

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 Прикладна математика
на тему:

**Закон повторного логарифма для дисконтованих
випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями**

студента 4 курсу
Костогриза Руслана Олександровича

Науковий керівник:
професор, доктор фізико-математичних наук
Іксанов О. М.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та
рекомендована до захисту в ЕК, протокол № від 2020 р.

Завідувач кафедри ДО

проф. Іксанов О.М.

Київ-2021

Зміст

1. Вступ	3
2. Основний результат	4
3. Доведення теореми 1	5
4. Моделювання	22
5. Висновки	23

1. Вступ

Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots$ – незалежні копії випадкового вектора (ξ, η) із довільно залежними компонентами. Позначимо через $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$) стандартне випадкове блукання із стрибками ξ_k , що визначається так

$$S_0 := 0 \quad \text{та} \quad S_k := \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Якщо випадковий ряд $\sum_{k \geq 0} e^{-S_k} \eta_{k+1}$ збігається майже напевно, то його сума називається у сучасній іноземній літературі *perpetuity* (довічною рентою) внаслідок такої актуарної інтерпретації. Припускаючи поки, що ξ і η є майже напевно додатними випадковими величинами, величини η_k і $e^{-\xi_k}$ можна інтерпретувати запланованою сплатою та коефіцієнтом дисконтування (ризиком) на рік k відповідно. Тоді величину $\sum_{k \geq 0} e^{-S_k} \eta_{k+1}$ можна вважати сумою грошей, що забезпечує довічне зобов'язання страхової компанії робити щорічні виплати. Вивчаючи вищезазначені випадкові ряди з чисто математичної точки зору, односторонні припущення, як правило, опускаються, тоді як термін *perpetuity* все ще використовується. Вдалого короткого українського аналогу терміна ‘perpetuity’ не існує. В українськомовних роботах О.М. Іксанова згадані вище ряди називаються *випадковими рядами, породженими лінійними рекурсіями*.

У даній дипломній роботі ми досліджуємо асимптотичну поведінку при $b \rightarrow 1-$ збіжних рядів $\sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1}$, що ми називаємо *дисконтованими випадковими рядами, породженими лінійними рекурсіями*. Ми маємо намір довести закон повторного логарифма для таких дисконтованих випадкових рядів. Повертаючись до актуарної інтерпретації, ми бачимо, що ці результати описують коливання суми грошей, що забезпечує довічне зобов'язання страхової компанії робити виплати, коли актуарний ринок наближається до ідеального для споживача сценарію відсутності ризику.

Умови $\mathbb{E}\xi \in (0; \infty)$ і $\mathbb{E} \log^+ |\eta| < \infty$ є достатніми для абсолютної збіжності з ймовірністю один випадкових рядів $\sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1}$ для кожного фіксованого $b \in (0; 1)$. Ці достатні умови виконуються, тобто дисконтовані випадкові ряди є коректно визначеними для всіх $b \in (0; 1)$, за припущень всіх наших результатів, які будуть сформульовані найближчим часом.

2. Основний результат

Теорема 1, наведена нижче, є основним результатом даної роботи. Ми використовуємо стандартне скорочення "м.н." для фрази "майже напевно".

Теорема 1. *Припустимо, що $\mu := \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$, $\mathbb{E}\eta = 0$ та $\mathbf{s}^2 := \mathbb{E}\eta^2 \in (0, \infty)$. Тоді*

$$\overline{\lim}_{b \rightarrow 1-} \left(\frac{1 - b^2}{\log \log \frac{1}{1-b^2}} \right)^{1/2} \sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1} \leq (2\mathbf{s}^2 \mu^{-1})^{1/2} \quad \text{м.н.} \quad (1)$$

та

$$\underline{\lim}_{b \rightarrow 1-} \left(\frac{1 - b^2}{\log \log \frac{1}{1-b^2}} \right)^{1/2} \sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1} \geq -(2\mathbf{s}^2 \mu^{-1})^{1/2} \quad \text{м.н.} \quad (2)$$

3. Доведення теореми 1

Ми доведемо теорему 1, використовуючи ідеї доведень теореми 1.1 статті [1] та теореми 1.1 статті [2]. У згаданих роботах розглядався випадок $S_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$, тобто випадкове блукання $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ було детермінованим. Звичайно, у нашій постановці S_n "приблизно" дорівнює μn для великих n згідно з посиленним законом великих чисел для випадкових блукань. Але можливість заміни S_n на μn потребує нетривіальних додаткових міркувань, що і є головним досягненням даної роботи.

Без обмеження загальності можемо вважати, що $\mu = \mathbf{s}^2 = 1$. Для обґрунтування цієї можливості достатньо замінити $b^{S_{k-1}}\eta_k$ на $b^{S_{k-1}/\mu}\eta_k/\mathbf{s}$ та зазначити, що $1 - b^{2\mu} \sim \mu(1 - b^2)$ при $b \rightarrow 1-$. Виберемо довільне $\delta \in (0, 1)$. Для $b \in (0, 1)$ та вибраного δ покладемо

$$N_{2,\delta}(b) := \left\lfloor \frac{1}{1 - b^{2\delta}} \log \frac{1}{1 - b^{2\delta}} \right\rfloor$$

та для $b \in [(1 - e^{-1})^{1/2}, 1)$ покладемо

$$f(b) := \left(2 \frac{1}{1 - b^2} \log \log \frac{1}{1 - b^2} \right)^{-1/2}.$$

Теорема 1 буде доведена за допомогою декількох лем.

Лема 2. $\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) \sum_{k \geq N_{2,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k = 0$ м.н.

Доведення. Виберемо послідовність додатних чисел $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, що зростає та задовольняє $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$,

$$b_{n+1} - b_n \sim c(1 - b_n)^{1+\rho}, \quad n \rightarrow \infty \quad (3)$$

для деяких додатних c та ρ та

$$\sum_{n \geq n_0} (1 - b_n) < \infty \quad (4)$$

для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$. Одним прикладом послідовності, що задовольняє ці властивості, є така $b_n = 1 - n^{-2}$ для $n \in \mathbb{N}$ (з $c = 2$ та $\rho = 1/2$ у (3)). Зазначимо, що співвідношення (3) гарантує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - b_{n+1}) / (1 - b_n) = 1.$$

Припустимо, що ми можемо довести, що для всіх $\varepsilon > 0$

$$I := \sum_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{b \in [b_n, b_{n+1}]} \left| \sum_{k \geq N_{2,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \right| > \varepsilon / f(b_n) \right\} < \infty.$$

Тоді за лемою Бореля-Кантеллі

$$\sup_{b \in [b_n, b_{n+1}]} \left| \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \right| \leq \varepsilon / f(b_n)$$

для великих n м.н. Оскільки функція f є невід'ємною та спадає на проміжку $[(1 - e^{-1})^{1/2}, 1)$, то для достатньо великих n та $b \in [b_n, b_{n+1}]$

$$\left| \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \right| \leq \sup_{b \in [b_n, b_{n+1}]} \left| \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \right| \leq \varepsilon / f(b_n) \leq \varepsilon / f(b)$$

м.н. Отже, $\limsup_{b \rightarrow 1-} f(b) \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \leq \varepsilon$ м.н., що означає що твердження леми виконується.

Переходячи до доведення того, що $I < \infty$, зазначимо спочатку, що внаслідок того, що функція $N_{2, \delta}$ не спадає на $(0, 1)$, маємо

$$\sup_{b \in [b_n, b_{n+1}]} \left| \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \right| \leq \sup_{b \in [b_n, b_{n+1}]} \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b_n)} b^{S_{k-1}} |\eta_k|. \quad (5)$$

Нагадавши нашу домовленість про те, що $\mu = 1$, маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n/n) = 1$ м.н. згідно з посиленням законом великих чисел для випадкових блукань. Іншими словами, для будь-якого $\varepsilon \in (0, 1)$ знайдеться м.н. скінченна випадкова величина N така, що $S_n \geq n(1 - \varepsilon)$ для всіх $n \geq N + 1$. Виберемо ε так, що $1 - \varepsilon = \delta$. Внаслідок того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{2, \delta}(b_n) = \infty$, знайдеться м.н. скінченна випадкова величина N_1 така, що $N_{2, \delta}(b_n) \geq N$ для всіх $n \geq N_1$. Оскільки функція $x \rightarrow b^x$ спадає на $[0, +\infty)$, то для всіх $n \geq N_1$ і будь-якого $k \geq N_{2, \delta}(b_n)$ виконується $b^{S_{k-1}} \leq b^{\delta(k-1)}$. Таким чином, праву частину нерівності (5) можна обмежити зверху так: для $n \geq N_1$

$$\sup_{b \in [b_n, b_{n+1}]} \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b_n)} b^{\delta(k-1)} |\eta_k| \leq \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b_n)} b_{n+1}^{\delta(k-1)} \mathbb{E} |\eta_k| + \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b_n)} b_{n+1}^{\delta(k-1)} (|\eta_k| - \mathbb{E} |\eta_k|).$$

