

УДК 539.3

Попов В. Г.<sup>1</sup>, д.ф.-м.н., проф.,  
Литвин О. В.<sup>1</sup>, к.ф.-м.н., доц.

**Напружений стан у пружному тілі з  
триланковим жорстким включенням при  
гармонічних коливаннях поздовжнього  
зсуву**

<sup>1</sup> Національний університет «Одеська морська академія», 65029, м. Одеса, вул. Дідріхсона, 8,  
e-mail: [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)  
e-mail: [litvinov.od@gmail.com](mailto:litvinov.od@gmail.com)

V. G. Popov<sup>1</sup>, Dr.Sci. (Phys.-Math.),  
O. V. Lytvyn<sup>1</sup>, PhD (Phys.-Math.).

**The stress state in an elastic body with a  
rigid inclusion of the shape of three segments  
broken line under the action of the harmonic  
oscillation of the longitudinal shift**

<sup>1,2</sup> National university «Odessa Maritime Academy»,  
65029, Odessa, Didrihsona str., 8,  
e-mail: [dr.vg.popov@gmail.com](mailto:dr.vg.popov@gmail.com)  
e-mail: [litvinov.od@gmail.com](mailto:litvinov.od@gmail.com)

*Розв'язана задача визначення напруженого стану в околі тунельного жорсткого включення, що в перерізі представляє собою триланкову ламану лінію. На включення, розташоване у необмеженому пружному просторі, діє гармонічна зсувна сила. Задача зведена до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями. Для наближеного розв'язання вказаної системи застосований числовий метод, який враховує справжню асимптотику невідомих функцій і використовує спеціальні квадратурні формули для сингулярних інтегралів.*

*Ключові слова:* включення, зсувна сила, нерухоми особливості.

*There is a thin absolutely rigid inclusion that in a cross-section represents three segments broken line in an infinite elastic medium (matrix) that is in the conditions of antiplane strain. The inclusion is under the action of harmonic shear force  $Pe^{-i\omega t}$  along the axis  $Oz$ . Under the conditions of the antiplane strain the only one different from 0  $z$ -component of displacement vector  $W(x; y)$  satisfies the Helmholtz equation.*

*The inclusion is fully couple with the matrix. The tangential stresses are discontinuous on the inclusion with unknown jumps*

$$\tau_{zy_k}(x_k, +0) - \tau_{zy_k}(x_k, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1; 2; 3.$$

*The method of the solution is based on the representation of displacement  $W(x; y)$  by discontinuous solutions of the Helmholtz equation. After the satisfaction of the conditions on the inclusion the system of integral equations relatively unknown jumps is obtained. One of the main results is a numerical method for solving the obtained system, which takes into account the singularity of the solution and is based on the use of the special quadrature formulas for singular integrals.*

*Key Words:* inclusion, shear force, fixed singularities

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

**Вступ.** Як відомо, реальні дефекти (тріщини, тонкі включення) мають кусково-гладку поверхню, можуть перетинатись або розгалужуватись. Що стосується задач з визначення напруженого стану в тілах з подібними дефектами, то найбільш дослідженими є задачі рівноваги тіл з тріщинами. Серед аналогічних динамічних задач можна вказати [1], [2], [3], де досліджувалась взаємодія плоских гармонічних хвиль з тріщиною у вигляді дво- і триланкової ламаної. Але аналогічні задачі для тіл з жорсткими включеннями майже не

розглядалися навіть у випадку гармонічних коливань. Тут можна згадати роботу [4]. Для розв'язання отриманих при цьому систем сингулярних інтегральних рівнянь з нерухомими особливостями був запропонований числовий метод, що враховує справжні особливості розв'язків. Саме цей метод застосовується при розв'язанні розглянутої далі задачі.

**Постановка задачі.** Нехай ізотропне пружне тіло знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить абсолютно жорстке тунельне вклю-

чення, яке в перерізі  $xOy$  є триланковою ланкою.

