Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття освітнього ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Керованість лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектору стану

студентки 4 курсу
Мазур Дарини Анатоліївни

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пічкур В.В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту, протокол № 18 від 10.06.2022

Завідувач кафедри МСС
доктор технічних наук, доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2022

Анотація

У даній роботі проаналізовано керованість лінійними дискретними системами системами зі змінною розмірністю вектора стану. Розглянуто задачу про переведення даної системи в довільний кінцевий стан. Обгрунтовано теорему про побудову множини досяжності та побудовано критерії керованості з множини початкових станів на термінальну множину.

Зміст

Вступ **3**

1 Керованість дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану **4**

1.1 Критерій повної керованості 4

1.2 Задача про переведення лінійної дискретної системи з заданого початкового стану в найближчу точку до бажаного кінцевого стану 9

1.3 Множина досяжності лінійної дискретної системи при функціональних обмеженнях 13

1.4 Критерії керованості з множини початкових станів на термінальну множину для лінійних дискретних систем 16

1.4.1 Керованість з множини в множину 16

1.4.2 Керованість зі всієї множини початкових станів 18

1.4.3 Керованість з множини на всю множину 20

2 Алгоритми **22**

2.1 Алгоритм задачі про переведення лінійної дискретної системи з точки в точку 22

2.2 Алгоритм задачі про побудову множини досяжності лінійної дискретної системи 28

2.3 Опис програми 32

Висновки **34**

Список використаних джерел **35**

Вступ

У даній роботі розглядаються лінійні дискретні системи зі змінною розмірністю вектора стану [2]. Особливу увагу приділено керованості таких систем.

Зміна розмірності вектора стану системи означає, що в деякі моменти часу можуть з'являтися або зникати певні фактори впливу на систему. Дана задача є актуальною, наприклад, при моделюванні процесу виготовлення продукту на підприємстві [3]. У цьому випадку показники, які контролюються на кожному етапі можуть бути різними. З точки зору математичного моделювання це означає, що вектор стану може змінювати свою розмірність.

Мета роботи

1. Проаналізувати керованість лінійної дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану.

2. Побудувати керування, яке переводить систему в довільний кінцевий стан.

3. Обгрунтувати теорему про множину досяжності лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану.

4. Побудувати критерії керованості з множини початкових станів на термінальну множину для лінійних дискретних систем зі зміною розмірності вектора стану

Структура роботи така: вступ, два розділи, висновки та список літератури. У першому розділі розглядається керованість лінійної дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану. У другому розділі наведені алгоритми задач про переведення лінійної дискретної системи з точки в точку та побудову множини досяжності лінійної дискретної системи. У висновках наводяться основні результати роботи. Список літератури висвітлює джерела, які використовувалися в роботі.

Розділ 1

Керованість дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану

1.1 Критерій повної керованості

Розглянемо дискретну лінійну систему вигляду [5]

$$x\,(t+1) = A\,(t)\,x\,(t) + C\,(t)\,u\,(t)\,,\ t \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}\,. \tag{1.1}$$

Тут $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_t})^*$ – вектор стану розмірності n_t, $u = (u_1, \ldots, u_m)^*$– вектор керування розмірності m, $A\,(t)$ - $n_{t+1} \times n_t$ – матриця, $C\,(t)$– $n_{t+1} \times m$ - матриця, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$. Позначимо $I_N = \{0,\ 1, \ldots, N\}$; $x(t, x_0, u)$ розв'язок системи (2.1), $t \in I_N$ при керуванні $u\,(t)$, $t \in I_{N-1}$.

Означення 1.1. *Система* (2.1) *називається цілком керованою на інтервалі* I_N*, якщо для довільних* $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ *знайдеться керування* $u\,(t)$, $t \in I_{N-1}$ *таке, що* $x_N = x(N, x_0, u)$.

Розглянемо простір $\ell_2^{(m)}$, елементами якого є послідовності векторів з $\mathbb{R}^m$ такі, що якщо $u \in \ell_2^{(m)}$, то

- $u\,(t) \in \mathbb{R}^m$, $t = 0, 1, 2, \ldots;$
- $\sum_{t=0}^{\infty} \|u(t)\|^2 < \infty$.

В просторі $\ell_2^{(m)}$ [1] можна ввести норму

$$\|u\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{t=0}^{\infty} \|u(t)\|^2} < \infty$$

і скалярний добуток

$$\langle u, v\rangle_{\ell_2} = \sum_{t=0}^{\infty} \langle u\left(t\right), v(t)\rangle, \; u, v \in \ell_2^{(m)}.$$

Простір $\ell_2^{(m)}$ є гільбертовим. Ми вважаємо, що $\ell_2^{(m)}$ є простором допустимих керувань системи (2.1).

Позначимо $\Theta\left(t\right) = A_{t-1}A_{t-2}\ldots A_1A_0 - n_t \times n_0$ матриця, $\Theta\left(t, s\right) = A_{t-1}A_{t-2}\ldots A_s$ – $n_t \times n_s$ матриця, $\Theta\left(t, t\right) = I$, де I – одинична матриця, $t, s \in I_N$.

Розглянемо

$$W\left(t\right) = \Theta\left(N, t+1\right) C(t) = \begin{pmatrix} w_1^*(t) \\ w_2^*(t) \\ \vdots \\ w_{n_N}^*(t) \end{pmatrix},$$

де $w_j \in \mathbb{R}^m$, $t \in I_{N-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n_N$ є векторами, які описують стрічки матриці $W\left(t\right)$, $t \in I_{N-1}$. Вважаємо, що $w_j\left(t\right) = 0$, $t = N, N+1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\Theta\left(N, t+1\right)$ – $n_N \times n_{t+1}$ матриця, $W\left(t\right)$ – $n_N \times m$ матриця,. Має місце така теорема.

Теорема 1.1. *Для того, щоб система* (2.1) *була цілком керованою на інтервалі* $t \in I_N$ *необхідно і достатньо, щоб система функцій*

$$H = \left\{w_1\left(\cdot\right), w_2\left(\cdot\right), \ldots, w_{n_N}\left(\cdot\right)\right\}$$

була лінійно незалежною в $\ell_2^{(m)}$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (2.1) є цілком керованою. Побудуємо в $\ell_2^{(m)}$ лінійний многовид $L = Lin\ H$, який є лінійною оболонкою, натягнутою на систему векторів H. Це означає, що якщо $w(\cdot) \in L$,то

$$w\left(t\right) = \lambda_1 w_1\left(t\right) + \lambda_2 w_2\left(t\right) + \lambda_{n_N} w_{n_N}\left(t\right), \quad t \in I_{N-1},$$

при цьому $w\,(t) = 0$, $t = N, N+1, \ \ldots$, де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_N}$ – скалярні величини. Оскільки система (2.1) є цілком керованою, то для довільних $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ існує керування $u \in \ell_2^{(m)}$ таке, що

$$x_N = \Theta\,(N)\,x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \Theta\,(N, k+1)\,C\,(k)\,u\,(k)\,.$$

Позначимо $c = x_N - \Theta(N)x_0$. c довільний вектор-стовпчик розмірності n_N, так як точки $x_0 \in \mathbb{R}^{n_0}$, $x_N \in \mathbb{R}^{n_N}$ – довільні. Тоді

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Theta\,(N, k+1)\,C\,(k)\,u\,(k) = c.$$

Це співвідношення можна записати так:

$$\sum_{k=0}^{N-1} W\,(k)\,u(k) = c. \tag{1.2}$$

Оскільки система (2.1) є цілком керованою, то систему (1.2) можна розв'язати для довільної правої частини, знаходячи допустимі керування $u\,(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Оскільки $\ell_2^{(m)}$– гільбертів простір, то $\ell_2^{(m)}$ розкладається в пряму суму

$$\ell_2^{(m)} = L \oplus L^{\perp},$$

де $L^{\perp}$ – ортогональне доповнення до L. Це означає, що довільне $u \in \ell_2^{(m)}$ можна подати у вигляді

$$u\,(t) = u_0\,(t) + v\,(t)\,, t = 0, 1, \ldots. \tag{1.3}$$

Тут $u_0 \in L$, $v \in L^{\perp}$. З означення ортогонального доповнення випливає, що

$$\langle u_0, v \rangle_{\ell_2} = 0$$

для $u_0 \in L$. Оскільки $u_0 \in L$, то існує вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n_N})^*$ такий, що

$$u_0\,(t) = \lambda_1 w_1\,(t) + \lambda_2 w_2\,(t) + \lambda_{n_N} w_{n_N}\,(t) = W^*(t)\lambda.$$

Отже, керування (1.3) має вигляд

$$u\left(t\right)=W^{*}\left(t\right)\lambda+v\left(t\right),\ \ t=0,1,\ldots. \tag{1.4}$$

Підставимо його в (1.2). Одержимо

$$\sum_{k=0}^{N-1}W\left(k\right)W^{*}\left(k\right)\lambda=c. \tag{1.5}$$

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{N-1}W\left(k\right)v\left(k\right)=0$, так як $v\in L^{\perp}$. Оскільки система (1.2), а значить і (1.5), має розв'язок для довільної правої частини, то матриця цієї системи

$$\Phi\left(N\right)=\sum_{k=0}^{N-1}W\left(k\right)W^{*}\left(k\right) \tag{1.6}$$

є невиродженою. Матриця $\Phi\left(N\right)$ є матрицею Грамма за системою функцій H розмірності $n_N\times n_N$. Оскільки матриця Грамма невироджена, то система H – лінійно незалежна.