Зазначивши, що $\mathbb{E} |\eta_k| \leq 1$, маємо

$$I \leq \sum_{n \geq n_0} \mathbb{1}_{\{\sum_{k \geq N_{2, \delta}(b_n)} b_{n+1}^{\delta(k-1)} > \varepsilon / (2f(b_n))\}} + \sum_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left\{ \sum_{k \geq N_{2, \delta}(b_n)} b_{n+1}^{\delta(k-1)} (|\eta_k| - \mathbb{E} |\eta_k|) > \varepsilon / (2f(b_n)) \right\}. \quad (6)$$

Скориставшись (3), а також асимптотичним розкладом

$$-\log x = (1 - x) + O((1 - x)^2), \quad x \rightarrow 1-,$$

отримуємо

$$\begin{aligned} f(b_n) \sum_{k \geq N_{2,\delta}(b_n)} b_{n+1}^{\delta(k-1)} &= f(b_n) \frac{b_{n+1}^{\delta(N_{2,\delta}(b_n)-1)}}{1 - b_{n+1}^\delta} \sim f(b_n) \frac{(1 - b_n^{2\delta})^{1/2}}{1 - b_n^\delta} \\ &\sim \frac{(1 - b_n^2)^{1/2}}{(2 \log \log(1/(1 - b_n^2)))^{1/2}} \frac{2\delta^{1/2}}{(1 - b_n^2)^{1/2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що перший ряд у правій частині (6) містить скінченне число ненульових доданків і, отже, тривіально збігається. За нерівністю Маркова та формулою (3) ймовірність, що фігурує у другому ряді, обмежена зверху таким виразом

$$\begin{aligned} 4\varepsilon^{-2} f^2(b_n) \sum_{k \geq N_{2,\delta}(b_n)} b_{n+1}^{2\delta(k-1)} &= 4\varepsilon^{-2} f^2(b_n) \frac{b_{n+1}^{2\delta(N_{2,\delta}(b_n)-1)}}{1 - b_{n+1}^{2\delta}} \\ &\sim 2\varepsilon^{-2} \frac{1 - b_n^2}{\log \log(1/(1 - b_n^2))}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Внаслідок (4) права частина є загальним членом збіжного ряду. Отже, другий ряд у правій частині (6) збігається. Доведення леми 2 завершено. \square

Для $b \in (0, 1)$ близького до 1 та того самого δ , що і раніше, покладемо

$$N_{1,\delta}(b) := \left\lfloor \frac{1}{1 - b^{2\delta}} \log \log \frac{1}{1 - b^{2\delta}} \right\rfloor.$$

Лема 3. $\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) \sum_{k=N_{1,\delta}(b)+1}^{N_{2,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k = 0$ м.н.

Доведення. Сумуючи частинами, отримуємо

$$\sum_{k=N_{1,\delta}(b)+1}^{N_{2,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k = \sum_{k=N_{1,\delta}(b)+1}^{N_{2,\delta}(b)-1} (b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) T_k + b^{S_{N_{2,\delta}(b)-1}} T_{N_{2,\delta}(b)} - b^{S_{N_{1,\delta}(b)}} T_{N_{1,\delta}(b)},$$

де $T_k := \eta_1 + \dots + \eta_k$ для $k \in \mathbb{N}$. За посиленням закону великих чисел для випадкових блукань, для $b < 1$ близьких до 1

$$|b^{S_{N_{2,\delta}(b)-1}} T_{N_{2,\delta}(b)} - b^{S_{N_{1,\delta}(b)}} T_{N_{1,\delta}(b)}| \leq b^{\delta(N_{2,\delta}(b)-1)} |T_{N_{2,\delta}(b)}| + b^{\delta N_{1,\delta}(b)} |T_{N_{1,\delta}(b)}|.$$

Можна перевірити, що

$$b^{\delta N_{1,\delta}(b)} \sim \left(\log \frac{1}{1 - b^{2\delta}} \right)^{-1/2} \quad \text{та} \quad b^{\delta N_{2,\delta}(b)} \sim (1 - b^{2\delta})^{1/2} \quad \text{м.н. при } b \rightarrow 1-. \quad (7)$$

Згідно з теоремою Хартмана-Вінтнера (теорема 7.4 розділу 7.2 книги [3])

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{T_k}{(2k \log \log k)^{1/2}} = 1 \quad \text{м.н.}$$

Як наслідок, при $\ell \rightarrow \infty$,

$$|T_\ell| = O((\ell \log \log \ell)^{1/2}) \quad \text{м.н.}$$

та

$$\sup_{k \leq \ell} |T_k| = O((\ell \log \log \ell)^{1/2}) \quad \text{м.н.} \quad (8)$$

З використанням цих граничних співвідношень отримуємо

$$\begin{aligned} f(b) |b^{S_{N_{2,\delta}(b)-1}} T_{N_{2,\delta}(b)} - b^{S_{N_{1,\delta}(b)}} T_{N_{1,\delta}(b)}| &= O(((1-b) \log \log(1/(1-b)))^{1/2}) \\ &+ O\left(\left(\frac{\log \log(1/(1-b))}{\log(1/(1-b))}\right)^{1/2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{м.н. при } b \rightarrow 1-. \end{aligned}$$

Для b близьких до 1

$$\left| \sum_{k=N_{1,\delta}(b)+1}^{N_{2,\delta}(b)-1} (b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) T_k \right| \leq \text{const} |\log b| \left(\sup_{k \leq N_{2,\delta}(b)} |T_k| \right) \sum_{k \geq N_{1,\delta}(b)+1} b^{\delta k} |\xi_k|.$$

За допомогою (7) ми робимо висновок $\lim_{b \rightarrow 1-} b^{\delta N_{1,\delta}(b)+1} (1-b^\delta) = 0$, звідки

$$\sum_{k \geq N_{1,\delta}(b)+1} b^{\delta k} |\xi_k| \sim \mathbb{E}|\xi| \frac{b^{N_{1,\delta}(b)+1}}{1-b^\delta} \sim \frac{\mathbb{E}|\xi|}{(1-b^\delta)(\log(1/(1-b^{2\delta})))^{1/2}}$$

м. н при $b \rightarrow 1-$.

Вищесказане в сукупності з (8) доводить, що при $b \rightarrow 1-$

$$f(b) \left| \sum_{k=N_{1,\delta}(b)+1}^{N_{2,\delta}(b)-1} (b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) T_k \right| = O\left(\left(\frac{\log \log(1/(1-b))}{\log(1/(1-b))}\right)^{1/2}\right) \rightarrow 0 \quad \text{м.н.}$$

Доведення леми 3 завершено. □

Для $k \in \mathbb{N}$ позначимо через \mathcal{F}_k σ -алгебру, породжену $(\xi_j, \eta_j)_{1 \leq j \leq k}$ (\mathcal{F}_0 - тривіальна σ -алгебра). Для $k \in \mathbb{N}_0$ будемо писати $\mathbb{E}_k(\cdot)$ замість $\mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_k)$.

Лема 4. Для всіх $\rho > 0$,

$$\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k 1_{S_k(b)} = 0 \quad \text{м.н.} \quad (9)$$

i

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} f(b) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\eta_k 1_{\mathcal{S}_k(b)}) = 0 \quad \text{м. н.}, \quad (10)$$

де $\mathcal{S}_k(b) := \{|\eta_k| > \rho b^{-S_{k-1}} ((1 - b^{2\delta}) \log \log(1/(1 - b^{2\delta})))^{-1/2}\}$.

Доведення. Ми наведемо детальне доведення співвідношення (9) та вкажемо, які зміни, потрібні для встановлення (10).