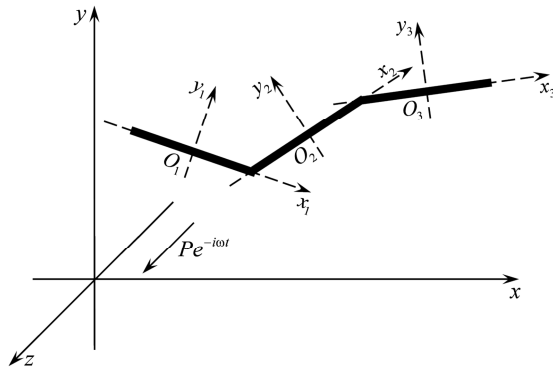


Рис. 1. Розташування включення у координатній площині

Ланки включення у площині  $xOy$  займають відрізки  $2d_k$  і утворюють з віссю  $Ox$  кути  $\alpha_k$  (Рис. 1). На включення діє гармонічна зсувна вздовж осі  $Oz$  сила  $Pe^{-i\omega t}$ . Множник  $e^{-i\omega t}$ , що визначає залежність від часу, надалі всюди відкинутий.

Нехай  $W(x; y)$  –  $z$ -компонента вектора переміщень розсіяного хвильового поля. В системі координат  $xOy$  вона задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta W + \kappa_2^2 W = 0, \quad \kappa_2^2 = \rho \omega^2 / G. \quad (1)$$

Для формулювання граничних умов на включенні з кожною його ланкою пов'язується система координат  $x_k O_k y_k$ ,  $k = 1; 2; 3$ .

Припускається, що між включенням і пружним середовищем здійснено повне зчеплення, тому

$$W_k^1(x_k, 0) = c, \quad k = 1; 2; 3, \quad (2)$$

де  $W_k(x_k, y_k)$  – переміщення  $W(x, y)$  після переходу до систем  $x_k O_k y_k$ .

Також на включенні розривні дотичні напруження з невідомими стрибками

$$\tau_{zyk}(x_l, +0) - \tau_{zyk}(x_l, -0) = \chi_{1k}(x_k), \quad -d_k < x_k < d_k \quad (3)$$

До рівності (3) входить  $c$  – невідоме переміщення включення під дією зсувної сили, яке визначається з рівняння руху включення

$$-(m_1 + m_2 + m_3)\omega^2 c = P + \sum_{k=1}^3 \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta, \quad (4)$$

$m_k$ ,  $k = 1; 2; 3$  – маса кожної ланки включення.

**Розв'язання задачі.** Для розв'язання задачі для кожної ланки включення з номером  $l$  у системі координат  $x_l O_l y_l$ , пов'язаної з нею, будується розривний розв'язок рівняння (1) зі стрибком (3) [5]

$$W_{ll}^1(x_l, y_l) = \int_{-d_l}^{d_l} \frac{\chi_{1l}(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (5)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left( \kappa_0 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right),$$

$H_0^{(1)}(z)$  – функція Ганкеля.

Після цього переміщення у системі координат  $xOy$  подаються у вигляді

$$W(x, y) = \sum_{l=1}^3 W_l^g(x, y), \quad (6)$$

де  $W_l^g(x, y)$  отримуються з (5) внаслідок перетворення координат.

