Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему

ПОСИЛЕНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ТА СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ДИСКОНТОВАНИХ ВИПАДКОВИХ РЯДІВ, ПОРОДЖЕНИХ ЛІНІЙНИМИ РЕКУРСІЯМИ

студента 4 курсу
Римара Олексія Сергійовича

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов Олександр Маратович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій
та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № __ від
______________2021р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ - 2021

ЗМІСТ

Вступ

Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ – незалежні копії випадкового вектора (ξ, η) зі значеннями з $\mathbb{R}^2$ з як-завгодно залежними координатами. Випадкова послідовність $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, що називається стандартним випадковим блуканням з початком в нулі та стрибками ξ_k, визначається так

$$S_0 := 0, \quad S_k := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо випадковий ряд $\sum_{k \geq 0} e^{-S_k} \eta_{k+1}$ є збіжним майже напевно, то він називається *випадковим рядом, породженим лінійними рекурсіями.* У іноземній літературі такий ряд називають perpetuity (довічна рента) через можливе актуарне застосування.

В цій роботі ми дослідимо асимптотичну поведінку при $b \to 1-$ збіжного випадкового ряду $\sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1}$, який назвемо *дисконтованим збіжним рядом, породженим лінійними рекурсіями.* Наша мета – довести дві стандартні граничні теореми теорії ймовірностей для дисконтованих збіжних рядів, породжених лінійними рекурсіями, а саме – посилений закон великих чисел та функціональну граничну теорему.

Достатніми умовами для майже напевно (м.н.) абсолютної збіжності випадкового ряду $\sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1}$ для фіксованого $b \in (0, 1)$ є

$$\mathbb{E}\xi \in (0, \infty) \quad \text{та} \quad \mathbb{E} \log^+ |\eta| < \infty,$$

див., наприклад, теорему 2.1 статті [6]. Ці достатні умови виконуються, тобто дисконтований випадковий ряд є м.н. збіжним для всіх $b \in (0,1)$, за припущень всіх наших результатів, що будуть сформульовані незабаром.

Основні результати

Сформулюємо основні результати даної дипломної роботи, а саме – теореми 1 та 2. Теорема 1 – це посилений закон великих чисел для дисконтованих випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями.

Теорема 1. *Припустимо, що* $\mu := \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$ *та* $\mathbb{E}|\eta| < \infty$. *Тоді*

$$\lim_{b \to 1-} (1-b) \sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1} = \mu^{-1} m \quad \text{м.н.}, \tag{1}$$

де $m := \mathbb{E}\eta$.

Упродовж роботи будемо позначати через $\xrightarrow{\mathbb{P}}$, $\Rightarrow$ та $\xrightarrow{\mathrm{d}}$ збіжність за ймовірністю, слабку збіжність у просторі функцій та слабку збіжність одновимірних розподілів відповідно. Також через $D(0, \infty)$ будемо позначати простір Скорохода неперервних справа функцій, визначених на $(0, \infty)$, зі скінченними границями зліва в додатних точках. Теорема 2 – це функціональна гранична теорема для дисконтованих випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями.

Теорема 2. *Припустимо, що* $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$, $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ *та*

$s^2 := \operatorname{Var}\eta \in (0,\infty)$. *Тоді при* $b \to 1-$

$$\left((1-b)^{\frac{1}{2}} \sum_{k\ge 0} b^{uS_k}\eta_{k+1}\right)_{u>0} \Rightarrow \left(2s^2\mu^{-1}\right)^{1/2} \left(\int_{[0,\infty]} e^{-uy}\mathrm{d}B(y)\right)_{u>0} \quad (2)$$

в J_1*-топології на* $D(0,\infty)$, *де* $(B(y))_{y\ge 0}$ *– стандартний Броунівський рух.*

Зауваження 3. Граничний процес у теоремі 2 є м.н. неперервним Гаусівським процесом на $(0,\infty)$ з коваріацією

$$\mathbb{E}\int_{[0,\infty]} e^{-uy}\mathrm{d}B(y)\int_{[0,\infty]} e^{-uy}\mathrm{d}B(y) = \frac{1}{u+v}, \quad u,v>0. \quad (3)$$

Поклавши в (2) $u=1$ та використавши (3) з $u=v=1$, отримаємо одновимірну центральну граничну теорему.