ДОВЕДЕННЯ (9). Для $b \in (0, 1)$ і $\delta \in (0, 1)$ покладемо

$$N_\delta(b) := \left\lfloor \frac{1}{1 - b^{2\delta}} \right\rfloor.$$

Звичайно, для всіх $\rho > 0$,

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} f(b) \sum_{k=1}^2 b^{S_{k-1}} \eta_k 1_{\{|\eta_k| > \rho b^{-S_{k-1}} ((1 - b^{2\delta}) \log \log(1/(1 - b^{2\delta})))^{-1/2}\}} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Спочатку покажемо, що для $k \geq 3$, b близьких до 1 і $\varepsilon > 0$,

$$b^{-S_{k-1}} \left(\frac{1}{(1 - b^{2\delta}) \log \log(1/(1 - b^{2\delta}))} \right)^{1/2} \geq e^{-\varepsilon} \left(\frac{k}{\log \log k} \right)^{1/2} \quad \text{м. н.} \quad (11)$$

Нехай $3 \leq k \leq N_\delta(b)$. Функція $x \rightarrow x / \log \log x$ зростає при великих x . Тому

$$\frac{1}{(1 - b^{2\delta}) \log \log(1/(1 - b^{2\delta}))} \geq \frac{k}{\log \log k}.$$

Далі, для $1 \leq k \leq N_\delta(b)$

$$b^{-S_{k-1}} \geq e^{(-\log b)S_{k-1}} \geq e^{(-\log b) \inf_{0 \leq i \leq N_\delta(b)-1} S_i} \quad \text{м. н.}$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ м. н., ми робимо висновок, що $|\inf_{i \geq 0} S_i| < \infty$ м.н. і, як наслідок, що $\lim_{b \rightarrow 1^-} (\log b) \inf_{1 \leq i \leq N_\delta(b)} S_i = 0$ м. н. З урахуванням цього для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться м.н. скінченна випадкова величина b_* така, що $b^{-S_{k-1}} \geq e^{-\varepsilon}$, коли $3 \leq k \leq N_\delta(b)$ і $b \in (b_*, 1)$ (звичайно, $b^{-S_{k-1}} \geq 1$ м.н. для всіх $k \in \mathbb{N}$ за умови, що $\xi \geq 0$ м.н.). Таким чином, (11) справді виконується в заданому діапазоні k .

Нехай $k \geq N_\delta(b) + 1$. Згідно з посиленням законом великих чисел $b^{S_{k-1}} \leq b^{\delta(k-1)}$ м. н. для b , близьких до 1. Покладемо

$$\alpha_k(b) := b^{\delta(k-1)} \left(\frac{k}{\log \log k} \right)^{1/2}.$$

Ми стверджуємо, що послідовність $(\alpha_k(b))_{k \geq N_\delta(b)+1}$ не зростає. Справді,

$$\alpha_{k+1}(b) / \alpha_k(b) \leq b^\delta (1 + 1/k)^{1/2} \leq b^\delta (1 + 1/(2k)) \leq b^\delta (1 + (1 - b^{2\delta})/2) \leq 1.$$

Ми скористалися тим, що $\max_{b \in [0,1]} (3b^\delta - b^{3\delta}) = 2$ для останнього кроку. Отже, для b близьких до 1

$$\begin{aligned} b^{S_{k-1}} \left(\frac{k}{\log \log k} \right)^{1/2} &\leq b^{\delta(k-1)} \left(\frac{k}{\log \log k} \right)^{1/2} \leq b^{\delta N_\delta(b)} \left(\frac{N_\delta(b)}{\log \log N_\delta(b)} \right)^{1/2} \\ &\leq b^{\delta(1-b^{2\delta})^{-1}} \left(\frac{1}{(1-b^{2\delta}) \log \log 1/(1-b^{2\delta})} \right)^{1/2} \leq e^\varepsilon \left(\frac{1}{(1-b^{2\delta}) \log \log 1/(1-b^{2\delta})} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для отримання останньої нерівності ми скористалися співвідношенням $\lim_{b \rightarrow 1-} b^{\delta(1-b^{2\delta})^{-1}} e^{-1/2}$. Доведення (11) завершено.

Для $b \in (0, 1)$ нехай $K(b)$ є додатними цілими числами, що задовольняють $\lim_{b \rightarrow 1-} K(b) = \infty$. З огляду на (11) для b близьких до 1

$$\left| \sum_{k=3}^{K(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k 1_{\mathcal{S}_k(b)} \right| \leq e^\varepsilon \sum_{k=3}^{K(b)} |\eta_k| 1_{\{|\eta_k| > \rho e^{-\varepsilon} (k/\log \log k)^{1/2}\}} \quad \text{М. Н.} \quad (12)$$

і

$$\sum_{k=3}^{K(b)} |\eta_k| 1_{\mathcal{S}_k(b)} \leq \sum_{k=3}^{K(b)} |\eta_k| 1_{\{|\eta_k| > \rho e^{-\varepsilon} (k/\log \log k)^{1/2}\}} \quad \text{М. Н.} \quad (13)$$

У доведенні леми 2.3 статті [1] було показано, що

$$\sum_{k \geq 5} (k \log \log k)^{-1/2} \mathbb{E}(|\eta_k| 1_{\{|\eta_k| > \rho e^{-\varepsilon} (k/\log \log k)^{1/2}\}}) < \infty. \quad (14)$$

Тому

$$\sum_{k \geq 5} (k \log \log k)^{-1/2} |\eta_k| 1_{\{|\eta_k| > \rho e^{-\varepsilon} (k/\log \log k)^{1/2}\}} < \infty \quad \text{М. Н.}$$

Згідно з лемою Кронекера з останнього випливає

$$\lim_{b \rightarrow 1-} (K(b) \log \log K(b))^{-1/2} \sum_{k=3}^{K(b)} |\eta_k| 1_{\{|\eta_k| > \rho e^{-\varepsilon} (k/\log \log k)^{1/2}\}} = 0 \quad \text{М. Н.} \quad (15)$$

Ми будемо аналізувати суми $\sum_{k=3}^{N_\delta(b)}$ і $\sum_{k=N_\delta(b)+1}^{N_{1,\delta}(b)}$ окремо. Використовуючи посиленний закон великих чисел разом з (15) для $K(b) = N_\delta(b)$, отримуємо для всіх $\rho > 0$

$$\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) \sum_{k=1}^{N_\delta(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k 1_{\mathcal{S}_k(b)} = 0 \quad \text{М. Н.} \quad (16)$$

Для другої суми запишемо для b близьких до 1,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=N_\delta(b)+1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k \mathbf{1}_{\mathcal{S}_k(b)} \right| \leq \sum_{k=N_\delta(b)+1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{\delta(k-1)} |\eta_k| \mathbf{1}_{\mathcal{S}_k(b)} = -b^{\delta N_\delta(b)} \sum_{k=1}^{N_\delta(b)} |\eta_k| \mathbf{1}_{\mathcal{S}_k(b)} \\ & + b^{\delta(N_{1,\delta}(b)-1)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} |\eta_k| \mathbf{1}_{\mathcal{S}_k(b)} + (1-b^\delta) \sum_{k=N_\delta(b)+1}^{N_{1,\delta}(b)-1} b^{\delta(k-1)} \sum_{j=1}^k |\eta_j| \mathbf{1}_{\mathcal{S}_j(b)} =: I_1(b) + I_2(b) + I_3(b) \end{aligned}$$

де нерівність випливає з посиленого закону великих чисел.

Проаналізуємо $I_1(b)$. Граничне співвідношення $\lim_{b \rightarrow 1-} b^{\delta N_\delta(b)} = e^{-1/2}$ разом із (13) і (15), у яких ми вибрали $K(b) = N_\delta(b)$, доводить, що $\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) I_1(b) = 0$ м. н.

Проаналізуємо $I_2(b)$. Використовуючи (13) і (15) для $K(b) = N_{1,\delta}(b)$, робимо висновок, що

$$\lim_{b \rightarrow 1-} (N_{1,\delta}(b) \log \log N_{1,\delta}(b)) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} |\eta_k| \mathbf{1}_{\mathcal{S}_k(b)} = 0 \quad \text{м. н.}$$

Поєднуючи це з першою частиною (7), отримуємо $\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) I_2(b) = 0$ м. н.