Достатність. Якщо система H – лінійно незалежна, то матриця (1.6) є невиродженою. Покажемо, що для довільних $x_0\in\mathbb{R}^{n_0}$, $x_N\in\mathbb{R}^{n_N}$ існує допустиме керування $u\left(t\right)$, $t\in I_{N-1}$, яке переводить систему зі стану x_0 в стан $x\left(N\right)=x_N$. Як ми показали в доведенні необхідності, будь-яке допустиме керування можна подати у вигляді (1.4). Підставимо (1.4) в (1.2) і одержимо систему (1.5) для знаходження вектора λ. Оскільки матриця (1.6) невироджена, то вектор λ можна визначити з (1.5) так

$$\lambda=\Phi^{-1}\left(N\right)c,\ \ c=x_N-\Theta(N)x_0.$$

Отже, з (1.4) одержуємо, що керування

$$u\left(t\right)=W^{*}\left(t\right)\Phi^{-1}\left(N\right)c+v(t) \tag{1.7}$$

розв'язує задачу про переведення системи зі стану x_0 в стан x_N, де $v\in L^{\perp}$ – довільний елемент. Теорему доведено.

□

Наслідок 1.1. *Для того, щоб система (2.1) була цілком керованою необхі-*

дно і достатньо, щоб матриця

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k) W^*(k),$$

була невиродженою, де $W(k) = \Theta(N, k+1) C(k)$.

Наслідок 1.2. *Нехай матриця* $\Phi(N)$ *є невиродженою. Тоді керування*

$$u_0(t) = W^*(t) \Phi^{-1}(N) (x_N - \Theta(N) x_0), \; t = 0, 1, \ldots, N-1$$

переводить систему (2.1) *зі стану* $x(0) = x_0$ *в стан* $x(N) = x_N$.

Теорема 1.2. *Нехай матриця* $\Phi(N)$ *є невиродженою. Тоді серед усіх керувань, які переводять систему* (2.1) *зі стану* $x(0) = x_0$ *в стан* $x(N) = x_N$ *керування*

$$u_0(t) = W^*(t) \Phi^{-1}(N) (x_N - \Theta(N) x_0), \; t = 0, 1, \ldots, N-1$$

має найменшу норму в $\ell_2^{(m)}$.

Доведення. Доведення теореми спирається на доведення теореми 1.2. Ми показали, що довільне керування, яке переводить систему (2.1) зі стану $x(0) = x_0$ в стан $x(N) = x_N$, має вигляд (1.7). Отже, $u = u_0 + v$, де $v \in L^{\perp}$. Тому

$$\|u\|_{\ell_2} = \langle u, u \rangle_{\ell_2} = \langle u_0 + v, u_0 + v \rangle_{\ell_2} =$$

$$= \langle u_0, u_0 \rangle_{\ell_2} + \langle v, v \rangle_{\ell_2} + 2\langle u_0, v \rangle_{\ell_2} =$$

$$= \langle u_0, u_0 \rangle_{\ell_2} + \langle v, v \rangle_{\ell_2},$$

так як $v \in L^{\perp}$, $u_0 \in L$. Звідси

$$\|u\|_{\ell_2} \geq \langle u_0, u_0 \rangle_{\ell_2} = \|u_0\|_{\ell_2}.$$

□

Наслідок 1.3. *Нехай матриця* $\Phi(N)$ *є невиродженою. Тоді керування*

$$u_0(t) = W^*(t) \Phi^{-1}(N) (x_N - \Theta(N) x_0), \; t = 0, 1, \ldots, N-1$$

розв'язує задачу оптимального керування, яка полягає в мінімізації критерію якості

$$I(u) = \sum_{t=0}^{N-1} \|u(t)\|^2$$

на розв'язках системи (2.1) *за умов* $x(0) = x_0$, $x(N) = x_N$.

Матриця

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k) W^*(k)$$

називається грамміаном керованості системи (2.1). Властивості грамміана керованості такі:

1. Матриця $\Phi(N)$ є симетричною.
2. Матриця $\Phi(N)$ є невід'ємновизначеною. Якщо $\Phi(N)$ є невиродженою, то вона є додатновизначеною.

Наслідок 1.4. *Для того, щоб система* (2.1) *була цілком керованою необхідно і достатньо, щоб матриця* $\Phi(N)$ *була додатновизначеною.*

1.2 Задача про переведення лінійної дискретної системи з заданого початкового стану в найближчу точку до бажаного кінцевого стану

Розглянеемо випадок, коли умови теореми 1.1 не виконуються і матриця

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k) W^*(k)$$

є виродженою. У цьому випадку задача про переведення системи з будь-якої точки $x(0) = x_0$ в довільне положення $x(N) = x_N$ в загальному випадку може бути нерозв'язною. Таким чином, виникає задача про переведення системи (2.1) з початкового стану $x(0) = x_0$ в найближчу точку $x(N)$ до заданого кіцевого стану x_N. Отже, ми розв'язуємо задачу знаходження керування, яке мінімізує критерій якості

$$I(u) = \|x(N, x_0, u) - x_N\| \tag{1.8}$$

на розв'язках системи (2.1) з початковою умовою $x(0) = x_0$. Тут $x(N, x_0, u)$ – значення розв'язку системи (2.1) з початковою умовою $x(0) = x_0$ при допустимому керуванні $u \in \ell_2^{(m)}$. Так як

$$x(N, x_0, u) = \Theta\left(N\right) x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \Theta\left(N, k+1\right) C\left(k\right) u\left(k\right),$$

то підстановка останньої рівності в (2.2) дає

$$I(u) = \|x(N, x_0, u) - x_N\| = \|\Theta\left(N\right) x_0 + \sum_{k=0}^{N-1} \Theta\left(N, k+1\right) C\left(k\right) u\left(k\right) - x_N\| =$$

$$= \|\sum_{k=0}^{N-1} W\left(k\right) u\left(k\right) - c\|, \tag{1.9}$$

де $c = x_N - \Theta(N)x_0$,

$$W\left(t\right) = \Theta\left(N, t+1\right) C(t) = \begin{pmatrix} w_1^*(t) \\ w_2^*(t) \\ \vdots \\ w_{n_N}^*(t) \end{pmatrix},$$

$w_j \in \mathbb{R}^m, t \in I_{N-1}, j = 1, 2, \ldots, n_N$ є векторами, які описують стрічки матриці $W\left(t\right)$, $t \in I_{N-1}$. При цьому вважаємо, що $w_j\left(t\right) = 0$, $t = N, N+1, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots, n$.

Використовуючи систему функцій

$$H = \left\{w_1\left(\cdot\right), w_2\left(\cdot\right), \ldots, w_{n_N}\left(\cdot\right)\right\} \subset \ell_2^{(m)},$$

сконструюємо лінійний многовид $L = Lin\ H$. Оскільки $\ell_2^{(m)}$– гільбертів простір, то $\ell_2^{(m)}$ розкладається в пряму суму

$$\ell_2^{(m)} = L \oplus L^{\perp},$$

де $L^{\perp}$ – ортогональне доповнення до L. Отже, довільне керування $u \in \ell_2^{(m)}$ можна подати у вигляді

$$u\left(t\right) = u_0\left(t\right) + v\left(t\right), t = 0, 1, \dots . \tag{1.10}$$

Тут $u_0 \in L$, $v \in L^{\perp}$. Тому

$$\langle u_0, v\rangle_{\ell_2} = 0$$

для $u_0 \in L$. Так як $u_0 \in Lin\, H$, то існує вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_N})^*$ такий, що

$$u_0\left(t\right) = \lambda_1 w_1\left(t\right) + \lambda_2 w_2\left(t\right) + \lambda_{n_N} w_{n_N}\left(t\right) = W^*(t)\lambda \in Im(W^*\left(t\right)).$$

Тут $Im(\cdot)$ – образ лінійного оператора. Отже,

$$u\left(t\right) = W^*(t)\lambda + v\left(t\right), t = 0, 1, \dots . \tag{1.11}$$

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{N-1} W\left(k\right) v\left(k\right) = 0$, так як $v \in L^{\perp}$. Підстановка (1.11) в (1.9) перетворює задачу (2.2) в еквівалентну їй задачу

$$J(\lambda) = \| \sum_{k=0}^{N-1} W\left(k\right) W^*\left(k\right)\lambda - c\| \to \min_{\lambda\in\mathbb{R}^{n_N}}, \tag{1.12}$$

$c = x_N - \Theta(N)x_0$. Як бачимо, елемент $v \in L^{\perp}$ не впливає на розв'язок задачі (2.2), грає роль інваріанта, і його можна вважати нульовим.

