

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня магістра
за спеціальністю 113 “Прикладна математика”
на тему:

ПОБУДОВА МНОЖИНИ ДОСЯЖНОСТІ У ФОРМІ ЕЛІПСОЇДА

студентки 2 курсу
Мусіч Анни Максимівни

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Пічкур В. В.

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем
та рекомендована до захисту, протокол №10 від 17 травня 2021 р.

Завідувач кафедри МСС
канд. фіз.-мат. наук, доцент

Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ - 2021

Зміст

Вступ	3
1 Побудова множини досяжності лінійної системи керування при функціональних обмеженнях на керування	4
1.1 Грамміан і множина досяжності	4
1.2 Функція Белмана	6
1.3 Множина досяжності з використанням функції Белмана	7
2 Еліпсоїдальна оцінка множини досяжності лінійної системи керування при геометричних обмеженнях на керування	10
2.1 Зовнішня оцінка множини досяжності	11
2.2 Внутрішня оцінка множини досяжності	13
2.3 Диференціальні рівняння еволюції еліпсоїдів	16
3 Еліпсоїдальна оцінка множини досяжності нелінійної динамічної системи керування	22
3.1 Рівняння інтегральної лійки	22
3.2 Оцінки множини досяжності	25
4 Алгоритми побудови множини досяжності	28
4.1 Алгоритм з використанням грамміану керуваності	29
4.2 Алгоритм з використанням функції Беллмана	29
4.3 Алгоритми зовнішньої та внутрішньої оцінки множини досяжності лінійної системи керування	30
4.4 Алгоритми зовнішньої та внутрішньої оцінки множини досяжності нелінійної динамічної системи керування	31
4.5 Алгоритм проектування еліпсоїда на гіперпроцину	33

4.6	Обчислювальний експеримент	34
Висновки		47
Література		48

Вступ

В роботі розглядаються алгоритми побудови множини досяжності для лінійних систем керування при функціональних і геометричних обмеженнях. Також описується побудова еліпсоїдальної апроксимації множини досяжності для нелінійних динамічних систем керування. Множина досяжності є одним з фундаментальних понять теорії керування [2,4,5]. Вона описує здатність системи досягти певного стану з усіх можливих початкових умов, за заданий час і при всіх можливих допустимих керуваннях. Зазначимо, що форма і структура множини досяжності в більшості випадків виявляється досить складною. У цих випадках представляють інтерес їх наближення областями певної канонічної форми. В роботі представлені еліпсоїдальні оцінки множин досяжності, для цього використовуються результати теорії еліпсоїдального оцінювання і теорії еволюційних рівнянь багатозначних станів динамічних систем в умовах невизначеності [7].

1 Побудова множини досяжності лінійної системи керування при функціональних обмеженнях на керування

1.1 Грамміан і множина досяжності

Нехай R^n позначає n -вимірний евклідовий простір. Символ (x, y) позначає скалярний добуток векторів $x, y \in R^n$, символ $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ - евклідова норма вектора x , $*$ - знак транспонування.

Розглянемо систему керування вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (1.1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^*$ - вектор фазових координат, $A(t), B(t)$ інтегровані матриці розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^*$ - інтегроване з квадратом керування.

Означення 1.1. Грамміаном керованості системи (1.1) називається матриця вигляду [1]

$$W(T, t_0) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T, s) ds,$$

де $\Theta(t, s)$ - фундаментальна матриця системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, нормована за моментом s .

З означення випливає така теорема [1].

Теорема 1.1. Для того, щоб система (1) була цілком керованою на $[t_0, T]$, необхідно і достатньо, щоб грамміан керованості був невиродженим.

Грамміан керованості називається також матрицею керованості першого роду. З означення випливає, що $W(T, t_0) = W^*(T, t_0)$, тобто грамміан керованості є симетричним. Крім того, матриця $W(T, t_0)$ невід'ємно визначена. Дійсно, для довільного $z \in R^n$ маємо

$$(W(T, t_0)z, z) = \int_{t_0}^T \|Z^*(s)z\|^2 ds \geq 0.$$

Знайдемо диференціальне рівняння для знаходження грамміана керованості. Для цього запишемо матрицю грамміана

$$W(T, t_0) = \int_{t_0}^T \Theta(T, s)B(s)B^*(s)\Theta^*(T, s)ds$$

і продиференціюємо по t . Одержимо [1]

$$\frac{dW(T, t_0)}{dt} = A(t)W(T, t_0) + W(T, t_0)A^*(t) + B(t)B^*(t), \quad (1.2)$$

де $W(t_0, t_0) = 0$, що випливає з означення грамміана керованості.

Розглянемо, як будувати множину досяжності за допомогою грамміана керованості.

Означення 1.2. Множиною досяжності $\chi(t, M_0)$ системи (1.1) з множини M_0 в момент часу $t \in [t_0, T]$ назвемо множину всіх точок $z \in R^n$ фазового простору, в які можна перевести систему (1.1) на відрізку часу $[t_0, t]$ із усіх можливих початкових умов $x_0 \in M_0$ і при всіх можливих допустимих керуваннях $u(\cdot)$ [4].

Має місце така теорема [5].

Теорема 1.2. Множина досяжності $\chi(t, M_0)$ має вигляд

$$\chi(t, M_0) = \Theta(t, t_0)M_0 + \int_{t_0}^t \Theta(t, s)B(s)U(s)ds.$$

Розглянемо обмеження

$$\|u\|_2^2 = \int_0^{\infty} u^*(t)u(t)dt \leq 1. \quad (1.3)$$

Множина $\chi(T) = \{x(T) : x(t) - \text{розв'язок (1.1), } \|u\|_2^2 \leq 1\}$ називається множиною досяжності в момент $T \geq 0$, а їх об'єднання для усіх $T \geq 0$: $\chi = \bigcup_{T \geq 0} \chi(T)$ – просто множина досяжності.