Нарешті, переходячи до аналізу $I_3(b)$, запишемо

$$\begin{aligned} I_3(b) & \leq (1-b^\delta) \left(\sup_{N_\delta(b)+1 \leq k \leq N_{1,\delta}(b)-1} T_k(b) \right) \sum_{k \geq 3} b^{\delta(k-1)} (k \log \log k)^{1/2} \\ & \sim (\pi^{1/2}/2) \left(\frac{\log \log(1/(1-b^\delta))}{1-b^\delta} \right)^{1/2} \left(\sup_{N_\delta(b)+1 \leq k \leq N_{1,\delta}(b)-1} T_k(b) \right), \quad b \rightarrow 1-, \end{aligned}$$

де

$$T_k(b) := (k \log \log k)^{-1/2} \sum_{j=1}^k |\eta_j| \mathbf{1}_{\mathcal{S}_j(b)}.$$

Ми скористалися наслідком 1.7.3 книги [4] для асимптотичної еквівалентності. З огляду на (15) для $K(b) = N_\delta(b) + 1$ і (13), $\lim_{b \rightarrow 1-} \sup_{N_\delta(b)+1 \leq k \leq N_{1,\delta}(b)-1} T_k(b) = 0$ м. н., звідки $\lim_{b \rightarrow 1-} f(b) I_3(b) = 0$ м. н. Доведення (9) завершено.

ДОВЕДЕННЯ (10). Аналогічно до (16) ми отримуємо за допомогою

$$\left| \sum_{k=3}^{K(b)} b^{S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\eta_k \mathbf{1}_{\mathcal{S}_k(b)}) \right| \leq e^\varepsilon \sum_{k=3}^{K(b)} \mathbb{E} |\eta_k| \mathbf{1}_{\{|\eta_k| > \rho e^{-\varepsilon} (k/\log \log k)^{1/2}\}} = 0 \quad \text{м. н.}$$

і (14), що

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} f(b) \sum_{k=1}^{N_\delta(b)} b^{S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\eta_k 1_{\mathcal{S}_k(b)}) = 0 \quad \text{м. н.}$$

З тих самих міркувань, що і раніше, ми також робимо висновок, що $\lim_{b \rightarrow 1^-} f(b) I_l^*(b) = 0$ м. н., $l = 1, 2, 3$, де $I_l^*(b)$ є аналогом $I_l(b)$, у якому $|\eta_k| 1_{\mathcal{S}_k(b)}$ замінюється на $\mathbb{E}_{k-1}(|\eta_k| 1_{\mathcal{S}_k(b)})$.

Доведення леми 4 завершено. \square

Будемо використовувати позначення $\mathcal{S}_k^c(b)$ для доповнення $\mathcal{S}_k(b)$, тобто

$$\mathcal{S}_k^c(b) = \{|\eta_k| \leq \rho b^{-S_{k-1}} ((1 - b^{2\delta}) \log \log(1/(1 - b^{2\delta})))^{-1/2}\}.$$

Позначимо через \mathbb{W} клас зростаючих послідовностей $(\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ додатних чисел, що задовольняють такі властивості:

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{b}_n = 1$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \mathbf{b}_{n+1}}{1 - \mathbf{b}_n} = 1$;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n}{1 - \mathbf{b}_n} \left(\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n} \right)^{3/2} = 0$;
- (c) для всіх $\varepsilon > 0$ $\sum_{n \geq 1} \left(\log \left(\frac{1}{1 - \mathbf{b}_n} \right) \right)^{-1 - \varepsilon} < \infty$.

Можна перевірити, що будь-яка зростаюча послідовність $(\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ додатних чисел, що задовольняє $\mathbf{b}_n = \exp(-(1 - (\log n)^{-3})^n)$ для великих n , належить класу \mathbb{W} . Наприклад, для \mathbf{b}_n , визначених вище, маємо

$$\frac{\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n}{1 - \mathbf{b}_n} \sim (\log n)^{-3} \quad \text{і} \quad \log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n} \sim \log n, \quad n \rightarrow \infty,$$

тобто властивість (b) виконується.

Лема 5. Нехай $(\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{W}$. Тоді для всіх $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) > ((2 + \varepsilon) N(\mathbf{b}_n) \log \log N(\mathbf{b}_n))^{1/2} \right\} = 0,$$

де $\tilde{\eta}_k(b) := \eta_k 1_{\mathcal{S}_k^c(b)} - \mathbb{E}_{k-1}(\eta_k 1_{\mathcal{S}_k^c(b)})$ для $k \in \mathbb{N}$ і $N(b) := (1 - b^2)^{-1}$ для $b \in (0, 1)$.

Доведення. Наведене нижче доведення використовує ідеї доведення леми 3.6 статті [2].

Покажемо спочатку, що

$$\limsup_{b \rightarrow 1^-} (1 - b^{2\delta}) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(b)) \leq \delta \quad \text{м. н.} \quad (17)$$

(нагадаємо, що $\mu = 1$ за домовленістю). Справді, $\mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(b)) \leq \mathbb{E}\eta_k^2 = 1$ і, отже,

$$\sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(b)) \leq \sum_{k \geq 0} b^{2S_k} \quad \text{м. н.}$$

Можна перевірити, що

$$\lim_{b \rightarrow 1^-} (1 - b^{2\delta}) \sum_{k \geq 0} b^{2S_k} = \delta \quad \text{м. н.}$$

Таким чином, (17) виконується.

Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$t_n := \left(\frac{(2 + \varepsilon) \log \log N(\mathbf{b}_n)}{N(\mathbf{b}_n)} \right)^{1/2}$$

та визначимо подію

$$\mathcal{B}_n := \left\{ \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) > ((2 + \varepsilon) N(\mathbf{b}_n) \log \log N(\mathbf{b}_n))^{1/2} \right\}.$$

Еквівалентно,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n &:= \left\{ t_n \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) - (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right. \\ &\quad \left. > t_n^2 N(\mathbf{b}_n) (1 - (e^{4\rho(1+\varepsilon)}/(2N(\mathbf{b}_n)))) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right\}. \end{aligned}$$

З огляду на (17) для $\theta > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}_n &:= \left\{ t_n \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) - (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right. \\ &\quad \left. > t_n^2 N(\mathbf{b}_n) (1 - (e^{4\rho(1+\varepsilon)}/2)(\delta + \theta)) \right\} \end{aligned}$$

для досить великих n . Отже, згідно з лемою Бореля-Кантеллі для доведення леми 5 нам треба перевірити, що

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\mathcal{A}_n) < \infty. \quad (18)$$

У якості підготовки до доведення (18) ми маємо намір показати, що

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\eta_n =: & \mathbb{E} \exp \left(t_n \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) \right. \\ & \left. - (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right) \leq 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Скориставшись нерівністю $e^x \leq 1 + x + (x^2/2)e^{|x|}$ для $x \in \mathbb{R}$ та тим, що $\mathbb{E}_{k-1}\tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) = 0$, робимо висновок

$$\mathbb{E}_{k-1} \exp(t_n \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n)) \leq 1 + (t_n^2/2) \mathbf{b}_n^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n) \exp(t_n \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} |\tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n)|)).$$

Далі

$$t_n \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} |\tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n)| \leq 2\rho(2 + \varepsilon)^{1/2} \leq 4\rho(1 + \varepsilon),$$

що в поєднанні з $e^x \geq 1 + x$ для $x \geq 0$ дає

$$\mathbb{E}_{k-1} \left(\exp(t_n \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n)) \right) \exp(- (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n))) \leq 1 \quad \text{м. н.}$$

Нерівність (19) є наслідком цього, а також однієї властивості умовного математичного сподівання:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \eta_n \\ = & \exp \left(t_n \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) - (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right) \\ & \times \mathbb{E}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \left(\exp(t_n \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)}(\mathbf{b}_n)) \right) \\ & \times \exp(- (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1}(\tilde{\eta}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)}^2(\mathbf{b}_n))) \\ \leq & \exp \left(t_n \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) - (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right). \end{aligned}$$

Також

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-2} \eta_n = & \mathbb{E}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-2} (\mathbb{E}_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \eta_n) \leq \exp \left(t_n \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-2} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \tilde{\eta}_k(\mathbf{b}_n) \right. \\ & \left. - (t_n^2/2) e^{4\rho(1+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-2} (\mathbf{b}_n)^{2S_{k-1}} \mathbb{E}_{k-1}(\tilde{\eta}_k^2(\mathbf{b}_n)) \right). \end{aligned}$$

Повторюючи цей аргумент $N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)$ разів, отримуємо (19).

