє. Одним із способів подолання згаданого ускладнення може стати заміна припущення про відому спектральну щільність на припущення про відомий клас допустимих спектральних щільностей D. У такому разі доцільніше шукати оцінки, що є оптимальними одразу для всіх щільностей із класу D. Такі оцінки називаються мінімаксними, оскільки вони мінімізують максимальне значення похибки. Огляд результатів з мінімаксних (робастних) методів аналізу даних можна простежити у роботі К. Кассама та Х. Пура. У. Гренадер першим запропонував мінімаксний підхід до розв’язання задачі екстраполяції стаціонарних стохастичних процесів.

Серед сучасних робіт численні результати мінімактного (робастного) оцінювання функціоналів від стаціонарних стохастичних послідовностей та процесів описані в монографії М. Моклячука. У книзі М. Моклячука та О. Масютки розглядаються мінімаксні оцінки функціоналів від стаціонарних векторнозначних стохастичних процесів із дискретним та неперервним часом. Стосовно нестаціонарних процесів можна виділити книгу М. Моклячука та І. Голіченко про мінімактні(робастні) оцінки функціоналів від періодично корельованих стохастичних послідовностей та процесів та роботах М. Луза та М. Моклячука про мінімаксні(робастні) оцінки для задач інтерполяції, екстраполяції, фільтрації для стохастичних процесів із стаціонарними приростами. Оцінки екстраполяції функціоналів від невідомих значень гармонізованих α-стійких процесів були досліджені у роботах М. Моклячука, В.Остапенка.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень випадкових гармонізованих послідовностей та процесів. Задачі розв'язано у випадках спектральної визначеності та спектральної невизначеності, коли спектральні щільності послідовностей та процесів невідомі, а задані лише класи допустимих щільностей.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-дослідної теми № 11БФ038-02 "Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (номер державної реєстрації 0111U006561) і № 16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт "Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів".

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розв'язання задач оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей та процесів. Досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації гармонізованих послідовностей та процесів. Задачею дослідження є виведення формул для обчислення похибок та спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів за умови, що спектральна структура процесів відома, та встановлено співвідношень для знаходження найменш сприятливих спектральних щільностей та мінімаксних спектральних характеристик оптимальних оцінок функціоналів в умовах спектральної невизначеності, коли задано лише класи допустимих щільностей.

Об'єктом дослідження є стохастичні гармонізовані послідовності та процеси.

Предметом дослідження є задачі оптимального лінійного оцінювання функціоналів від невідомих значень гармонізованих стохастичних послідовностей та процесів.

Методи дослідження.

У роботі використовуються положення спектральної теорії гармонізованих послідовностей та процесів для знаходження оптимальних оцінок та значень похибок оцінок. Спектральні характеристики оптимальних оцінок в умовах спектральної визначеності знаходяться, використовуючи метод ортогональної проекції в гільбертовому просторі. В умовах спектральної невизначеності використовуються методи оптимізації для розв'язання екстремальних задач.

Наукова новизна одержаних результатів.

Усі результати, отримані в дисертації, є новими. Основні з них наступні:

знайдено оцінки для задачі інтерполяції α-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності

знайдено оцінки для задачі екстраполяції α-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності;

знайдено оцінки для задачі фільтрації α-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку відомої і невідомої спектральної щільності.

Практичне значення отриманих результатів. Розділ теорії стохастичних процесів розширений новими підходами та методами розв'язання задач оцінювання функціоналів від α-стійких гармонізованих випадкових процесів. Отримані формули для знаходження похибок та спектральних характеристик оцінок у задачах інтерполяції, екстраполяції, фільтрації функціоналів від α-стійких гармонізованих випадкових процесів у випадку відомої та невідомої спектральної щільності. Були отримані розв'язки задач інтерполяції, екстраполяції фільтрації для деяких класів спектральних щільностей при застосуванні мінімаксного підходу

Особистий внесок здобувача. Усі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. За результатами дисертації опубліковано п'ять робіт у фахових виданнях. Всі роботи підготовані у співавторстві з науковим керівником, професором М. П. Моклячуком. В роботах співавтору належать постановка задач, загальне керівництво роботою та обговорення результатів.

Апробація результатів дисертації.

Результати дисертації доповідались та обговорювалися на наукових конференціях та наукових семінарах:

- Третя міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, м. Київ, 25-27 квітня 2013;
- Міжнародна наукова конференція студентів, аспірантів та молодих вчених "Теоретичні та прикладні аспекти кібернетики", м. Київ, 21-24 листопада 2014;
- Міжнародна конференція ймовірність, надійність та стохастична оптимізація, м. Київ, 7-10 квітня 2015;
- Міжнародна конференція стохастичні процеси в абстрактних просторах, м. Київ, 14-16 жовтня 2015;
- Засідання наукового семінару кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Ю. С. Мішури та проф. Ю. В. Козаченка (м. Київ, 2016);
- Всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу", Ворохта, 22 - 25 лютого 2017;
- XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп'ютерні наук, м.Київ, квітень 2017;
- Засідання наукового семінару кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Наконечного О. Г. (м. Київ, 2017);
- Засіданні наукового семінару кафедри теоретичної та прикладної статистики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом проф. Єлейка Я. І. (м. Львів, 2017).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 10 наукових публікацій. З них

5 статей [1] - [5] у фахових виданнях, серед яких 4 статті [1] - [4] у наукових фахових виданнях України, з яких 1 стаття [4] надрукована у журналі, англомовна версія якого включена до наукометричної бази Scopus, і 1 стаття [5] в іноземному електронному журналі;

5 тез доповідей на наукових конференціях [6] - [10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, 3 розділів, які містять підрозділи, висновків, списку використаних джерел, який містить 124 найменувань та додатку. Повний обсяг роботи становить 142 сторінки, в тому числі 116 сторінок основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами, встановлено мету, задачі, предмет, об'єкт та методи дослідження, коротко викладені основні результати роботи, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих в роботі результатів та особистий внесок здобувача, наведено список публікацій здобувача.