Теорема 1.3. *Нехай пара (A, B) з системи (1.1) керована, A – стійка, тоді χ – еліпсоїд*

$$\chi(t) = \{x : x^*W^{-1}(t)x \leq 1\},$$

де матриця $W \geq 0$ – грамміан керованості системи (1.1) [3].

З диференціальної системи рівнянь для грамміана (1.2) знайдемо грамміан керованості й множину досяжності системи (1.1).

1.2 Функція Белмана

Нехай $X(t) \subseteq R^n$ – фазові обмеження, $U(t) \subseteq R^m$ – обмеження на керування, при цьому множини $X(t), U(t)$ є замкненими, $t \in [t_0, t]$ [2]. Задача оптимального керування полягає в знаходженні нижньої точної грані функціоналу

$$I(u, x) = \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t)dt + \Phi(x(t_0)) \quad (1.4)$$

за умов

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t), \quad (1.5)$$

$$x(t) \in X(t), u(t) \in U(t), t \in [t_0, t]. \quad (1.6)$$

Означення 1.3. Функція

$$B(z, x) = \inf_u \left\{ \int_{t_0}^s f_0(x(t), u(t), t) + \Phi(x(t_0)) \right\},$$

що визначена на розв'язках системи (1.5) при початковій умові $x(s) = z$, називається функцією Белмана задачі (1.4)–(1.6).

За означенням функції Белмана $B(x_0, t_0)$ дорівнює оптимальному значенню функціоналу (1.4) для задачі (1.4)–(1.6) з фіксованим лівим кінцем $x(t_0) = x_0$.

Запишемо диференціальне рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана[2]:

$$\frac{\partial B(z, s)}{\partial s} + \sup_{u \in U(s)} \{(\text{grad}_z B(z, s), f(z, u, s)) - f_0(z, u, s)\} = 0.$$

$$B(z, t_0) = \Phi(z).$$

1.3 Множина досяжності з використанням функції Белмана

Розглянемо систему керування (1.5), за обмежень

$$I(u, x) \leq r^2.$$

Крім того, вважаємо, що функції $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ є невід'ємними, $r > 0$ [3].

Означення 1.4. Множиною досяжності такої системи називають сукупність точок $z \in R^n$, для яких існує точка $x_0 \in R^n$, допустиме керування $u(\cdot)$ і відповідний розв'язок $x(\cdot) = x(\cdot, u, x_0, t_0)$ системи такі, що виконуються обмеження і точка

$$z = x(t, u, x_0, t_0).$$

Припустимо, що має розв'язок задача оптимального керування

$$I(u, x) \rightarrow \inf.$$

Тоді має місце таке твердження [2].

Теорема 1.4. *Множина досяжності*

$$\chi(s) = \{z \in R^n : B(z, s) \leq r^2\},$$

де $B(z, s)$ – функція Белмана задачі (1.4).

За теоремою, множина досяжності має форму еліпсоїда. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + C(t)u(t), \quad (1.7)$$

Розглянемо функціонал

$$I(u, x) = \int_{t_0}^T \{(N(t)x(t), x(t)) + (M(t)u(t), u(t))\} dt + (P_0x_0(t), x_0(t)). \quad (1.8)$$

Тут $M(t)$ є додатновизначеною симетричною матрицею, $N(t), P_0$ є невід'ємновизначеними симетричними матрицями, причому $N(t), P_0$ – матриці розмірності $n \times n$, $M(t)$ – матриця розмірності $m \times m$ і матриці $N(t), M(t)$ є неперервними за $t \in [t_0, T]$. Запишемо рівняння Гамільтона-Якобі-Белмана у диференціальній формі

$$\frac{\partial B(z, s)}{\partial s} + \max_u \{(grad_z B(z, s), A(s)z + C(s)u) - \{(N(s)z, z), +(M(s)u, u)\}\} = 0,$$

$$B(z, t_0) = (P_0z, z).$$

У такій формі функція Белмана має вигляд $B(z, s) = (P(s)z, z)$, де $P(s) - n \times n$ - неперервно диференційована матриця, яка задовольняє матричне диференціальне рівняння Ріккати

$$\frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = N(s),$$

$$P(t_0) = P_0.$$

Тоді множина досяжності виглядатиме так:

$$\chi(s) = \{z \in R^n : (P(s)z, z) \leq r^2\}.$$

2 Еліпсоїдальна оцінка множини досяжності лінійної системи керування при геометричних обмеженнях на керування

Деякі підходи дозволяють будувати двусторонні апроксимації множин досяжності за допомогою багатогранників. При цьому число граней N зовнішнього апроксимуючого багатогранника, рівне числу вершин внутрішнього апроксимуючого багатогранника, визначається числом значень c_1, \dots, c_N , що надаються вектору c , тобто числом задач оптимального керування, які розв'язуються при цьому підході. Очевидно, що при достатньо великих розмірностях n фазового простору число N для задовільної апроксимації має бути досить великим. Тому даний підхід при великих n потребує величезного об'єму обчислень. До того ж використання багатогранників з великим числом граней або вершин N як апроксимації множини досяжності може виявитись незручним для подальшого використання. Такі апроксимації, які залежать від великої кількості параметрів, надто громіздкі.

Альтернативою для цих підходів є апроксимація множин досяжності класом областей деякої фіксованої канонічної форми, яка залежить від визначеного обмеженого числа параметрів [4].