З властивостей псевдооберненої матриці [1] випливає, що розв'язком задачі (1.12) є

$$\widehat{\lambda} = \Phi^+(N)c + z, \tag{1.13}$$

де $\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W\left(k\right) W^*\left(k\right)$ –граммiан керованості, $\Phi^+(N)$ – псевдообернена матриця до матриці $\Phi(N)$, $z \in Ker(\Phi(N))$– довільний вектор.

Оскільки $Ker(\Phi(N)) = Z_N\mathbb{R}^{n_N}$, де $Z_N = Z\left(\Phi(N)\right) = I - \Phi^+(N)\Phi(N)$ – оператор проектування на $Ker(\Phi(N))$, то (1.13) має вигляд

$$\widehat{\lambda} = \Phi^+(N)c + Z_N p, \tag{1.14}$$

де $p \in \mathbb{R}^{n_N}$, $c = x_N - \Theta(N)x_0$. Формула (1.14) описує множину всіх розв'язків задачі (1.12).

Слід зазначити, що за властивостями псевдооберненої матриці серед розв'язків задачі (1.12) вектор

$$\widehat{\lambda} = \Phi^{+}(N)c$$

має найменшу норму.

Підставляючи (1.14) в (1.11) при $v(t) = 0$, $t \in I_{N-1}$, одержимо

$$u\,(t) = W^{*}\,(t)\,\Phi^{+}(N)\,(x_N - \Theta(N)x_0) + W^{*}\,(t)\,Z_N p, \tag{1.15}$$

де $p \in \mathbb{R}^{n_N}$, $t \in I_{N-1}$. Формула (1.15) розв'язок задачі (1.9). Формула (1.15) при $p = 0$ має вигляд

$$u\,(t) = W^{*}\,(t)\,\Phi^{+}(N)\,(x_N - \Theta(N)x_0)\,,\ t \in I_{N-1}.$$

Підставляючи керування (1.15) в функціонал (1.9), одержуємо

$$I(u) = J(\widehat{\lambda}) = \|\Phi(N)\widehat{\lambda} - c\| = \|\Phi(N)\Phi^{+}(N)c + \Phi(N)Z_N p - c\|.$$

Оскільки $Z_N p \in Ker(\Phi(N))$, то $\Phi(N)Z_N p = 0$. Тому

$$I(u) = \|\Phi(N)\Phi^{+}(N)c - c\| = \|(I - \Phi(N)\Phi^{+}(N))c\|.$$

Оскільки $Y(\Phi(N)) = \Phi(N)\Phi^{+}(N)$ є проектором на область значень $Im(\Phi(N))$ матриці $\Phi(N)$, $Z(\Phi^{*}(N)) = I - \Phi(N)\Phi^{+}(N)$ є проектором на ядро $Ker(\Phi^{*}(N)$ матриці $\Phi^{*}(N)$, то

$$I(u) = \|Y(\Phi(N))c - c\| = \|Z(\Phi^{*}(N))c\|. \tag{1.16}$$

Функціонал (2.2) показує наскільки точно можна розв'язати задачу про переведення системи (2.1) з точки $x\,(0) = x_0$ в $x\,(N) = x_N$. З (2.1) випливає, що $I(u) = 0$ якщо $Y(\Phi(N))c = c$, або $Z(\Phi^{*}(N)) = 0$. Отже, має місце така теорема.

Теорема 1.3. *Керування*

$$u\,(t) = W^{*}\,(t)\,\Phi^{+}(N)\,(x_N - \Theta(N)x_0) + W^{*}\,(t)\,Z_N p, \tag{1.17}$$

переводить систему (2.1) з точки $x\left(0\right)=x_0$ в точку $x\left(N\right)$, найближчу до точки x_N, де $p\in\mathbb{R}^{n_N}$, $t\in I_{N-1}$, $Z_N=Z\left(\Phi(N)\right)=I-\Phi^{+}(N)\Phi(N)$. При цьому евклідова відстань від точки $x\left(N\right)$ до точки x_N

$$\|x(N)-x_N\|=\|Y(\Phi(N))c-c\|=\|Z(\Phi^{*}(N))c\|$$

де $c=x_N-\Theta(N)x_0$.

Якщо $Y(\Phi(N))c=c$, тобто вектор $c=x_N-\Theta(N)x_0$ належить області значень $Im(\Phi(N))$ матриці $\Phi(N)$, то керування (1.17) переводить систему (2.1) з точки $x\left(0\right)=x_0$ в точку $x\left(N\right)=x_N$.

Зауважимо, що керування (1.17) переводить систему (2.1) з точки $x\left(0\right)=x_0$ в точку $x\left(N\right)=x_N$ для довільних x_0, x_N тоді і тільки тоді, коли $Z(\Phi^{*}(N))=0$. Це еквівалентно умові $\Phi(N)\Phi^{+}(N)=I$. Оскільки матриця $\Phi(N)$ є квадратною і має розмірність $n_N\times n_N$, то це означає, що $\Phi^{+}(N)=\Phi^{-1}(N)$, тобто у цьому випадку виконується теорема 1.1 і її наслідки.

1.3 Множина досяжності лінійної дискретної системи при функціональних обмеженнях

Розглянемо дискретну лінійну систему вигляду

$$x\left(t+1\right)=A\left(t\right)x\left(t\right)+C\left(t\right)u\left(t\right),\ t\in\left\{0,\ 1,\ldots,N-1\right\}. \tag{1.18}$$

Тут $x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n_t})^{*}$ – вектор стану розмірності n_t, $u=(u_1,\ldots,u_m)^{*}$– вектор керування розмірності m, $A\left(t\right)$ - $n_{t+1}\times n_t$ – матриця, $C\left(t\right)$– $n_{t+1}\times m$ - матриця, $t=0,1,\ldots,\ N-1$. Позначимо $x(t,x_0,u)$ розв'язок системи (2.3), $t=0,1,\ldots,\ N$ при керуванні $u\left(t\right)$, $t=0,1,\ldots,\ N-1$, $x(0)=x_0$, $\Theta(N)=A(N-1)A(N-2)\ldots A(0)$, $\Theta(N,t)=A(N-1)A(N-2)\ldots A(t)$, $t=0,1,\ldots,\ N$, $\Theta(N,N)=I$.

Обмеження на функцію керування мають вигляд

$$\|u\|_{\ell_2}^2=\sum_{t=0}^{N-1}\|u\left(t\right)\|^2\leq r^2,\ r>0. \tag{1.19}$$

Нехай $x(0)=x_0$. Задача полягає у знаходженні множини досяжності

$X(N, x_0)$ системи (2.3) в момент часу $t = N$ при обмеженнях на керування, які задаються (2.4). Множина досяжності складається з усіх точок $x(N, x_0, u)$, де функція u пробігає множину допустимих керувань, яка визначається нерівністю (2.4).

Позначимо $W(t) = \Theta(N, t)\, C(t)$, $t = 0, 1, \ldots, \ N - 1$. Припустимо, що матриця

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k)\, W^*(k)$$

є невиродженою так, що виконується умова повної керованості при $t = 0, 1, \ldots, \ N$. Позначимо еліпсоїд

$$\mathscr{E}(a, Q) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n_t} : \left\langle Q^{-1}(x - a), x - a\right\rangle \leq 1\right\}$$

де $a \in \mathbb{R}^{n_t}$ – центр еліпсоїда [4], $Q = Q^* > 0$ – $n_t \times n_t$- матриця еліпсоїда. Має місце така теорема.