У першому розділі наводиться огляд літератури, пов'язаної з темою дисертаційної роботи та спорідненими питаннями, а також коротко аналізується зміст основних робіт, в яких вивчаються проблеми, що досліджуються в дисертації.

У першому підрозділі **другого розділу** наведено означення гармонізованої стохастичної послідовності та викладено основні питання спектральної теорії таких послідовностей.

У другому підрозділі **другого розділу** розв'язано задачу оптимального лінійного оцінювання функціоналів

$$A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{i\theta}) dZ^{\xi}(\theta), \quad A(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень випадкового процесу $\xi_j, j = 0,1,\ldots$, гармонізованої симетричної α-стійкої випадкової послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ у точках часу $k = -1,-2,\ldots$. Послідовності $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0$, що задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) + g(\theta))^{-1/(\alpha-1)} d\theta < \infty. \qquad (1)$$

Із ізоморфізму між просторами $H(\xi + \eta)$ та $L^{\alpha}(f + g)$ маємо, що оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має вигляд

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta)\right). \qquad (2)$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається з рівняння

$$\left(A(e^{i\theta}) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - \left(h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C(e^{i\theta})}, \qquad (3)$$

$$C(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{ij\theta},$$

де c_j невідомі коефіцієнти, що визначаються із рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k} h(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0,1,\ldots . \qquad (4)$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за наступною формулою

$$\left\| A\xi - \hat{A}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| A(e^{i\theta}) - h(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left| h(\theta) \right|^{\alpha} g(\theta) d\theta. \qquad (5)$$

Теорема 1. *Нехай $\{\xi_k, k \in \mathrm{Z}\}$ та $\{\eta_k, k \in \mathrm{Z}\}$ є взаємно незалежними гармонізованими симетричними α-стійкими випадковими послідовностями, які мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ та $g(\theta) > 0,$ що задовольняють умову мінімальності (1). Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$, що залежить від невідомих значень послідовності $\xi_j, j = 0,1,\ldots$, за спостереженнями послідовності $\{\xi_k + \eta_k, k \in \mathrm{Z}\}$ у точках часу $k = -1,-2,\ldots$, обчислюється за формулою (2). Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається формулою (3), де невідомі коефіцієнти c_j визначається із системи рівнянь (4). Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою (5).*

Як наслідок із попередньої теореми маємо наступні результати для випадку спостереження без шуму.

Оптимальна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi$ має форму

$$\hat{A}\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta)\,dZ^{\xi}(\theta). \tag{6}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A(e^{i\theta}) - \left(\overline{C(e^{i\theta})}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{7}$$

де невідомі коефіцієнти c_j, $j = 0,1,\ldots$, визначаються із наступної системи рівнянь

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k}\left[\left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ij\theta}\right] - \left[\sum_{j=0}^{\infty} \overline{c}_j e^{-ij\theta}\right]^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left[f(\theta)\right]^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right] d\theta = 0, k = 0,1,\ldots \tag{8}$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A_N\xi - \hat{A}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(\overline{C(e^{i\theta})}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta)\,d\theta. \tag{9}$$

Наслідок 1 *Нехай $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ гармонізована симетрична α-стійка випадкова послідовність, що має абсолютно неперервну спектральну міру і спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності (1) при $g(\theta) = 0$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}\xi$ функціоналу $A\xi = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi_j$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0,1,\ldots$, послідовності за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k \in \mathbb{Z}\}$ точках часу $k = -1,-2,\ldots$, має форму (6). Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціоналу обчислюється за формулою (7), де невідомі коефіцієнти c_j, $j = 0,1,\ldots$, визначаються системою рівнянь (8). Похибка оптимальної лінійної оцінки функціоналу визначається формулою (9).*

У наступних підрозділах 2.2.3 та 2.2.4 було застосовано дані теореми до стаціонарних послідовностей та отримано відомі результати для оцінки функціоналів, спектральних щільностей та похибок оцінок.