Наслідок 4. *За припущень теореми 2 при* $b \to 1-$,

$$(1-b)^{1/2}\sum_{k\ge 0} b^{S_k}\eta_{k+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \left(2s^2\mu^{-1}\right)^{1/2}\mathrm{Normal}(0,1),$$

де $\mathrm{Normal}(0,1)$ *– випадкова величина зі стандартним нормальним розподілом.*

Огляд відомих результатів для степеневих випадкових рядів

Степеневий випадковий ряд $\sum_{k\geq 0} b^k \eta_{k+1}$ для $b \in (0,1)$ є дуже окремим випадком дисконтованого збіжного ряду, породженого лінійними рекурсіями, що відповідає виродженому випадковому блуканню $S_k = k$ для $k \in \mathbb{N}_0$. У цьому розділі ми обговоримо відомі аналоги наших основних результатів для степеневих випадкових рядів.

Закон великих чисел. За припущення $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ наведений нижче посилений закон великих чисел може бути знайдений у теоремі 1 [1]

$$\lim_{b\to 1-} (1-b) \sum_{k\geq 0} b^k \eta_{k+1} = \mathrm{m} \quad \text{м.н.}, \tag{4}$$

де $\mathrm{m} = \mathbb{E}\eta$

Центральна гранична теорема. За припущення $\mathbb{E}|\eta|^3 < \infty$ у теоремі 1 [2] доведено нерівність Беррі-Ессеена, з якої випливає

$$(1-b^2)^{1/2} \left(\sum_{k\geq 0} b^k \eta_{k+1} - \frac{\mathrm{m}}{1-b} \right) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{s}\,\mathrm{Normal}(0,1), \quad b \to 1-,$$

де $\mathrm{s}^2 = \mathrm{Var}\,\eta \in (0,\infty)$.

Доведення теореми 1

У цьому розділі ми наведемо доведення теореми 1, а також формулювання та доведення деяких допоміжних лем та тверджень.

Скористаємося фрагментом теореми 5 на с. 49 в [3], який ми адаптуємо під нашу задачу.

Лема 5. *Нехай* $(c_k(b))_{k\in\mathbb{N}}$ *та* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *– послідовності дійснозначних функцій, визначених на (0,1), та дійсних чисел відповідно. Припустимо, що*
(i) $\sum_{k\geq 1}|c_k(b)| \leq A$ *для всіх* $b \in (0,\infty)$*;*
(ii) $\lim_{b\to 1-} c_k(b) = 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$*;*
(iii) $\lim_{b\to 1-}\sum_{k\geq 1} c_k(b) = 1$.

Тоді ряд $t(b) := \sum_{k\geq 1} c_k(b)s_k$ *є збіжним для всіх* $b \in (0,\infty)$. *Більше того, якщо* $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, *то* $\lim_{b\to 1-} t(b) = s$

Доведення теореми 1. Для початку покажемо, що

$$\lim_{b\to 1-}(1-b)\sum_{k\geq 0} b^{S_k} = \mu^{-1} \quad \text{м.н.} \tag{5}$$

Для $x \in \mathbb{R}$ покладемо $M(x) = \#\{n \geq 0 : S_n \leq x\}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ м.н., то $M(x) < \infty$ м.н. Крім того, за теоремою B в [4] $\lim_{x\to\infty} x^{-1}M(x) = \mu^{-1}$ м.н. Отже, для $\varepsilon > 0$ існує м.н. скінченна випадкова величина $x_0 > 0$ така, що $|x^{-1}M(x)-\mu^{-1}|\le\varepsilon$ для всіх $x>x_0$. Запишемо

$$\sum_{k\ge 0} b^{S_k}=\sum_{k\ge 0} b^{S_k}\mathbb{1}_{\{S_k\le x_0\}}+\int_{(x_0,\infty)} b^x\mathrm{d}M(x).$$

