

Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА  
на здобуття ступеня магістра  
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

**ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ПУЧКА ТРАЄКТОРІЙ З  
НЕГЛАДКИМ КРИТЕРІЄМ ЯКОСТІ**

студента 2 курсу  
Войтенка Сергія Миколайовича

Науковий керівник:  
доктор фізико–математичних наук, доцент  
Пічкур В. В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та  
рекомендована до захисту, протокол No 10 від 08 травня 2020 р.

Завідувач кафедри МСС

канд. фіз.–мат. наук, доц. Черній Д.І.

Київ — 2020

# Зміст

Основні позначення . . . . .	2
Вступ . . . . .	3
1 Диференціювання функції максимуму . . . . .	5
1.1 Похідна за напрямком і необхідні умови екстремуму . . . . .	5
1.2 Властивості функції максимуму . . . . .	8
2 Методи мінімізації функцій типу максимуму . . . . .	14
2.1 Метод найшвидшого спуску. Загальний підхід . . . . .	14
2.2 Метод координатного спуску . . . . .	17
2.3 Метод еліпсоїдів . . . . .	18
3 Параметрична оптимізація пучка траєкторій . . . . .	20
3.1 Критерій якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу . . . . .	20
3.2 Критерій якості типу максимуму за початковими умовами від функціоналу Больца . . . . .	24
3.3 Лінійний випадок . . . . .	27
3.4 Випадок квадратичного функціоналу . . . . .	32
4 Методи параметричної оптимізації пучка траєкторій . . . . .	34
4.1 Метод найшвидшого спуску . . . . .	34
4.2 Метод найшвидшого спуску. Лінійний випадок . . . . .	35
4.3 Метод еліпсоїдів. Лінійний випадок . . . . .	36
4.4 Метод координатного спуску. Лінійний випадок . . . . .	38
5 Обчислювальний експеримент . . . . .	40
5.1 Задача 1 . . . . .	40
5.2 Задача 2 . . . . .	43
Висновки . . . . .	51
Література . . . . .	52

# Основні позначення

- $R^n$  –  $n$ -вимірний евклідів простір;
- $\|\cdot\|$  – норма простору  $R^n$ ;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярний добуток в  $R^n$ ;
- $x^*$  – транспонування  $x \in R^n$ ;
- $cl$  – замикання множини;
- $K(0, 1) = \{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}$  – замкнена одинична куля з центром в початку координат;
- $K(x_0, R) = x_0 + R \cdot K(0, 1)$  – замкнена куля радіусу  $R \geq 0$  з центром в  $x_0 \in R^n$ ;
- $co(\cdot)$  – опукла оболонка множини;
- $\overline{co}(\cdot)$  – замкнена опукла оболонка множини;
- $\overline{cone}(\cdot)$  – замкнена конічна оболонка множини;
- $I_n$  –  $n \times n$  - одинична матриця;
- $\rho(x, D)$  – відстань від точки  $x \in R^n$  до множини  $D \subset R^n$
- $e_1, e_2, \dots, e_m$  – орти в просторі  $R^m$ ;
- $c(A, h)$  – опорна функція  $A \subset R^n, h \in R^n$

# Вступ

**Актуальність роботи.** Оптимізація реальних систем передбачає задання певного критерію, який характеризує якість поведінки об'єкту. Така ситуація виникає при дослідженні динамічних процесів на стійкість, оцінюванні параметрів систем, а також в задачах, де потрібно максимізувати результат при мінімумі витрат та інших [1, 2].

В математичній моделі доцільно враховувати розкид параметрів об'єкту. Тоді стан динамічної системи описується множинами. Якщо аналіз якості функціонування проводиться в силу визначеного на розв'язках недиференційованого функціоналу, то приходимо до негладкої задачі параметричної оптимізації пучка траєкторій. Зокрема, такі задачі виникають при оцінці області всіх початкових даних, для яких відповідні траєкторії не порушували б заданих фазових обмежень. В деяких випадках оптимізація оцінки множин практичної стійкості зводиться до розв'язування відповідної задачі оптимального керування матричними диференціальними рівняннями з негладкими критеріями якості [1, 2].

Застосування теоретичних результатів з негладкої оптимізації на практиці ускладнюється за рахунок великої кількості обчислень. Тому важливо, з одного боку, розробляти чисельні методи, які можна було б легко реалізувати [3], з іншого, оцінити їх якісні характеристики: початкове наближення, величину кроку, апроксимативні властивості тощо [1, 2].

## Мета роботи.

1 Дослідити задачі параметричної оптимізації пучка траєкторій з різними типами критеріїв якості, а саме:

з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу;

з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від функціоналу Больца;

з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу на розв'язках лінійної системи.

2 Розробити алгоритми для розв'язання даних задач на основі таких методів:

метод найшвидшого спуску;

метод еліпсоїдів;

метод координатного спуску.

- 3 Розробити алгоритми і створити програмну технологію, що розв'язує задачу параметричної оптимізації пучка траєкторій з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу на розв'язках лінійної системи за допомогою даних алгоритмів.
- 4 Апробувати розроблені алгоритми для розрахунку оптимальних характеристик в деяких задачах.

# 1 Диференціювання функції максимуму

## 1.1 Похідна за напрямком і необхідні умови екстремуму

Розглянемо задачу мінімізації функції  $f : R^n \rightarrow R^1$ . Нехай функція  $f : R^n \rightarrow R^1$  визначена на деякій відкритій множині  $X \subset R^n$  і приймає лише скінченні значення [4–12].

**Означення 1.** Границя

$$f'(x, h) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha}, \quad (1.1)$$

якщо вона існує, називається похідною функції  $f$  в точці  $x \in X$  за напрямком  $h \in R^n$ . Цю границю також називають похідною Діні.

**Означення 2.** У випадку, коли похідна Діні існує та скінченна, будемо казати, що функція  $f$  диференційована (за Діні) в точці  $x \in X$  за напрямком  $h \in R^n$ . Функція  $f$  диференційовна за напрямками (або диференційовна за Діні), якщо границя (1.1) існує і скінченна для всіх  $h \in R^n$ .

**Теорема 1.** Нехай функція  $f$  диференційовна за Діні в точці  $x_* \in R^n$ . Для того, щоб точка  $x_*$  була точкою локального мінімуму функції  $f$  на  $R^n$  необхідно, щоб виконувалася умова

$$f'(x_*, h) \geq 0, \forall h \in R^n. \quad (1.2)$$

Якщо функція  $f$  задовольняє умову Ліпшиця в околі точки  $x_*$  і

$$f'(x_*, h) > 0, \forall h \in R^n, g \neq 0, \quad (1.3)$$

то  $x_*$  – точка строгого локального мінімуму функції  $f$  на  $R^n$ .

*Доведення.* Доведення можна знайти тут [12].

□

**Означення 3.** Границя [6]

$$\delta f(x, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha}, \quad (1.4)$$

якщо вона існує, називається першою варіацією функції  $f$  в точці  $x \in X$  за напрямком  $h \in R^n$ .

Зауважимо, що з (1.4) випливає

$$\delta f(x, h) = \varphi'(0),$$

де  $\varphi(\alpha) = f(x + \alpha h)$ ,  $\alpha \in R^1$ . Остання рівність записується також у такий еквівалентний спосіб

$$\delta f(x, h) = \left. \frac{d}{d\alpha} f(x + \alpha h) \right|_{\alpha=0}.$$

**Означення 4.** Вектор  $a$  називається похідною Гато (слабкою похідною) функції  $f$  в точці  $x \in X$ , якщо для довільного  $h \in R^n$  виконується співвідношення

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle a, h \rangle + o_h(\alpha), \frac{o_h(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

**Означення 5.** Вектор  $\nabla f(x)$  називається похідною Фреше функції  $f$  в точці  $x \in X$ , якщо для довільного  $h \in R^n$  виконується співвідношення

$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(h), \frac{o(h)}{\|h\|} \rightarrow 0, \|h\| \rightarrow 0. \quad (1.6)$$

Більш детально про похідні Гато, Фреше можна почитати тут [6].

**Означення 6.** Точка  $x_*$ , що задовольняє умові (1.2), називається Діні-inf-стаціонарною точкою функції  $f$  на  $R^n$ .

**Означення 7.** Нехай функція  $f$  диференційовна за Діні в точці  $x_0 \in R^n$  і в точці  $x_0$  не виконана необхідна умова мінімуму (1.2). Якщо  $\|h_0\| = 1$  та

$$f'(x_0, h_0) = \inf_{\|h\|=1} f'(x_0, h), \quad (1.7)$$

то напрямок  $h_0$  називається Діні-напрямком найшвидшого спуску функції  $f$  в точці  $x_0$ .

Розглянемо задачу „умовної” мінімізації, тобто задачу мінімізації функції  $f$  на множині  $D$ . Припускаємо, що функція  $f$  задана на відкритій множині  $X \subset R^n$  та  $D \subset X$ .

**Означення 8.** Нехай  $D \subset R^n$ ,  $x \in clD$ . Тоді множина

$$C(x, D) = \left\{ v \in R^n : \liminf_{\lambda \rightarrow +0} \rho\left(v, \frac{D - x}{\lambda}\right) \right\} \quad (1.8)$$

називається конусом Булігана [8, 10]. Тут  $\rho(x, D) = \inf_{y \in D} \|x - y\|$ .

**Теорема 2.** Нехай функція  $f$  локально ліпшицева в околі точки  $x_*$  і диференційовна за напрямками у точці  $x_* \in D$ . Для того, щоб у точці  $x_*$  функція  $f$  досягала найменшого на  $D$  значення, необхідно, щоб

$$f'(x_*, h) \geq 0 \quad \forall h \in C(x_*, D), \quad (1.9)$$

де  $C(x_*, D)$  – конус Булігана в точці  $x_*$  до множини  $D$ . Якщо виявилось, що

$$f'(x_*, h) > 0 \quad \forall h \in C(x_*, D), \quad h \neq 0, \quad (1.10)$$

то  $x_*$  – точка строгого локального мінімуму функції  $f$  на  $D$ .

*Доведення.* Доведення можна знайти тут [12].

□

**Означення 9.** Точка  $x_*$ , що задовольняє умові (1.9), називається Діні-inf-стаціонарною точкою функції  $f$  на  $D$ .

**Означення 10.** Нехай функція  $f$  диференційовна за Діні в точці  $x_0 \in R^n$ . Якщо точка  $x_0$  не є inf-стаціонарною точкою функції  $f$  на множині  $D$ , то напрямок  $h_0 \in C(x_0, D)$ ,  $\|h_0\| = 1$  такий, що

$$f'(x_0, h_0) = \inf_{\|h\|=1, h \in C(x_0, D)} f'(x_0, h), \quad (1.11)$$

називається напрямком найшвидшого спуску функції  $f$  на множині  $D$  в точці  $x_0$ . Якщо функція  $f$  ліпшицева, то  $f'(x_0, h)$  є неперервною функцією напрямку  $h$ . Тому інфімум досягається і напрямок найшвидшого спуску існує.

**Означення 11.** Функція  $f : D \rightarrow R^1$ ,  $D \subset R^n$ , субдиференційована за Діні в точці  $x \in D$ , якщо існує така опукла компактна множина  $\partial f(x) \subset R^n$ , що

$$f'(x, h) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(x + \alpha h) - f(x)}{\alpha} = \max_{v \in \partial f(x)} \langle v, h \rangle, \quad \forall h \in R^n. \quad (1.12)$$

Множина  $\partial f(x) \subset R^n$ , для якої виконується вказане співвідношення, називається субдиференціалом Діні функції  $f$  в точці  $x \in D$ . Елементи цієї множини називаються субградієнтами (узагальненими градієнтами).

Слід зауважити, що

$$\max_{v \in \partial f(x)} \langle v, h \rangle = c(\partial f(x), h),$$

де  $c(A, h)$  – опорна функція  $A \subset R^n$ ,  $h \in R^n$  [8].