Теорема 1.4. *Нехай* $r = 1$, $x_0 = 0$. *Тоді*

$$X(N, 0) = \mathscr{E}(0, \Phi(N)) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left\langle \Phi^{-1}(N)\, x, x\right\rangle \leq 1\right\}.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $x_N \in X(N, 0)$. Так як $x_N \in X(N, 0)$, то існує керування, що преводить систему з початку координат в точку $x(N) = x_N$, для якого виконується (2.4) при $r = 1$. За теоремою 1.2 керування

$$u(t) = W^*(t)\, \Phi^{-1}(N)\, x_N, \ \ t = 0, 1, \ldots, N - 1$$

переводять систему (2.3) зі стану $x(0) = 0$ в стан $x(N) = x_N$, маючи при цьому найменшу норму в $\ell_2^{(m)}$ серед керувань, які розв'язують задачу про переведення системи (2.3) зі стану $x(0) = 0$ в стан $x(N) = x_N$. Доозначимо $u(t) = 0$, $t \geq N$. Враховуючи, що керування $u(t)$ мінімізує норму в $\ell_2^{(m)}$, то з (2.4) при $r = 1$ одержимо $\|u\|_{\ell_2}^2 \leq 1$. Враховуючи, що

$$\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k)\, W^*(k),$$

одержуємо

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\ell_2}^2 &= \sum_{t=0}^{N-1} \langle u(t), u(t)\rangle = \sum_{t=0}^{N-1}\langle u(t), u(t)\rangle = \\
&= \sum_{t=0}^{N-1}\langle W^*(t)\,\Phi^{-1}(N)\,x_N, W^*(t)\,\Phi^{-1}(N)\,x_N\rangle = \\
&= \sum_{t=0}^{N-1}\langle \Phi^{-1}(N)\,x_N, W(t)\,W^*(t)\,\Phi^{-1}(N)\,x_N\rangle = \\
&= \langle \Phi^{-1}(N)\,x_N, \sum_{t=0}^{N-1} W(t)\,W^*(t)\,\Phi^{-1}(N)\,x_N\rangle = \langle \Phi^{-1}(N)\,x_N, x_N\rangle \le 1.
\end{aligned}
$$

Отже, $x_N \in \mathscr{E}(0, \Phi(N))$.

Достатність. Якщо $x_N \notin X(N, 0)$, то для керування

$$
u(t) = W^*(t)\,\Phi^{-1}(N)\,x_N,\ \ t = 0, 1, \ldots, N-1
$$

не виконується (2.4) при $r = 1$. Тому

$$
\|u\|_{\ell_2}^2 = \langle \Phi^{-1}(N)\,x_N, x_N\rangle > 1.
$$

Звідси $x_N \notin \mathscr{E}(0, \Phi(N))$. □

Наслідком з теореми 1.4 є така теорема.

Теорема 1.5. *Множина досяжності*

$$
X(N, x_0) = \mathscr{E}\left(z(N), r^2\Phi(N)\right),
$$

де $z(N) = \Theta(N)x_0$. *При цьому* $z(t+1) = A(t)z(t)$, $t = 0, 1, \ldots, \ N-1$, $z(0) = x_0$.

Доведення. Оскільки система (2.3) лінійна, то $X(N, x_0) = \Theta(N)x_0 + X(N, 0)$. Далі доведення теореми повторює доведення теореми 1.4 з врахуванням, що

$$
\langle \Phi^{-1}(N)\,x_N, x_N\rangle \le r^2
$$

еквівалентне виконанню $\langle \Psi^{-1}(N)\,x_N, x_N\rangle \le 1$, де $\Psi(N) = r^2\Phi(N)$. □

1.4 Критерії керованості з множини початкових станів на термінальну множину для лінійних дискретних систем

Розглянемо ознаначення та основні властивості опорних функцій.

Нехай $A \subset C$ – компакт.

Означення 1.2. *Опорною функцією множини $A \subset \mathbb{R}^n$ називається функція*

$$c(A, \psi) = \max_{a \in A} \langle a, \psi \rangle,$$

де $\psi \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо елементарні властивості опорної функції. Нехай $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ - компакти, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, M – матриця розмірності $n \times n$. Тоді $\forall \psi \in \mathbb{R}^n$ маємо

1. $c(\lambda A, \psi) = c(A, \lambda\psi)$;
2. $c(\lambda A, \psi) = \lambda c(A, \psi)$, де $\lambda > 0$ (додатня однорідність);
3. $c(A + B, \psi) = c(A, \psi) + c(B, \psi)$;
4. $c(MA, \psi) = c(A, M^*\psi)$;
5. $c(A, \psi_1 + \psi_2) \le c(A, \psi_1) + c(A, \psi_2)$, де $\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}^n$(напівадитивність).

1.4.1 Керованість з множини в множину

Розглянемо дискретну лінійну систему вигляду

$$x\,(t+1) = A\,(t)\,x\,(t) + C\,(t)\,u\,(t)\,,\ t \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}\,. \tag{1.20}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_t})^*$ – вектор стану розмірності n_t, $u = (u_1, \ldots, u_m)^*$– вектор керування розмірності m, $A\,(t)$ - $n_{t+1} \times n_t$ – матриця, $C\,(t)$– $n_{t+1} \times m$ - матриця, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$. Позначимо $x(t, x_0, u)$ розв'язок системи (1.20), $t = 0, 1, \ldots,\ N$ при керуванні $u\,(t) \in U(t), U(t) \in conv(\mathbb{R}^m)$, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$, $x(0) = x_0$, $\Theta(N) = A(N-1)A(N-2)\ldots A(0)$, $\Theta(N,t) = A(N-1)A(N-2)\ldots A(t)$, $t = 0, 1, \ldots,\ N$, $\Theta(N,N) = I$. Множина M_0 початкових станів та множина кінцевих станів M_N системи (1.20) є опуклими компактами в $\mathbb{R}^{n_0}$ та $\mathbb{R}^{n_N}$ відповідно. Множина досяжності системи (1.20) записується так

$$X(t, M_0) = \Theta(t)M_0 + \sum_{s=0}^{t-1} \Theta(t, s+1)C(s)U(s). \tag{1.21}$$

Виходячи з означення, опорна функція множини досяжності $X(t, M_0)$ має вигляд

$$c(X(t, M_0), \psi) = c(M_0, \Theta^*(t)\psi) + \sum_{s=0}^{t-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(t, s+1)\psi), \tag{1.22}$$

де $\psi \in \mathbb{R}^{n_t}$. Введемо таке означення

Означення 1.3. *Система (1.20) називаєтьcя керованою на інтервалі $0 \leq t \leq N$ з множини M_0 в множину M_N, якщо знайдуться точки $x_0 \in M_0$, $x_N \in M_N$ і допустиме керування $u(t) \in U(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ такі, що*

$$x(N, x_0, u(0)) = x_N.$$

Тут $x(N, x_0, u(0)) = x_N$ позначає розв'язок системи (1.20) за умови $x(0) = x_0$ в силу допустимого керування $u(\cdot)$, визначеного в точках $t = \overline{0, N-1}$.

Означення 1.4. *Функція*

$$\Phi(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + c(M_N, -\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi), \psi \in \mathbb{R}^{n_N}$$

називаєтьcя функцією керованості системи (1.20) з множини M_0 в множину M_N на інтервалі $0 \leq t \leq N$.

Має місце таке твердження

Теорема 1.6. *Для того, щоб система (1.20) була керованою на інтервалі $0 \leq t \leq N$ з множини M_0 в множину M_N необхідно і достатньо, щоб функція керованості $\Phi(\psi) \geq 0$ $\forall \psi \in S$, $S = \{x \in \mathbb{R}^{n_N}, \|x\| = 1\}$ – одинична сфера.*

Доведення. Необхідність. Нехай система (1.20) є керованою на інтервалі $0 \le t \le N$ з множини M_0 в множину M_N. Це означає, що

$$X(N, M_0) \cap M_N \neq \varnothing.$$

Останнє співвідношення можна записати у еквівалентній формі

$$0 \in X(N, M_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи властивості опорної функції, одержуємо

$$c(X(N, M_0), \psi) + c(M_N, -\psi) \ge 0$$

для всіх $\psi \in S$. Підставимо (1.22) в останню нерівність

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \ge 0, \psi \in S.$$

Отже, $\Phi(\psi) \ge 0$, $\psi \in S$.

Достатність обґрунтовується аналогічно до необхідності, але в зворотньому порядку.

Теорему доведено. □

1.4.2 Керованість зі всієї множини початкових станів

Розглянемо таке означення.

Означення 1.5. *Система (1.20) називається керованою на інтервалі $0 \le t \le N$ зі всієї множини M_0 в множину M_N, якщо для будь-якої точки $x_0 \in M_0$ знайдеться стан $x_N \in M_N$ та допустиме керування $u(t) \in U(t), t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ таке, що $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.*

Означення 1.6. *Функція*

$$W(\psi) = c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називається функцією керованості в системі (1.20) *зі всієї множини* M_0 *в множину* M_N *на інтервалі* $0 \leq t \leq N$, *де* $\psi \in \mathbb{R}^{n_N}$.

Має місце теорема.