Нерівність, яка задає еліпсоїд в n -мірному евклідовому просторі, можна записати у вигляді

$$(Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1$$

де a – n -мірний вектор центра еліпсоїда, Q – симетрична позитивно-визначена матриця розмірності $n \times n$. Такий еліпсоїд позначимо через $E(a, Q)$. Таким чином,

$$E(a, Q) = \{x : (Q^{-1}(x - a), (x - a)) \leq 1\}. \quad (2.1)$$

Розглянутий клас еліпсоїдів характеризується числом параметрів, рівним $n + n(n + 1)/2$. З них $n(n + 1)/2$ параметрів є компонентами вектора a . За рахунок повороту системи координат її осі можна поєднати з головними осями еліпсоїда. Тоді матриця Q буде діагональна.

2.1 Зовнішня оцінка множини досяжності

Розглянемо в n -мірному евклідовому просторі R^n два еліпсоїда, які задаються відповідно з (2.1) [4]:

$$E(a_1, Q_1) : \{x : (Q_1^{-1}(x - a_1), (x - a_1)) \leq 1\}, \quad (2.2)$$

$$E(a_2, Q_2) : \{x : (Q_2^{-1}(x - a_2), (x - a_2)) \leq 1\}.$$

де a_i – n -мірні вектори центрів еліпсоїдів, Q_i – симетричні, додатно визначені матриці розмірності $n \times n, i = 1, 2$.

Сумою S еліпсоїдів (2.2) називається множина усіх точок x таких, що $x = x_1 + x_2$, де x_1, x_2 належать еліпсоїдам (2.2):

$$x = x_1 + x_2 \in S = E(a_1, Q_1) + E(a_2, Q_2), \quad (2.3)$$

$$x_1 \in E(a_1, Q_1), x_2 \in E(a_2, Q_2).$$

Побудуємо розв'язок задачі (2.2) в загальному випадку. Вектори x, y зв'язані афінним перетворенням

$$x = a_1 + a_2 + A^{-1}y, \quad (2.4)$$

яке відображає суму S_y еліпсоїдів

$$y = y_1 + y_2 \in S_y = E(0, D_1) + E(0, D_2),$$

в суму еліпсоїдів (2.3). Так як афінне перетворення зберігає співвідношення об'ємів будь-яких двох областей, то знайдений вище еліпсоїд $E(0, D^+)$ з цим перетворенням переходить в шуканий еліпсоїд $E(a^+, Q^+)$ найменшого об'єму, що містить S . Використовуючи формулу $AE(a, Q) + b = E(Aa + b, AQA^*)$ перетворення еліпсоїдів при афінному відображенні та співвідношення (2.4), отримаємо параметри шуканого еліпсоїда $E(a^+, Q^+)$ у вигляді

$$a^+ = a_1 + a_2, Q^+ = A^{-1}D^+(A^*)^{-1}. \quad (2.5)$$

Підставимо в (2.5) рівність

$$D^+ = (p^{-1} + 1)D_1 + (p + 1)D_2$$

і скористуємося співвідношеннями

$$AQ_iA^*, \quad i = 1, 2.$$

В кінці будемо мати

$$a^+ = a_1 + a_2, Q^+ = (p^{-1} + 1)Q_1 + (p + 1)Q_2. \quad (2.6)$$

Звернемо увагу, що параметри μ_j , визначені в (2.6), рівні $\mu_j = \lambda_j$ згідно $D_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), D_2 = I$, де λ_j – корені рівняння $\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0, j = 1, \dots, n$. Тому алгебраїчне рівняння

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{p + \mu_j} = \frac{n}{p(p + 1)}.$$

перепишеться у вигляді

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{p + \lambda_j} = \frac{n}{p(p + 1)}. \quad (2.7)$$

Отримані результати підсумуємо у вигляді теореми, що дає розв'язок задачі (2.2).

Теорема 2.1. [4] *Параметри еліпсоїда $E(a^+, Q^+)$ найменшого об'єму, що містить суму S еліпсоїдів (2.3), один з яких може бути виродженим (матриця Q_1 – невід'ємновизначена, Q_2 – додатньовизначена), визначається формулами $L = \prod_{j=1}^n d_j^+ + \mu \sum_{j=1}^n d_j^+ (z_j^0)^2$, в яких $p > 0$ є єдиним додатнім коренем алгебраїчного рівняння (2.7), а числа $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n$, є коренями характеристичного рівняння $\det(Q_1 - \lambda Q_2) = 0$, до того ж кожен корінь рахується стільки разів, яка його кратність.*

2.2 Внутрішня оцінка множини досяжності

Для розв'язання початкової задачі (2.3) виконаємо афінне перетворення еліпсоїда $E(0, D^-)$. Аналогічно (2.5) отримаємо [4]

$$a^- = a_1 + a_2, Q^- = A^- D^- (A^*)^{-1}. \quad (2.8)$$

Запишемо формулу (2.8) для Q^- у розгорнутому вигляді, враховуючи рівності $D^- = (D_1^{\frac{1}{2}} + D_2^{\frac{1}{2}})^2, AQ_i A^* = D_i$:

$$Q^- = A^{-1} [AQ_1 A^*]^{\frac{1}{2}} + (AQ_2 A^*)^{\frac{1}{2}}]^2 (A^*)^{-1}. \quad (2.9)$$

Співвідношення (2.9) містить неособливу матрицю перетворень A , яка задовільняє умови $AQ_i A^* = D_i$, а в іншому довільна. В той же час шуканий розв'язок поставленої задачі єдиний і не має залежати від довільного вибору A . Спростимо формулу (2.9). Для уього спочатку розглянемо рівність (2.9), в якій A – довільна неособлива матриця.

Нагадаємо, що матриці Q_1, Q_2 симетричні, до того ж Q_1 – невід'ємновизначена, а Q_2 – додатньовизначена матриця. Отже, такі ж властивості мають, відповідно, й матриці $AQ_1 A^*, AQ_2 A^*$, а також квадратні корені з цих матриць.