Означення 1. *Для даного класу спектральних щільностей $D = D_f \times D_g$*

спектральні щільності $f_0(\theta) \in D_f$, $g_0(\theta) \in D_g$ *називають найменш сприятливими в класі* $D = D_f \times D_g$ *для оптимальної лінійної оцінки* $A\xi$, *якщо має місце наступне співвідношення*

$$\Delta(f_0, g_0) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0) = \max_{(f,g)\in D_f \times D_g} \Delta(h(f,g); f,g).$$

Означення 2. *Для даного класу спектральних щільностей* $D = D_f \times D_g$ *спектральна характеристика* $h^0 = h(f_0, g_0)$ *оптимальної оцінки* $\hat{A}\xi$ *функціонала* $A\xi$ *називається мінімаксною(робастною) для оптимальної лінійної оцінки функціонала* $A\xi$, *якщо виконуються наступні співвідношення*

$$h^0 \in H_D = \bigcap_{(f,g)\in D_f \times D_g} L^{\alpha}(f+g),$$

$$\min_{h \in H_D} \max_{(f,g)\in D} \Delta(h; f,g) = \max_{(f,g)\in D} \Delta(h^0; f,g).$$

Використовуючи метод множників Лагранжа і субдиференціали функціоналів описуємо співвідношення, які визначають найменш сприятливі спектральні щільності в деяких спеціальних класах спектральних щільностей. Найменш сприятливі спектральні щільності $f_0(\theta)$, $g_0(\theta)$ та мінімаксна спектральна характеристика $h^0 = h(f_0, g_0)$ утворюють сідлову точку функції $\Delta(h; f,g)$ на множині $H_D \times D$. Нерівності сідлової точки

$$\Delta(h; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f_0, g_0) \geq \Delta(h^0; f,g)$$

$$\forall h \in H_D, \forall f \in D_f, \forall g \in D_g$$

справедливо, якщо $h^0 = h(f_0, g_0)$ та $h(f_0, g_0) \in H_D$, де (f_0, g_0) є розв'язком задачі оптимізації з обмеженнями

$$\max_{(f,g)\in D_f \times D_g} \Delta(h(f_0, g_0); f,g) = \Delta(h(f_0, g_0); f_0, g_0), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \Delta(h(f_0, g_0); f,g) &= \left\| A\xi - \hat{A}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left| A(e^{i\theta}) - h^0(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left| h^0(\theta) \right|^{\alpha} g(\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{11}$$

Підсумовуючи отримані формули і введені позначення, приходимо до висновку, що такі леми справедливі

Лема 1. *Нехай* $\{\xi_k, k\in \mathrm{Z}\}$ *та* $\{\eta_k, k\in \mathrm{Z}\}$ *є взаємно незалежними гармонізованими симетричними* α*-стійкими випадковими послідовностями, що мають абсолютно неперервні спектральні міри і спектральні щільності* $f_0(\theta)>0$ *та* $g_0(\theta)>0$, *які задовольняють умову мінімальності (1). Нехай спектральні щільності* $(f_0, g_0)\in D_f \times D_g$ *дають розв'язок задачі оптимізації із обмеженнями (10). Спектральні щільності* (f_0, g_0) *є найменш сприятливими спектральними щільностями в класі* $D_f \times D_g$ *та* $h^0 = h(f_0, g_0)$ *є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}\xi$ *функціонала* $A\xi$*, що залежить від невідомих значень послідовності* $\xi_j, j=0,1,\ldots$, *за спостереженнями послідовності* $\{\xi_k+\eta_k, k\in \mathrm{Z}\}$ *у точках часу* $k=-1,-2,\ldots$, *якщо* $h^0 = h(f_0, g_0)\in H_D$.

Лема 2. *Нехай* $\{\xi_k, k\in \mathrm{Z}\}$ *є гармонізованою симетричною* α*-стійкою випадковою послідовністю, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f_0(\theta)>0$, *що задовольняє умову мінімальності (1) при* $g(\theta)=0$. *Нехай спектральна щільність* $f_0\in D_f$ *дає розв'язок задачі оптимізації з обмеженнями*

$$\max_{f\in D_f}\Delta\big(h(f_0); f\big)=\Delta\big(h(f_0); f_0\big), \tag{12}$$

$$\Delta\big(h(f_0); f\big)=\left\|A\xi-\hat{A}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(C^0(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}(f_0(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta. \tag{13}$$

Спектральна щільність f_0 є найменш сприятливою спектральною щільністю D_f та $h^0=h(f_0)$ є мінімаксною спектральною характеристикою оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}\xi$ функціонала $A\xi$, що залежить від невідомих значень $\xi_j, j=0,1,\ldots$, послідовності за спостереженнями послідовності $\{\xi_k, k\in \mathrm{Z}\}$ у точках часу $k=-1,-2,\ldots$, якщо $h^0=h(f_0)\in H_D$.

Далі розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A\xi$ у випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\theta)$ належать класу допустимих спектральних щільностей $D_f^{\beta}\times D_g^{\varepsilon}$:

$$D_f^{\beta}=\left\{ f(\theta)\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(\theta))^{\beta}d\theta = P_1\right.\right\},$$

$$D_g^{\varepsilon} = \left\{ g(\theta) \middle| g(\theta) = (1-\varepsilon) g_1(\theta) + \varepsilon w(\theta), \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = P_2 \right\}.$$

У третьому підрозділі **другого розділу** досліджено задачу оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_N\xi$

$$A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j \xi_j = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta), \quad A_N(e^{i\theta}) = \sum_{j=0}^{N} a_j e^{ij\theta},$$

що залежить від невідомих значень $\xi_j, j = 0,1,\ldots,N,$ гармонізованої $HS\alpha S$ послідовності $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ за спостереженнями послідовності ξ_n в моменти часу $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,\ldots,N\}$.