Теорема 1.7. *Для того, щоб система* (1.20) *була керованою на інтервалі* $0 \leq t \leq N$ *зі всієї множини* M_0 *в множину* M_N *необхідно і достатньо, щоб* $W(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \in S$, $S = \{x \in \mathbb{R}^{n_N}, \|x\| = 1\}$ *– одинична сфера.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1.20) є керованою зі всієї множини M_0 в множину M_N при $0 \leq t \leq N$. Це означає, що для довільної точки $x_0 \in M_0$ виконується співвідношення

$$X(N, M_0) \cap M_N \neq \varnothing,$$

або еквівалентне до нього включення

$$0 \in X(N, M_0) + (-1)M_N.$$

Використовуючи (1.21) і (1.22), одержимо, що для всіх $x_0 \in M_0$

$$\langle x_0, \Theta^*(N)\psi \rangle + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) + c(M_N, -\psi) \geq 0, \psi \in S.$$

З останньої нерівності випливає

$$\min_{x_0 \in M_0} \langle x_0, \Theta^*(N)\psi \rangle + c(M_N, -\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi), \psi \in S. \tag{1.23}$$

Оскільки

$$\min_{x_0 \in M_0} \langle x_0, \Theta^*(N)\psi \rangle = -\max_{x_0 \in M_0} \langle x_0, -\Theta^*(N)\psi \rangle = -c(M_0, -\Theta^*(N)\psi),$$

то з (1.23) одержуємо

$$c(M_N, -\psi) - c(M_0, -\Theta^*(N)\psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi), \psi \in S.$$

Отже, $W(\psi) \geq 0, \psi \in S$.

Достатність теореми обгрунтовується тим, що при доведенні необхідності використовувались твердження, які є необхідними і достатніми. Теорему доведено. $\square$

1.4.3 Керованість з множини на всю множину

Розглянемо таке означення.

Означення 1.7. *Система (1.20) називаєтьcя керованою на інтервалі* $0 \leq t \leq N$ *з множини* M_0 *на всю множину* M_N*, якщо для будь-якого стану* $x_N \in M_N$ *існує точка* $x_0 \in M_0$ *і допустиме керування* $u(t) \in U(t), t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ *такі, що* $x(N, x_0, u(0)) = x_N$.

Означення 1.8. *Функція*

$$Z(\psi) = c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi)$$

називаєтьcя функцією керованості в системі (1.20) з множини M_0 *на всю множину* M_N *на інтервалі* $0 \leq t \leq N$*, де* $\psi \in \mathbb{R}^{n_N}$.

Має місце така теорема.

Теорема 1.8. *Для того, щоб система (1.20) була керованою на інтервалі* $0 \leq t \leq N$ *з множини* M_0 *на всю множину* M_N *необхідно і достатньо, щоб* $Z(\psi) \geq 0 \ \forall \psi \in S$, $S = \{x \in \mathbb{R}^{n_N}, \|x\| = 1\}$ *– одинична сфера.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що система (1.20) є керованою з множини M_0 на всю множину M_N. Тоді з означення випливає, що

$$X(N, x_0) \subset M_N.$$

Використовуючи властивості опорних функції, одержуємо

$$c(X(N, M_0), \psi) - c(M_N, \psi) \geq 0, \forall \psi \in S.$$

Підставимо в останню рівність формулу (1.22)

$$c(M_0, \Theta^*(N)\psi) - c(M_N, \psi) + \sum_{s=0}^{N-1} c(U(s), C^*(s)\Theta^*(N, s+1)\psi) \geq 0, \psi \in S.$$

Це означає,що $Z(\psi) \geq 0, \psi \in S$.

Достатність обгрунтовується аналогічно до необхідності з використанням властивостей опорної функції в зворотньому порядку. Теорему доведено. $\square$

Розділ 2

Алгоритми

2.1 Алгоритм задачі про переведення лінійної дискретної системи з точки в точку

Розглянемо дискретну лінійну систему вигляду (2.1)

$$x(t+1) = A(t)\,x(t) + C(t)\,u(t)\,,\ t \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}\,. \tag{2.1}$$

Тут $x(t) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_t})^*$ – вектор стану розмірності n_t, $u = (u_1, \ldots, u_m)^*$– вектор керування розмірності m, $A(t)$ - $n_{t+1} \times n_t$ – матриця, $C(t)$– $n_{t+1} \times m$ - матриця, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$. Позначимо $I_N = \{0,\ 1, \ldots, N\}$; $x(t, x_0, u)$ розв'язок системи (2.1), $t \in I_N$ при керуванні $u(t)$, $t \in I_{N-1}$. Знайдемо керування, яке переводить систему (2.1) зі стану $x(0) = x_0$ в стан $x(N) = x_N$, або, якщо матриця $\Phi(N)$ вироджена, то виникає задача про переведення системи (2.1) з початкового стану $x(0) = x_0$ в найближчу точку $x(N)$ до заданого кіцевого стану x_N. Отже, ми розв'язуємо задачу знаходження керування, яке мінімізує критерій якості

$$I(u) = \|x(N, x_0, u) - x_N\| \tag{2.2}$$

на розв'язках системи (2.1) з початковою умовою $x(0) = x_0$. Для розв'язання задачі необхідно виконати наступні кроки:

1. Маючи матриці $A(t)$ та $C(t)$, будуємо $W(t)$, $t = 0, 1, .., N-1$.

   (a) Обчислюємо $\Theta(N, t+1) = A_{N-1}A_{N-2}\ldots A_{t+1}$, $\Theta(t,t) = I$, де I –

одинична матриця, $t = 0, 1, .., N-1$.

(б) $W(t) = \Theta(N, t+1)C(t)$, $t = 0, 1, .., N-1$.

2. Знаходимо $\Phi(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W(k)W^*(k)$.

3. Керування $u(t) = W^*(t)\Phi^+(N)(x_N - \Theta(N)x_0) + W^*(t)Z_N p$, де $p \in \mathbb{R}^{n_N}$,$Z_N = Z\left(\Phi(N)\right) = I - \Phi^+(N)\Phi(N)$, x_0 та x_N відомі.

Опис алгоритму завершено.

Експеримент №1

Розглянемо задачу (2.1), проведемо експеримент при таких початкових даних.

$$n = 4,$$
$$m = 2,$$

де n - кількість моментів часу, m - розмірність вектора керування.

Вектори x_0 – початковий стан системи та x_N – кінцевий стан системи, заповнені випадково, мають вигляд:

$x_0{}^* =$ [0 2 8], $x_N{}^* =$ [5 4 9].

Знайдемо траєкторію системи для $n = 4$ моментів часу.

Знайдена траєкторія:

$x_0{}^* =$ [0 2 8];

$x_1{}^* =$ [-3.21848739 12.68067227];

$x_2{}^* =$ [-3.39495798 -1.08403361 20.10084034];

$x_3{}^* =$ [-7.42857143 19.85714286];

$x_4{}^* =$ [5. 4. 9.];

Позначимо x_n - вектор траєкторії в момент часу n, визначений експериментально.

Зайдемо похибку обчислень – відхилення кінцевого бажаного стану від кінцевого стану, що був визначений експериментально.

$\|x_N - x_n\| =$ 8.526845889523631e-13 - похибка.

Виведемо вектор керування системою, визначений експериментально.

Вектор керування:

$u_0{}^* =$ [-6.88235294 -5.89915966];

$u_1{}^* =$ [4.91596639 1.96638655];

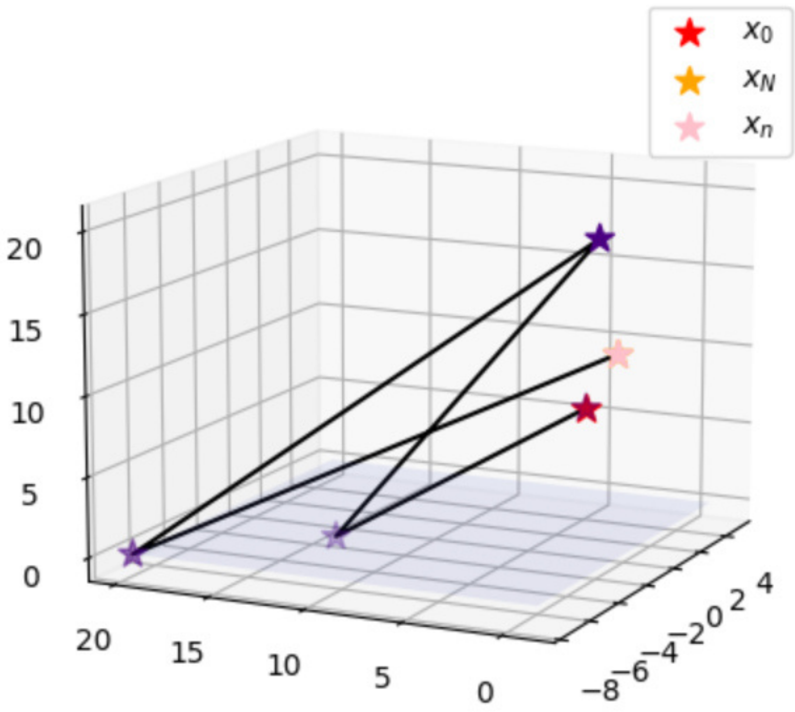

Рис. 2.1. Траєкторія

$$u_2{}^* = [\ 0.98319328\ \text{-}1.96638655];$$
$$u_3{}^* = [\ 6.\ \text{-}8.];$$

Траєкторія одержана в результаті обчислень зображена на рис. (2.1).