Кількість доданків в сумі правої частини рівності є м.н. скінченною випадковою величиною і дорівнює $M(x_0)$. Отже, $\lim_{b\to 1-}=\sum_{k\ge 0} b^{S_k}\mathbb{1}_{\{S_k\le x_0\}}=M(x_0)$ м.н. Інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_{(x_0,\infty)} b^x\mathrm{d}M(x)+b^{x_0}M(x_0)=|\log b|\int_{x_0}^{\infty} b^x M(x)\mathrm{d}x\le$$
$$\le\frac{\left(\mu^{-1}+\varepsilon\right)b^{x_0}\left(1+|\log b|x_0\right)}{|\log b|}.$$

Таким чином,

$$\limsup_{b\to 1-}\sum_{k\ge 0} b^{S_k}\le\mu^{-1}\quad\text{м.н.}$$

Доведення зворотної нерівності для нижньої границі повністю аналогічне.

Переходячи до доведення (1), використаємо сумування частинами аби отримати для $b\in(0,1)$ та $\ell\in\mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\ell} b^{S_{k-1}}\eta_k=\sum_{k=1}^{\ell-1}\left(b^{S_{k-1}}-b^{S_k}\right)T_k+b^{S_{\ell-1}}T_\ell,\tag{6}$$

де $T_0:=0$ та $T_k:=\eta_1+\ldots+\eta_k$ для $k\in\mathbb{N}$. Маємо, що $\lim_{\ell\to\infty} b^{S_{\ell-1}}T_\ell=0$ м.н., оскільки за посиленим законом великих чисел перший множник прямує до нуля експоненційно швидко, а другий має щонайбільш лінійне зростання. Отже,

$$\sum_{k\ge 1} b^{S_{k-1}}\eta_k=\sum_{k\ge 1} k\left(b^{S_{k-1}}-b^{S_k}\right)\left(k^{-1}T_k\right).$$

Далі застосуємо лему 5 з $c_k(b) := \mu(1-b)k\left(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}\right)$ для $k \in \mathbb{N}$ і $b \in (0,1)$ та $s_k := k^{-1}T_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Умова (ii) леми 5 виконується тривіально (м.н.), а умова (iii) випливає з $\sum_{k\geq 1} c_k(b) = \mu(1-b)\sum_{k\geq 0} b^{S_k}$ і (5). Перевіримо виконання умови (i). Звертаючись ще раз до посиленого закону великих чисел, робимо висновок, що для заданого $\varepsilon \in (0,\mu)$ існує (випадкове) натуральне N таке, що $b^{S_{k-1}} \leq b^{(\mu-\varepsilon)(k-1)}$ для всіх $k \geq N+1$. Зафіксуємо $b_1 \in (0,1)$. За теоремою про середнє значення для диференційовних функкій для $k \geq N+1$ та $b \in (b_1, 1)$

$$|b^{S_{k-1}} - b^{S_k}| \leq \max(b^{S_{k-1}}, b^{S_k})|\log b||\xi_k| \leq b_1^{-(\mu-\varepsilon)} b^{(\mu-\varepsilon)k}|\log b||\xi_k|. \tag{7}$$

Використовуючи нерівність $xe^{-x} \leq 2e^{-x/2}$ для $x \geq 0$, робимо висновок, що для $k \geq N+1$ та $b \in (b_1, 1)$

$$k|b^{S_{k-1}} - b^{S_k}| \leq 2(\mu - \varepsilon^{-1})b_1^{-(\mu-\varepsilon)} b^{(\mu-\varepsilon)k/2}|\xi_k| =: cb^{(\mu-\varepsilon)k/2}|\xi_k|.$$

З урахуванням цього маємо для $b \in (b_1, 1)$

$$(\mu(1-b))^{-1}\sum_{k\geq 1}|c_k(b)| = \sum_{k\geq 1} k|b^{S_{k-1}} - b^{S_k}| \leq$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{N} k + \sum_{k\geq N+1} k|b^{S_{k-1}} - b^{S_k}| \leq N(N+1) + c\sum_{k\geq 1} b^{(\mu-\varepsilon)k/2}|\xi_k|.$$

Згідно з (4)

$$\lim_{b\to 1-}(1-b)\sum_{k\geq 1} b^{(\mu-\varepsilon)k/2}|\xi_k| = 2|\mathbb{E}\xi|/(\mu-\varepsilon) \quad \text{м.н.}$$

Це доводить виконання умови (i) за поточних припущень.