Оптимальну оцінку $\hat{A}_N\xi$ функціонала $A_N\xi$ шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_N\xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) dZ(\theta). \tag{14}$$

Спектральна характеристика обчислюється із наступних рівнянь

$$h(\theta) = A_N(e^{i\theta}) - \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{15}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta k} h(\theta) d\theta = 0, \quad k = 0,1,\ldots,N. \tag{16}$$

Похибка оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\| A_N\xi - \hat{A}_N\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \left(C_N(e^{i\theta})\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} (f(\theta))^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{17}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай гармонізована симетрична* α*–стійка,* $HS\alpha S$*, стохастична послідовність* $\{\xi(n), n \in \mathbb{Z}\}$ *має абсолютно неперервну спектральну міру* $\mu(\theta)$*, що має спектральну щільність* $f(\theta) > 0$*, яка задовольняє умову (1) при* $g(\theta) = 0$*. Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}_N\xi$ *функціонала* $A_N\xi = \sum_{j=0}^{N} a_j \xi_j$*, що залежить від невідомих значень* $\xi_j, j = 0,1,\ldots,N,$ *послідовності* ξ_n *за спостереженнями послідовності* ξ_n *в моменти часу* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1,\ldots,N\}$ *обчислюється за формулою (14). Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оптимальної оцінки функціонала має вигляд (15), де* *невідомі коефіцієнти* $c_j, j = 0,\ldots, N,$ *визначаються з рівняння (16). Варіація оптимальної оцінки функціонала обчислюється за формулою (17).*

У підрозділах 2.3.3 - 2.3.5 розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A_N\xi$ у тому випадку, коли спектральна щільність $f(\lambda)$ належать множинам допустимих спектральних щільностей:

$$D_0 = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = P \right\}$$

$$D_M^- = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\theta) cos(m\theta) d\theta = r_m, m = 0,\ldots, M \right\}$$

$$D_\beta = \left\{ f : \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(\theta) \right)^\beta d\theta = P \right\} \quad \beta \neq \frac{-1}{\alpha - 1}, \beta \neq 1.$$

У четвертому підрозділі **другого розділу** досліджена задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A_N \xi = \sum_{k=0}^{N} a_k \xi_{-k} = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ(\theta), \quad A_N(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-ik\theta},$$

що залежить від невідомих значень гармонізованої α –стійкої послідовності ξ_k за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n, n \in \mathrm{Z}$ у моменти часу $n = 0, -1, -2, \ldots$

Оцінка має наступний вигляд

$$\hat{A}_N \xi = \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta) \left(dZ^\xi(\theta) + dZ^\eta(\theta) \right). \tag{18}$$

Спектральна характеристика визначається із співвідношення

$$\left(A_N(e^{i\theta}) - h(\theta) \right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - \left(h(\theta) \right)^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C(e^{i\theta})}, \tag{19}$$

$$C(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{i(k+1)\theta},$$

де c_k – невідомі коефіцієнти, які визначаються із умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} h(\theta) d\theta = 0, \quad n = 1,2,\ldots . \qquad (20)$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\| \hat{A}_N \xi - A_N \xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\pi}^{\pi} \left| A_N(e^{i\theta}) - h(\theta) \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \left| h(\theta) \right|^{\alpha} g(\theta) d\theta. \qquad (21)$$

Теорема 3. *Нехай $\xi_n, n \in \mathbb{Z}$ та $\eta_n, n \in \mathbb{Z}$ взаємно незалежні гармонізовані $\alpha-$стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні послідовності, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta), \nu(\theta)$ із спектральними щільностями $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$ відповідно, які задовольняють умову мінімальності (1). Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_N \xi$ функціонала $A_N \xi = \int_{-\pi}^{\pi} A_N(e^{i\theta}) dZ^{\xi}(\theta)$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ послідовності ξ_n за спостереженнями послідовності $\xi_n + \eta_n$ у точках $n = 0,-1,-2,\ldots$ обчислюється за формулою (18). Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (19)*, де невідомі коефіцієнти $c_k, k = 1,2,\ldots$, визначаються рівняннями* (20). *Похибка оцінки обчислюється за формулою (21).*

У підрозділах 2.4.4, 2.4.5 розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A_N \xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать множинам допустимих спектральних щільностей:

$$D_f^0 = \{ f(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) \le P_1 \}, \; D_g^0 = \{ g(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) \le P_2 \};$$

$$D_u^v = \{ f(\theta) \,|\, u(\theta) \le f(\theta) \le v(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda \le P_1 \},$$

$$D_{\varepsilon} = \{ g(\theta) \,|\, g(\theta) = (1-\varepsilon) g_1(\theta) + \varepsilon \omega(\theta), \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\lambda) d\lambda \le P_2 \}.$$

У першому підрозділі **третього розділу** наведено означення випадкового гармонізованого процесу та викладено основні положення спектральної теорії таких процесів.

У другому підрозділі **третього розділу** розв'язано задачу оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A^{extr}\xi = \int_0^{\infty} a(t)\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A^{extr}(\theta)dZ^{\xi}(\theta),$$

$$A^{extr}(\theta) = \int_0^{\infty} a(t)e^{it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$-процесу $\xi(t), t > 0,$ за спостереженнями процесу $\{\xi(t)+\eta(t), t<0\},$ де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ є гармонізованими симетричними α-стійкими стохастичними процесами.