**Означення 12.** Величини

$$f_{\uparrow}(x, h) = \lim_{[x', \alpha] \rightarrow [x, +0]} \sup \frac{f(x' + \alpha h) - f(x')}{\alpha}, \quad (1.13)$$

$$f_{\downarrow}(x, h) = \lim_{[x', \alpha] \rightarrow [x, +0]} \inf \frac{f(x' + \alpha h) - f(x')}{\alpha} \quad (1.14)$$

називаються відповідно верхньою та нижньою похідною Кларка.

**Означення 13.** Нехай функція  $f : D \rightarrow R^1$ ,  $D \subset R^n$ , локально ліпшицева,  $Q \subset D$  – множина точок, в яких функція  $f$  диференційовна. Тоді множина

$$\partial f_{Cl}(x) = co\{v \in R^n : \exists x_i \in Q, v = \lim_{i \rightarrow \infty} f'(x_i), x_i \rightarrow x\} \quad (1.15)$$

називається субдиференціалом Кларка. Елементи цієї множини називаються субградієнтами (узагальненими градієнтами).

Більш детально про субдиференціали Кларка можна почитати тут [10]. Також про субдиференціали можна почитати тут [8]. Має місце теорема.

**Теорема 3.** Для того, щоб точка  $x_0 \in R^n$  була точкою екстремуму функції  $f(x)$  необхідно, щоб виконувалось включення

$$0 \in \partial f(x_0),$$

де  $\partial f(x_0)$  – субдиференціал функції  $f(x)$  в точці  $x_0 \in R^n$ .

*Доведення.* Доведення можна знайти тут [10]. □

Теорема 3 справджується для субдиференціалів Діні та Кларка.

## 1.2 Властивості функції максимуму

Дослідимо властивості функції максимуму, тобто функції вигляду [5, 7, 9, 12]

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y). \quad (1.16)$$

Вважатимемо, що  $f(x, y)$  – неперервна за сукупністю змінних функція, що визначена на  $X \times Y$ , де  $X$  – відкрита множина в  $R^n$ , а  $Y$  – компактна множина в  $R^m$  [12].

**Теорема 4.** *Функція максимуму (1.16) є неперервною функцією.*

*Доведення.* Неперервність. Нехай  $x \in X$  і  $V$  – компактний окіл точки  $x$ . Функція  $f$  рівномірно неперервна на компактній множині  $V \times Y$ , звідки випливає, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $\sigma > 0$ , що

$$f(x', y) - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y) + \varepsilon, \quad \forall y \in Y, x' \in K(x, \sigma).$$

Переходячи в цих нерівностях до максимуму за  $y$ , переконуємося в неперервності функції  $\varphi$  на  $X$  [7].

□

**Означення 14.** Для точки  $x \in X$  позначимо через  $R(x)$  множину точок  $y \in Y$ , на яких в (1.16) досягається максимум

$$R(x) = \{y \in Y : \varphi(x) = f(x, y)\}. \quad (1.17)$$

Дана множина називається маргинальною.

**Теорема 5.** *Маргинальна множина (1.17) замкнена і компактна.*

*Доведення.* Доведення безпосередньо слідує з неперервності функцій  $\varphi$  та  $f$  [12].

□

**Теорема 6.** *Багатозначне відображення  $x \rightarrow R(x)$  замкнене.*

*Доведення.* Нехай  $x_k \rightarrow x$ ,  $y_k \rightarrow y$ ,  $y_k \in R(x_k)$ . Тоді  $\varphi(x_k) = f(x_k, y_k)$ . Оскільки функції  $f$  та  $\varphi$  неперервні, то  $\varphi(x) = f(x, y)$ , звідки і випливає справедливість теореми [12].

□

**Теорема 7.** *Нехай*

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y), \quad \forall x \in X,$$

де  $X$  – відкрита множина в  $R^n$ ,  $Y$  – компактна множина в  $R^m$ , функція  $f(x, y)$  неперервна за сукупністю змінних і диференційовна за напрямком  $h$

в точці  $x$  рівномірно відносно параметра  $y$ . Тоді функція  $\varphi$  диференційовна за напрямком  $h$ , причому

$$\varphi'(x, h) = \max_{y \in R(x)} f'(x, y, h),$$

де множина  $R(x)$  визначена формулою (1.17) [12].

**Наслідок 7.1.** *Нехай*

$$\varphi_0(x) = \max_{i=1,2,\dots,m} f_i(x), \quad x \in X,$$

де функції  $f_i$  визначені на відкритій в  $R^n$  множині  $X$ , неперервні і диференційовні в точці  $x$  за напрямком  $h$ . Тоді похідна  $\varphi'_0(x, h)$  існує і обчислюється за формулою

$$\varphi'_0(x, h) = \max_{i \in R_0(x)} f'_i(x, h),$$

де  $R_0(x) = \{i = 1, 2, \dots, m : \varphi_0(x) = f_i(x)\}$ .

**Наслідок 7.2.** *Нехай  $X$  – відкрита множина в  $R^n$ ,  $Y$  – компактна множина в  $R^m$ ,*

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y), \quad x \in X,$$

де  $f$  – визначена на  $X \times Y$  неперервна функція, що має неперервну частинну похідну  $f'_x(x, y)$ . Тоді функція  $\varphi$  диференційовна за будь-яким напрямком  $h$ , причому

$$\varphi'(x, h) = \max_{y \in R(x)} \langle f'_x(x, y), h \rangle.$$

**Теорема 8.** *Якщо  $f(x, y)$ ,  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  – неперервні за сукупністю змінних функції, що визначені на  $X \times Y$ , де  $X$  – відкрита множина в  $R^n$ , а  $Y$  – компактна множина в  $R^m$ ,  $\lambda \in R^1$ ,  $\lambda > 0$ , то справджуються нерівності*

$$\max_{y \in Y} (f_1(x, y) + f_2(x, y)) \leq \max_{y \in Y} f_1(x, y) + \max_{y \in Y} f_2(x, y),$$

$$\max_{y \in Y} (\lambda f_1(x, y)) \leq \lambda \max_{y \in Y} f_1(x, y).$$

Звідси випливає, що функція максимуму  $\varphi(x)$  вигляду (1.16) є напівадитивною, додатньооднорідною функцією. Введемо множину

$$L(x) = \overline{\text{co}} \{f'_x(x, y) : y \in R(x)\}. \quad (1.18)$$

Тут  $\overline{\text{co}}(\cdot)$  – операція опуклого замикання. Множина  $L(x)$  є обмеженою, замкненою і опуклою.

**Теорема 9.** *Нехай*

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y), \forall x \in X,$$

де  $X$  – відкрита множина в  $R^n$ ,  $Y$  – компактна множина в  $R^m$ , функція  $f(x, y)$  неперервна за сукупністю змінних і диференційована за напрямком  $h \in R^n$  в точці  $x$  рівномірно відносно параметра  $y$ . Тоді функція  $\varphi$  диференційована за напрямком  $h$ , причому

$$\varphi'(x, h) = \max_{y \in R(x)} f'(x, y, h),$$

де множина  $R(x)$  визначена формулою (1.17) [7].

**Наслідок 9.1.** *Нехай*

$$\varphi_0(x) = \max_{i=1,2,\dots,m} f_i(x), \quad x \in X,$$

де функції  $f_i$  визначені на відкритій множині  $X$ , неперервні і диференційовані в точці  $x \in X$  за напрямком  $h \in X$ . Тоді похідна  $\varphi'_0(x, h)$  існує і обчислюється за формулою

$$\varphi'_0(x, h) = \max_{i \in R_0(x)} f'_i(x, h),$$

де  $R_0(x) = \{i = 1, 2, \dots, m : \varphi_0(x) = f_i(x)\}$ .

**Наслідок 9.2.** *Нехай  $X$  – відкрита множина в  $R^n$ ,  $Y$  – компактна множина в  $R^m$ ,*

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y), \quad x \in X,$$

де  $f$  – визначена на  $X \times Y$  неперервна функція, що має неперервну частинну похідну  $f'_x(x, y)$ . Тоді функція  $\varphi$  диференційована за будь-яким напрямком  $h$ , причому

$$\varphi'(x, h) = \max_{y \in R(x)} \langle f'_x(x, y), h \rangle.$$

За означенням 11 маємо

$$\varphi'(x, h) = \max_{y \in R(x)} \langle f'_x(x, y), h \rangle = c(\partial\varphi(x), h).$$

Тут  $\partial\varphi(x) \subset R^n$  – субдиференціал функції  $\varphi$  в точці  $x \in R^n$ , який є опуклою компактною множиною,  $c(A, h)$  – опорна функція  $A \subset R^n$ ,  $h \in R^n$ . Помітимо, що

$$\max_{y \in R(x)} \langle f'_x(x, y), h \rangle = \max_{z \in L_0(x)} \langle z, h \rangle = c(L_0(x), h),$$

де

$$L_0(x) = \{f'_x(x, y) : y \in R(x)\}.$$

Тому

$$c(\partial\varphi(x), h) = c(L_0(x), h), \quad h \in R^n.$$

Використовуючи властивості опорної функції [8, 11], а саме той факт, що з рівності опорних функцій випливає рівність опуклих оболонок відповідних множин, одержуємо

$$\partial\varphi(x) = \overline{\text{co}}L_0(x) = L(x) = \overline{\text{co}}\{f'_x(x, y) : y \in R(x)\}. \quad (1.19)$$

Формула (1.19) є основою для алгоритму знаходження субдиференціалу функції (1.16).

Введемо функцію [7]

$$\Psi(x) = \min_{\|h\|=1} \max_{y \in R(x)} \langle f'_x(x, y), h \rangle. \quad (1.20)$$

**Теорема 10.** *Якщо для функції (1.20) виконується умова  $\Psi(\bar{x}) < 0$ , то функція максимуму  $\varphi(x)$  вигляду (1.16) має в точці  $\bar{x}$  єдиний напрямок найшвидшого спуску  $h(\bar{x})$ ,  $\|h(\bar{x})\| = 1$ . При цьому*

$$h(\bar{x}) = -\frac{z^{(*)}}{\|z^{(*)}\|},$$

$$\varphi'(x, h) = -\|z^{(*)}\|,$$

де  $z^{(*)}$  – найближча до початку координат точка множини  $L(\bar{x})$ .

*Доведення.* Доведення можна знайти тут [7].

□

**Алгоритм знаходження субдиференціалу функції (1.16).**

Крок 1. На множині  $Y$  введемо дискретну сітку  $Y_0$ .

Крок 2. Знаходимо значення виразу

$$C = \max_{y \in Y_0} f(x, y).$$

Оскільки множина  $Y_0$  містить скінченну кількість точок, то цей вираз можна обчислити перебором.

Крок 3. Також перебором знаходимо маргинальну множину:

$$R(x) = \{y \in Y_0 : f(x, y) + \epsilon > C\}.$$

Де  $\epsilon$  досить мале число. Якщо множина  $R(x)$  містить більше двох елементів, тоді залишаємо в ній два елементи при яких значення функції  $f(x, y)$  приймає найбільші значення.

Крок 4. Обчислюємо множину

$$L_0(x, y) = \{f'_x(x, y), y \in R(x)\}.$$

Крок 5. Будуємо опуклу оболонку даної множини

$$L(x) = \overline{\text{co}}L_0(x).$$

Оскільки множина  $R(x)$  містить не більше 2 елементів то опуклу оболонку можна побудувати за формулою

$$\overline{\text{co}}L_0(x) = \left\{ \alpha L_0(x, y_1) + (1 - \alpha)L_0(x, y_2), \alpha \in [0, 1], y_1, y_2 \in R(x) \right\}.$$

при двох елементах у  $R(x)$  і

$$\overline{\text{co}}L_0(x) = \left\{ L_0(x, y), y \in R(x) \right\}.$$

при одному.