Ми готові довести (18). За нерівністю Маркова і (19)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{A}_n) &\leq \exp(-t_n^2 N(\mathbf{b}_n)(1 - (e^{4\rho(1+\varepsilon)}/2)(\delta + \theta)))\mathbb{E}\eta_n \\ &\leq \exp(-t_n^2 N(\mathbf{b}_n)(1 - (e^{4\rho(1+\varepsilon)}/2)(\delta + \theta))).\end{aligned}$$

Взявши досить малі $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, 1)$ і $\theta > 0$, що задовольняють $\delta + \theta \in (0, 1)$, виберемо значення $\rho > 0$ таке, що $(2 + \varepsilon)(1 - (e^{4\rho(1+\varepsilon)}/2)(\delta + \theta)) > 1$. Це разом із властивістю (d) класу послідовностей \mathbb{B} забезпечує

$$\sum_{n \geq 1} \exp(-t_n^2 N(\mathbf{b}_n)(1 - (e^{4\rho(1+\varepsilon)}/2)(\delta + \theta))) < \infty,$$

що доводить (18). □

Лема 6. *Нехай $(\mathbf{b}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{B}$. Тоді,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} |f(b) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k - f(\mathbf{b}_n) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (\mathbf{b}_n)^{S_{k-1}} \eta_k| = 0 \quad \text{м. н.}$$

Доведення. Упродовж доведення ми вважаємо, іноді не наголошуючи на цьому, що рівності та нерівності виконуються м. н. Почнемо з того, що для $b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]$

$$\begin{aligned}f(b) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k - f(\mathbf{b}_n) \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (\mathbf{b}_n)^{S_{k-1}} \eta_k &= \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (f(b)b^{S_{k-1}} - f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n)^{S_{k-1}}) \eta_k \\ &\quad + f(b) \sum_{k=N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1}^{N_{1,\delta}(b)} b^{S_{k-1}} \eta_k =: I_n(b) + J_n(b).\end{aligned}$$

Сумуючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned}I_n(b) &= (f(b)b^{S_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)}} - f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n)^{S_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)}})T_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) - f(\mathbf{b}_n)((\mathbf{b}_n)^{S_{k-1}} - (\mathbf{b}_n)^{S_k}))T_k =: I_{n,1}(b) + I_{n,2}(b),\end{aligned}$$

де $T_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$ для $k \in \mathbb{N}$. Для великих n , для яких виконується нерівність $S_{N_{1,\delta,\theta}(\mathbf{b}_n)-1} \geq \delta(N_{1,\delta,\theta}(\mathbf{b}_n) - 1)$ м. н. (така можливість забезпечується посиленням законом великих чисел) та для яких для заданого $\varepsilon > 0$

$-\delta \log \mathbf{b}_{n+1}/(1 - \mathbf{b}_n^{2\delta}) \geq 1/2 - \varepsilon$ (це забезпечується властивістю (а) класу послідовностей \mathbb{B}), маємо

$$\begin{aligned} \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} |I_{n,1}(b)| &\leq 2f(\mathbf{b}_n) \mathbf{b}_{n+1}^{\delta(N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1)} |T_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)}| \\ &\leq 2\mathbf{b}_1^{-2\delta} f(\mathbf{b}_n) (\log(1/(1 - \mathbf{b}_n^{2\delta})))^{-(1/2-\varepsilon)} O((N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) \log \log N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n))^{1/2}) \\ &= O((\log \log(1/(1 - \mathbf{b}_n)))^{1/2} (\log(1/(1 - \mathbf{b}_n)))^{-(1/2-\varepsilon)}) \rightarrow 0 \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

Перейдемо до аналізу $I_{n,2}(b)$. Згідно з посиленним законом великих чисел для того самого $\delta \in (0, 1)$, що і вище, існує м. н. скінченне τ таке, що $\max(\delta k, 1) \leq S_k \leq (2 - \delta)k$ для всіх $k \geq \tau + 1$. Оскільки для $b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]$

$$\left| \sum_{k=1}^{\tau} (f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) T_k) \right| \leq f(b) \sum_{k=1}^{\tau} (b^{S_{k-1}} + b^{S_k}) |T_k| \leq f(\mathbf{b}_n) \sum_{k=1}^{\tau} (\mathbf{b}_n^{S_{k-1}^-} + \mathbf{b}_n^{S_k^-}) |T_k|,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} \left| \sum_{k=1}^{\tau} (f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) T_k) \right| = 0 \quad \text{м. н.}$$

!!! Нам потрібна певна підготовка для обчислення залишкової частини суми. Використовуючи той факт, що коли $\xi_k \geq 0$ функція $b \rightarrow f(b)(1 - b^{\xi_k})$ незростаюча при $b < 1$, близьких до 1, ми отримуємо подію $\{\xi_k \geq 0, \tau \leq k - 1\}$, для $b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]$ і великих $b \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}})(1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}) &\leq f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_k}) - f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) \\ &\leq \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} (f(\mathbf{b}_n)(1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}) - f(\mathbf{b}_{n+1})(1 - \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k})). \end{aligned}$$

Поєднуючи це з аналогічною нерівністю щодо події $\{\xi_k \geq 0, \tau \leq k - 1\}$, приходимо до

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_k}) - f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k})| &\leq f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_{k-1}}) |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| \\ &\quad + \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} (f(\mathbf{b}_n) |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| - f(\mathbf{b}_{n+1}) |1 - \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k}|) \end{aligned}$$

для b і n , визначених вище. Таким чином, для $b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]$ і великих $b \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) - f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_k}))T_k \right| \\
& \leq \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} |f(b)(b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) - f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_n^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_k})| |T_k| \\
& \leq f(\mathbf{b}_n) \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (\mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_{k-1}}) |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| |T_k| \\
& + \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} (|f(\mathbf{b}_n)| |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| - |f(\mathbf{b}_{n+1})| |1 - \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k}|) |T_k| =: I_{n,21} + I_{n,22}.
\end{aligned}$$

Для всіх $k \in \mathbb{N}$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$,

$$|1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| \leq |\log \mathbf{b}_n| (\xi_k^+ + \xi_k^- \mathbf{b}_n^{\xi_k}) \quad (21)$$

Для $k \geq \tau + 1$ і $n \in \mathbb{N}$ згідно з теоремою про середнє значення для диференційованих функцій

$$\mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \leq S_{k-1} \mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}-1} (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) \leq \mathbf{b}_1^{-1} S_{k-1} \mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) \quad (22)$$

і після цього

$$(\mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_{k-1}}) |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| \leq (2 - \delta) \mathbf{b}_1^{-1} (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| k (\mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} \xi_k^+ + (\mathbf{b}_{n+1}/\mathbf{b}_n)^{S_{k-1}} \mathbf{b}_n^{S_k} \xi_k^-).$$

Отже,

$$\begin{aligned}
& (2 - \delta)^{-1} \mathbf{b}_1 \sum_{k=n_0+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (\mathbf{b}_{n+1}^{S_{k-1}} - \mathbf{b}_n^{S_{k-1}}) |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| |T_k| \\
& \leq (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| \sum_{k=1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} k |T_k| (\mathbf{b}_{n+1}^{\delta(k-1)} \xi_k^+ + (\mathbf{b}_{n+1}/\mathbf{b}_n)^{(2-\delta)k} \mathbf{b}_n^{\delta k} \xi_k^-) \\
& \leq (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) \sup_{1 \leq k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} |T_k| \left(\sum_{k \geq 1} \mathbf{b}_{n+1}^{\delta(k-1)} \xi_k^+ + (\mathbf{b}_{n+1}/\mathbf{b}_n)^{(2-\delta)N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \right) \times \\
& \quad \times \sum_{k \geq 1} \mathbf{b}_n^{\delta k} \xi_k^-.
\end{aligned}$$

Згідно з теоремою, для $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k \geq 1} \mathbf{b}_{n+1}^{\delta(k-1)} \xi_k^+ \sim (1 - \mathbf{b}_{n+1}^\delta)^{-1} \mathbb{E} \xi^+ \quad \text{і} \quad \sum_{k \geq 1} \mathbf{b}_n^{\delta k} \xi_k^- \sim (1 - \mathbf{b}_n^\delta)^{-1} \mathbb{E} \xi^- \quad \text{м. н.} \quad (23)$$

Використавши (8) а також замінивши \mathbf{b}_n на \mathbf{b}_{n+1} у поєднанні з властивістю (а) класу послідовностей \mathbb{B} для першої нерівності та властивістю (б) для другої нерівності

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) \left(\sup_{1 \leq k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} |T_k| \right) \sum_{k \geq 1} \mathbf{b}_{n+1}^{\delta(k-1)} \xi_k^+ \\ &= O\left(\frac{\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n}{1 - \mathbf{b}_n} \left(\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n} \right)^{3/2} \right) = o(1) \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Знову посилаючись на властивість (б) отримуємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(\mathbf{b}_{n+1}/\mathbf{b}_n) N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) = 0$, звідки $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{b}_{n+1}/\mathbf{b}_n)^{(2-\delta)N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} = 1$. Маючи це на увазі ми можемо дійти до висновку, що

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} f(\mathbf{b}_n)(\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) (\mathbf{b}_{n+1}/\mathbf{b}_n)^{(2-\delta)N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} \times \\ & \quad \times \left(\sup_{1 \leq k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} |T_k| \right) \sum_{k \geq 1} \mathbf{b}_n^{\delta k} \xi_k^- = 0 \quad \text{м. н.} \end{aligned}$$

Отже, ми довели, що $\lim_{n \rightarrow \infty} I_{n,21}(b) = 0$ м. н.