За посиленим законом великих чисел

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}(k^{-1}T_k) = m \quad \text{м.н.}$$

Отже, згідно з лемою 5 співвідношення (1) виконується. Доведення теореми 1 завершене. □

Доведення теореми 2

У цьому розділі ми доведемо теорему 2, а також наведемо допоміжні твердження, необхідні для цього.

Ми доведемо слабку збіжність скінченновимірних розподілів і потім щільність.

Доведення збіжності скінченновимірних розподілів в (2). Використаємо прийом Крамера-Волда. А саме, покажемо, що для будь-якого $\ell \in \mathbb{N}$, будь-яких $\alpha_1, \dots \alpha_\ell$ та $0, u_1 < \cdots < u_\ell < \infty$ при $b \to 1-$

$$(1-b^2)^{1/2} \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \sum_{k\geq 0} b^{u_i S_k} \eta_{k+1} \overset{\mathrm{d}}{\to} (2\mathrm{s}^2 \mu^{-1})^{1/2} \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \int_{[0,\infty)} e^{-u_i y} \mathrm{d}B(y). \quad (8)$$

Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{F}_k$ σ-алгебру, породжену випадковими векторами $(\xi_j, \eta_j)_{1\leq j\leq k}$. Будемо писати $\mathbb{E}_k(\cdot)$ замість $\mathbb{E}\left(\cdot | \mathcal{F}_k\right)$. Для кожного $b \in (0,1)$ послідовність

$$\left((1-b^2)^{1/2} \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \sum_{k\geq 0} b^{u_i S_k} \eta_{k+1}, \mathcal{F}_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

утворює мартингал (мартингал не обов'язково інтегровний, оскільки можливість того, що $\mathbb{E} b^{\xi} = \infty$, не виключається). За центральною граничною теоремою для мартингалів (теорема 2.5(a) в [7]) збіжність (8) буде доведена якщо ми зможемо показати, що

$$(1-b^2)^{1/2}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_k\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i b^{u_i S_k}\eta_{k+1}\right)^2$$
$$\xrightarrow{\mathbb{P}} 2\mathrm{s}^2\mu^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\int_{[0,\infty)}e^{-u_i y}\mathrm{d}B(y)\right)^2,\quad b\to 1-,\quad (9)$$

і що для $\varepsilon > 0$

$$(1-b^2)^{1/2}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_k\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i b^{u_i S_k}\eta_{k+1}\right)^2 \mathbb{1}_{\{(1-b^2)^{1/2}|\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i b^{u_i S_k}\eta_{k+1}|>\varepsilon\}}. \quad (10)$$

Почнемо з доведення (9):

$$(1-b^2)^{1/2}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_k\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i b^{u_i S_k}\eta_{k+1}\right)^2 =$$
$$=\mathrm{s}^2(1-b^2)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^2\sum_{k\geq 0}b^{2u_i S_k}+2\sum_{1\leq i\leq j\leq \ell}\alpha_i\alpha_j\sum_{k\geq 0}b^{(u_i+u_j)S_k}\right).$$

За теоремою 1 останній вирах збігається м.н. при $b\to 1-$ до

$$\mathrm{s}^2\mu^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^2 u_i^{-1}+4\sum_{1\leq i\leq j\leq \ell}\alpha_i\alpha_j(u_i+u_j)^{-1}\right)=$$
$$=2\mathrm{s}^2\mu^{-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i\int_{[0,\infty)}e^{-u_i y}\mathrm{d}B(y)\right)^2,$$

де остання рівність слідує з (3).