## 2 Методи мінімізації функцій типу максимуму

### 2.1 Метод найшвидшого спуску. Загальний підхід

В основі методу найшвидшого спуску [3] лежить той факт, що якщо точка  $\bar{x}$  не є стаціонарною точкою функції  $\varphi(x)$  вигляду (1.16), тобто  $\Psi(\bar{x}) < 0$ , то існує єдиний напрямок найшвидшого спуску  $h(\bar{x})$  функції  $\varphi(x)$  в точці  $\bar{x}$  (теорема 10). Візьмемо початкове наближення  $x_0 \in R^n$ . Припустимо, що множина

$$M(x_0) = \{x : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$$

є обмеженою. Оскільки  $\varphi(x)$  – неперервна, то множина  $M(x_0)$  є також замкненою.

Нехай уже знайдено  $k$ -те наближення  $x_k \in M(x_0)$ . Якщо  $\Psi(\bar{x}) \geq 0$ , то  $x_k$  – стаціонарна точка і процес на цьому закінчується. Інакше вектор  $h_k = h(x_k)$ . Розглянемо промінь

$$x = x_k(\alpha) = x_k + \alpha h_k, \alpha \geq 0,$$

і знайдемо  $\alpha_k \in [0, \infty)$ , при якому

$$\varphi(x_k(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in [0, \infty)} \varphi(x_k(\alpha)).$$

Мінімум в останній формулі досягається в силу обмеженості і замкненості  $M(x_0)$ .

Покладемо  $x_{k+1} = x_k(\alpha_k)$ . Зрозуміло, що  $x_{k+1} \in M(x_0)$  та  $\varphi(x_{k+1}) < \varphi(x_k)$ . Продовжуючи описаний процес, отримаємо послідовність  $x_k$ , причому  $x_k \in M(x_0)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,

$$\varphi(x_0) > \varphi(x_1) > \dots > \varphi(x_k) > \dots$$

і якщо послідовність  $x_k$  скінченна, то останній її елемент за побудовою є стаціонарною точкою функції  $\varphi(x)$ .

Детальніше про метод найшвидшого спуску можна почитати тут [3].

## Алгоритм методу найшвидшого спуску для функції максимуму

Розглядаємо задачу мінімізації функції [7]

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) \rightarrow \min_{x \in R^n}.$$

Крок 1. Оберемо початкове наближення  $x_0$ .

Крок 2. Нехай відомо  $x_k$ . Тоді знайдемо  $R(x_k), L(x_k)$ , де

$$R(x_k) = \{y \in Y : \varphi(x_k) = f(x_k, y)\}.$$

$$L(x_k) = \overline{\text{co}} \{f'_x(x, y) : y \in R(x_k)\}.$$

Крок 3. Знаходимо  $z_k^{(*)}$  як розв'язок задачі мінімізації

$$\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|.$$

Якщо  $z_k^{(*)} = 0$ , то  $x_k$  – стаціонарна точка і процес закінчується. Інакше переходимо до кроку 4.

Крок 4. Обчислимо наступну точку  $x_{k+1}$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k = x_{k+1}(\alpha_k),$$

де

$$h_k = -\frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|}.$$

Крок 5. Обираємо  $\alpha_k$  з умови найшвидшого спуску в напрямку  $-h_k$

$$\varphi(x_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in [0, \infty)} \varphi(x_{k+1}(\alpha)).$$

Крок 6. Перейдемо до  $(k + 1)$ -й ітерації зі значенням  $x_{k+1}$ .

Опис алгоритму завершено.

## Алгоритм методу найшвидшого спуску для функції максимуму. Дискретний випадок

Розглядаємо задачу мінімізації функції [7]

$$\varphi(x) = \max_{i=1,2,\dots,n} f_i(x) \rightarrow \min_{x \in R^n},$$

де  $f_i : R^n \rightarrow R^1$  – неперервно диференційовані функції,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Алгоритм методу найшвидшого спуску для вказаної задачі мінімізації такий:

Крок 1. Оберемо початкове наближення  $x_0$ .

Крок 2. Нехай відомо  $x_k$ . Тоді знайдемо  $R(x_k)$ ,  $L(x_k)$  за формулами

$$R(x_k) = \{i = 1, 2, \dots, n : \varphi(x_k) = f_i(x_k)\}.$$

$$\begin{aligned} L(x_k) &= \overline{co} \left\{ \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} : i \in R(x_k) \right\} = \\ &= \left\{ z \in R^n : z = \sum_{i \in R(x_k)} \lambda_i \frac{\partial f_i(x)}{\partial x}, \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i \in R(x_k)} \lambda_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Крок 3. Знаходимо  $z_k^{(*)}$  як розв'язок задачі мінімізації

$$\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|.$$

Якщо  $z_k^{(*)} = 0$ , то  $x_k$  – стаціонарна точка і процес закінчується. Інакше переходимо до кроку 4.

Крок 4. Обчислимо наступну точку  $x_{k+1}$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k = x_{k+1}(\alpha_k),$$

де

$$h_k = -\frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|}.$$

Крок 5. Обираємо  $\alpha_k$  з умови найшвидшого спуску в напрямку  $-h_k$

$$\varphi(x_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in [0, \infty)} \varphi(x_{k+1}(\alpha)).$$

Крок 6. Перейдемо до  $(k + 1)$ -й ітерації зі значенням  $x_{k+1}$ .

Опис алгоритму завершено.

## 2.2 Метод координатного спуску

Розглядаємо задачу мінімізації функції

$$\varphi(x) = \max_{y \in Y} f(x, y) \rightarrow \min_{x \in R^n}.$$

Покладемо

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)^*, e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^*, \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)^*.$$

Візьмемо початкове наближення  $x_0 \in R^n$ . Припустимо, що множина

$$M(x_0) = \{x \in R^n : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$$

є обмежена. Оскільки  $\varphi(x)$  – неперервна, то множина  $M(x_0)$  є також замкненою.

Нехай уже знайдене  $k$ -те наближення  $x_k \in M(x_0)$ . Опишемо побудову  $x_{k+1}$ . Розглянемо пряму

$$x = x_{k1}(\alpha) = x_k + \alpha e_1, -\infty < \alpha < \infty$$

і знайдемо  $\alpha_{k1} \in (-\infty, \infty)$ , при якому

$$\varphi(x_{k1}(\alpha_{k1})) = \min_{\alpha \in (-\infty, \infty)} \varphi(x_{k1}(\alpha)).$$

Оскільки  $M(x_0)$  – обмежена замкнена множина, максимум тут досягається, при якому  $x_{k1}(\alpha_{k1}) \in M(x_0)$ .

Розглянемо далі пряму

$$x = x_{k2}(\alpha) = x_{k1}(\alpha_{k1}) + \alpha e_2, -\infty < \alpha < \infty,$$

і знайдемо  $\alpha_{k2} \in (-\infty, \infty)$ , при якому

$$\varphi(x_{k2}(\alpha_{k2})) = \min_{\alpha \in (-\infty, \infty)} \varphi(x_{k2}(\alpha)).$$

Очевидно  $x_{k2}(\alpha_{k2}) \in M(x_0)$ . Продовжуючи аналогічно, прийдемо до прямої

$$x = x_{kn}(\alpha) = x_{k,n-1}(\alpha_{k,n-1}) + \alpha e_n, \quad -\infty < \alpha < \infty,$$

і знайдемо  $\alpha_{kn} \in (-\infty, \infty)$ , при якому

$$\varphi(x_{kn}(\alpha_{kn})) = \min_{\alpha \in (-\infty, \infty)} \varphi(x_{kn}(\alpha)).$$

Покладемо  $x_{k+1} = x_{kn}(\alpha_{kn})$ . Зрозуміло, що  $x_{k+1} \in M(x_0)$  і  $\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x_k)$ .

Продовжуючи описаний процес, отримаємо послідовність  $x_k$ , причому  $x_k \in M(x_0)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,

$$\varphi(x_0) \geq \varphi(x_1) \geq \dots \geq \varphi(x_k) \geq \dots$$

Можна було б очікувати, що гранична точка послідовності  $x_k$  є точкою локального мінімуму функції  $\varphi(x)$ . Але в загальному випадку це не так. Більш того, гранична точка послідовності  $x_k$  може не бути навіть стаціонарною точкою функції  $\varphi(x)$ . Детальніше про метод найшвидшого спуску можна почитати тут [7].

## 2.3 Метод еліпсоїдів

Метод еліпсоїдів можна розглядати як частинний випадок методу узагальненого градієнтного спуску з розтягуванням простору в напрямку субградієнта з постійним коефіцієнтом розтягування простору і кроковим множником, що змінюється за формулою геометричної прогресії [9]. З іншого боку його можна розглядати, як метод послідовних відтинів, в якому область локалізації розв'язків апроксимується на кожному кроці еліпсоїдом [4]. Детальніше про метод еліпсоїдів можна почитати тут [5].

Нехай на  $R^n$  задано векторне поле  $g(x)$ , необов'язково неперервне,  $g(x) \in R^n$ ,  $x \in R^n$ . Знайдемо таку точку  $x_*$ , що

$$\langle g(x), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in R^n.$$

Припустимо що ця задача має розв'язок, причому відомо, що  $x_* \in K(x_0, R)$ , де  $K(x_0, R)$  – замкнена куля з центром в точці  $x_0$  і радіусом  $R$ . Розглянемо алгоритм розв'язування даної задачі при  $n > 1$ .

Зафіксуємо стартову точку  $x_0 \in R^n$ . Візьмемо  $h_0 = R/(n+1)$ . Покладемо

$B_0 = I_n$ , де  $I_n$  – одинична  $(n \times n)$  – матриця. Нехай на  $k$ -й ітерації знайдені значення  $x_k \in R^n$ ,  $h_k$  і матриця  $B_k$ . Перехід до  $(k + 1)$ -ї ітерації полягає у виконанні такої послідовності кроків:

Крок 1. Обчислимо  $g(x_k)$ . Якщо  $g(x_k) = 0$ , тоді зупинимося:  $x_k$  – розв’язок. Інакше перейдемо до кроку 2.

Крок 2. Визначимо

$$\zeta_k = \frac{B_k^T g(x_k)}{\|B_k^T g(x_k)\|}.$$

Крок 3. Обчислимо наступну точку

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \zeta_k.$$

Крок 4. Обчислимо

$$B_{k+1} = B_k R_\beta(\zeta_k),$$
$$\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}},$$

де  $R_\beta(\zeta_k)$  – оператор розтягування простору в напрямку  $\zeta_k$  з коефіцієнтом  $\beta$ .

Крок 5. Обчислимо

$$h_{k+1} = h_k r,$$
$$r = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Крок 6. Перейдемо до  $(k + 1)$ -й ітерації зі значеннями  $x_{k+1}$ ,  $h_{k+1}$ ,  $B_{k+1}$ .

Опис алгоритму завершено.

## 3 Параметрична оптимізація пучка траєкторій

### 3.1 Критерій якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості [1, 2]

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p)) \quad (3.1)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), p, t), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.2)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$  – вектор стану системи (3.2),  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$  – вектор параметрів,  $f(x, p, t)$  –  $n$ -вимірний вектор-функція, яка є неперервно диференційованою за  $x$  і  $p$ , а також неперервною за  $t \in [t_0, T]$ . У такий спосіб ми можемо застосувати теорему про неперервну диференційованість розв'язків системи (3.2) від параметра  $p$  і початкових умов  $x_0$ . Функція  $\Phi : R^n \rightarrow R^1$  є неперервно диференційованою,  $M_0 \subset R^n$  – компакт,  $x(t_0) = x_0 \in M_0$ .

Задача полягає в тому щоб знайти параметр  $p_* \in R^m$  такий, що

$$I(p_*) = \inf_{p \in R^m} I(p) \quad (3.3)$$

Задача (3.1) - (3.3) називається задачею параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (3.2) з функціоналом (3.3), який є функціоналом типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу

$$J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p)).$$

Тут  $x(t, x_0, p)$  є розв'язком системи (3.2) з початковою умовою  $x(t_0) = x_0$ , де  $x_0 \in R^n$  – деяка точка при фіксованому значенні параметра  $p \in R^m$ .