Далі,

$$\begin{aligned} I_{n,22} &= (f(\mathbf{b}_n) - f(\mathbf{b}_{n+1})) \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| |T_k| + f(\mathbf{b}_{n+1}) \times \\ & \quad \times \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} (|1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| - |1 - \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k}|) |T_k|. \end{aligned}$$

З огляду на (21),

$$\begin{aligned} & \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| |T_k| \leq |\log \mathbf{b}_n| \left(\sup_{1 \leq k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} |T_k| \right) \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} (\mathbf{b}_n^{S_{k-1}} \xi_k^+ + \mathbf{b}_n^{S_k} \xi_k^-) \\ & \leq |\log \mathbf{b}_n| \left(\sup_{1 \leq k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} |T_k| \right) \sum_{k \geq 1} (\mathbf{b}_n^{\delta(k-1)} \xi_k^+ + \mathbf{b}_n^{\delta k} \xi_k^-). \end{aligned}$$

Відповідно до (23) і (8) у поєднанні з тим, що $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) f(\mathbf{b}_n) = \delta^{-1}$ ми робимо висновок, що

$$\begin{aligned} (f(\mathbf{b}_n) - f(\mathbf{b}_{n+1})) \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| |T_k| &= O\left(\frac{f(\mathbf{b}_n) - f(\mathbf{b}_{n+1})}{f(\mathbf{b}_n)} \left(\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2} \right)^{1/2} \right) \\ &= o(1) \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Остання рівність обґрунтовується так. Використовуючи субадитивність функції $x \rightarrow x^{1/2}$ на $[0, \infty)$ для великих n отримуємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f(\mathbf{b}_n) - f(\mathbf{b}_{n+1})}{f(\mathbf{b}_n)} \right)^2 \log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2} \\ & \leq \left(\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_{n+1}^2} - \log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2} + \frac{\mathbf{b}_{n+1}^2 - \mathbf{b}_n^2}{1 - \mathbf{b}_n^2} \log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2} \right) \frac{\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2}}{\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_{n+1}^2}} \end{aligned}$$

Властивість (а) означає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1/(1 - \mathbf{b}_{n+1}^2))}{\log(1/(1 - \mathbf{b}_n^2))} = 1 \quad \text{і} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \log(1/(1 - \mathbf{b}_{n+1}^2))}{\log \log(1/(1 - \mathbf{b}_n^2))} = 1 \quad (24)$$

і перша границя забезпечує, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_{n+1}^2} - \log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2} \right) = 0$$

Остаточно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathbf{b}_{n+1}^2 - \mathbf{b}_n^2}{1 - \mathbf{b}_n^2} \log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n^2} \right) = 0$$

є наслідком властивості (b). Таким чином, рівність, яку ми хотіли довести, справді виконується.

Для аналізу другого доданка $I_{n,22}$ нам потрібна оцінка, подібна до (22): для $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| - |1 - \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k}| &= |\mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k} - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| \leq (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n)(\xi_k^+ \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k-1} + \xi_k^- \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k-1}) \\ &\leq \mathbf{b}_1^{-1}(\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n)(\xi_k^+ + \xi_k^- \mathbf{b}_n^{\xi_k}). \end{aligned}$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{b}_{n+1}) \sum_{k=\tau+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1} \mathbf{b}_n^{S_{k-1}} (|1 - \mathbf{b}_n^{\xi_k}| - |1 - \mathbf{b}_{n+1}^{\xi_k}|) |T_k| \\ & \leq \mathbf{b}_1^{-1} f(\mathbf{b}_n) (\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n) \left(\sup_{1 \leq k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} |T_k| \right) \sum_{k \geq 1} (\mathbf{b}_n^{\delta(k-1)} \xi_k^+ + \mathbf{b}_n^{\delta k} \xi_k^-) \\ & = O\left(\frac{\mathbf{b}_{n+1} - \mathbf{b}_n}{1 - \mathbf{b}_n} \left(\log \log \frac{1}{1 - \mathbf{b}_n} \right)^{1/2} \right) = o(1) \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Тут перша рівність забезпечується (8) і (23), а друга є наслідком властивості (b). Доведення того, що $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(b) = 0$ м. н. завершено.

Переходимо до аналізу $J_n(b)$: для $b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]$,

$$\begin{aligned} J_n(b) &= f(b) \sum_{k=N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1}^{N_{1,\delta}(b)-1} (b^{S_{k-1}} - b^{S_k}) T_k + f(b) (b^{S_{N_{1,\delta}(b)-1}} T_{N_{1,\delta}(b)} - b^{S_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1}} T_{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1}) \\ &=: J_{n,1}(b) + J_{n,2}(b). \end{aligned}$$

Як і раніше, користуючись посиленням законом великих чисел, ми робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} |J_{n,2}(b)| &\leq 2f(\mathbf{b}_n) \mathbf{b}_{n+1}^{\delta(N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)-1)} \sup_{k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1})} |T_k| \\ &\leq 2\mathbf{b}_1^{-2\delta} f(\mathbf{b}_n) (\log(1/(1 - \mathbf{b}_n^{2\delta})))^{-(1/2-\varepsilon)} O((N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1}) \log \log N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1}))^{1/2}) \\ &= O((1 - \mathbf{b}_{n+1}^{2\delta})^{1/2-\varepsilon} (\log(1/(1 - \mathbf{b}_{n+1}^{2\delta})))^{1/2}) \rightarrow 0 \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ми використовували (8) і (20) для нерівності та властивість (а) з її наслідком (24) для рівності. Для великих n і відповідних констант $C > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} |J_{n,1}(b)| &\leq \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} f(b) \sum_{k=N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1}^{N_{1,\delta}(b)-1} |b^{S_{k-1}} - b^{S_k}| |T_k| \\ &\leq C f(\mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| \left(\sup_{k \leq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1})} |T_k| \right) \sum_{k=N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1})-1} \mathbf{b}_{n+1}^{\delta k} |\xi_k| \\ &\leq C f(\mathbf{b}_n) |\log \mathbf{b}_n| \sum_{k \geq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1} \mathbf{b}_{n+1}^{\delta k} |\xi_k| O((N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1}) \log \log N_{1,\delta}(\mathbf{b}_{n+1}))^{1/2}). \end{aligned}$$

Згадуючи властивість (а) ми робимо висновок, що $\lim_{n \rightarrow \infty} N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n) (1 - \mathbf{b}_{n+1}^\delta) = 0$.

Тож, лема має наступне застосування

$$\sum_{k \geq N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)+1} \mathbf{b}_{n+1}^{\delta k} |\xi_k| \sim \mathbb{E} |\xi| \mathbf{b}_{n+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)} (1 - \mathbf{b}_{n+1}^\delta)^{-1} \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty.$$

Використовуючи знову властивість (а) і (24) в сукупності з оцінкою для $\mathbf{b}_{n+1}^{N_{1,\delta}(\mathbf{b}_n)}$, яка отримана в (20), ми робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \sup_{b \in [\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}]} |J_{n,1}(b)| &= O((\log \log(1/(1 - \mathbf{b}_n)))^{1/2} (\log(1/(1 - \mathbf{b}_n)))^{-(1/2-\varepsilon)}) \rightarrow 0 \\ &\quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Ми готові доводити основну теорему.

Доведення основної теореми. Ми доведемо тільки (1), адже (2) є наслідком (1), замінивши $-\eta_k$ на η_k .