Розглядаємо задачу для взаємно незалежних гармонізованих симетричних α-стійких випадкових процесів $\{\xi(t), t\in \mathrm{R}\}$ та $\{\eta(t), t\in \mathrm{R}\},$ що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності $f(\theta) > 0$ і $g(\theta) > 0,$ що задовольняють умову мінімальності

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}{(f(\theta)+g(\theta))^{\frac{1}{\alpha-1}}} d\theta < \infty. \tag{22}$$

для ненульової функції експоненціального типу $\gamma(\theta) = \int_0^{\infty} \alpha(t)e^{it\theta}dt,$ $\int_{-\infty}^{\infty} |\gamma(\theta)|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\theta < \infty.$

Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}^{extr}\xi$ функціоналу $A^{extr}\xi$ має вигляд

$$\hat{A}^{extr}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{23}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оцінки визначається рівняннями

$$\begin{aligned} &\left(A^{extr}(\theta)-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - \left(h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} g(\theta) = \\ &= \overline{C^{extr}(\theta)}, \quad C^{extr}(\theta) = \int_0^{\infty} c(t)e^{it\theta}dt, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\theta} h(\theta)d\theta = 0, t<0. \tag{25}$$

Похибка оптимальної лінійної оцінки функціонала обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}^{extr}\xi - A^{extr}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty}\left|A^{extr}(\theta)-h(\theta)\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta + \int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\theta)\right|^{\alpha} g(\theta)d\theta. \tag{26}$$

Теорема 4. *Нехай* $\{\xi(t), t\in \mathrm{R}\}$ *та* $\{\eta(t), t\in \mathrm{R}\}$ *є взаємно незалежними гармонізованими симетричними* α*-стійкими стохастичними процесами, що мають абсолютно неперервні спектральні міри та спектральні щільності* $f(\theta)>0$ *та* $g(\theta)>0$, *що задовольняють умові мінімальності (22). Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi=\int_0^{\infty}a(t)\xi(t)dt$ *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t>0$, *процесу* $\xi(t), t\in \mathrm{R}$ *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t)+\eta(t), t<0\}$ *обчислюється за формулою (23). Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оцінки визначається рівняннями* (24) *та* (25). *Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою (26).*

Як наслідок із попередньої теореми отримаємо наступні результати у випадку спостережень без шуму. Оцінка має вигляд

$$\hat{A}^{extr}\xi=\int_{-\infty}^{\infty}h(\theta)dZ^{\xi}(\theta). \tag{27}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної лінійної оцінки $\hat{A}^{extr}\xi$ функціонала визначається формулами

$$h(\theta)=A^{extr}(\theta)-\left(\overline{C^{extr}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}\left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{28}$$

де $C^{extr}(\theta)$ визначається умовою

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-it\theta}h(\theta)d\theta=0, t<0. \tag{29}$$

Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою

$$\left\|\hat{A}^{extr}\xi-A^{extr}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\overline{C^{extr}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>}\left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}\right|^{\alpha}f(\theta)d\theta. \tag{30}$$

Наслідок 2 *Нехай* $\{\xi(t), t\in \mathrm{R}\}$ *є гармонізований симетричний* α*-стійкий стохастичний процес, що має абсолютно неперервну спектральну міру та спектральну щільність* $f(\theta)>0$, *що задовольняє умові мінімальності (22) при* $g(\theta)=0$. *Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала* $A^{extr}\xi$, *що залежить від невідомих значень* $\xi(t), t>0$, *процесу* $\{\xi(t), t\in \mathrm{R}\}$, *за спостереженнями процесу* $\{\xi(t), t<0\}$ *має наступний вигляд (27). Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *оптимальної лінійної оцінки* $\hat{A}^{extr}\xi$ *функціонала обчислюється за формулою (28), де* $C^{extr}(\theta)$ *визначається умовою (29). Похибка оптимальної лінійної оцінки визначається формулою (30).*

Якщо ж відомо лише клас допустимих спектральних щільностей, доцільно використовувати мінімаксний (робастний) метод оцінювання функціоналів.

У підрозділі 3.2.6 - 3.2.9 розв'язано задачу мінімаксного (робастного) оцінювання функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей:

$$D_1 = \left\{ f(\theta) : \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = \gamma \right\}, D_f^{\beta} = \{ f(\theta) \mid \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda))^{\beta} d\lambda = P_1 \};$$

$$D_f^0 = \{ f(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta \le P_1 \}, D_g^0 = \{ g(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\theta) d\theta \le P_2 \};$$

$$D_{2\varepsilon_1} = \{ f(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) - f_1(\lambda) |^2 \, d\lambda \le \varepsilon_1 \},$$

$$D_{1\varepsilon_2} = \{ g(\theta) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} | g(\lambda) - g_1(\lambda) | \, d\lambda \le \varepsilon_2 \}.$$

У третьому підрозділі **третього розділу** досліджена задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A_T^{int} \xi = \int_0^T a(t) \xi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_T^{int}(\theta) dZ^{\xi}(\theta), \quad A_T^{int}(\theta) = \int_0^T a(t) e^{it\theta} dt,$$

що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ стохастичного процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t) + \eta(t), t \in \mathrm{R} \setminus [0;T]$, де $\xi(t)$ та $\eta(t)$ взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси.

Задачу досліджено у тому випадку, коли взаємно незалежні $HS\alpha S$ стохастичні процеси $\xi(t)$ та $\eta(t)$ мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta)$ та $\nu(\theta)$ відповідно та спектральні щільності $f(\theta) > 0$, $g(\theta) > 0$ задовольняють умову мінімальності (22).