Пучком траєкторій системи (3.2) при фіксованому значенні параметра  $p \in R^m$  називають множину розв'язків  $x(t, x_0, p)$  системи (3.2), де точка  $x_0$  пробігає множину  $M_0 \subset R^n$ . Більше детально про динаміку пучків можна прочитати тут [1] Таким чином пучок траєкторій є сукупністю функцій в просторі неперервних функцій  $C([t_0, T]; R^n)$ . За теоремою про інтегральну лінійку [2] пучок траєкторій є компактом в множині  $C([t_0, T]; R^n)$ , так як множина початкових умов  $M_0 \subset R^n$  є компактом. Множина  $X(t, p)$  точок з  $R^n$ ,

яка складається з таких  $x \in R^n$ , що існує  $x_0 \in M_0$  таке, що  $x = x(t, x_0, p)$ , називається перетином пучка траєкторій системи (3.2).

За теоремою про перетин інтегральної лійки перетин пучка траєкторій є компактною множиною в  $R^n$  при кожному фіксованому  $t \in [t_0, T]$ . Таким чином пучок траєкторій залежить від вибору параметра  $p$ . Задача параметричної оптимізації (3.1)-(3.3) полягає в тому, щоб серед усіх значень параметра  $p$  вибрати такий, який мінімізує максимальне значення критерія  $J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p))$  серед усіх траєкторій пучка.

Виберемо напрямок  $h \in R^m$  і позначимо

$$R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} J(y_0, p) = J(x_0, p) \right\}.$$

Множина  $R(p)$  називається маргинальною множиною. За теоремою про похідну за напрямком від функції максимуму

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} J'(x_0, p, h), \quad (3.4)$$

де

$$J'(x_0, p, h) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J(x_0, p + \alpha h) - J(x_0, p)}{\alpha}$$

– похідна за напрямком (похідна Діні) функціоналу  $J(x_0, p)$ . Так як в задачі (3.1)-(3.3) функціонал  $J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, p))$  є диференційованим, то похідна за напрямком співпадає з першою варіацією (варіацією за Лагранжем)

$$J'(x_0, p, h) = \delta J(x_0, p, h),$$

де

$$\begin{aligned} \delta J(x_0, p, h) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{J(x_0, p + \alpha h) - J(x_0, p)}{\alpha} = \\ &= \left. \frac{d}{d\alpha} J(x_0, p + \alpha h) \right|_{\alpha=0} = \varphi'(0). \end{aligned}$$

Тут  $\varphi(\alpha) = J(x_0, p + \alpha h) = \Phi(x(T, x_0, p))$ .

Знайдемо першу варіацію. Для цього визначимо

$$\varphi'(\alpha) = \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, \alpha))}{\partial x}, \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha} \right\rangle,$$

де  $x(T, \alpha) = x(T, x_0, p + \alpha h)$ ,  $x(T) = x(T, x_0, p)$ . Позначимо  $z(T) = \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha}$  в точці  $\alpha = 0$ . Тоді

$$\varphi'(0) = \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}, z(T) \right\rangle \quad (3.5)$$

Знайдемо систему диференціальних рівнянь для  $z(t)$ . Вона має вигляд

$$\frac{dz(t)}{dt} = \frac{\partial f(t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial p} h, z(t_0) = 0, \quad (3.6)$$

де  $t \in [t_0, T]$ . Система (3.6) називається системою рівнянь у варіаціях для задачі (3.1)-(3.3). Тут  $f(t) = f(x(t), p, t)$ . Введемо вектор спряжених змінних  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^*$  і накладемо умову

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}. \quad (3.7)$$

Беручи до уваги систему у варіаціях (3.6), одержуємо

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= -\left\langle \psi(T), z(T) \right\rangle = -\left( \left\langle \psi(T), z(T) \right\rangle - \left\langle \psi(t_0), z(t_0) \right\rangle \right) = \\ &= -\int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \left\langle \psi(t), z(t) \right\rangle dt = -\int_{t_0}^T \left( \left\langle \psi'(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \psi(t), z'(t) \right\rangle \right) dt = \\ &= -\int_{t_0}^T \left( \left\langle \psi'(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \psi(t), \frac{\partial f(t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial p} h \right\rangle \right) dt = \\ &= -\int_{t_0}^T \left( \left\langle \psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t), h \right\rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Покладемо

$$\psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t) = 0, t \in [t_0, T]. \quad (3.8)$$

Тоді

$$\varphi'(0) = -\left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t) dt, h \right\rangle = \delta J(x_0, p, h). \quad (3.9)$$

Введемо функцію Гамільтона-Понтрягіна для задачі (3.1)-(3.3)

$$H(x, p, \psi, t) = \langle \psi, f(x, p, t) \rangle. \quad (3.10)$$

Тоді

$$\frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial x} = \frac{\partial f^*(t)}{\partial x} \psi(t),$$

$$\frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial p} = \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t).$$

Таким чином ми обґрунтували теорему. При формулюванні теореми ми застосували (3.4), (3.7) - (3.10), а також дві останні рівності.

**Теорема 11.** *Похідна за напрямком  $h \in R^m$  функціоналу (3.1) задачі (3.1)-(3.3) має вигляд*

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} \left\langle - \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle,$$

де  $x(t) = x(t, x_0, p)$  є розв'язком системи (3.2),  $x(t_0) = x_0$ ,  $\psi(t) = \psi(t, x_0, p)$  є розв'язком спряженої системи

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= - \frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, T], \\ \psi(T) &= - \frac{\partial \Phi(x(T, x_0, p))}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$x_0 \in R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x(T, y_0, p)) = \Phi(x(T, x_0, p)) \right\}, \quad (3.12)$$

$H(x, p, \psi, t) = \langle \psi, f(x, p, t) \rangle$  – функція Гамільтона-Понтрягіна.

З теореми про необхідну умову екстремуму випливає такий наслідок.

**Наслідок 11.1.** *Для того, щоб точка  $p_*$  була точкою локального мінімуму функціоналу (3.1) задачі (3.1)-(3.3) на  $R^m$  необхідно, щоб виконувалася умова*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \quad \forall h \in R^m, \quad (3.13)$$

де  $x(t)$ ,  $\psi(t)$  є розв'язки системи (3.2) і спряженої системи (3.11), які відповідають  $p_*$ ,  $R(p_*)$  визначається за (3.12) при  $p = p_*$ .

З теореми про необхідну умову екстремуму на множині  $D$  випливає такий наслідок.

**Наслідок 11.2.** *Для того, щоб точка  $p_*$  була точкою локального мінімуму функціоналу (3.1) задачі (3.1)-(3.3) на  $D$  необхідно, щоб виконувалася умова*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \quad \forall h \in C(x_*, D), \quad (3.14)$$

де  $C(x_*, D)$  – конус Булігана в точці  $x_*$  до множини  $D$ . де  $x(t)$ ,  $\psi(t)$  є розв’язки системи (3.2) і спряженої системи (3.11), які відповідають  $p_*$ ,  $R(p_*)$  визначається за (3.12) при  $p = p_*$ .

### 3.2 Критерій якості типу максимуму за початковими умовами від функціоналу Больца

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості [2]

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \left\{ \int_{t_0}^T f_0(x(s), p, s) ds + \Phi(x(T, x_0, p)) \right\} \quad (3.15)$$

на розв’язках системи (3.2). Тут  $f_0(x, p, t)$  є неперервно диференційованою функцією за змінними  $x$ ,  $p$  і неперервною за  $t \in [t_0, T]$ ,  $x(t) = x(t, x_0, p)$ ,  $t \in [t_0, T]$ . Решта умов і позначень співпадають з умовами і позначеннями задачі (3.1)- (3.3),  $M_0 \subset R^n$  – компакт.

Задача полягає в тому щоб знайти параметр  $p_* \in R^m$ , який мінімізує критерій якості (3.15) на розв’язках системи (3.2), тобто

$$I(p_*) = \inf_{p \in R^m} I(p) \quad (3.16)$$

Задача (3.15), (3.2), (3.16) називається задачею параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (3.2) з функціоналом (3.15), який є функціоналом типу максимуму за початковими змінними від функціоналу типу Больца

$$J(x_0, p) = \int_{t_0}^T f_0(x(t, x_0, p), p, t) dt + \Phi(x(T, x_0, p)). \quad (3.17)$$

Як і в пункті 3.1, позначимо

$$R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} J(y_0, p) = J(x_0, p) \right\}.$$

Похідна за напрямком від функціоналу (3.15) визначається так само, як і в (3.4). Знайдемо першу варіацію за Лагранжем від функціоналу (3.17). Для цього позначимо

$$\varphi(\alpha) = \int_{t_0}^T f_0(x(t, \alpha), p + \alpha h, t) dt + \Phi(x(T, \alpha)) \quad (3.18)$$

і знаходимо

$$\begin{aligned} \varphi'(\alpha) = & \int_{t_0}^T \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(x(t, \alpha), p + \alpha h, t)}{\partial x}, \frac{\partial x(T, \alpha)}{\partial \alpha} \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \frac{\partial f_0(x(t, \alpha), p + \alpha h, t)}{\partial p}, h \right\rangle \right\} dt + \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, \alpha))}{\partial x}, \frac{\partial x(T, x_0)}{\partial \alpha} \right\rangle, \end{aligned}$$

де  $x(T, \alpha) = x(T, x_0, p + \alpha h)$ ,  $x(T) = x(T, x_0, p)$ . Позначимо  $z(t) = \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha}$  в точці  $\alpha = 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = & \int_{t_0}^T \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(x(t, x_0, p), p, t)}{\partial x}, z(t) \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle \frac{\partial f_0(x(t, x_0, p), p, t)}{\partial p}, h \right\rangle \right\} dt + \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, x_0, p))}{\partial x}, z(T) \right\rangle. \end{aligned}$$

Введемо вектор спряжених змінних  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)^*$  і накладемо умову

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T))}{\partial x}. \quad (3.19)$$

Для  $\psi(T)$  справедливою буде рівність

$$\begin{aligned} & -\left\langle \psi(T), z(T) \right\rangle = -\left( \left\langle \psi(T), z(T) \right\rangle - \left\langle \psi(t_0), z(t_0) \right\rangle \right) = \\ = & -\int_{t_0}^T \frac{d}{dt} \left\langle \psi(t), z(t) \right\rangle dt = -\int_{t_0}^T \left( \left\langle \psi'(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \psi(t), z'(t) \right\rangle \right) dt = \\ = & -\int_{t_0}^T \left( \left\langle \psi'(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \psi(t), \frac{\partial f(t)}{\partial x} z(t) + \frac{\partial f(t)}{\partial p} h \right\rangle \right) dt = \\ = & -\int_{t_0}^T \left( \left\langle \psi'(t) + \frac{\partial f(t)^*}{\partial x} \psi(t), z(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t), h \right\rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Тоді, беручи до уваги систему у варіаціях (3.6) а також попередній вираз, одержуємо

$$\begin{aligned} \varphi'(0) = & \int_{t_0}^T \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(t)}{\partial x} - \frac{d\psi(t)}{dt}, z(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f(t)}{\partial x} z(t), \psi(t) \right\rangle - \right. \\ & \left. - \left\langle \frac{\partial f(t)}{\partial p} h, \psi(t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f_0(t)}{\partial p} h \right\rangle \right\} dt = \\ = & \int_{t_0}^T \left\{ \left\langle \frac{\partial f_0(t)}{\partial x} - \frac{\partial f^*(t)}{\partial x} \psi(t) - \frac{d\psi(t)}{dt} \right\rangle + \right. \\ & \left. + \left\langle -\frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t) + \frac{\partial f_0(t)}{\partial p} h \right\rangle \right\} dt. \end{aligned}$$

Накладаємо на функцію  $\psi(t)$  додаткові умови

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{\partial f_0(t)}{\partial x} - \frac{\partial f^*(t)}{\partial x} \psi(t). \quad (3.20)$$

Тоді варіація

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= - \int_{t_0}^T \left\langle \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t) - \frac{\partial f_0(t)}{\partial p}, h \right\rangle dt = \\ &= \left\langle \int_{t_0}^T \left\{ \frac{\partial f_0(t)}{\partial p} - \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t) \right\} dt, h \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вводимо функцію Гамільтона-Понтрягіна задачі (3.15), (3.2), (3.16)

$$H(x, p, \psi, t) = -f_0(x, p, t) + \langle \psi, f(x, p, t) \rangle. \quad (3.22)$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial x} &= \frac{\partial f^*(t)}{\partial x} \psi(t), \\ \frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial p} &= \frac{\partial f^*(t)}{\partial p} \psi(t). \end{aligned}$$

З (3.4), (3.20) - (3.22), а також двох останніх рівностей випливає теорема.