Згідно з лемами 2 і 3 і (9), (1) еквівалентно до

$$\limsup_{b \rightarrow 1^-} f(b) \sum_{k=1} b^{S_{k-1}} \eta_k 1_{\mathcal{S}_k^c(b)} \leq 1 \quad \text{м. н.}$$

Останнє граничне співвідношення справедливе згідно з лемою 5 в поєднанні з (10) і тим фактом, що $\mathbb{E}_{k-1}(\eta_k 1_{\mathcal{S}_k^c(b)}) = -\mathbb{E}_{k-1}(\eta_k 1_{\mathcal{S}_k(b)})$ і лемою 6. \square

4. Моделювання

Змоделюємо випадковий процес $b \rightarrow \sum_{k \geq 0} b^{S_k} \eta_{k+1}$ де $b \in [0, 1)$, $S_k = k$, η_1, η_2, \dots незалежні й мають стандартний нормальний розподіл. Моделювання відбувалось у програмі Excel (додаток 1). Спочатку змоделюємо 3 вибірки η_k (стовпчики В, С, D). Нескінченну суму ми порахувати не можемо, тому обчислимо суму 100 доданків. Тож, у стовпчиках F, G і H обчислимо значення функції $f(b) = \sum_{k=0}^{100} b^{S_k} \eta_{k+1}$ для кожної з трьох вибірок η_k відповідно (синій, блакитний і жовтий графіки). У стовпчиках I і J обчислимо значення функцій $g(b) = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{1-b^2} \log \log \frac{1}{1-b^2}}$ і $h(b) = -\sqrt{2 \cdot \frac{1}{1-b^2} \log \log \frac{1}{1-b^2}}$ (оранжевий і сірий графіки). Оскільки синій, блакитний і жовтий графіки майже повністю знаходяться між оранжевим і сірим графіками, то результат моделювання узгоджується з нашим теоретичним результатом - теоремою 1.

5. Висновки

У даній дипломній роботі був доведений закон повторного логарифма для дисконтованих випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями. Ідеї доведень були запозичені зі статей [1] та [2], у яких були доведені закони повторного логарифму для випадкових степеневих рядів. Такі ряди є окремим випадком дисконтованих випадкових рядів, породжених лінійними рекурсіями, що відповідають детермінованому випадковому блуканню $S_n = n$ для $n \in \mathbb{N}_0$. Наївні сподівання щодо можливості формальної заміни у нашій моделі S_n на $n\mathbb{E}S_1$ не справджуються. Тобто доведення двох згаданих робіт потребують модифікацій, іноді достатньо суттєвих. Отримання необхідних модифікацій і є основним досягненням даної роботи.

Як було зазначено у вступі, дисконтовані випадкові ряди, породжені лінійними рекурсіями, коли параметр b стає близьким до 1, можуть бути використані для опису коливання суми грошей, що забезпечує довічне зобов'язання страхової компанії робити виплати, коли актуарний ринок наближається до ідеального для споживача сценарію відсутності ризику. Таким чином, я вважаю, що ця робота є актуальною і може бути застосована у різних галузях, зокрема, у актуарній справі та економіці.

Література

- [1] A. Bovier and P. Picco, *A law of the iterated logarithm for random geometric series*. Ann. Probab. **21** (1993), 168–184.
- [2] P. Picco and M. E. Vares, *A law of the iterated logarithm for geometrically weighted martingale difference sequences*. J. Theoret. Probab. **7** (1994), 375–415.
- [3] V. V. Petrov, *Limit theorems of probability theory: sequences of independent random variables*. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [4] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular variation*. Cambridge University Press, 1989.

Додаток 1

k	eta_k	eta_k	eta_k	b	sum_{k\ge 0}b^k *eta_{k+1}	sum_{k\ge 0}b^k *eta_{k+1}	sum_{k\ge 0}b^k *eta_{k+1}	(t\log\log t)^{1/2}	(-1)*(t\log\log t)^{1/2}
0	0.97998	-1.4921	-0.4486	0.8	-0.558652065	0.225010564	-0.970646482	0.344965284	-0.344965284
1	-0.3029	-0.9018	-1.2253	0.802	-0.561139032	0.246579533	-0.962743289	0.410981874	-0.410981874
2	0.05139	-0.5504	-1.3717	0.804	-0.563623328	0.268465592	-0.954697554	0.468888871	-0.468888871
3	-0.6901	-0.2757	0.61902	0.806	-0.566101657	0.290670752	-0.946506653	0.521430127	-0.521430127
4	0.68982	1.77814	1.53535	0.808	-0.56857048	0.313196839	-0.938167832	0.570124393	-0.570124393
5	-0.4218	0.56317	0.83796	0.81	-0.571026004	0.336045475	-0.929678199	0.61591697	-0.61591697
6	-0.6031	-0.4388	0.07055	0.812	-0.573464171	0.359218063	-0.921034713	0.659444031	-0.659444031
7	1.13665	0.21433	0.40895	0.814	-0.575880644	0.382715764	-0.912234179	0.701158498	-0.701158498
8	2.17373	1.06083	-1.7414	0.816	-0.578270791	0.406539476	-0.903273232	0.741396922	-0.741396922
9	-2.3874	-0.2848	1.21964	0.818	-0.580629673	0.430689817	-0.894148328	0.780418003	-0.780418003
10	-1.4234	1.3855	1.37087	0.82	-0.58295203	0.455167092	-0.884855732	0.818426182	-0.818426182
11	-0.5952	1.91989	1.89305	0.822	-0.585232263	0.479971274	-0.875391505	0.855586818	-0.855586818
12	-4E-05	-0.4844	-0.3319	0.824	-0.587464422	0.505101975	-0.865751491	0.892036356	-0.892036356
13	0.72062	1.6882	-1.555	0.826	-0.589642186	0.530558413	-0.8559313	0.927889363	-0.927889363
14	-0.0685	1.91796	-1.5615	0.828	-0.591758853	0.556339382	-0.845926296	0.963243543	-0.963243543
15	-0.2352	0.84987	-1.0026	0.83	-0.593807318	0.582443218	-0.835731579	0.998183394	-0.998183394
16	-0.7236	-1.5738	-0.9963	0.832	-0.595780059	0.608867761	-0.825341967	1.032782937	-1.032782937
17	1.51962	-0.3528	3.03058	0.834	-0.597669119	0.635610315	-0.81475198	1.067107793	-1.067107793
18	0.13485	0.90899	-0.7178	0.836	-0.599466091	0.662667602	-0.803955815	1.10121678	-1.10121678
19	-0.7799	-1.295	1.26908	0.838	-0.6011621	0.690035721	-0.79294733	1.135163178	-1.135163178
20	-1.135	0.1249	-0.3316	0.84	-0.602747786	0.717710093	-0.781720021	1.168995724	-1.168995724
21	0.91166	-1.1677	-0.3979	0.842	-0.604213289	0.74568541	-0.770266996	1.202759426	-1.202759426
22	0.22468	0.60536	-0.1021	0.844	-0.605548231	0.773955572	-0.75858095	1.236496223	-1.236496223
23	1.44506	-1.1248	1.03291	0.846	-0.606741701	0.802513631	-0.74665414	1.270245531	-1.270245531
24	1.70139	-0.8284	-0.1739	0.848	-0.607782242	0.831351715	-0.734478356	1.3040447	-1.3040447
25	-0.5106	0.85471	-1.3325	0.85	-0.608657835	0.86046096	-0.722044887	1.337929407	-1.337929407
26	0.70946	-1.6716	-0.2176	0.852	-0.609355888	0.889831429	-0.709344493	1.371933983	-1.371933983
27	1.41445	-0.932	-0.069	0.854	-0.609863222	0.919452022	-0.69636737	1.406091709	-1.406091709