Для визначення невідомих стрибків використовуються умови (2). Після реалізації цих умов отримана система сингулярних інтегральних рівнянь з додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 \left( -\frac{E}{\tau - \xi} + Q(\tau, \xi) + R(\tau, \xi) \right) \Phi(\tau) d\tau = 0, \quad -1 < \xi < 1,$$

$$\int_{-1}^1 (U \ln |\tau - 1| + D(\tau)) \Phi(\tau) d\tau = \frac{-\pi P_0}{\kappa_0^2 \varepsilon \rho r}. \quad (7)$$

В системі (7)  $E$  – одинична матриця розміру  $3 \times 3$ ,  $U$  – діагональна матриця розміру  $3 \times 3$  з елементами  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  на головній діагоналі,

$$\Phi(\tau) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) \\ \varphi_2(\tau) \\ \varphi_3(\tau) \end{pmatrix}, \quad \varphi_k(\tau) = \frac{\chi_k(\eta)}{G},$$

$$Q(\tau, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & q_{12}(\tau, \xi) & 0 \\ q_{21}(\tau, \xi) & 0 & q_{23}(\tau, \xi) \\ 0 & q_{32}(\tau, \xi) & 0 \end{pmatrix},$$

$$q_{ll+1}(\tau, \xi) = \frac{\gamma_{l+1}(\gamma_l(\xi \pm 1) - \gamma_{l+1}(\tau \mp 1) \cos \beta_{ll+1})}{s_{ll+1}(\tau, \xi)},$$

$$s_{ll+1} = \gamma_{l+1}^2(\tau \mp 1)^2 - 2\gamma_l \gamma_{l+1}(\tau \mp 1)(\xi \pm 1) \cos \beta_{ll+1} + \gamma_l^2(\xi \pm 1)^2, \quad (8)$$

$$\eta = d_l \tau, \quad x_l = d_l \xi, \quad \gamma_l = d_l / d, \quad \varepsilon_l = a_l / d, \quad \delta_l = b_l / d, \\ d = \max(d_1; d_2; d_3), \quad r = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

Наведені формули показують, що функції  $q_{ll\mp 1}(\tau, \xi)$ , які визначають ненульові елементи матриці  $Q(\tau, \xi)$ , мають особливості при  $\tau = \pm 1$ ,  $\xi = \mp 1$ . Матриці  $R(\tau, \zeta)$  і  $D(\tau)$  складаються з функцій, що визначають регулярні інтеграли.

До системи (7) необхідно додати рівність (4) для визначення невідомої амплітуди колювання включення.

**Наближене розв'язання системи інтегральних рівнянь.** Як в [4], знайдемо, що невідомі функції належить шукати у вигляді

$$\varphi_k(\tau) = (1-\tau)^{-\sigma_k} (1+\tau)^{-\lambda_k} \psi_k(\tau), \quad (9)$$

$$\sigma_1 = \lambda_2 = \delta_1, \lambda_1 = \sigma_3 = 1/2, \sigma_2 = \lambda_3 = \delta_2.$$

де степеневі показники  $\delta_1, \delta_2$  визначаються рівностями, наведеними у [4].

Далі, як і в [4], невідомі функції подаються у вигляді

$$\varphi_k(\tau) = (1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k} g_k(\tau) + (1+\tau)^{\lambda_k} (1-\tau)^{\sigma_k-1} \frac{\psi_k(1)}{2} + (1+\tau)^{\lambda_k-1} (1-\tau)^{\sigma_k} \frac{\psi_k(-1)}{2} \quad (10)$$

де  $g_k(\tau)$  - нові невідомі функції, що задовольняють умови Гольдера при  $\tau \in (-1; 1)$ ,

$$\sigma_1 = \lambda_2 = 1 - \delta_1; \sigma_2 = \lambda_3 = 1 - \delta_2; \sigma_3 = \lambda_1 = 1/2.$$

Для інтегралів з ядром Коші справедливі наступні квадратурні формули [4], [6]

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\tau) d\tau}{\tau - \xi_{jk}} = \sum_{m=1}^n g_{mk} \frac{A_{mk}}{\tau_{mk} - \xi_{jk}} + \frac{\psi_k(-1)}{2} b_{jk}^- + \frac{\psi_k(1)}{2} b_{jk}^+ \quad (11)$$

де  $g_{mk} = g_k(\tau_{mk})$ ,  $\xi_{jk}$  - корені функцій Якобі другого роду  $J_n^{1-\sigma_k, 1-\lambda_k}(\xi)$ ;  $j = 1; \dots; n+1$  відповідно, а  $A_{mk}$  - коефіцієнти відповідної квадратурної формули Гаусса-Якобі [7],  $Q_{nk}(\tau) = P_n^{1-\sigma_k, 1-\lambda_k}(\tau)$  - многочлени Якобі,  $\tau_{mk}$  - корені цих многочленів,  $k = 1; 2; 3$ .