**Теорема 12.** *Похідна за напрямком  $h \in R^m$  функціоналу (3.15) задачі (3.15), (3.2), (3.16) має вигляд*

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} \left\langle - \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle, \quad (3.23)$$

де  $x(t) = x(t, x_0, p)$  є розв'язком системи (3.2),  $x(t_0) = x_0$ ,  $\psi(t) = \psi(t, x_0, p)$  є розв'язком спряженої системи

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(t)}{dt} &= - \frac{\partial H(x(t), p, \psi(t), t)}{\partial x}, \quad t \in [t_0, T], \\ \psi(T) &= - \frac{\partial \Phi(x(T, x_0, p))}{\partial x}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} x_0 \in R(p) &= \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \int_{t_0}^T f_0(x(t, y_0, p), p, t) dt + \Phi(x(T, y_0, p)) = \right. \\ &= \left. \int_{t_0}^T f_0(x(t, x_0, p), p, t) dt + \Phi(x(T, x_0, p)) \right\}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$H(x, p, \psi, t) = -f_0(x, p, t) + \langle \psi, f(x, p, t) \rangle$  – функція Гамільтона-Понтрягіна задачі (3.15), (3.2), (3.16).

З теореми про необхідну умову екстремуму випливає такий наслідок.

**Наслідок 12.1.** *Для того, щоб точка  $p_*$  була точкою локального мінімуму функціоналу (3.15) задачі (3.15), (3.2), (3.16) на  $R^m$  необхідно, щоб виконувалася умова*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \forall h \in R^m. \quad (3.26)$$

Тут  $x(t), \psi(t)$  є розв'язки системи (3.2) і спряженої системи (3.24), які відповідають  $p_*$ ,  $R(p_*)$  визначається за (3.25) при  $p = p_*$ .

З теореми про необхідну умову екстремуму на множині  $D$  випливає такий наслідок.

**Наслідок 12.2.** *Для того, щоб точка  $p_*$  була точкою локального мінімуму функціоналу (3.15) задачі (3.15), (3.2), (3.16) на  $D$  необхідно, щоб виконувалася умова*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T \frac{\partial H(x(t), p_*, \psi(t), t)}{\partial p} dt, h \right\rangle \leq 0, \forall h \in C(x_*, D), \quad (3.27)$$

де  $C(x_*, D)$  – конус Булігана в точці  $x_*$  до множини  $D$ . Тут  $x(t), \psi(t)$  є розв'язки системи (3.2) і спряженої системи (3.24), які відповідають  $p_*$ ,  $R(p_*)$  визначається за (3.25) при  $p = p_*$ .

### 3.3 Лінійний випадок

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості [2]

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T), x_0, p) \quad (3.28)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.29)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$  – вектор стану системи (3.29),  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$  – вектор параметрів,  $A(t)$  – матриця розмірності  $n \times n$  з неперервними ком-

понентами,  $\Phi : R^n \rightarrow R^1$  – опукла неперервно диференційована функція,  $x(t_0) = x_0 \in M_0$ , де  $M_0 \subset R^n$  – опуклий компакт. Задача параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (3.29) з функціоналом (3.28) полягає у знаходженні параметра  $p_* \in R^n$  такого, що

$$\inf_{p \in R^n} I(p) = I(p_*). \quad (3.30)$$

Загальний розв’язок системи (3.29) можна подати у формі Коші за формулою Коші

$$x(t, x_0, p) = \Theta(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^T \Theta(t, s)C(s)ds p,$$

де  $\Theta(t, s)$  є фундаментальною матрицею системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

нормованої за моментом  $s$ , ( $t, s \in [t_0, T]$ ). Це означає, що розв’язок  $x(t, x_0, p)$  системи (3.29) є лінійною функцією відносно  $x_0$  та  $p$  і за формулою Коші

$$x(t, x_0, t_0) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p, \quad (3.31)$$

де

$$B(t) = \int_{t_0}^T \Theta(t, s)C(s)ds.$$

Тому

$$J(x_0, p) = \Phi(x(T, x_0, t_0)) = \Phi(\Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p)$$

є опуклою функцією відносно  $x_0$  і  $p$ . Отже, функціонал (3.28) є опуклим відносно  $p$ , що випливає з твердження що максимум опуклої функції є опуклим. Більше про властивості опуклих функцій можна почитати тут [11]. Отже, що задача (3.28)-(3.30) є задачею негладкої опуклої оптимізації. Для її розв’язування можна використовувати спеціальні методи. Функція Гамільтона-Понтрягіна задачі (3.28)-(3.30) має вигляд

$$H(x, p, \psi, t) = \langle A(t)x + C(t)p, \psi \rangle.$$

Враховуємо, що

$$\begin{aligned}\frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial x} &= A^*(t)\psi, \\ \frac{\partial H(x, p, \psi, t)}{\partial p} &= C^*(t)\psi,\end{aligned}$$

як наслідок теореми (11) одержимо таке твердження.

**Теорема 13.** *Похідна за напрямком  $h \in R^m$  функціоналу (3.28) задачі (3.28)-(3.30) має вигляд*

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} \left\langle - \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t)dt, h \right\rangle,$$

де  $\psi(t) = \psi(t, x_0)$  є розв'язком спряженої системи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\psi(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.32)$$

$$\psi(T) = -\frac{\partial \Phi(x(T, x_0, p))}{\partial x}, \quad (3.33)$$

$$R(p) = \{x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x(T, y_0, p)) = \Phi(x(T, x_0, p))\}. \quad (3.34)$$

Слід зазначити, що  $R(p)$  є опуклим компактом. Компактність є загальною властивістю маргінальної множини. Опуклість випливає з того, що  $R(p) = M_0 \cap L(p)$ , де

$$L(p) = \left\{ x_0 \in R^n : \Phi(x(T, x_0, p)) = \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x(T, y_0, p)) \right\}.$$

Так як  $\Phi(x(T, x_0, p))$  є неперервно опуклою за  $x_0$  функцією, то множина  $L(p)$  є замкненою і опуклою. Отже,  $R(p)$  є перетином двох опуклих множин.

**Теорема 14.** *Для того щоб точка  $p_* \in R^m$  була точкою локального мінімуму задачі (3.28)-(3.30) необхідно і достатньо, щоб*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t)dt, p - p_* \right\rangle \leq 0, \quad p \in R^m, \quad (3.35)$$

де  $\psi(t) = \psi(t, x_0, p_*)$  є розв'язком спряженої системи (3.32), (3.33), який відповідає  $p = p_*$ , маргінальна множина  $R(p_*)$  визначається за допомогою (3.34) при  $p = p_*$ .

*Доведення.* Необхідність є наслідком теореми (11) і її наслідку (11.1). Дійсно, підставляючи в наслідок (11.1) теореми (11) вектор  $h = \alpha(p - p_*)$ , де  $\alpha > 0$  – деяка константа,  $p \in R^m$ , одержуємо (3.35).

Покажемо достатність. Оскільки  $p = p_*$  є розв'язком задачі (3.28)-(3.30), то

$$I(p_*) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p_*)) \leq \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p)) = I(p)$$

для всіх  $p \in R^m$ . Нагадаємо, що для задачі опуклої оптимізації локальний мінімум співпадає з глобальним мінімумом. Отже, при  $x_0^* \in R(p_*)$  маємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p)) - \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p_*)) \leq \\ &\leq \Phi(x(T, x_0^*, p)) - \Phi(x(T, x_0^*, p_*)) \leq \\ &\leq \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, x_0^*, p_*))}{\partial x}, x(T, x_0^*, p) - x(T, x_0^*, p_*) \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Тут ми використали означення маргінальної множини  $R(p_*)$ , а також те що  $\Phi(x)$  є опуклою неперервно диференційованою функцією і тому

$$\Phi(x) - \Phi(y) \leq \left\langle \frac{\partial \Phi(y)}{\partial x}, x - y \right\rangle$$

для довільних точок  $x, y \in R^n$ . З (3.36), (3.33) одержуємо

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left\langle \frac{\partial \Phi(x(T, x_0^*, p_*))}{\partial x}, x(T, x_0^*, p) - x(T, x_0^*, p_*) \right\rangle = \\ &= \langle -\psi(T, x_0^*, p_*), x(T, x_0^*, p) - x(T, x_0^*, p_*) \rangle. \end{aligned}$$

З (3.31) маємо

$$0 \leq \langle -\psi(T, x_0^*, p_*), B(T)(p - p_*) \rangle, \quad B(T) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s)C(s)ds.$$

Оскільки система (3.32) є спряженою до системи  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ , то її фундаментальна матриця, нормована за моментом  $s$  має вигляд  $N(T, s) = \Theta^*(s, T)$ . Тоді за формулою Коші

$$\psi(T) = N(T, s)\psi(s) = \Theta^*(s, T)\psi(s).$$

Одержуємо

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle -\psi(T), B(T)(p - p_*) \rangle = \\
&= \langle -\psi(T), \int_{t_0}^T \Theta(T, s)C(s)(p - p_*)ds \rangle = \\
&= \int_{t_0}^T \langle -\psi(T), \Theta(T, s)C(s)(p - p_*) \rangle ds = \\
&= \int_{t_0}^T \langle -\Theta^*(s, T)\psi(s), \Theta(T, s)C(s)(p - p_*) \rangle ds = \\
&= \int_{t_0}^T \langle -C^*(s)\Theta^*(T, s)\Theta^*(s, T)\psi(s), p - p_* \rangle ds.
\end{aligned}$$

Так як  $\Theta^*(T, s)\Theta^*(s, T) = (\Theta(s, T)\Theta(T, s))^* = I_n$ , то

$$0 \leq \int_{t_0}^T \langle -C^*(s)\psi(s), (p - p_*) \rangle ds, \quad p \in R^m.$$

Оскільки  $x_0^* \in R(p_*)$  – довільна точка, то

$$\left\langle \int_{t_0}^T C^*(s)\psi(s)ds, p - p_* \right\rangle \leq 0, \quad p \in R^m,$$

звідки

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T C^*(s)\psi(s)ds, p - p_* \right\rangle \leq 0, \quad p \in R^m.$$

□

**Наслідок 14.1.** *Якщо в задачі (3.28)-(3.30) накладена умова  $p \in D$  де  $D \subset R^m$  – замкнена опукла множина, то точка  $p_* \in D$  є точкою локального мінімуму функціоналу (3.28) в задачі (3.28)-(3.30) з умовою  $p \in D$  тоді і тільки тоді, коли*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t)dt, p - p_* \right\rangle \leq 0$$

для всіх  $p \in D$ .