Для будь-якої функції від матриць $f(Z)$ справедлива тотожність:

$$f(CZC^{-1}) = Cf(Z)C^{-1}, \quad (2.10)$$

в якій C – довільна неособлива матриця.

Замінімо в (2.9) $A = UB$, де U – ортогональна матриця ($U^* = U^{-1}$), й перетворимо рівність (2.9), використовуючи тотожність (2.10):

$$\begin{aligned} Q^- &= B^{-1}U^{-1}[U(BQ_1B^*)U^{-1}]^{\frac{1}{2}} + [U(BQ_2B^*)U^{-1}]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times U(B^*)^{-1} = B^{-1}U^{-1}U[(BQ_1B^*)^{\frac{1}{2}} + (BQ_2B^*)^{\frac{1}{2}}]U^{-1}U(B^*)^{-1} = \\ &= B^{-1}[(BQ_1B^*)^{\frac{1}{2}} + (BQ_2B^*)^{\frac{1}{2}}]^2(B^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Порівнюючи отримане співвідношення з (2.9), бачимо, що вираз (2.9) інваріантний відносно заміни A на UA , де U – ортогональна матриця.

Будемо шукати матрицю A , яка задовільняє умови $AQ_iA^* = D_i$, $i = 1, 2$, у вигляді $A = UQ_2^{-\frac{1}{2}}$. Незавжно побачити, що обидві умови $AQ_iA^* = D_i$, $i = 1, 2$ виконуються, якщо U – ортогональна матриця і, крім того,

$$U(Q_2^{-\frac{1}{2}}Q_1Q_2^{-\frac{1}{2}})U^* = D_2.$$

Остання умова означає, що ортогональне перетворення з матрицею U має призводити квадратичну форму з матрицею

$$Q_2^{-\frac{1}{2}}Q_1Q_2^{-\frac{1}{2}}$$

до канонічного вигляду. Такий вибір матриці U завжди можливий, тому матриця $A = UQ_2^{-\frac{1}{2}}$, яка задовільняє умови $AQ_iA^* = D_i$, $i = 1, 2$, існує, і в (2.9) можна покласти $A = UQ_2^{-\frac{1}{2}}$.

Але в силу доведеної вище інваріантності, в виразі (2.9) можна побачити $A = UQ_2^{-\frac{1}{2}}$ на $A = Q_2^{-\frac{1}{2}}$, тобто

$$\begin{aligned} Q^- &= Q_2^{\frac{1}{2}}[I + (Q_2 - \frac{1}{2}Q_1Q_2 - \frac{1}{2})\frac{1}{2}]^2Q_2\frac{1}{2} = \\ &= Q_2^{\frac{1}{2}}[I + Q_2 - \frac{1}{2}Q_1Q_2 - \frac{1}{2} + 2(Q_2 - \frac{1}{2}Q_1Q_2 - \frac{1}{2})\frac{1}{2}]Q_2\frac{1}{2} = \\ &= Q_1 + Q_2 + 2Q_2^{\frac{1}{2}}(Q_2 - \frac{1}{2}Q_1Q_2 - \frac{1}{2})\frac{1}{2}Q_2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Якщо обидві матриці Q_1, Q_2 додатньовизначені, то в силу їх рівноправності можна в останній формулі поміняти їх місцями. Остаточо, відношенням (2.8) можна надати вигляд

$$a^- = a_1 + a_2,$$

$$\begin{aligned} Q^- &= Q_1 + Q_2 + 2Q_2^{\frac{1}{2}}\left(Q_2 - \frac{1}{2}Q_1Q_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}Q_2\frac{1}{2} = \\ &= Q_1 + Q_2 + 2Q_1^{\frac{1}{2}}\left(Q_1 - \frac{1}{2}Q_2Q_1 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}Q_1\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким чином, задана наступна теорема:

Теорема 2.2. [4] *Параметри еліпсоїда $E(a^-, Q^-)$ найбільшого об'єму, що міститься в сумі S еліпсоїдів (2.3), один з яких може бути виродженим (матриця Q_1 невід'ємновизначена, Q_2 – додатньовизначена), визначаються формулами (2.11) або (2.9), де матриця A задовільняє умови $AQ_iA^* = D_i, i = 1, 2$. Обидва вирази (2.11) для Q^- еквівалентні, якщо обидві матриці Q_1, Q_2 додатньовизначені. Якщо матриця Q_1 невід'ємновизначена, то потрібно використовувати перший вираз (2.11).*

Для будь-яких двох еліпсоїдів $E(a_1, Q_1), E(a_2, Q_2)$ визначені еліпсоїди $E(a^+, Q^+)$ та $E(a^-, Q^-)$ такі, що виконуються включення:

$$E(a^-, Q^-) \subset E(a_1, Q_1) + E(a_2, Q_2) \subset E(a^+, Q^+).$$

При цьому еліпсоїд $E(a^-, Q^-)$ має найбільший, а $E(a^+, Q^+)$ – найменший можливий об'єм, при яких можливі включення.

Таким чином, побудовані оптимальні у сенсі об'єма двусторонні (зовнішня і внутрішня) еліпсоїдальні апроксимації суми двох еліпсоїдів. Можна сказати, що ці апроксимуючі еліпсоїди $E(a^+, Q^+), E(a^-, Q^-)$ реалізують, відповідно, зовнішню та внутрішню оптимальні операції додавання в класі еліпсоїдів.

В силу формул центри обох еліпсоїдів співпадають: $a^+ = a^- = a_1 + a_2$.

З теореми для побудови еліпсоїда $E(a^+, Q^+)$ необхідно розв'язати два алгебраїчних рівняння. Спочатку потрібно значити усі корені $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ рівняння n -ої степені, а потім знайти єдиний позитивний корінь $p > 0$ рівняння $(n + 1)$ -ої степені.