При отриманні формул (11) інтеграли

$$b_{jk}^\mp = \int_{-1}^1 \frac{1}{\tau - \xi_{jk}} \left[ \frac{(1-\tau)^{\sigma_k} (1+\tau)^{\lambda_k-1}}{(1-\tau)^{\sigma_k-1} (1+\tau)^{\lambda_k}} \right] d\tau,$$

знаходились методом, викладеним в [8].

Далі для числового розв'язання задачі необхідні квадратурні формули для інтегралів з нерухомими особливостями:

$$E_{kl}^j = \int_{-1}^1 q_{kl}(\tau, \xi_{jk}) \varphi_l(\tau) d\tau, \quad (12)$$

$$l \neq k = 1; 2; 3, j = 1; \dots; n+1.$$

Для цих інтегралів і інтегралів з логарифмічною особливістю використовуються квадратурні формули, аналогічні наведеним у [4].

Знайдені формули для сингулярних інтегралів та квадратурні формули Гаусса-Якобі для інтегралів з регулярними ядрами дозволили замінити (7) системою лінійних алгебраїчних рівнянь. В результаті розв'язання цієї системи були знайдені  $g_{mk} = g(\tau_{mk})$ ,  $\psi_k(\pm 1)$ ,  $c_0$ .

Однією з важливих характеристик напруженого стану навколо включення є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) [1]. Для їх обчислення знаходимо прості формули

$$K_1 = G\sqrt{d_1} \frac{\Psi_1(-1)}{2^{\delta_1}}, K_2 = G\sqrt{d_3} \frac{\Psi_3(1)}{2^{\delta_2}}. \quad (13)$$

**Результати числового аналізу.** На основі отриманих формул (13) досліджено вплив на залежність КІН від безрозмірного хвильового числа  $\kappa_0$  кута, утвореного ланками включення (рис. 2).

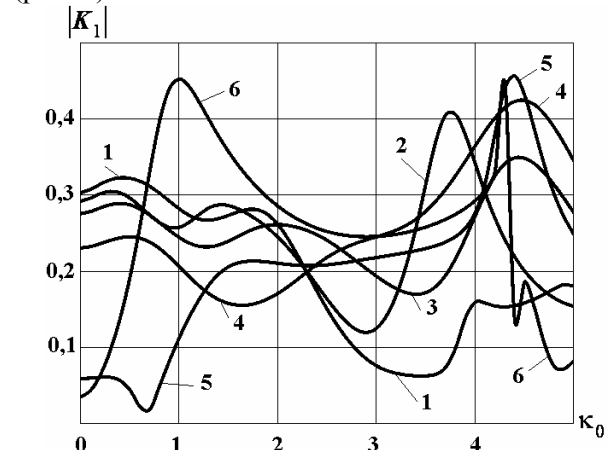


Рис. 2 Залежність КІН від безрозмірної частоти

Ланки включення утворюють з віссю  $Ox$  кути  $\alpha_1 = \pi + \beta$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = \beta$  при наступному співвідношенні довжин ланок:  $d_1 = d_3 = d$ ,  $d_2 = 3d$ . Результати наведені на рис. 2 для наступних значень кута:  $1 - \beta = 5^\circ$ ,  $2 - 45^\circ$ ,  $3 - 90^\circ$ ,  $4 - 135^\circ$ ,  $5 - 165^\circ$ ,  $6 - 170^\circ$ . Графіки

показують, що при всіх значеннях кута  $\beta$  між ланками включення залежність КІН від хвильового числа у розглянутому частотному діапазоні має декілька максимумів. При цьому максимальні значення можуть перевищувати значення КІН при статичному навантаженні включення зсувною силою. Це перевищення може скласти декілька разів при  $\beta > 135^\circ$ . Але в області низьких частот ( $\kappa_0 < 0,55$ ) при збільшенні кута  $\beta$  спостерігається зменшення абсолютних значень КІН.