*Доведення.* При доведенні наслідка слід виконати всі кроки доведення теореми (14), але базувати доведення на наслідку (11.2) теореми (11.1). Також слід врахувати, що конус Булігана  $C(p_*, D) = \overline{\text{cone}}(D - p_*)$  у випадку опуклості  $D$ . Тут  $\overline{\text{cone}}(\cdot)$  – замкнена конічна оболонка множини. У цьому випадку

вектор  $h = \alpha(p - p_*) \in C(p_*, D)$ , якщо  $p \in D$ ,  $\alpha > 0$ . □

### 3.4 Випадок квадратичного функціоналу

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості [2]

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \frac{1}{2} \langle Q_0(x - x_T), x - x_T \rangle \quad (3.37)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.38)$$

де  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^*$  – вектор стану системи (3.38),  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)^*$  – вектор параметрів,  $A(t)$  – матриця розмірності  $n \times n$  з неперервними компонентами,  $Q_0$  –  $n \times n$  – симетрична додатновизначена матриця,  $x_T \in R^n$  – відомий вектор,  $x(t_0) = x_0 \in M_0$ ,  $M_0 \subset R^n$  – опуклий компакт. Задача параметричної оптимізації пучка траєкторій системи (3.38) з функціоналом (3.37) полягає у знаходженні параметра  $p_* \in R^m$  такого, що

$$\inf_{p \in R^m} I(p) = I(p_*). \quad (3.39)$$

**Теорема 15.** *Похідна за напрямком  $h \in R^m$  функціоналу (3.37) задачі (3.37)-(3.39) має вигляд*

$$I'(p, h) = \max_{x_0 \in R(p)} \left\langle - \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t)dt, h \right\rangle,$$

де  $\psi(t) = \psi(t, x_0)$  є розв'язком спряженої системи

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -A^*(t)\psi(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.40)$$

$$\psi(T) = -Q_0(x(T, x_0) - x_T), \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} R(p) = \left\{ x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \frac{1}{2} \langle Q_0(x(T, y_0) - x_T), x(T, y_0) - x_T \rangle = \right. \\ \left. = \frac{1}{2} \langle Q_0(x(T, x_0) - x_T), x(T, x_0) - x_T \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

де  $x(T, x_0) = x(T, x_0, p)$ .

*Доведення.* При доведенні теореми слід виконати всі кроки доведення теоре-

ми (13), але підставивши значення функціоналу  $\Phi(x(T, x_0, p))$ .  $\square$

**Теорема 16.** *Для того щоб точка  $p_* \in R^m$  була точкою локального мінімуму задачі (3.37)-(3.39) необхідно і достатньо, щоб*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t)dt, p - p_* \right\rangle \leq 0, \quad p \in R^m, \quad (3.43)$$

де  $\psi(t) = \psi(t, x_0, p_*)$  є розв'язком спряженої системи (3.40),(3.41), який відповідає  $p = p_*$ , маргинальна множина  $R(p_*)$  визначається за допомогою (3.42) при  $p = p_*$ .

*Доведення.* При доведенні теореми слід виконати всі кроки доведення теореми (13), але підставивши значення функціоналу  $\Phi(x(T, x_0, p))$ .  $\square$

**Наслідок 16.1.** *Якщо в задачі (3.37)-(3.39) накладена умова  $p \in D$  де  $D \subset R^m$  – замкнена опукла множина, то точка  $p_* \in D$  є точкою локального мінімуму функціоналу (3.28) в задачі (3.37)-(3.39) з умовою  $p \in D$  тоді і тільки тоді, коли*

$$\min_{x_0 \in R(p_*)} \left\langle \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t)dt, p - p_* \right\rangle \leq 0$$

для всіх  $p \in D$ .

*Доведення.* При доведенні теореми слід виконати всі кроки доведення теореми (13), але підставивши значення функціоналу  $\Phi(x(T, x_0, p))$ .  $\square$

## 4 Методи параметричної оптимізації пучка траєкторій

### 4.1 Метод найшвидшого спуску

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p))$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), p, t), \quad t \in [t_0, T].$$

Розв'яжемо дану задачу методом найшвидшого спуску. Оберемо  $p_0 \in R^m$  – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо  $p_k$ . Тоді перехід до  $(k + 1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область  $M_0$ . Тоді беремо точки  $x_0$  як вузли сітки і розв'язуємо для кожного вузла систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, p_k, t), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

При цьому  $x(T)$  шукається як чисельний розв'язок системи для відповідного  $x_0$ .

Крок 2. Знаходимо  $\psi(t, x_0)$  як чисельний розв'язок системи

$$\begin{aligned} \frac{\psi(t, x_0)}{dt} &= -\frac{\partial f^*(x, p_k, t)}{\partial x} \psi(t, x_0), \\ \psi(T, x_0) &= -\frac{\partial \Phi(x(T, x_0))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Крок 3. Визначимо маргинальну множину і відповідну їй множину  $L(p)$  (1.18) з урахуванням (11.1).

$$R(p_k) = \{x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k))\},$$

$$L(p_k) = \left\{ - \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T \frac{\partial f^*(x_k, p_k, t)}{\partial p_k} \psi(t, x_0) dt, \right. \\ \left. \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Крок 4. Знаходимо  $z_k^{(*)}$  з умови

$$\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|.$$

якщо  $z_k^{(*)} = 0$ , то  $p_k$  – шукане значення параметра  $p$  і процес зупиняється. Інакше – процес триває далі.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння

$$p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k),$$

де  $\alpha_k$  шукається як розв'язок однорозмірно оптимізаційної задачі

$$I(p_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in (0, \infty)} I(p_{k+1}(\alpha)).$$

## 4.2 Метод найшвидшого спуску. Лінійний випадок

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T), x_0, p)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T].$$

Розв'яжемо дану задачу методом найшвидшого спуску. Оберемо  $p_0 \in R^m$  – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо  $p_k$ . Тоді перехід до  $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область  $M_0$ . Тоді беремо точки  $x_0$  як вузли сітки і знаходимо для кожної

$$x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k,$$

де  $\Theta(t, s)$  – матриця Коші,  $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$ .

Крок 2. Знаходимо  $\psi(t, x_0)$  у вигляді

$$\psi(t, x_0) = -\Theta^*(T, t) \frac{\partial \Phi(x_k(T, x_0, p_k))}{\partial x}.$$

Крок 3. Визначимо маргинальну множину і відповідну їй множину  $L(p)$  (1.18) з урахуванням (13)

$$R(p_k) = \{x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k))\},$$

$$L(p_k) = \left\{ - \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T C^*(t) \psi(t, x_0) dt, \right. \\ \left. \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Крок 4. Знаходимо  $z_k^{(*)}$  з умови

$$\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|.$$

Якщо  $z_k^{(*)} = 0$ , то  $p_k$  – шукане значення параметра  $p$  і процес зупиняється. Інакше – процес триває далі.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння

$$p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k).$$

де  $\alpha_k$  шукається як розв'язок однорозмірно оптимізаційної задачі

$$I(p_{k+1}(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in (0, \infty)} I(p_{k+1}(\alpha)).$$

### 4.3 Метод еліпсоїдів. Лінійний випадок

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p))$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T].$$

Розв'яжемо дану задачу методом еліпсоїдів. Нехай відомо, що розв'язок задачі  $p_* \in K(p_0, R)$ , де  $K(p_0, R)$  – замкнена куля з центром в точці  $p_0$  і радіусом  $R$ . Розглянемо алгоритм розв'язування даної задачі при  $n > 1$ . Зафіксуємо стартову точку  $p_0 \in R^m$ . Візьмемо  $h_0 = R/(n + 1)$ . Покладемо  $B_0 = I$ , де  $I_m$  – одинична  $(m \times m)$  – матриця. Нехай на  $k$ -й ітерації знайдені значення  $p_k \in R^m$ ,  $h_k$  і матриця  $B_k$ . Перехід до  $(k + 1)$ -ї ітерації полягає у виконанні такої послідовності кроків:

Крок 1. Спочатку вводимо дискретну сітку на область  $M_0$ . Тоді беремо точки  $x_0$  як вузли сітки і знаходимо для кожної

$$x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k,$$

де  $\Theta(t, s)$  – матриця Коші,  $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$ . Також обчислимо  $\psi(t, x_0)$  за формулою

$$\psi(t, x_0) = -\Theta^*(T, t) \frac{\partial \Phi(x_k(T, x_0, p_k))}{\partial x}.$$

Крок 2. Обчислимо  $z_k^{(*)}$  з умови

$$\min_{z \in L(x_k)} \|z\| = \|z_k^{(*)}\|,$$

де

$$R(p_k) = \{x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} \Phi(x_k(T, y_0, p_k)) = \Phi(x_k(T, x_0, p_k))\},$$

$$L(p_k) = \left\{ - \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} \int_{t_0}^T C^*(t)\psi(t, x_0)dt, \right. \\ \left. \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Якщо  $z_k^{(*)} = 0$ , тоді зупинимось:  $p_k$  – розв'язок. Інакше перейдемо до кроку 3.

Крок 3. Визначимо

$$\zeta_k = \frac{B_k^T z_k^{(*)}}{\|B_k^T z_k^{(*)}\|}.$$

Крок 4. Обчислимо наступну точку

$$x_{k+1} = x_k - h_k B_k \zeta_k.$$

Крок 5. Обчислимо

$$B_{k+1} = B_k R_\beta(\zeta_k),$$
$$\beta = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}},$$

де  $R_\beta(\zeta_k)$  – оператор розтягування простору в напрямку  $\zeta_k$  з коефіцієнтом  $\beta$ .

Крок 6. Обчислимо

$$h_{k+1} = h_k r,$$
$$r = \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Опис алгоритму закінчено.

#### 4.4 Метод координатного спуску. Лінійний випадок

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \max_{x_0 \in M_0} \Phi(x(T, x_0, p))$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)p, \quad t \in [t_0, T].$$

Розв'яжемо дану задачу методом координатного спуску. Оберемо  $p_0 \in R^m$  – початкове наближення. Воно обирається довільним чином з області значень. Нехай відомо  $p_k$ . Тоді перехід до  $(k+1)$ -ї ітерації матиме вигляд:

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область  $M_0$ . Тоді беремо точки  $x_0$  як

вузли сітки і знаходимо для кожної

$$x_k(t) = \Theta(t, t_0)x_0 + B(t)p_k,$$

де  $\Theta(t, s)$  – матриця Коші,  $B(t) = \int_{t_0}^t \Theta(t, s)C(s)ds$ .

Крок 2. Введемо змінну  $p_{k,0} = p_k$ . Тоді побудуємо послідовно спуск по кожній з координат вектора  $p_k$ :

$$p_{k,l} = p_{k,l-1} - \alpha_{k,l}e_l = p_{k,l}(\alpha_{k,l}), l = 1, \dots, m$$

де  $e_l$  –  $l$ -й орт,  $\alpha_{k,l}$  шукається як розв'язок одновимірної задачі мінімізації

$$I(p_{k,l}(\alpha_{k,l})) = \min_{\alpha \in (-\infty, \infty)} I(p_{k,l}(\alpha)).$$

Крок 3. Якщо  $p_{k,m} = p_k$  то алгоритм зупиняється і шукана точка  $p_k$ .  
Інакше

$$p_{k+1} = p_{k,m}. \tag{4.1}$$

Опис алгоритму завершено.

## 5 Обчислювальний експеримент

### 5.1 Задача 1

#### Постановка задачі

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \frac{1}{2} \max_{x_0 \in M_0} (x(T, x_0) - x_T)^2 \rightarrow \min \quad (5.1)$$

на розв'язках системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + p, \quad t \in [0, T], \quad (5.2)$$

$$x(0) = x_0 \in M_0, \quad M_0 = [a, b], \quad (5.3)$$

де  $a, b, x_T, A$  – деякі числа,  $T > 0$ .

#### Алгоритм методу найшвидшого спуску для даної задачі

Обираємо початкове значення  $p_0$ .