Експеримент №2

Розглянемо задачу (2.1), проведемо експеримент при таких початкових даних.

$$n = 7,$$
$$m = 3,$$

де n - кількість моментів часу, m - розмірність вектора керування.

Вектори x_0 – початковий стан системи та x_N – кінцевий стан системи, заповнені випадково, мають вигляд:

$x_0{}^* =$ [-4 7 3], $x_N{}^* =$ [4 7].

Знайдемо траєкторію системи для $n = 7$ моментів часу.

Знайдена траєкторія:

$x_0{}^* =$ [-4 7 3];

$x_1{}^* =$ [6.1118814 -9.08549622];

$x_2{}^* =$ [6.05307528 -0.05880612 -7.19174992];

Траєкторія одержана в результаті обчислень зображена на рис. (2.1). $x_3{}^* =$ [-2.12046421 2.17937346];

$x_4{}^* =$ [-4.21788062 -1.16515623 -5.09477633];

$x_5{}^* =$ [0.43345971 -3.20916665];

$x_6{}^* =$ [1.69855698 -5.3340893 -0.32184512];

$x_7{}^* =$ [4. 7.];

Позначимо x_n - вектор траєкторії в момент часу n, визначений експериментально.

Зайдемо похибку обчислень – відхилення кінцевого бажаного стану від кінцевого стану, що був визначений експериментально.

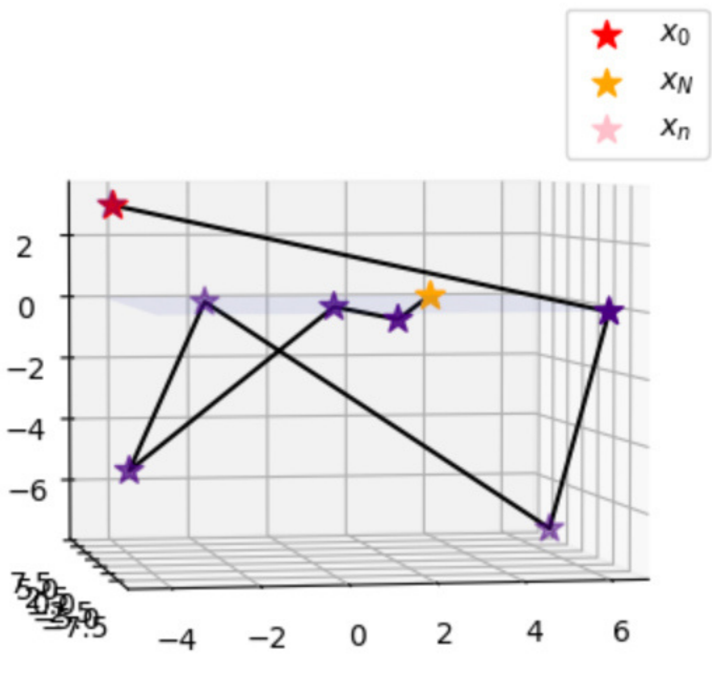

Рис. 2.2. Траєкторія

$\|x_N - x_n\| =$ 8.849131446642584e-12 - похибка.

Виведемо вектор керування системою, визначений експериментально.

Вектор керування:

$u_0{}^* =$ [-2.33974278 2.57476099 0.0783394];

$u_1{}^* =$ [2.45725189 2.41808219 -1.2873805];

$u_2{}^* =$ [1.67733763 -1.63816793 0.85825366];

$u_3{}^* =$ [0.42912683 -1.12134424 0.42912683];

$u_4{}^* =$ [1.46277421 0. -1.16051394];

$u_5{}^* =$ [-0.20477099 -0.52661611 0.52661611];

$u_6{}^* =$ [1.15072151 0.41933441 1.15072151];

Траекторія одержана в результаті обчислень зображена на рис. (2.2).

Експеримент №3

Розглянемо задачу (2.1), проведемо експеримент при таких початкових даних.

$$n = 5,$$
$$m = 2,$$

де n - кількість моментів часу, m - розмірність вектора керування.

Вектори x_0 – початковий стан системи та x_N – кінцевий стан системи, заповнені випадково, мають вигляд:

$x_0{}^* =$ [-10 -6 1], $x_N{}^* =$ [0 0].

Знайдемо траекторію системи для $n = 5$ моментів часу.

Знайдена траекторія:

$x_0{}^* =$ [-10 -6 1];

$x_1{}^* =$ [-5.20295203 1.78228782];

$x_2{}^* =$ [2.82287823 3.07749077 -3.32103321];

$x_3{}^* =$ [0.59778598 -1.77121771];

$x_4{}^* =$ [0.17712177 -0.12177122 -0.7195572];

$x_5{}^* =$ [7.72715225e-13 7.79820652e-13];

Позначимо x_n - вектор траекторії в момент часу n, визначений експериментально.

Зайдемо похибку обчислень – відхилення кінцевого бажаного стану від кінцевого стану, що був визначений експериментально.

$\|x_N - x_n\| =$ 1.0978201442960401e-12 - похибка.

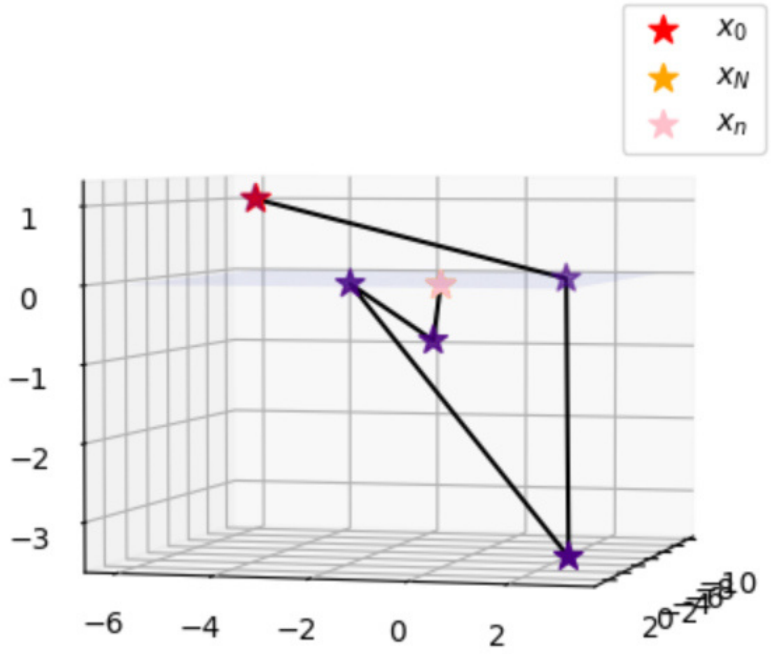

Рис. 2.3. Траекторія

Виведемо вектор керування системою, визначений експериментально.

Вектор керування:

$u_0{}^* =$ [0.79704797 -2.39114391];

$u_1{}^* =$ [0.59778598 0.69741697];

$u_2{}^* =$ [-0.49815498 0.19926199];

$u_3{}^* =$ [0.29889299 0.79704797];

$u_4{}^* =$ [-0.26568266 0.29889299];

Траекторія одержана в результаті обчислень зображена на рис. (2.3).

2.2 Алгоритм задачі про побудову множини досяжності лінійної дискретної системи

Розглянемо дискретну лінійну систему вигляду

$$x\,(t+1) = A\,(t)\,x\,(t) + C\,(t)\,u\,(t)\,,\ t \in \{0,\ 1, \ldots, N-1\}\,. \tag{2.3}$$

Тут $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_t})^*$ – вектор стану розмірності n_t, $u = (u_1, \ldots, u_m)^*$– вектор керування розмірності m, $A\,(t)$ - $n_{t+1} \times n_t$ – матриця, $C\,(t)$– $n_{t+1} \times m$ - матриця, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$. Позначимо $x(t, x_0, u)$ розв'язок системи (2.3), $t = 0, 1, \ldots,\ N$ при керуванні $u\,(t)$, $t = 0, 1, \ldots,\ N-1$, $x(0) = x_0$, $\Theta(N) = A(N-1)A(N-2)\ldots A(0)$, $\Theta(N,t) = A(N-1)A(N-2)\ldots A(t)$, $t = 0, 1, \ldots,\ N$, $\Theta(N,N) = I$.

Обмеження на функцію керування мають вигляд

$$\|u\|_{\ell_2}^2 = \sum_{t=0}^{N-1} \|u\,(t)\,\|^2 \le r^2,\ r > 0. \tag{2.4}$$

Нехай $x(0) = x_0$. Задача полягає у знаходженні множини досяжності $X(N, x_0)$ системи (2.3) в момент часу $t = N$ при обмеженнях на керування, які задаються (2.4). Множина досяжності складається з усіх точок $x(N, x_0, u)$, де функція u пробігає множину допустимих керувань, яка визначається нерівністю (2.4).