Переходячи до доведення (10), спочатку зазначимо, що внаслідок нерівності

$$(a_1+\dots+a_\ell)^2\mathbb{1}_{\{|a_1+\dots+a_\ell|>y\}} \le (|a_1|+\dots+|a_\ell|)^2\mathbb{1}_{\{|a_1|+\dots+|a_\ell|>y\}} \le \\ \le \ell^2(|a_1|\vee\dots\vee|a_\ell|)^2\mathbb{1}_{\{\ell(|a_1|\vee\dots\vee|a_\ell|)>y\}} \le \\ \le ell^2(a_1^2\mathbb{1}_{\{|a_1|>y/\ell\}}+\dots+a_1^2\mathbb{1}_{\{|a_\ell|>y/\ell\}}),$$

що є справедливою для $a_1,\dots,a_\ell\in\mathbb{R}$ та $y>0$, достатньо показати, що для всіх $\varepsilon>0$ та $u>0$

$$(1-b^2)\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}_k(b^{uS_k}\eta_{k+1})^2\mathbb{1}_{\{(1-b^2)^{1/2}b^{uS_k}|\eta_{k+1}|>\varepsilon\}}\xrightarrow{\mathbb{P}}0,\quad b\to 1-.$$

Покладемо $T:=\sup\{n\in\mathbb{N}_0 : s_n\le 0\}$ та зауважимо, що $T<\infty$ м.н. через те, що $\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$ м.н.
Робимо висновок, що

$$(1-b^2)\sum_{k=0}^{T}\mathbb{E}_k(b^{uS_k}\eta_{k+1})^2\mathbb{1}_{\{(1-b^2)^{1/2}b^{uS_k}|\eta_{k+1}|>\varepsilon\}}\le \\ \le \mathrm{s}^2(1-b^2)\sum_{k=0}^{T}b^{2uS_k}\to 0,$$

м.н. при $b\to\mathbb{1}-$. Тепер зауважимо, що для $k\ge T+1$ виконується нерівність $b^{uS_k}\le 1$ м.н. і, отже,

$$\{(1-b^2)^{1/2}b^{uS_k}|\eta_{k+1}|>\varepsilon\}\subseteq\{|\eta_{k+1}|>\varepsilon(1-b^2)^{-1/2}\}.$$

Таким чином,

$$(1-b^2)^{1/2}\sum_{k\ge T+1}\mathbb{E}_k(b^{uS_k}\eta_{k+1})^2\mathbb{1}_{\{(1-b^2)^{1/2}b^{uS_k}|\eta_{k+1}|>\varepsilon\}}\le \\ \le \mathbb{E}\eta^2\mathbb{1}_{\{|\eta|>\varepsilon(1-b^2)^{-1/2}\}}(1-b^2)\sum_{k\ge 0}b^{2uS_k}\to 0$$

м.н. при $b \to 1-$. Граничне відношення пояснюється так: урізаний другий момент збігається до 0, а

$$\lim_{b \to 1-} (1-b^2) \sum_{k \geq 0} b^{2uS_k} = (\mu u)^{-1} \quad \text{м.н.}$$

за теоремою 1. $\square$

Доведення щільності в (2). Зафіксуємо довільні $c, d \in (0, \infty)$, $c < d$. Достатньо довести щільність на проміжку $[c, d]$.

Для кожного $\delta \in (0, \mu)$ та $k \in \mathbb{N}_0$ визначимо подію

$$\mathcal{R}_k(\delta) := \{|S_k - \mu k| > \delta k\}.$$

Спочатку перевіримо, що

$$\lim_{b \to 1-} (1-b^2)^{1/2} \sup_{u \in [c,\, d]} \left| \sum_{k \geq 0} b^{uS_k} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_k(\delta)} \eta_{k+1} \right| = 0, \quad \text{м.н.} \tag{11}$$

Справді, супремум не перевищує м.н.

$$\sum_{k \geq 0} b^{cS_k} \mathbb{1}_{\{S_k \geq 0\}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_k(\delta)} |\eta_{k+1}| + \sum_{k \geq 0} b^{dS_k} \mathbb{1}_{\{S_k < 0\}} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_k(\delta)} |\eta_{k+1}|.$$

Тут, кожен доданок є збіжним м.н. при $b \to 1-$ до м.н. скінченної випадкової величини. Більш того, кількість ненульових доданків є м.н. скінченною внаслідок $\sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\mathcal{R}_k(\delta)} < \infty$ м.н., що в свою чергу забезпечується посиленим законом великих чисел. Таким чином, (11) доведене.