З теореми випливає, що для побудови еліпсоїда $E(a^-, Q^-)$ потрібно витягти квадратний корінь з симетричних невід'ємновизначених матриць, виконати операції зворотження та множення матриць.

2.3 Диференціальні рівняння еволюції еліпсоїдів

Перейдемо до побудови еліпсоїдальних апроксимацій множин досяжності для керованих систем з неперервним часом. Розглянемо лінійну керуючу систему, описану векторним диференціальним рівнянням та обмеженням [4]

$$\dot{x} = C(t)x + K(t)u + f(t), \quad (2.12)$$

$$u \in E(0, G(t)). \quad (2.13)$$

Тут $x \in R^n$ – вектор фазових координат; $u \in R^m$ – вектор керуючих функцій; f – задана n -мірна вектор-функція часу; $C(t), K(t), G(t)$ – задані матричні функції часу, що мають розмірності $n \times n, n \times m, m \times m$ відповідно. Матриця $G(t)$ є симетричною та невід'ємновизначеною.

Початкові умови для системи (2.12), (2.13) задамо у вигляді

$$x(s) \in E(a_0, Q_0). \quad (2.14)$$

Тут a_0 – заданий n -мірний вектор, Q_0 – задана симетрична додатньо-визначена матриця розмірності $n \times n$.

Множина досяжності системи (2.12), (2.13) при початковій множині

(2.14) позначимо через

$$D(t, s, M) = D(t, s, E(a_0, Q_0)). \quad (2.15)$$

Поставимо задачу побудувати двусторонні оцінки множини досяжності (2.15) за допомогою еліпсоїдів, що мають властивості субдосяжності та супердосяжності. Іншими словами, для множини (2.15) необхідно побудувати еліпсоїдальні оцінки вигляду $D^-(t) \subset D(t, s, M) \subset D^+(t)$, де $D^-(t), D^+(t)$ – еліпсоїди, тобто

$$E(a^-(t), Q(t)) \subset D(t, s, E(a_0, Q_0)) \subset E(a^+(t), Q^+(t)). \quad (2.16)$$

Тут $a^-(t), a^+(t)$ – шукані n -мірні вектор-функції, $Q^-(t), Q^+(t)$ – шукані симетричні додатнєовизначені матриці розмірності $n \times n$.

Введемо n -мірний вектор $v(t)$ рівністю

$$v = K(t)u + f(t). \quad (2.17)$$

Так як вектор u належить еліпсоїду (2.13), то, відповідно до співвідношень для афінного перетворення еліпсоїдів, новий керуючий вектор v з (2.17) належить наступному еліпсоїду:

$$v \in E(f(t), B(t)), B(t) = KGK^*. \quad (2.18)$$

Тут $B(t)$ – симетрична невід’ємновизначена матриця розмірності $n \times n$. З врахуванням позначення (2.17) і рівності (2.18), система (2.12), (2.13) перепишеться в еквівалентному вигляді

$$\dot{x} = C(t)x + v, v \in E(f(t), B(t)). \quad (2.19)$$

Наведемо простий висновок рівнянь еволюції апроксимуючих еліпсоїдів. Задамо достатньо малий приріст часу $h > 0$ і запишемо замість диференційного рівняння (2.19) його кінцево-різностну апроксимацію, опустивши члени вищого порядку відносно h :

$$x(t+h) = x(t) + hC(t)x(t) + hv(t).$$

Останнє рівняння перепишемо у вигляді

$$x(t+h) = x_1 + x_2, x_1 = hv(t), \quad (2.20)$$

$$x_2 = [I + hC(t)]x(t).$$

Згідно до включення (2.19) і формули для афінного перетворення еліпсоїдів маємо для вектора x_1 з (2.20)

$$x_1 \in E(f, h^2B). \quad (2.21)$$

Вектор $x(t)$ приймає значення з множини досяжності (2.15). Допустимо, що в деякий момент часу $t \geq s$ виконуються включення (2.16). Тоді множина D' , якій належить вектор x_2 з (2.20), задовольняє включенням:

$$E((I + hC)a^-, (I + hC)Q^-(I + hC^*)) \subset D' \subset E((I + hC)a^+, (I + hC)Q^+(I + hC^*)) \quad (2.22)$$

Тут знову використано співвідношення афінне перетворення для еліпсоїдів. Аргумент t в формулах (2.21), (2.22) опущений.

Вектор $x(t+h)$ з (2.20) представлений у вигляді суми двох векторів, з котрих перший належить еліпсоїду (2.21), а другий - множині D' , для якої є двусторонні еліпсоїдальні оцінки (2.22). Отже, для множини досяжності $D(t+h, s, E(a_0, Q_0))$, якій належить вектор $x(t+h)$, можна отримати двусторонні еліпсоїдальні оцінки наступним чином. Для внутрішньої оцінки потрібно використовувати внутрішню еліпсоїдальну апроксимацію суми двох еліпсоїдів: еліпсоїда (2.21) та еліпсоїда лівої частини співвідношення (2.22), а для зовнішньої оцінки – зовнішню еліпсоїдальну апроксимацію суми еліпсоїда (2.21) та еліпсоїда в правій частині (2.22).