Алгоритм знаходження множини досяжності має вигляд:

1. Знаходимо $z(N) = \Theta(N)x_0$.
2. Обчислюємо $\Phi(N)$.
   (а) $W(k),\ W\,(k) = \Theta\,(N, k+1)\,C(k)$, де $\Theta\,(t,s) = A_{t-1}A_{t-2}\ldots A_s$, $k = 0, 1, ..., N-1$.
   (б) $\Phi\,(N) = \sum_{k=0}^{N-1} W\,(k)\,W^*(k)$.
3. Знаходимо Q, $\mathscr{E}\,(z(N), Q)$.
4. Будуємо еліпсоїд.

Опис алгоритму завершено.

Експеримент №1

Розглянемо задачу (2.2), проведемо експеримент при таких початкових даних:

$$n{=}4,$$
$$m{=}2,$$

де n - кількість моментів часу, m - розмірність вектора керування.

Вектори x_0 – початковий стан системи та x_N – кінцевий стан системи, заповнені випадково, мають вигляд:

$$x_0{}^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \end{pmatrix},\ x_N{}^* = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Уведемо r – невід'ємний параметр, $r = 4$.

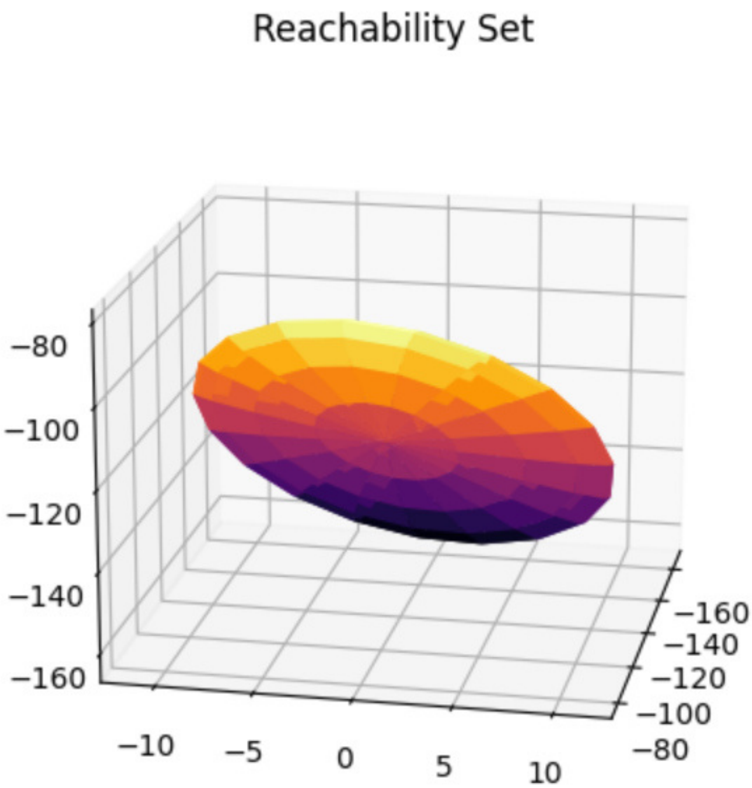

Рис. 2.4. Множина досяжності

Множина досяжності, одержана в результаті експерименту, зображена на рис. 2.4.

Матриця еліпсоїда, який описує обчислену множину досяжності, має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} 1984 & 96 & 1920 \\ 96 & 128 & 0 \\ 1920 & 0 & 1936 \end{pmatrix},$$

центр еліпсоїда $z_N^* = \begin{pmatrix} -122 & 0 & -122 \end{pmatrix}$.

Експеримент №2

Розглянемо задачу (2.2), проведемо експеримент при таких початкових даних:

$$n{=}5,$$
$$m{=}2,$$

де n - кількість моментів часу, m - розмірність вектора керування.

Вектори x_0 – початковий стан системи та x_N – кінцевий стан системи, заповнені випадково, мають вигляд:

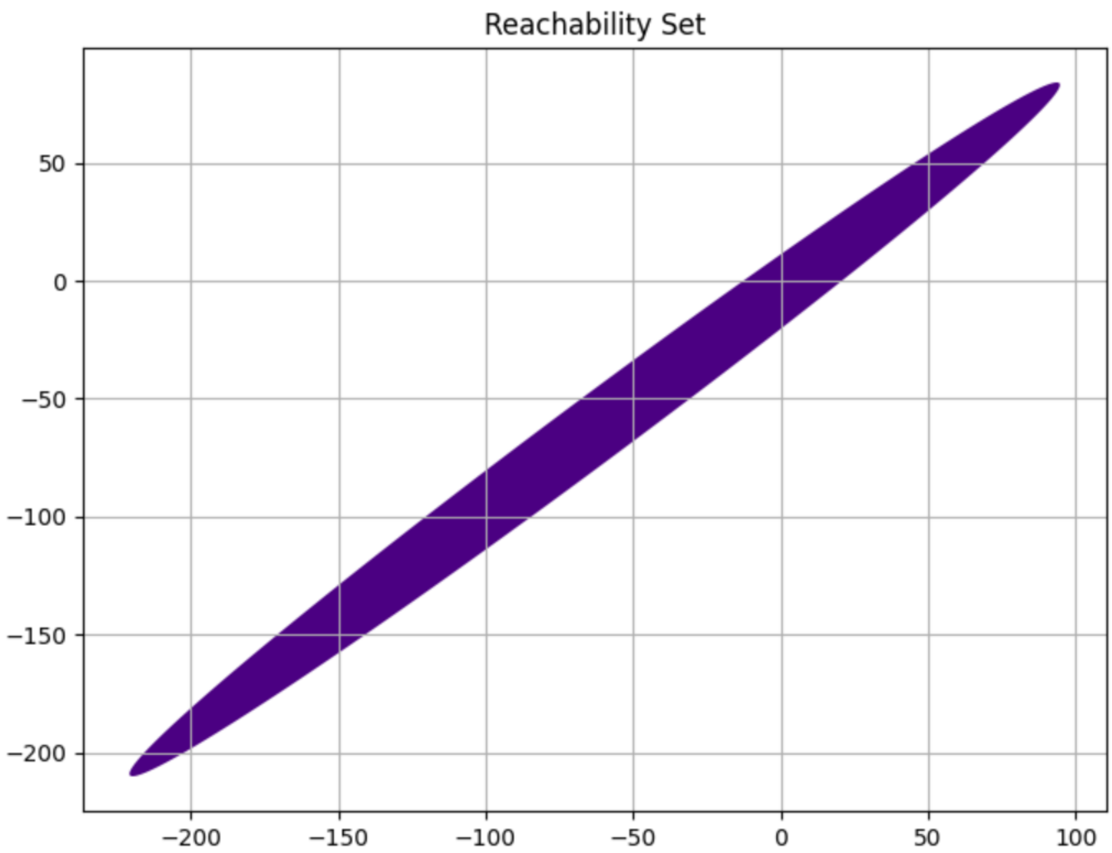

Рис. 2.5. Множина досяжності

$$x_0{}^* = \begin{pmatrix} -10 & -6 & 1 \end{pmatrix},\ x_N{}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Уведемо r – невід'ємний параметр, $r = 6$.

Множина досяжності, одержана в результаті експерименту, зображена на рис. 2.4.

Матриця еліпсоїда, який описує обчислену множину досяжності, має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} 24876 & 23040 \\ 23040 & 21636 \end{pmatrix},$$

центр еліпсоїда $z_N^* = \begin{pmatrix} -63 & -63 \end{pmatrix}$.

Експеримент №3

Розглянемо задачу (2.2), проведемо експеримент при таких початкових даних:

$$n{=}6,$$
$$m{=}5,$$

де n - кількість моментів часу, m - розмірність вектора керування.

Вектори x_0 – початковий стан системи та x_N – кінцевий стан системи, заповнені випадково, мають вигляд:

$$x_0{}^* = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \end{pmatrix},\ x_N{}^* = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

Уведемо r – невід'ємний параметр, $r = 3$.

Множина досяжності, одержана в результаті експерименту, зображена на рис. 2.4.

Матриця еліпсоїда, який описує обчислену множину досяжності, має вигляд

$$Q = \begin{pmatrix} 5.40000e+01 & 4.50000e+01 & 5.40000e+01 \\ 4.50000e+01 & 2.46915e+05 & 4.86720e+04 \\ 5.40000e+01 & 4.86720e+04 & 1.12590e+04 \end{pmatrix},$$

центр еліпсоїда $z_N^* = \begin{pmatrix} 0. & -471. & -95. \end{pmatrix}$.