Оцінку функціонала шукаємо у вигляді

$$\hat{A}_T^{int} \xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) \left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta) \right). \tag{31}$$

Така оцінка визначається спектральною характеристикою $h(\theta)$, що належить підпростору $L_{\alpha}^{T}(f+g)$ простору $L_{\alpha}(f+g)$, породженому функціями $e^{it\theta}$ при $t\in \mathrm{R}\setminus[0;T]$. Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$ мінімізує значення $\| A_T^{int}\xi-\hat{A}_T^{int}\xi\|_{\alpha}$.

Найкращим наближенням величини $A_T^{int}\xi$ у просторі $H^T(\xi+\eta)$ є проекція $\hat{A}_T^{int}\xi$ на цей простір, що визначається наступним чином:

$$[\xi(t)+\eta(t),A_T^{int}\xi-\hat{A}_T^{int}\xi]_{\alpha}=0,\forall t\in \mathrm{R}\setminus[0;T].$$

Отримуємо такі співвідношення, що визначають спектральну характеристику оптимальної оцінки функціонала

$$\left(A_T(\theta)-h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta)-\left(h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} g(\theta)=\overline{C_T^{int}(\theta)}, \tag{32}$$

$$C_T^{int}(\theta)=\int_0^T c(t)e^{it\theta}dt,$$

де $c(t),t\in[0;T]-$ невідома функція, яка визначається з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t}h(\theta)d\theta=0,t\in[0;T]. \tag{33}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\|\hat{A}_T^{int}\xi-A_T^{int}\xi\right\|_{\alpha}^{\alpha}=\int_{-\infty}^{\infty}\left|A_T(\theta)-h(\theta)\right|^{\alpha} f(\theta)d\theta+\int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\theta)\right|^{\alpha} g(\theta)d\theta. \tag{34}$$

Отже, маємо наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай $\xi(t),t\in \mathrm{R}$ та $\eta(t),t\in \mathrm{R}$ взаємно незалежні гармонізовані α-стійкі, $HS\alpha S$, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри $\mu(\theta),\nu(\theta)$ та спектральні щільності $f(\theta)>0$, $g(\theta)>0$ відповідно, що задовольняють умову мінімальності (22). Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t),t\in \mathrm{R}\setminus[0;T]$ обчислюється за формулою (31). Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається із рівнянь* (32), (33). *Похибка оцінки* *обчислюється за формулою (34).*

Як наслідок із попередньої теореми отримаємо наступні результати у випадку спостережень без шуму.

Оптимальна оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_T^{int}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta) dZ^{\xi}(\theta). \tag{35}$$

Спектральна характеристика $h(\theta)$ оптимальної оцінки обчислюється за формулою

$$h(\theta) = A_T(\theta) - \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}}, \tag{36}$$

$$C_T^{int}(\theta) = \int_0^T c(t) e^{i\theta} d\theta,$$

де $c(t), t \in [0;T]-$ невідома функція, що знаходиться з умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta) d\theta = 0, t \in [0;T]. \tag{37}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\| \hat{A}_T^{int}\xi - A_T^{int}\xi \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\overline{C_T^{int}(\theta)}\right)^{<\frac{1}{\alpha-1}>} \left(f(\theta)\right)^{\frac{-1}{\alpha-1}} \right|^{\alpha} f(\theta) d\theta. \tag{38}$$

Наслідок 3. *Нехай гармонізований $\alpha-$стійкий, $HS\alpha S$, стохастичний процес $\xi(t), t \in \mathrm{R}$ має абсолютно неперервну спектральну міру $\mu(\theta)$, яка має спектральну щільність $f(\theta) > 0$, що задовольняє умову мінімальності мінімальності (22) при $g(\theta) = 0$. Оптимальна лінійна оцінка $\hat{A}_T^{int}\xi$ функціонала $A_T^{int}\xi$, що залежить від невідомих значень $HS\alpha S$ - процесу $\xi(t), t \in [0;T]$ за спостереженнями процесу $\xi(t), t \in \mathrm{R} \setminus [0;T]$ обчислюється за формулою (35). Спектральна характеристика $h(\theta)$ визначається рівняннями (36),* (37). *Похибка оцінки обчислюється за формулою (38).*

У підрозділі 3.3.4 - 3.3.5 наведено результати для стаціонарних процесів для задачі інтерполяції.

У підрозділі 3.3.6 - 3.3.9 розв'язані задачі мінімаксного (робастного) оцінювання лінійного функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам допустимих спектральних щільностей:

$$D_u^v = \{ f(\theta) \,|\, v(\theta) \leq f(\theta \leq u(\theta)), \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) = P_1\};$$

$$D_f^0 = \{ f(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\lambda \leq P_1\},\ D_g^0 = \{ g(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)d\lambda \leq P_2\};$$

$$D_{2\varepsilon_1} = \{ f(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(\lambda) - f_1(\lambda)\,|^2\, d\lambda \leq \varepsilon_1\}.$$

У четвертому підрозділі **третього розділу** досліджена задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів

$$A_T\xi = \int_0^T a(t)\xi(-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\theta)dZ(\theta), \quad A_T(\theta) = \int_0^T a(t)e^{-it\theta}dt,$$

що залежить від невідомих значень гармонізованого $\alpha-$стійкого процесу $\xi(t)$ за спостереженнями процесу $\xi(t)+\eta(t)$ у моменти часу $t<0.$