Відповідні формули для суми еліпсоїдів отримані в підрозділах про зовнішню та внутрішню оцінку. При цьому, оскільки перший доданок

розглядаємих сум є малий еліпсоїд (2.21) (елементи його матриці пропорціональні h^2), то можна використати не точні формули, вказані в теоремах (2.2), (2.3), а спрощені формули для випадку $Q_1 = \varepsilon^2 Q_1^0$. Вважаючи $\varepsilon = h$, отримуємо на основі співвідношень (2.20)-(2.22)

$$\begin{aligned} E(a^-(t+h), Q^-(t+h)) \subset D(t+h, s, E(a_0, Q_0)) \subset \\ \subset E(a^+(t+h), Q^+(t+h)), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$a^\pm(t+h) = f + (I + hC)a^\pm,$$

$$\begin{aligned} Q^-(t+h) = (I + hC)Q^-(I + hC^*) + \\ + 2hA^{-1}(ABA^*)^{\frac{1}{2}}(AQ^-A^*)^{\frac{1}{2}}(A^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$Q^+(t+h) = (I + hC)Q^+(I + hC^*) + h(q^{-1}B + qQ^+),$$

$$q = n^{-1}Tr[(Q^+)^{-1}B]^{\frac{1}{2}}.$$

Тут через A позначена неособлива матриця розмірності $n \times n$, яка задовольняє ту умову, що обидві матриці ABA^* , AQ^-A^* діагональні. Співвідношення (2.24) для векторів a^- , a^+ перепишемо у вигляді

$$h^{-1}[a^-(t+h) - a^-(t)]Ca^-(t) + f,$$

$$h^{-1}[a^+(t+h) - a^+(t)]Ca^+(t) + f.$$

Перейдемо до границі при $h \rightarrow 0$, звідси отримуємо

$$[a^-]' = C(t)a^- + f, [a^+]' = C(t)a^+ + f. \quad (2.25)$$

Спростимо формули (2.24) для Q^- , Q^+ , опустимо в них члени вищих порядків відносно h :

$$Q^-(t+h) - Q^- = h[CQ^- + Q^-C^* + 2A^{-1}(ABA^*)^{\frac{1}{2}}(AQ^-A^*)^{\frac{1}{2}}(A^*)^{-1}],$$

$$Q^+(t+h) - Q^+ = h(CQ^+ + Q^+C^* + qQ^+ + q^{-1}B).$$

Розділимо обидві частини отриманих рівнянь на h та перейдемо до границі при $h \rightarrow 0$, отримаємо

$$[Q^-]' = CQ^- + Q^-C^* + 2A^{-1}(ABA^*)^{\frac{1}{2}}(AQ^-A^*)^{\frac{1}{2}}(A^*)^{-1}, \quad (2.26)$$

$$[Q^+]' = CQ^+ + Q^+C^* + qQ^+ + q^{-1}B.$$

Таким чином, допустимо, що в деякий момент $t \geq s$ мають місце включення (2.16). Ми встановили, що такі ж включення справедливі й для близького моменту $t + h, h > 0$ (см. (2.24)). При цьому параметри апроксимуючих еліпсоїдів задовільняють диференціальним рівнянням (2.25), (2.26). Але в початковий момент $t = s$ включення (2.16) мають місце, якщо згідно (2.14) прийняти

$$a^-(s) = a^+(s) = a_0, \quad (2.27)$$

$$Q^-(s) = Q^+(s) = Q_0.$$

Включення (2.16) при цьому можна переписати у вигляді

$$E(a(t), Q^-(t)) \subset D(t, s, E(a_0, Q_0)) \subset E(a(t), Q^+(t)). \quad (2.28)$$

Матриця $Q^-(t)$ задовільняє, згідно (2.27), (2.26), диференційному рівнянню та початковій умові [4]

$$\begin{aligned} [Q^-]' &= CQ^- + Q^-C^* + 2A^{-1}(ABA^*)^{\frac{1}{2}}(AQ^-A^*)^{\frac{1}{2}}(A^*)^{-1} = \\ &= CQ^- + Q^-C^* + 2B^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}Q^-B^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} = \\ &= CQ^- + Q^-C^* + 2(Q^-)^{\frac{1}{2}}[(Q^-)^{-\frac{1}{2}}B(Q^-)^{-\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}(Q^-)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$Q^-(s) = Q_0,$$

$$B = K GK^*.$$

Тут $A(t)$ – така неособлива матриця, що обидві матриці ABA^* , AQ^-A^* діагональні в будь-який момент t . Рівняння для Q^- записано в трьох

формах, які еквівалентні одне одному, якщо обидві матриці Q^- , B додатнєовизначені. В такому випадку можна використовувати будь-яку з цих форм. Першу форму можна використовувати і в тому випадку, якщо будь-яка з матриць Q^- , B невід'ємновизначена, другу – якщо матриця B додатнєовизначена, третю – якщо матриця Q^- додатнєовизначена (остання умова може бути порушена в початковий момент часу).

Для матриці $Q^+(t)$, згідно (2.26), (2.27), (2.23), маємо задачу Коші [4]:

$$[Q^+]' = CQ^+ + Q^+C^* + qQ^+ + q^{-1}B, Q^+(s) = Q_0, \quad (2.30)$$

$$q = n^{-1}Tr[(Q^+)^{-1}]^{\frac{1}{2}}, B = KGK^*.$$

Таким чином, для множини досяжності керуючої системи (2.12)-(2.14) або еквівалентної їй системі (2.19), (2.16) отримані двусторонні еліпсоїдальні оцінки (2.28). Центри апроксимуючих еліпсоїдів співпадають і їх еволюція описується лінійним диференціальним рівнянням та початковими умовами (2.27). Еволюція матриць Q^- , Q^+ апроксимуючих еліпсоїдів описується нелінійними диференціальними рівняннями та початковими умовами (2.29), (2.30). Розв'язавши вказані задачі Коші (2.27), (2.29), (2.30), можна ефективно побудувати оцінки (2.28). При цьому по побудові отримані оцінки мають еволюційні властивості, тобто є множинами субдосяжності та супердосяжності.