Доведемо далі, що для будь-яких $u, v \in [c,\, d]$ та $b < 1$ близьких до 1

$$(1-b^2)\mathbb{E}\left(\sum_{k \geq 0} (b^{uS_k} - b^{vS_k}) \mathbb{1}_{\mathcal{R}^c_k(\delta)} \eta_{k+1} \right)^2 \leq A(u-v)^2 \tag{12}$$

для константи A, що не залежить від u та v. Тут $\mathcal{R}_k^c(\delta)$ позначає доповнення події $\mathcal{R}_k(\delta)$, а саме, $\mathcal{R}_k^c(\delta) = \{|S_k - \mu k| \le \delta k\}$. Зазначивши, що $\mathcal{R}_k^c(\delta) \subseteq \{S_k > 0\}$, та скориставшися теоремою про середнє значення диференційовної функції, отримаємо м.н. на $\mathcal{R}_k^c(\delta)$

$$\begin{aligned}|b^{uS_k} - b^{vS_k}| &\le b^{cS_k}|\log b||u-v|S_k \le \\ &\le (\mu+\delta)b^{c(\mu-\delta)k}|logb||u-v|k \le \\ &\le 2(\mu+\delta)(ce(\mu-\delta))^{-1}b^{(c/2)(\mu-\delta)k}|u-v|.\end{aligned}$$

Ми використали нерівність

$$\sup_{x>0}|\log b|xb^x \le 1/e$$

для останнього кроку. Залишилося помітити, що

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{k\ge 0}(b^{uS_k} - b^{vS_k})\mathbb{1}_{\mathcal{R}_k^c(\delta)}\eta_{k+1}\right)^2 &= \mathrm{s}^2\mathbb{E}\sum_{k\ge 0}(b^{uS_k} - b^{vS_k})^2\mathbb{1}_{\mathcal{R}_k^c(\delta)} \\ &\le 4\mathrm{s}^2(\mu+\delta)^2(ce(\mu-\delta))^{-2}\sum_{k\ge 0}b^{c(\mu-\delta)k}(u-v)^2,\end{aligned}$$

і те, що

$$\lim_{b\to 1-}(1-b^2)\sum_{k\ge 0}b^{c(\mu-\delta)k} = 2(c(\mu-\delta))^{-1}.$$

Таким чином, (12) виконується з

$$A = 16\mathrm{s}^2(\mu+\delta)^2e^{-2}c^{-3}(\mu-\delta)^{-3}.$$

За формулою (12.51) на с. 95 в [5] розподіли

$$\left((1-b^2)^{1/2}\sum_{k\ge 0}b^{uS_k}\mathbb{1}_{\mathcal{R}_k^c(\delta)}\eta_{k+1}\right)_{u\in[c,d]}$$

є щільними. Доведення теореми 2 завершене. $\square$

Висновки

В дипломній роботі було доведено посилений закон великих чисел та функціональну центральну граничну теорему для дисконтованих випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями, $\sum_{k\geq 0} b^{S_k}\eta_{k+1}$ при $b \to 1-$. Результати, отримані у роботі, допомагають краще зрозуміти поведінку дисконтованих випадкових рядів, а також надають набір інструментів для подальшої роботи з ними. Основний інтерес до дисконтованих випадкових рядів пов'язаний, в першу чергу, з їх актуарною інтерпретацією: випадкові ряди за припущень дипломної роботи описують коливання поточної вартості у ситуації, коли актуарний ринок близький до сприятливого для клієнта сценарію низького ризику.

Бібліографія

[1] T.L. Lai, *Summmability methods for independent, identically distibuted random variables.* Proc. Amer. Math. Soc. 45 (1974), 253-261.

[2] H.U. Gerber, *The discounted central limit theotem and its Berry-Essèen analogue.* Ann. Math. Statist. 41 (1971), 389-392.

[3] G.H. Hardy, *Divergent siries.* 2nd Edition, Clarendon press, 1949.

[4] T.L. Lai, *On uniform integrability in renewal-theory.* Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 3 (1975), 99-105.

[5] P.Billingsley, *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.

[6] C.M. Goldie and R. A. Maller. *Stability of perpetuities.* Ann. Probab. 28 (2000), 1195–1218.

[7] I. S. Helland, *Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time.* Scand. J. Statist. 9 (1982), 79–94.