Крок 1. Вводимо дискретну сітку на область  $M_0$ . Тоді беремо точки  $x_0$  як вузли сітки і знаходимо для кожної

$$x_k(T) = \exp(AT)x_0 + p_k \left( \frac{1}{A} (\exp(AT) - 1) \right).$$

Крок 2. Для кожного  $x_0$  знаходимо  $\psi(t, x_0)$  у вигляді

$$\psi(t, x_0) = -\exp(A(T-t))(x_k(T, x_0) - x_T).$$

Крок 3. Визначимо маргинальну множину і відповідну їй множину  $L(p)$  (1.18) з урахуванням (13),

$$R(p_k) = \{x_0 \in M_0 : \max_{y_0 \in M_0} (x_k(T, y_0) - x_T)^2 = (x_k(T, x_0) - x_T)^2\},$$

$$L2(p_k, x_0) = \frac{1}{A} \exp(AT)(x_k(T, x_0) - x_T),$$

$$L(p_k) = \left\{ \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} L2(p_k, x_0), \right. \\ \left. \sum_{x_0 \in R(p_k)} \alpha_{x_0} = 1, \alpha_{x_0} \geq 0, x_0 \in R(p_k) \right\}.$$

Оскільки задача одновимірна то є два випадки:

1.  $R(p_k)$  містить більше однієї точки. Тоді  $L(p_k) = \alpha(x_1 - x_2) + x_2$ , де  $x_1, x_2 \in L2(p_k, x_0), x_0 \in M_0$  – крайні точки множини (всі інші точки лежать між ними).

2.  $R(p_k)$  містить одну точку. Тоді  $L(p_k) = L2(p_k, x_0)$ .

Крок 4. Знаходимо  $z_k^{(*)}$  з умови

$$z_k^{(*)} = \alpha(x_1 - x_2) + x_2,$$

де

$$\alpha = \arg \min_{\alpha \in [0,1]} \|\alpha(x_1 - x_2) + x_2\|$$

для випадку 2, або

$$z_k^{(*)} = L2(p_k, x_0).$$

для випадку 1.

Крок 5. Обчислимо наступну ітерацію з рівняння

$$p_{k+1} = p_k - \alpha_k \frac{z_k^{(*)}}{\|z_k^{(*)}\|} = p_{k+1}(\alpha_k).$$

де  $\alpha_k$  – послідовність для якої виконуються умови:

$$\alpha_k > 0, \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k)^2 < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty.$$

Якщо  $|p_{k+1} - p_k| < \epsilon$ , де  $\epsilon$  – наперед задане мале число, то процес закінчується. Інакше переходимо на  $(k + 1)$ -у ітерацію.

## Результати обчислень методом найшвидшого спуску

**Приклад 1.** Розглядаємо задачу 1 при таких умовах:

початкові параметри:  $a = 1; b = 2; x_T = 1.4; A = -2; T = 0.9;$

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 21;

Початкове наближення параметра  $p$ : 5;

Кількість ітерацій алгоритму: 20;

Умова зупинки алгоритму:  $|p_{k+1} - p_k| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0.1e - 3$ .

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ : 2.7604, оптимальне значення критерія якості (5.1)  $I(p_*)$ : 0.0034.

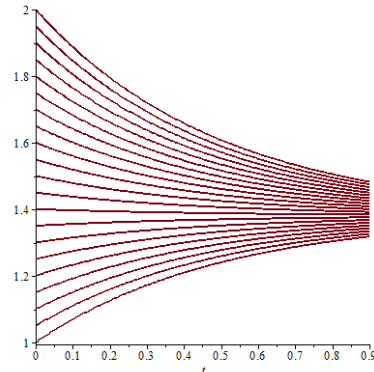


Рис. 1: Оптимальний пучок

На рисунку 1 зображений оптимальний пучок  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t = [0, T]$ , що виходить з точок розбиття  $x_0$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Приклад 2.** Розглядаємо задачу 1 при таких умовах:

початкові параметри:  $a = 0$ ;  $b = 3$ ;  $x_T = 1$ ;  $A = -1$ ;  $T = 2.9$ ;

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 21;

Початкове наближення параметра  $p$ : 25;

Кількість ітерацій алгоритму: 20;

Умова зупинки алгоритму:  $|p_{k+1} - p_k| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0.1e - 3$ .

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ : 0.9709, оптимальне значення критерія якості (5.1)  $I(p_*)$ : 0.0034.

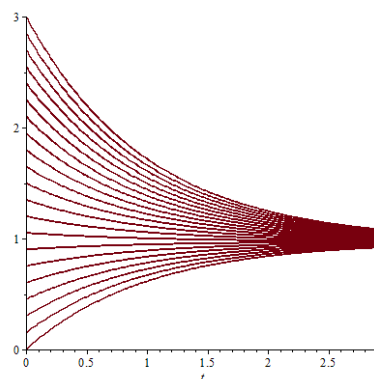


Рис. 2: Оптимальний пучок

На рисунку 2 зображений оптимальний пучок  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t = [0, T]$ , що виходить з точок розбиття  $x_0$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Приклад 3.** Розглядаємо задачу 1 при таких умовах:

початкові параметри:  $a = 0$ ;  $b = 3$ ;  $x_T = 5$ ;  $A = 1$ ;  $T = 2$ ;

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 21;

Початкове наближення параметра  $p$ :  $-5$ ;

Кількість ітерацій алгоритму: 24;

Умова зупинки алгоритму:  $|p_{k+1} - p_k| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0.1e - 4$ .

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $-0.95218$ , оптимальне значення критерія якості (5.1)  $I(p_*)$ : 61.423.

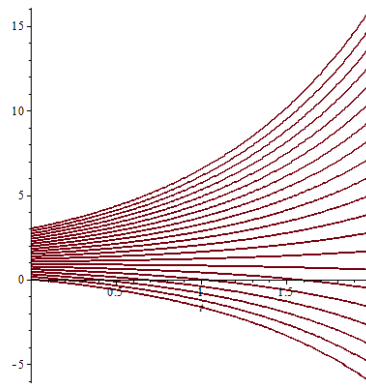


Рис. 3: Оптимальний пучок

На рисунку 3 зображений оптимальний пучок  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t = [0, T]$ , що виходить з точок розбиття  $x_0$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

## 5.2 Задача 2

### Постановка задачі

Розглянемо задачу параметричної оптимізації, яка полягає у мінімізації критерія якості

$$I(p) = \frac{1}{2} \max_{x_0 \in M_0} \{(x_1(T, x_0) - x_T^{(1)})^2 + (x_2(T, x_0) - x_T^{(2)})^2\} \rightarrow \min \quad (5.4)$$

на розв'язках системи

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + p_1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + p_2,\end{aligned}\tag{5.5}$$

$$x(0) = x_0 \in M_0, \quad t \in [0, T],\tag{5.6}$$

де множина  $M_0$  має вигляд

$$a) M_0 = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leq c_1, |x_2| \leq c_2\},\tag{5.7}$$

$$b) M_0 = \{(x_1, x_2) : (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq r^2\},\tag{5.8}$$

де  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, x_T^{(1)}, x_T^{(2)}$  – деякі числа,  $T > 0, c_1 > 0, c_2 > 0, r > 0,$   
 $p = (p_1, p_2), X_T = (x_T^{(1)}, x_T^{(2)}).$

## Результати обчислень

**Приклад 4.** Розглядаємо задачу 2 для множини (5.7) за таких умов:

початкові параметри:  $a_{11} = 4; a_{12} = 3; a_{21} = -3; a_{22} = 2; x_T = (1, 1);$   
 $T = 0.4; c_1 = 3; c_2 = 2;$

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 441;

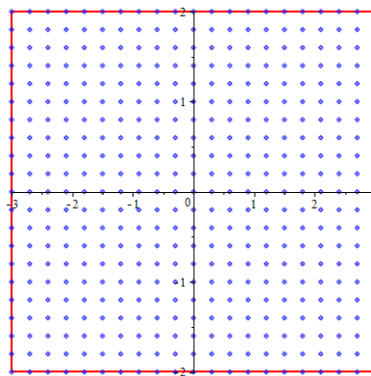


Рис. 4: Дискретна сітка

На рисунку 4 зображений дискретна сітка на множині  $x_0 \in M_0$ .

Початкове наближення параметра  $p$ :  $(1, 1);$

Умова зупинки алгоритму:  $\|z_k^{(*)}\| < \epsilon,$  де  $\epsilon = 0.1e - 3.$

**Метод найшвидшого спуску.**

Кількість ітерацій алгоритму: 2;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $(-0.1481, 2.265)$ , оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 134.451.

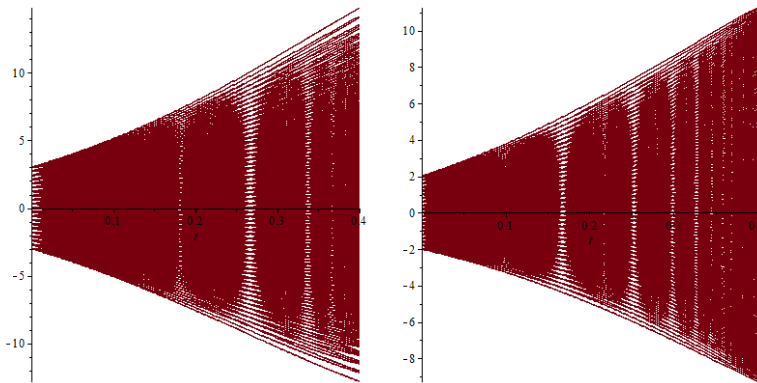


Рис. 5: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 5 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Метод еліпсоїдів.**

Кількість ітерацій алгоритму: 32;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $(-0.1480, 2.265)$ , оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 134.451.

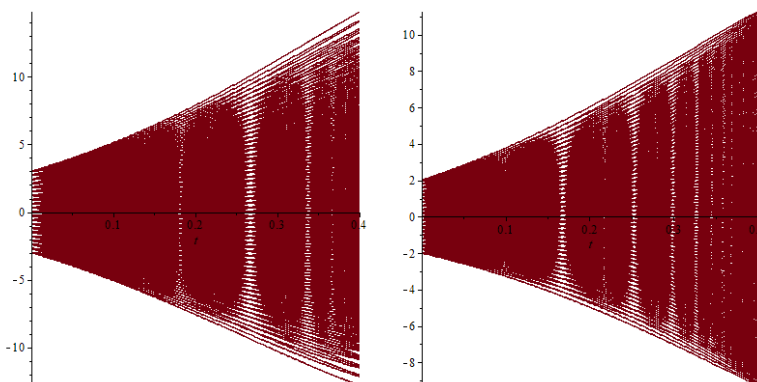


Рис. 6: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 6 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Приклад 5.** Розглядаємо задачу 2 для множини (5.8) при таких умовах:

початкові параметри:  $a_{11} = 4; a_{12} = -1; a_{21} = -3; a_{22} = -2; x_T = (1, 2);$   
 $T = 0.8; r = 2;$

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 441;

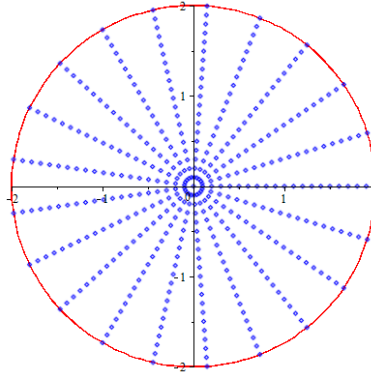


Рис. 7: Дискретна сітка

На рисунку 7 зображений дискретна сітка на множині  $x_0 \in M_0$ .

Початкове наближення параметра  $p$ :  $(1, 1);$

Умова зупинки алгоритму:  $\|z_k^{(*)}\| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0.1e - 3$ .

**Метод найшвидшого спуску.**

Кількість ітерацій алгоритму: 4;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $(1.1565, 6.5813)$ , оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 2709.09.