Reachability Set

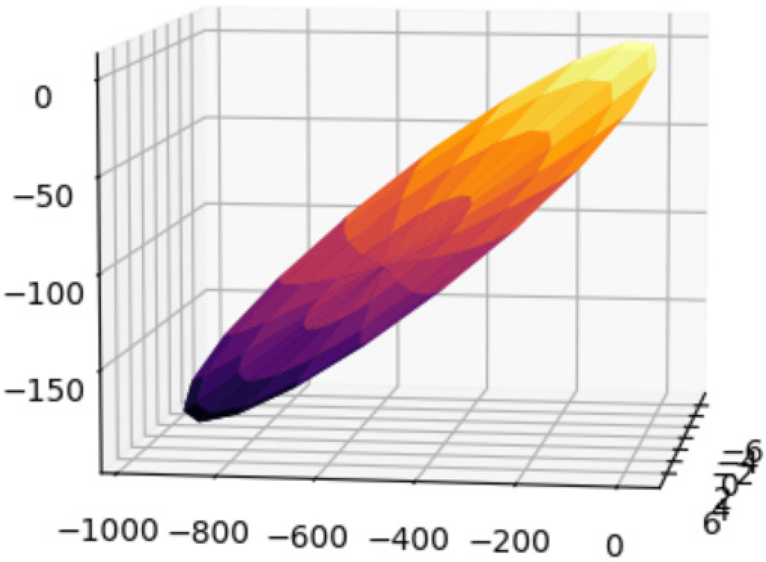

Рис. 2.6. Множина досяжності

2.3 Опис програми

Параметри комп'ютера, який було використано для виконаня обчислень

1. Процесор – Intel(R) Core(TM) i5-8265U CPU @ 1.60GHz 1.80 GHz

2. Тип системи – 64-розрядна операційна система, процесор x64

Для розв'язання задачі було написано клас, конструктор якого має вигляд:

де n та m задає користувач, x_0 та x_N заповнюються випадковим чином далі у програмі.

Для демонстрації роботи програми розмірність матриці $A(t)$ буде змінюватися 2×3, при $t = 2k$ та 3×2, при $t = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, $C(t)$ матиме розмірність $2 \times m$ та $3 \times m$ відповідно, де m - розмірність вектора керування.

```python
def __init__(self, n, m):
    self.n = n
    self.m = m
    self.x0 = 0
    self.xN = 0
    self.A = Solver.MatrixA(self)
    self.C = Solver.MatrixC(self)
```

Рис. 2.7. Конструктор класу

Функції $MatrixA$ та $MatrixC$ заповнюють матриці $A(t)$ та $C(t)$, $t = 0, 1, .., N-1$ випадковими числами.

$ThetaTS$, $ThetaT$, W, Φ - функції для знаходження $\Theta(t,s)$,$\Theta(t)$, $W(t)$ та $\Phi(t)$ відповідно.

$findU$ - знаходить вектор керування в мотенти часу t та будує траєкторію $x(t)$ при $t = 0, 1, .., N-1$.

Функція $ReachabilitySet$ будує множину досяжності у вигляді еліпса чи еліпсоїда за допомогою функцій $plot\_ellipse\_2D\_inv\_filled$ та $plot\_ellipse\_3D\_inv$ відповідно, які знаходяться в окремому файлі ellipse.py.

Висновки

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня бакалавра висвітлює задачі керування лінійними дискретними системами зі зміною розмірності вектора стану та побудови множини досяжності таких систем. У роботі запропоновано такі результати:

1. Проаналізовано керованість лінійної дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану.

2. Розглянуто задачу про переведення лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану в довільний кінцевий стан.

3. Обгрунтовано теорему про побудову множини досяжності лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану.

4. Побудувано критерії керованості з множини початкових станів на термінальну множину для лінійних дискретних систем зі зміною розмірності вектора стану.

5. Створено алгоритми та програму, яка розв'язує задачу про переведення в довільний кінцевий стан, побудову множини досяжності для лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану.

Список використаних джерел

[1] Albert, Arthur. Regression and the Moore-Penrose pseudoinverse. Academic Press, 1972. – 195 p.

[2] Matvienko, V.T., Control of trajectories set by linear dynamic systems with discrete argument, Journal of Automation and Information Sciences, 39 (11) (2007), 4–10.

[3] Sobchuk, V., Pichkur, V., Barabash, O., Laptiev, O., Kovalchuk, I., Zidan, A., Algorithm of control of functionally stable manufacturing processes of enterprises, 2020 2nd IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory, (2020), 206-210.

[4] Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. -М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. — 336 с.

[5] Пічкур В. В., Мазур Д. А., Собчук В. В.,Керованість лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану, Журнал обчислювальної та прикладної математики (2021), 173–178.

ВІДГУК

наукового керівника

на випускну кваліфікаційну роботу на здобуття ступеня бакалавра

„Керованість лінійної дискретної системи

зі зміною розмірності вектору стану"

студентки 4 курсу денної форми навчання

факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Мазур Дарини Анатоліївни

Випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра присвячена проблемі керованості лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектора стану. Системи зі зміною розмірності вектора стану зустрічаються в прикладних задачах, пов'язаних з керуванням літальних пристроїв, в задачах керування виробничими процесами. Тому тема роботи є актуальною.

Структура роботи: вступ, два розділи, висновки та список літератури. У першому розділі розглядається умови керованості та умови загальної керованості лінійної дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану. У другому розділі наведені алгоритми розв'язування задачі про переведення лінійної дискретної системи в заданий стан, алгоритми побудови множини досяжності лінійної дискретної системи, здійснюється аналіз проведених обчислювальних експериментів. У висновках наводяться основні результати роботи. Робота виконана самостійно, що підтверджується довідкою про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр. На джерела, які використовувались в роботі, в тексті роботи містяться посилання.

Вважаю, що випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра „Керованість лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектору стану" студентки 4 курсу Мазур Дарини Антоліївни виконана на належному рівні, задовольняє всім вимогам до випускних кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня бакалавра і заслуговує оцінки „відмінно" (100 балів).

Доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри моделювання складних систем
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка Володимир ПІЧКУР

РЕЦЕНЗІЯ

на випускну кваліфікаційну роботу
на здобуття ступеня бакалавра
„Керованість лінійної дискретної системи
зі зміною розмірності вектору стану"
студентки 4 курсу денної форми навчання
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Мазур Дарини Анатоліївни

Рецензована випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра присвячена аналізу лінійних дискретних систем зі зміною розмірності вектора стану. Дана задача є актуальною. Так, при моделюванні процесу виготовлення продукту на підприємстві показники, які контролюються на кожному етапі можуть бути різними. З точки зору математичного моделювання це означає, що вектор стану може змінювати свою розмірність.

Структура кваліфікаційної роботи: вступ, два розділи, висновки та список використаних джерел. У першому розділі аналізується керованість лінійної дискретної системи зі змінною розмірністю вектора стану. У другому розділі наведені алгоритми розв'язування задач про переведення лінійної дискретної системи в заданий кінцевий стан та метод побудови множини досяжності лінійної дискретної системи. Проведено обчислювальні експеременти і аналіз результатів обчислень. У висновках наводяться основні результати роботи.

Виходячи з одержаних в кваліфікаційній роботі результатів, робимо висновок, що авторка роботи володіє сучасним математичним апаратом теорії керування, вміє застосовувати методи комп'ютерного моделювання при проведенні обчислювального експерименту. За результатами кваліфікаційної роботи опублікована стаття у фаховому виданні. Вважаю, що випускна кваліфікаційна робота на здобуття ступеня бакалавра студентки 4 курсу Мазур Дарини Анатоліївни на тему „Керованість лінійної дискретної системи зі зміною розмірності вектору стану" виконана на належному рівні, задовольняє всім вимогам до випускних кваліфікаційних робіт на здобуття ступеня бакалавра і заслуговує оцінки „відмінно".

Професор кафедри диференціальних
та інтегральних рівнянь
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка,
доктор технічних наук — Валентин СОБЧУК

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр

UNICHECK

Ім'я користувача:
Шатирко Андрій ФКомпНаук
ID перевірки:
1011546478
Дата перевірки:
11.06.2022 15:20:27 EEST
Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library
Дата звіту:
11.06.2022 17:27:27 EEST
ID користувача:
100007163

Назва документа: **Mazur_Pichkur Prepare**

Кількість сторінок: **35** Кількість слів: **6084** Кількість символів: **34767** Розмір файлу: **869.79 KB** ID файлу: **1011418592**

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

3.91%

Схожість

Найбільша схожість: **2.93%** з Інтернет-джерелом (**https://oaji.net/articles/2021/2814-1625306358.pdf**)

.... Сторінка 37

.... Сторінка 37

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%

Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи	99

Експертна оцінка роботи науковим керівником : Кваліфікаційна робота виконана самостійно, на використані джерела в тексті зроблено посилання.

Науковий керівник: ____В. В. Пічкур_____
(підпис) (ПІБ)

Оператор: __А.В.Шатирко__
(підпис) (ПІБ)