Оптимальна оцінка функціонала має вигляд

$$\hat{A}_T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\theta)\left(dZ^{\xi}(\theta) + dZ^{\eta}(\theta)\right). \tag{39}$$

Спектральна характеристика визначається із рівності

$$\left(A_T(\theta) - h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} f(\theta) - \left(h(\theta)\right)^{<\alpha-1>} g(\theta) = \overline{C(\theta)}, \tag{40}$$

$$C(\theta) = \int_0^{\infty} c(t)e^{it\theta}dt,$$

де $c(t)$ – невідома функція, яка визначаються із умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\theta t} h(\theta)d\theta = 0, \quad t > 0. \tag{41}$$

Похибка оцінки обчислюється за формулою

$$\left\| A_T\xi - \hat{A}_T\xi \right\|_\alpha^\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_T(\theta) - h(\theta) \right|^\alpha f(\theta)d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \left| h(\theta) \right|^\alpha g(\theta)d\theta. \qquad (42)$$

Теорема 6. *Нехай* $\xi(t), t \in \mathrm{R}$ *та* $\eta(t), t \in \mathrm{R}$ *взаємно незалежні гармонізовані* $\alpha-$*стійкі,* $HS\alpha S$ *, стохастичні процеси, які мають абсолютно неперервні спектральні міри із спектральними щільностями* $f(\theta) > 0, g(\theta) > 0$ *відповідно, які задовольняють умову мінімальності (22). Оптимальна лінійна оцінка* $\hat{A}_T\xi$ *функціонала* $A_T\xi = \int_{-\infty}^{\infty} A_T(\theta)dZ^\xi(\theta),$ *що залежить від невідомих значень* $HS\alpha S$ *процесу* $\xi(t)$ *за спостереженнями процесу* $\xi(t)+\eta(t)$ *у точках* $t < 0$ *обчислюється за формулою (39). Спектральна характеристика* $h(\theta)$ *визначається із рівнянь* (40)*, де невідома функція* $c(t), t > 0,$ *визначаються рівняннями* (41). *Похибка оцінки обчислюється за формулою (42).*

У підрозділі 3.4.4, 3.4.5 розв'язані задачі мінімаксного (робастного) оцінювання лінійного функціонала $A\xi$ у тому випадку, коли спектральні щільності $f(\lambda)$ та $g(\lambda)$ належать класам

$$D_u^v = \{ f(\theta) \,|\, v(\theta) \le f(\theta \le u(\theta)), \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) = P_1 \};$$

$$D_{1\varepsilon_2} = \{ g(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\, g(\lambda) - g_1(\lambda) \,|\, d\lambda \le \varepsilon_2 \},$$

$$D_{2\varepsilon_1} = \{ f(\theta) \,|\, \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\, f(\lambda) - f_1(\lambda) \,|^2\, d\lambda \le \varepsilon_1 \}.$$

Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику, доктору фізико-математичних наук, професору Моклячуку Михайлу Павловичу за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну увагу та підтримку в роботі.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі досліджується задача оптимального оцінювання лінійних функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей та процесів. Наведено розв'язки задач екстраполяції, інтерполяції та фільтрації в умовах спектральної визначеності та спектральної невизначеності. У тому випадку, коли відомі формули, що задають спектральні щільності процесів та послідовностей, знайдено спектральні характеристики та значення похибок оптимальних оцінок лінійних функціоналів. У випадку спектральної невизначеності, коли щільності стохастичних гармонізованих послідовностей і процесів невідомі, але задані множини їх допустимих значень, застосовано мінімаксний (робастний) метод оцінювання лінійних функціоналів та встановлено співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні спектральні характеристики.

У дисертації отримано наступні нові наукові результати:

- знайдено оцінки функціоналів для задачі інтерполяції α-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку спектральної визначеності та спектральної невизначеності;
- знайдено оцінки функціоналів для задачі екстраполяції α-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку спектральної визначеності та спектральної невизначеності;
- знайдено оцінки функціоналів для задачі фільтрації α-стійких гармонізованих випадкових процесів у дискретному та неперервному часі у випадку спектральної визначеності та спектральної невизначеності.

Наведені в роботі результати досліджень мають теоретичне значення для розвитку теорії випадкових процесів, а також широке практичне застосування при розв'язанні задач економетрики, теорії часових рядів, обробці нестаціонарних сигналів та процесів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

[1] *Ostapenko V. I.* Minimax extrapolation problem for harmonizable stable processes with noise observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv Series: Physics and Mathematics. –- 2016. – №2. – P. 15-23.

[2] *Остапенко В. І.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових послідовностей / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика – 2016. – №1(28). – С. 80-89.

[3] *Остапенко В. І.* Мінімаксна фільтрація гармонізованих випадкових процесів / М. П. Моклячук, В. І. Остапенко // Науковий вісник Ужгородського університету: Серія Математика і Інформатика – 2016. – №2(29). – С. 130-139.

[4] *Ostapenko V. I.* Minimax interpolation of harmonizable sequences/ M.P.Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. – 2016. – № 92. – P. 135-146.

[5] *Ostapenko V. I.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences with Noise Observations / M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Journal of Applied Mathematics and Statistics. –- 2015. – №1. – P. 21-42.

[6] *Ostapenko V. I.* Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences/ M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Theoretical and Applied Aspects of Cybernetics. Proceedings of the 4th International Scientific Conference of Students and Young Scientists, Kyiv:Bukrek, Ukraine: Coference materials. – 2014. –- P. 151-157.