### Список використаних джерел

1. Пастернак Я.Н., Сулим Г.Т. Плоска задача теорії пружності анізотропного тіла з тонкими гілястими пружними включеннями // Вісник ТНТУ. -2011.-т. 16, №4.-С. 23-31.
2. Попов В.Г. Напружений стан навколо двох тріщин, що виходять з однієї точки при гармонічних коливаннях поздовжнього зсуву // Вісник Київського Нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. – Сер. фіз.-мат. наук.-2013. – Вип. 3. –С.205-208.
3. Попов В.Г. Тріщина у вигляді триланкової ламаної під дією хвилі поздовжнього зсуву // Матем. методи та фіз.-мех. поля. -2015. – Т.50, №1. –С. 112-120.
4. Литвин О.В., Попов В.Г. Взаємодія гармонічної хвилі поздовжнього зсуву з v-подібним включенням // Львів. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2017. -60, №1. –С. 1-11.
5. Попов В.Г. Исследование полей напряжений и перемещений при дифракции упругих волн сдвига на тонком жестком отслоившемся включении // Изв. РАН Механика твердого тела. -1992. -№3. – С.139-146.
6. Андреев А.В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами// Изв. РАН. Механика твердого тела.- 2005. -№1. –С.126-146.
7. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов.–Москва: Наука, 1967.–500 с.
8. Сеге Г. Ортогональные многочлены. - Москва: Физматгиз, 1962. -500 с.

**Висновки.** Врахування реальної особливості розв'язків і застосування до сингулярних інтегралів спеціальних квадратурних формул забезпечують швидку збіжність і стабільні числові результати в досить широкому частотному діапазоні. Отримані в результаті наближені формули для обчислення КІН дали можливість дослідити вплив на їх значення частоти коливань і форми включення і встановити ряд якісних ефектів, зокрема наявність частот, за яких значення КІН сягають максимуму.

### References

1. PASTERNAK Y.M., SULIM G.T. (2011) Plane problems of elasticity of anisotropic bodies with thin elastic branching inclusions. Bulletin TNTU. 16(4). p. 23-31.
2. POPOV V.G. (2013) Stress state near two cracks emanating from one point during harmonic oscillation of the longitudinal shear. Bulletin of Kiev Shevchenko nat. Univ. Ser: Phys. – math. Sciences. 3. p. 205-208.
3. POPOV V.G. (2015) The crack in the form of a three-unit broken under the action of wave of longitudinal shear. Mat. methods and physical and fur. field. 50(1). p. 112-120.
4. LITVIN O. V., POPOV V.G. (2017) Interaction the harmonic wave of the longitudinal shift with V-similar inclusion. Mat. methods and physical and fur. field. 60(1). p. 1-11.
5. POPOV V. G. (1992) Investigation of the fields of stresses and displacements in the case of diffraction of elastic shear waves on a thin rigid exfoliated inclusion. Moscow: Izv. RAS, Mechanics of Solid State. 3. p.139–146.
6. ANDREEV A.V. (2005) A direct numerical method for solving singular integral equations of the first kind with generalized kernels. Izv. RAS. Mechanics of a solid. № 1. p. 126-146.
7. KRYLOV V.I. (1967) *The approximate calculation of integrals*. Moscow: Science.
8. SZEGO G. (1962) *Orthogonal polynomials*. Moscow: Fizmatgiz.

Надійшла до редколегії 20.06.19