3 Еліпсоїдальна оцінка множини досяжності нелінійної динамічної системи керування

3.1 Рівняння інтегральної лійки

Використовуючи опис системи керування за допомогою диференційного включення [6], можемо отримати рівняння еволюції множини досяжності $A(t) = A(t, t_0, A_0)$ з початкової множини A_0 при $t = t_0$. Розглянемо множину досяжності в два близьких моменти часу: $A(t), A(t + \sigma)$, $\sigma > 0$. Тоді $A(t + \sigma)$ можемо отримати як сукупність кінцевих точок $x(t + \sigma)$ усіх можливих розв'язків диференційного включення, що визначені на сегменті $[t, t + \sigma]$ і задовольняють початкові умови $x(t) \in A(t)$:

$$A(t + \sigma) = \bigcup_{x(t) \in A(t)} x(t + \sigma). \quad (3.1)$$

Це відображає той факт, що в момент часу t точка $x(t)$ може бути досягнута з A_0, t_0 , а в момент часу $t + \sigma$ точка $x(t + \sigma)$ може бути досягнута з $x(t), t$, то в момент часу $t + \sigma$ точка $x(t + \sigma)$ може бути досягнута з A_0, t_0 . Якщо розв'язок диференційного включення диференційоване в момент t , то можемо записати

$$x(t + \sigma) = x(t) + \sigma \dot{x}(t) + o(\sigma), \quad (3.2)$$

де

$$\dot{x}(t) \in G(t, x(t)), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} o(\sigma) = 0.$$

Враховуючи (3.2) з точністю до нескінченно малих $o(\sigma)$ отримаємо з (3.1)

$$A(t + \sigma) \approx \bigcup_{x \in A(t)} \bigcup_{\dot{x} \in G(t, x)} [x + \sigma \dot{x}].$$

Позначимо

$$x + \sigma G(t, x) = \bigcup_{\dot{x} \in G(t, x)} [x + \sigma \dot{x}].$$

Можемо записати те ж саме у вигляді

$$A(t + \sigma) \approx \bigcup_{x \in A(t)} [x + \sigma G(t, x)]. \quad (3.3)$$

Позначимо

$$A_\sigma(t) = \bigcup_{x \in A(t)} [x + \sigma G(t, x)].$$

Оскільки рівність (3.3) вірна з точністю до нескінченно малих $o(\sigma)$, то множини $A(t + \sigma)$ і $A_\sigma(t)$ близькі з точністю до $o(\sigma)$.

Умова того, що $A_\sigma(t)$, $A(t + \sigma)$ близькі з точністю до $o(\sigma)$, може бути записана за допомогою метрики Хаусдорфа у вигляді

$$\alpha(A_\sigma(t), A(t + \sigma)) = o(\sigma), \quad \sigma > 0. \quad (3.4)$$

За визначенням нескінченно малої $o(\sigma)$ маємо $\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} o(\sigma) = 0$ при $\sigma \rightarrow 0+$. Тому (3.4) можемо переписати у еквівалентній формі

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \sigma^{-1} \alpha(A_\sigma(t), A(t + \sigma)) = 0. \quad (3.5)$$

Рівняння (3.4) і (3.5) описують динаміку множини досяжності точно так само, як звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x \in R^n, \quad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.6)$$

описує динаміку точки $x(t)$. Пояснимо цю аналогію детальніше. Рівняння (3.6) можемо записати у вигляді $x(t + \sigma) = x(t) + \sigma g(t, x(t)) + o(\sigma)$. Позначимо $x_\sigma(t) = x(t) + \sigma g(t, x)$. Тоді (3.6) можна переписати у вигляді $\|x(t + \sigma) - x_\sigma(t)\| = o(\sigma)$. Використовую те, що для одноточкових множин $x(t + \sigma)$, $x_\sigma(t)$ відстань Хаусдорфа між ними співпадає із звичайною відстанню, отримаємо запис (3.6) у вигляді $\alpha(x(t + \sigma), x_\sigma(t)) =$

$o(\sigma)$, що є аналогом (3.4). Отримане представлення рівняння (3.6) показує, що рівняння (3.4) має той самий зміст, що й звичане диференціальне рівняння, тільки має специфічну форму запису. Це викликано відсутністю операції віднімання однієї множини від іншої, що в свою чергу не дає можливості визначити похідну відображення $A(t)$, але вираз першого наближення $A_\sigma(t)$ можна записати в явному вигляді. Тому запис аналога диференціального рівняння (3.4) для $A(t)$ заснований на виразі першого наближення $A_\sigma(t)$. Все вище зазначене дозволяє говорити про рівняння (3.4), (3.5), як про квазидиференціальні рівняння, що описують динаміку множин досяжності в поточковому представленні. Запропоновано називати рівняння (3.5) «рівнянням інтегральної лійки диференційного включення».

У припущенні ліпшицевого відображення $g(t, x)$ може бути побудована локальна теорія керування (3.6) - існування єдиного розв'язку і т.п. Аналогічна локальна теорія може бути побудована і для рівняння (3.4).

Неперервне відображення $R(t) = R(t, t_0, X(t_0)), [t_0, t_0 + \eta) \rightarrow K(R^n), \eta \geq 0, R(t_0) = X(t_0)$, що задовільняє (3.5), при $t \in [t_0, t_0 + \eta)$ називається розв'язком (3.5) або R -розв'язком з початкової множини $X(t_0)$, породженим $G(t, x)$. Як і для звичайних диференціальних рівнянь, для (3.5) доводиться, що R -розв'язок $R(t, t_0, X(t_0))$ існує, єдино і подовжуючи на максимальний інтервал існування $t_0 \leq t < w = w(t_0, X(t_0)) \leq \infty$. Отримали зв'язок R -розв'язків і множин досяжності.