28	-0.7322	0.6533	1.3233	0.856	-0.610166067	0.949310388	-0.683103108	1.440435066	-1.440435066
29	-0.5558	-1.3378	-0.8252	0.858	-0.610250049	0.97939282	-0.66954066	1.474995962	-1.474995962
30	0.14111	0.45616	0.54915	0.86	-0.610100187	1.009684149	-0.655668293	1.509805942	-1.509805942
31	0.59164	-0.8151	1.31272	0.862	-0.609700897	1.04016762	-0.641473547	1.544896372	-1.544896372
32	1.89859	0.64706	2.62491	0.864	-0.609035985	1.070824771	-0.626943187	1.580298612	-1.580298612
33	0.06227	-0.5856	0.72012	0.866	-0.608088661	1.101635284	-0.612063154	1.616044184	-1.616044184
34	0.97652	-0.9394	0.24063	0.868	-0.606841549	1.132576843	-0.596818508	1.652164931	-1.652164931
35	1.21563	0.49263	-0.1851	0.87	-0.605276699	1.163624961	-0.581193375	1.688693163	-1.688693163
36	0.19543	1.14295	-0.6467	0.872	-0.603375619	1.194752809	-0.565170881	1.725661813	-1.725661813
37	-1.4886	0.37803	-0.2888	0.874	-0.601119301	1.225931017	-0.548733091	1.763104583	-1.763104583
38	-1.1753	-0.5484	0.89772	0.876	-0.598488265	1.257127464	-0.531860939	1.801056099	-1.801056099
39	-0.569	-1.2021	0.09888	0.878	-0.595462606	1.288307052	-0.514534152	1.839552058	-1.839552058
40	0.39932	1.37617	0.00034	0.88	-0.592022061	1.319431454	-0.496731174	1.878629394	-1.878629394
41	2.024	0.22115	-0.7643	0.882	-0.588146083	1.350458845	-0.478429079	1.918326437	-1.918326437
42	-1.1871	-0.8603	0.61883	0.884	-0.583813932	1.381343608	-0.459603487	1.958683093	-1.958683093
43	0.33815	-0.0943	-0.8238	0.886	-0.579004785	1.412036013	-0.440228461	1.99974102	-1.99974102
44	-2.1936	-2.1515	-0.886	0.888	-0.573697864	1.442481873	-0.420276413	2.041543831	-2.041543831
45	-0.1917	1.36444	-0.4944	0.89	-0.567872589	1.472622159	-0.399717994	2.0841373	-2.0841373
46	-1.9042	-0.9693	-0.2571	0.892	-0.561508755	1.502392597	-0.378521975	2.127569591	-2.127569591
47	0.56622	-0.8154	-0.6504	0.894	-0.55458674	1.531723216	-0.356655134	2.171891503	-2.171891503
48	0.39725	-0.6019	-0.4254	0.896	-0.547087744	1.560537864	-0.334082116	2.217156741	-2.217156741
49	1.05534	-0.6776	0.15766	0.898	-0.538994072	1.58875368	-0.310765305	2.263422206	-2.263422206
50	0.39799	-1.4762	0.59739	0.9	-0.530289452	1.616280523	-0.286664674	2.310748321	-2.310748321
51	-0.9472	-1.5638	0.08267	0.902	-0.520959409	1.643020347	-0.26173763	2.359199387	-2.359199387
52	-2.3114	-1.003	-0.7016	0.904	-0.510991694	1.668866528	-0.235938854	2.408843977	-2.408843977
53	-0.2728	1.27475	-0.9692	0.906	-0.500376772	1.693703131	-0.209220131	2.459755374	-2.459755374
54	1.03096	-0.3719	-0.267	0.908	-0.48910839	1.717404117	-0.181530165	2.51201206	-2.51201206
55	-0.5725	-1.4549	0.64141	0.91	-0.477184216	1.739832487	-0.152814393	2.565698265	-2.565698265
56	-0.7181	0.81461	3.26399	0.912	-0.464606586	1.76083935	-0.123014787	2.620904572	-2.620904572
57	-1.2606	-1.1871	0.4804	0.914	-0.45138334	1.780262924	-0.09206965	2.677728615	-2.677728615
58	-0.437	1.18266	0.50111	0.916	-0.437528791	1.797927455	-0.059913396	2.736275851	-2.736275851

59	0.35456	-0.5302	0.27059	0.918	-0.423064828	1.813642051	-0.026476339	2.796660442	-2.796660442
60	0.89133	0.36435	-0.921	0.92	-0.408022164	1.827199434	0.008315544	2.859006255	-2.859006255
61	-0.5295	-0.9394	0.34382	0.922	-0.392441776	1.8383746	0.044540833	2.923448003	-2.923448003
62	-0.2325	-0.3833	1.22578	0.924	-0.376376537	1.846923386	0.082282903	2.990132548	-2.990132548
63	-1.2402	0.28355	-0.4137	0.926	-0.359893071	1.852580943	0.121630157	3.059220393	-3.059220393
64	-0.6375	0.33961	0.21935	0.928	-0.343073882	1.855060117	0.162676251	3.130887415	-3.130887415
65	0.05721	-1.1762	0.93461	0.93	-0.326019766	1.85404973	0.205520313	3.205326847	-3.205326847
66	0.30945	0.3044	-0.3491	0.932	-0.308852566	1.849212779	0.250267159	3.2827516	-3.2827516
67	-2.0819	1.28533	1.3417	0.934	-0.291718309	1.840184546	0.297027475	3.363396958	-3.363396958
68	-0.7221	-0.7353	0.04909	0.936	-0.274790784	1.826570641	0.345917986	3.44752374	-3.44752374
69	-0.2574	0.4498	-0.7201	0.938	-0.258275617	1.807944986	0.397061589	3.535422019	-3.535422019
70	1.08422	0.47072	-1.4296	0.94	-0.242414915	1.783847756	0.450587436	3.627415525	-3.627415525
71	1.61016	-0.6902	-0.7758	0.942	-0.227492569	1.753783328	0.506630975	3.723866875	-3.723866875
72	0.78262	0.04948	-0.2516	0.944	-0.213840293	1.717218241	0.565333908	3.825183829	-3.825183829
73	1.74704	-1.1867	0.57884	0.946	-0.20184452	1.673579253	0.626844077	3.931826823	-3.931826823
74	1.8817	0.23355	0.25958	0.948	-0.191954271	1.622251533	0.691315245	4.044318078	-4.044318078
75	-2.1649	-0.6465	0.4033	0.95	-0.184690141	1.562577073	0.758906746	4.163252722	-4.163252722
76	-1.5494	0.83862	-0.7631	0.952	-0.18065456	1.493853439	0.829783007	4.289312432	-4.289312432
77	0.39212	0.31113	-0.5171	0.954	-0.18054352	1.415332956	0.904112877	4.423282343	-4.423282343
78	-0.3072	-1.1222	-0.4243	0.956	-0.185159977	1.326222522	0.982068772	4.566072156	-4.566072156
79	-1.1243	-0.6837	-1.297	0.958	-0.19542919	1.225684222	1.063825575	4.718742746	-4.718742746
80	-0.6266	0.65614	0.50094	0.96	-0.212416255	1.112836996	1.14955927	4.882540052	-4.882540052
81	0.37541	1.26686	-0.2978	0.962	-0.237346192	0.986759654	1.239445262	5.058938717	-5.058938717
82	0.82049	-0.098	-1.6694	0.964	-0.271626943	0.846495617	1.333656353	5.249698972	-5.249698972
83	-1.7963	-0.4382	1.05721	0.966	-0.316875726	0.691059816	1.432360315	5.456941792	-5.456941792
84	-1.3711	0.38338	-0.0389	0.968	-0.37494925	0.519448306	1.535717027	5.683249678	-5.683249678
85	0.29703	0.21089	0.19504	0.97	-0.447978364	0.330651258	1.643875123	5.931804056	-5.931804056
86	-0.0737	0.22837	-0.14	0.972	-0.538407827	0.123670137	1.75696812	6.206576124	-6.206576124
87	0.28355	-0.8366	0.33896	0.974	-0.649041961	-0.102459959	1.875109963	6.512597536	-6.512597536
88	-0.161	0.81824	0.05384	0.976	-0.783097097	-0.348641608	1.998389991	6.856353612	-6.856353612
89	0.40065	-0.5762	0.07109	0.978	-0.944261836	-0.615678598	2.126867278	7.246370407	-7.246370407

90	-1.2113	1.28185	1.19522	0.98	-1.136766343	-0.904229954	2.260564367	7.69411957	-7.69411957
91	-0.5003	0.40787	-3.4872	0.982	-1.365462051	-1.214752375	2.399460421	8.215466238	-8.215466238
92	0.74999	-0.1152	0.4279	0.984	-1.635913382	-1.547428594	2.543483866	8.833091835	-8.833091835
93	-0.0909	0.35162	-0.164	0.986	-1.954503352	-1.902078631	2.692504636	9.58077489	-9.58077489
94	1.38931	0.06817	1.32165	0.988	-2.328555205	-2.278050338	2.846326222	10.51148506	-10.51148506
95	-1.0874	0.21081	-0.1894	0.99	-2.766472574	-2.674084901	3.004677789	11.71407747	-11.71407747
96	0.69302	0.26528	0.67447	0.992	-3.277901056	-3.08815209	3.167206778	13.35197174	-13.35197174
97	-0.0412	-0.3291	0.23638	0.994	-3.873914555	-3.517249055	3.333472524	15.76884521	-15.76884521
98	0.84998	1.18822	0.63513	0.996	-4.567230261	-3.957155182	3.502941654	19.86245184	-19.86245184
99	-1.1994	0.03592	-0.274	0.998	-5.372456769	-4.402134144	3.674986248	29.24495003	-29.24495003