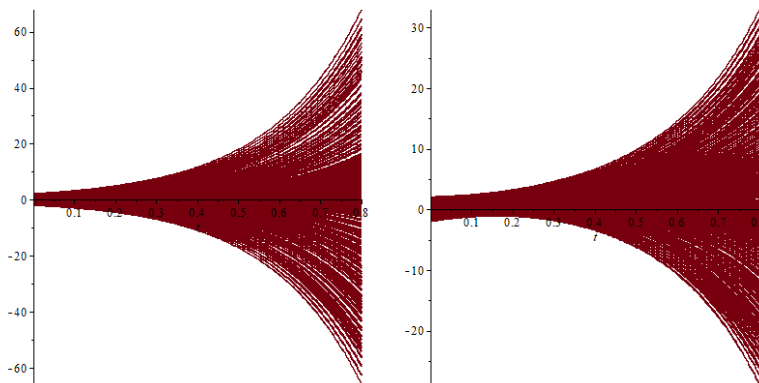


Рис. 8: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 8 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцис відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Метод еліпсоїдів.**

Кількість ітерацій алгоритму: 33;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ : (1.1578, 6.589), оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 2709.89.

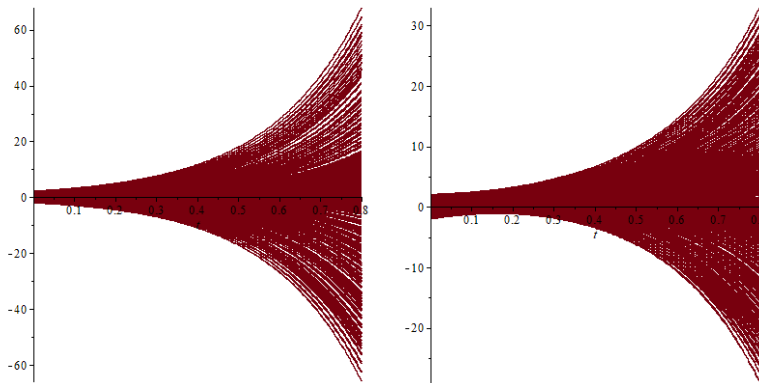


Рис. 9: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 9 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцис відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Приклад 6.** Розглядаємо задачу 2 для множини (5.7) при таких умовах: початкові параметри:  $a_{11} = -3$ ;  $a_{12} = 3$ ;  $a_{21} = -3$ ;  $a_{22} = -8$ ;  $x_T = (1, 2)$ ;  $T = 1.4$ ;  $c_1 = 1$ ;  $c_2 = 5$ ;

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 441;

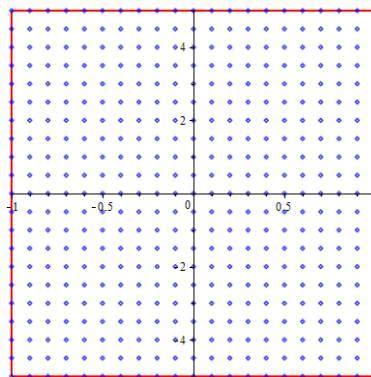


Рис. 10: Дискретна сітка

На рисунку 10 зображений дискретна сітка на множині  $x_0 \in M_0$ .

Початкове наближення параметра  $p$ : (1, 1);

Умова зупинки алгоритму:  $\|z_k^{(*)}\| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0.1e - 3$ .

**Метод найшвидшого спуску.**

Кількість ітерацій алгоритму: 7;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $(-2.973, 18.919)$ , оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 0.000076.

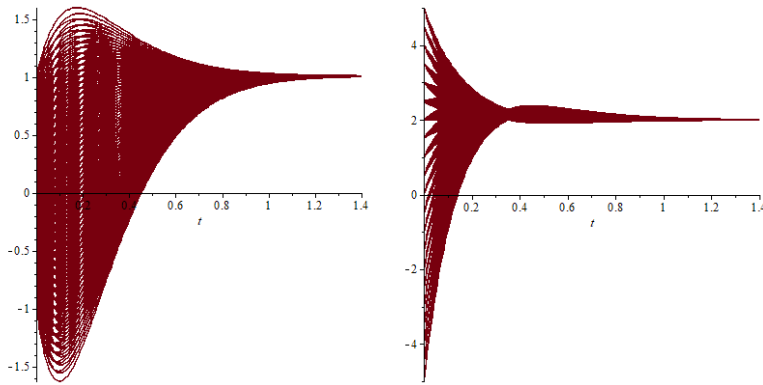


Рис. 11: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 11 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

#### Метод еліпсоїдів.

Кількість ітерацій алгоритму: 13;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $(-3.013, 19.044)$ , оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 0.000079.

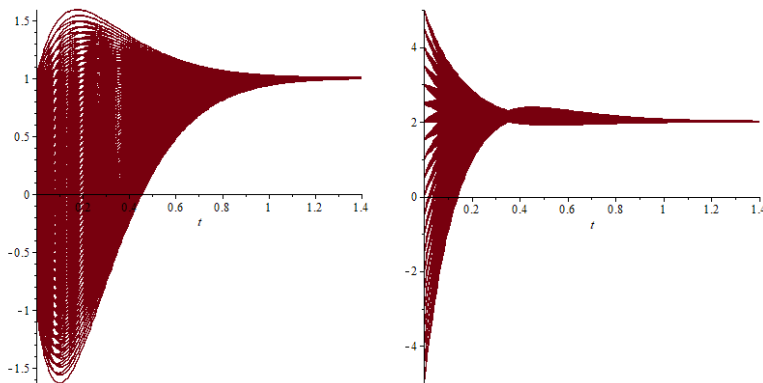


Рис. 12: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 12 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцисс відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Приклад 7.** Розглядаємо задачу 2 для множини (5.8) при таких умовах:

початкові параметри:  $a_{11} = -4$ ;  $a_{12} = -1$ ;  $a_{21} = 3$ ;  $a_{22} = -2$ ;  $x_T = (1, 2)$ ;  
 $T = 0.8$ ;  $r = 4$ ;

Кількість точок розбиття для дискретної сітки на  $M_0$ : 441;

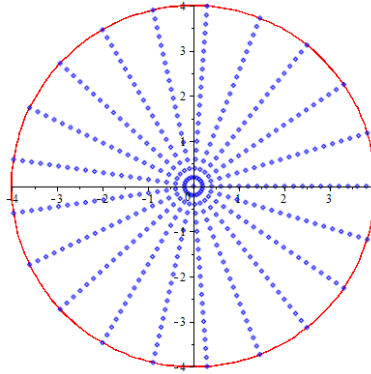


Рис. 13: Дискретна сітка

На рисунку 13 зображений дискретна сітка на множині  $x_0 \in M_0$ .

Початкове наближення параметра  $p$ :  $(1, 1)$ ;

Умова зупинки алгоритму:  $\|z_k^{(*)}\| < \epsilon$ , де  $\epsilon = 0.1e - 3$ .

**Метод найшвидшого спуску.**

Кількість ітерацій алгоритму: 3;

Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ :  $(5.76, 2.201)$ , оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 0.335.

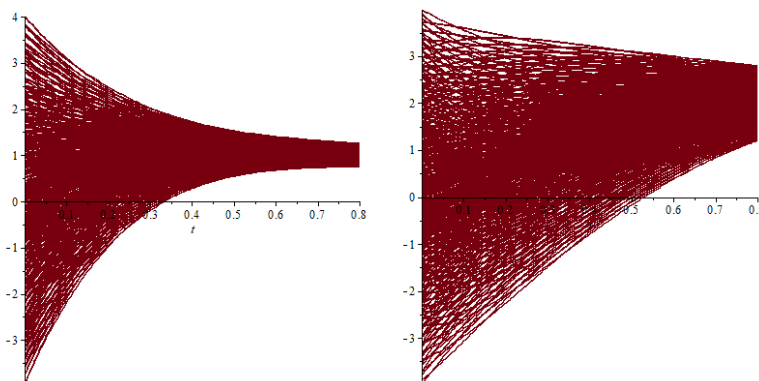


Рис. 14: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

На рисунку 14 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t \in [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцис відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.

**Метод еліпсоїдів.**

Кількість ітерацій алгоритму: 23;

*Результат: оптимальне значення параметра  $p_*$ : (5.811, 2.188), оптимальне значення критерія якості (5.4)  $I(p_*)$ : 0.332.*

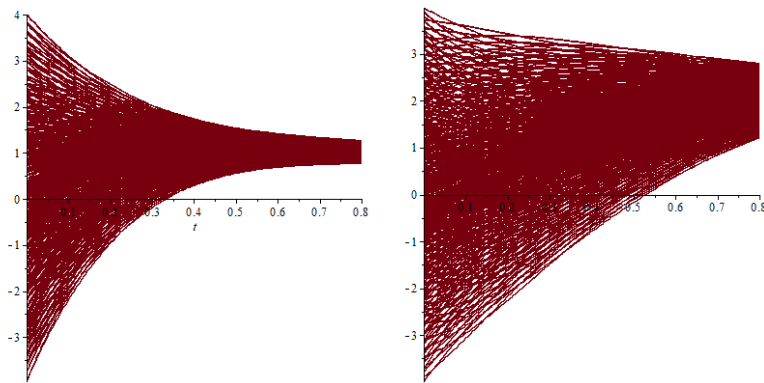


Рис. 15: Проекції оптимального пучка на осі  $x_1$  (зліва) та  $x_2$  (справа)

*На рисунку 15 зображені проекції оптимального пучка  $x(t, x_0, p_*)$ ,  $t = [0, T]$ , на осі  $x_1, x_2$  ( $x = (x_1, x_2)$ ). Зліва –  $x_1(t, x_0, p_*)$ , справа –  $x_2(t, x_0, p_*)$ . Осі абсцис відповідає  $t$ . На осі ординат позначені точки  $x_0$  розбиття, з яких бере початок пучок.*

Програма для реалізації даних методів була написана за допомогою програмного забезпечення Maple.

# Висновки

Випускна кваліфікаційна робота магістра присвячена створенню алгоритмів параметричної оптимізації пучка траєкторій з функціоналом типу максимуму. В роботі запропоновано такі результати:

1 Розглянуто задачі параметричної оптимізації пучка траєкторій з різними типами критеріїв якості, а саме:

з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу;

з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від функціоналу Больца;

з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу на розв'язках лінійної системи.

2 На основі цього для даних типів задач були модернізовані такі алгоритми :

метод найшвидшого спуску;

метод еліпсоїдів;

метод координатного спуску.

3 Створено алгоритми і відповідну програму, що розв'язує задачу параметричної оптимізації пучка траєкторій з критерієм якості типу максимуму за початковими умовами від термінального функціоналу на розв'язках лінійної системи за допомогою алгоритмів:

метод найшвидшого спуску;

метод еліпсоїдів.

Проведено ряд обчислювальних експериментів, які показали ефективність розроблених методів.

# Література

1. Бублик Б.Н. Кириченко Н.Ф., Гаращенко Ф.Г. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. *К.: Наук. думка*, 1985, 304 с.
2. Башняков О.М. Пічкур В.В., Гаращенко Ф.Г. Практична стійкість, оцінки та оптимізація. *К.: ВПЦ Київський університет*, 2008, 383 с.
3. Зинько П.Н. Бейко И.В., Бублик Б.Н. Методы и алгоритмы решения задач оптимизации. *Высшая школа*, 1983, 512 с.
4. Немировский А. С. Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. *М.: Наука*, 1979, 383 с.
5. Шор Н.З. Стеценко С.И. Квадратичные экстремальные задачи и недифференцируемая оптимизация. *Киев: Наукова думка*, 1989, 209 с.
6. Галеев Э.М. Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. *М.: Эдиториал УРСС*, 2000, 320 с.
7. Демьянов В.Ф. Малоземов В.Н. Введение в минимакс. *М.: Наука*, 1972, 368 с.
8. Половинкин Е.С. Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. *М.: Физматлит*, 2007, 440 с.
9. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. *Киев: Наукова думка*, 1979, 200 с.
10. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. *М., Наука*, 1988, 280 с.
11. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. *М.: Наука*, 1980, 320 с.
12. Моклячук М.П. Негладкий аналіз та оптимізація. *К: Київський університет*, 2008, 399 с.