[7] *Ostapenko V. I.* Minimax Interpolation Problem for Harmonizable Stable Sequences/ M. P. Moklyachuk, V. I. Ostapenko // Proceedings of the International Conference Probability, Reliability and Stochastic Optimization, Kyiv. –- 2015. – P. 43.

[8] *Ostapenko V. I.* Extrapolation Problem for Harmonizable Stable Stochastic Sequences // Proceedings of the International Conference Stochastic Processes in Abstract Spaces, Kyiv –- 2015. –- P. 38.

[9] *Остапенко В. І.* Мінімаксна інтерполяція гармонізованих $\alpha-$ стійких процесів зі спостереженнями із шумом // Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу”, Івано-Франківськ –- 2017. –- С. 42.

[10] *Остапенко В. І.* Задача мінімаксної екстраполяції гармонізованих процесів // XV Міжнародна конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2017», Математика, Статистика та Механіка, Прикладна математика та комп’ютерні науки, Київ –- 2017. –- С. 70-71.

АНОТАЦІЯ

Остапенко В. І. Оцінки функціоналів від гармонізованих стохастичних процесів. – На правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика». – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі досліджуються задачі екстраполяції, інтерполяції та фільтрації лінійних функціоналів від невідомих значень гармонізованих послідовностей та процесів у випадках спектральної визначеності, а також спектральної невизначеності.

Знайдено спектральні характеристики та значення похибок оцінок невідомих значень функціоналів від гармонізованих послідовностей та процесів у випадку спектральної визначеності, коли спектральні щільності таких процесів та послідовностей відомі. У тому випадку, коли спектральні щільності невідомі, а задано лише множини допустимих спектральних щільностей, знайдено формули та співвідношення, що визначають найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок.

Ключові слова: гармонізована послідовність, гармонізований процес, оптимальна лінійна оцінка, спектральна характеристика, мінімаксна (робастна) оцінка, найменш сприятлива спектральна щільність, мінімаксна спектральна характеристика.

АННОТАЦИЯ

Остапенко В. И. Оценки функционалов от гармонизированных стохастических процессов. – На правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика». - Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2017.

В диссертационной работе исследуются задачи экстраполяции, интерполяции и фильтрации линейных функционалов от неизвестных значений гармонизированных последовательностей и процессов в случаях

спектральной определенности, а также спектральной неопределенности.

Найдено спектральные характеристики и значения погрешностей оценок неизвестных значений функционалов от гармонизированных последовательностей и процессов в случае спектральной определенности когда спектральные плотности таких процессов и последовательностей известны. В том случае, когда спектральные плотности неизвестна, а заданы лишь множества допустимых спектральных плотностей, найдено формулы и соотношения, определяющие наименее благоприятные спектральные плотности и минимаксные (робастные) спектральные характеристики оптимальных оценок.

Основными результатами, полученными в работе, являются:

- уравнения для расчета спектральных характеристик и ошибок оптимальных оценок линейных функционалов, которые зависят от неизвестных значений гармонизированных последовательностей при условии спектральной определенности;

- решены задачи минимаксной экстраполяции, интерполяции и фильтрации функционалов от неизвестных значений гармонизированных последовательностей, найдены формулы и отношения, определяющие наименее благоприятные спектральные плотности и минимаксные характеристики оптимальных оценок функционалов;

- предложены формулы, позволяющие рассчитать спектральные характеристики и значения ошибок оптимальных оценок линейных функционалов, зависящие от неизвестных значений гармонизированных процессов при условии спектральной определенности;

- решены задачи минимаксной экстраполяции, интерполяции и фильтрации функционалов гармонизированных процессов, найдены отношения для определения наименее благоприятных спектральных плотностей и минимаксных спектральных характеристики оптимальных оценок функционалов в случае спектральной неопределенности.

Результаты, описанные в диссертации, имеют теоретическую ценность для теории случайных процессов и практическое применение к задачам системного анализа, обработки сигналов, эконометрике.

Ключевые слова: гармонизированная последовательность, гармонизированный процесс, оптимальная линейная оценка, спектральная характеристика, минимаксная (робастная) оценка, наименее благоприятная спектральная плотность, минимаксная спектральная характеристика.

ABSTRACT

Ostapenko V.I. Estimates of functionals from harmonizable processes.– Manuscript.

The thesis for obtaining the Candidate of Physical and Mathematical Sciences degree on the speciality – 01.01.05 Probability theory and mathematical statistics. – Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2017.

The work is devoted to investigation of problems of the mean-square optimal linear estimation of functionals which depend on the unknown values of harmonizable sequences and harmonizable stochastic processes.

Problems of extrapolation, interpolation and filtration are considered in two case, in the case of spectral certainty, where spectral densities of the observed sequences and processes are exactly known, and in the case of spectral uncertainty, where full information on densities is unavailable but the sets of admissible spectral densities are given. In the case of spectral certainty, formulas that determine the spectral characteristics and values of errors of estimates of functionals are obtained.

In the case where the spectral densities are not known exactly while some sets of admissible spectral densities are given, formulas and relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax (robust) spectral characteristics of the optimal estimates are found.

Key words: harmonizable sequence, harmonizable process, optimal linear estimation, spectral characteristic, minimax (robust) estimation, least favorable spectral density, minimax spectral characteristic.