Теорема 3.1. [6] *Для $X(t_0) \in K(R^n)$ справедлива рівність $R(t, t_0, X(t_0)) = A(t, t_0, X(t_0))$ при $t_0 \leq t < w$.*

Допустимо, що $X(t)$ - неперервне відображення

$$X(t) : [t_0, T) \rightarrow K(R^n), T \in [t_0, w). \quad (3.7)$$

Наша ціль отримати умови, які гарантують, що

$$X(t) = A(t, t_0, X(t_0)), \quad t_0 \leq t < T. \quad (3.8)$$

Додамо теоремі 3.1 інше формулювання.

Теорема 3.2. [6] *Для виконання (3.8) необхідно і достатньо, щоб відображення $X(t)$ задовільняло рівнянню інтегральної лійки*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \sigma^{-1} \alpha(X_\sigma(t), X(t + \sigma)) = 0, \quad X_\sigma(t) = \bigcup_{x \in X(t)} [x + \sigma G(t, x)].$$

3.2 Оцінки множини досяжності

Розглянемо систему керування

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t))d + u(t), \quad x \in R^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.9)$$

з невідомим, але обмеженим початковим станом

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 \in \text{comp}R^n \quad (3.10)$$

Тут A - це постійна $n \times n$ -матриця, вектор $d \in R^n$, $\text{comp}R^n$ - множина усіх компактних підмножин з R^n , керування $u(t)$ - вимірна за Лебегом функція, з геометричним обмеженням

$$u(t) \in U, \quad U \in \text{comp}R^n.$$

Припустимо, що нелінійна функція $f(x)$ в (3.9) є додатно визначеною квадратичною формою:

$$f(x) = x^* Bx, \quad x \in R^n, \quad (3.11)$$

де $B(a, r) = \{x \in R^n : \|x - a\| \leq r\}$ - симетрична додатно визначена $n \times n$ -матриця.

Позначимо символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ розв'язок системи (3.9) на відрізку $[t_0, T]$ для допустимого початкового стану $x_0 \in X_0$ і керування $u(\cdot)$. Допустимо, що усі розв'язки $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ визначені на відрізку $[t_0, T]$ для будь-яких $x_0, u(\cdot)$.

Позначимо символом \mathcal{U} клас допустимих вимірних керувань $u(\cdot)$. Трубку траєкторій системи (3.9) з початкового стану (t_0, x_0) позначимо символом

$$X(\cdot) = X(\cdot; t_0, X_0) = \bigcup \{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot)) \mid x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}\}.$$

Переріз $X(t) = X(t; t_0, X_0)$ трубки траєкторій $X(\cdot)$ в момент часу $t \in [t_0, T]$ співпадає з множиною досяжності системи (3.9) в момент t з початкового стану (t_0, x_0) .

Допустимо, що в (3.9)-(3.11) множини U, X_0 є еліпсоїдами вигляду $U = E(\hat{a}, \hat{Q})$ і $X_0 = E(a, k^2 B^{-1})$, де число $k \neq 0$, вектори $a, \hat{a} \in R^n$, матриця B визначена в (3.11), симетрична матриця \hat{Q} є додатно визначеною.

Розглянемо диференційне включення

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad x \in R^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (3.12)$$

з невідомим, але обмеженим початковим станом

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a, k^2 B^{-1}) \quad (3.13)$$

еквівалентне керованій системі (3.9)-(3.11).

Алгоритми для еліпсоїдальної оцінки множин $X(t)$ системи (3.10)-(3.12) базуються на теоремах, які випливають з теорії революційних рівнянь типу рівнянь інтегральної лійки.

Теорема 3.3. [7] *Для будь-якого $\sigma > 0$ вірна зовнішня оцінка множини досяжності $X(t_0 + \sigma) = X(t_0 + \sigma; t_0, X_0)$ включення (3.10)-(3.12)*

$$X(t_0 + \sigma) \subseteq E(a^+(\sigma), Q^+(\sigma)) + o(\sigma)B(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0. \quad (3.14)$$

Тут параметри еліпсоїда $E(a^+(\sigma), X^+(\sigma))$ визначаються рівняннями

$$a^+(\sigma) = a(\sigma) + \sigma \hat{a}, \quad (3.15)$$

$$Q^+(\sigma) = (p^{-1} + 1)Q(\sigma) + (p + 1)\sigma^2 \hat{Q},$$

де p - єдиний додатний розв'язок рівняння

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p + \lambda_i} = \frac{n}{p(p + 1)},$$

а $\lambda_i \geq 0$ - корені рівняння $|Q(\sigma) - \lambda \sigma^2 \hat{Q}| = 0$ і

$$a(\sigma) = a + \sigma(Aa + a^*Ba \cdot d + k^2d), \quad (3.16)$$

$$Q(\sigma) = k^2(I + \sigma R)B^{-1}(I + \sigma R)^*, \quad R = A + 2da^*B,$$

де I - одинична матриця.

Теорема 3.4. [7] Для будь-якого $\sigma > 0$ вірна внутрішня оцінка множини досяжності $X(t_0 + \sigma) = X(t_0 + \sigma; t_0, X_0)$ включення (3.10)-(3.12)

$$E(a^-(\sigma), Q^-(\sigma)) \subseteq X(t_0 + \sigma) + o(\sigma)B(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0. \quad (3.17)$$

Тут параметри еліпсоїда $E(a^+(\sigma), X^+(\sigma))$ визначаються рівняннями

$$a^-(\sigma) = a(\sigma) + \sigma \hat{a}, \quad (3.18)$$

$$Q^-(\sigma) = Q(\sigma) + \sigma^2 \hat{Q} + 2\sigma Q(\sigma)^{1/2}(Q(\sigma)^{-1/2} \hat{Q} Q(\sigma)^{-1/2})^{1/2} Q(\sigma)^{1/2},$$

а величини $a(\sigma)$, $Q(\sigma)$ визначені в (3.16).

4 Алгоритми побудови множини досяжності

Розглянемо побудову множини досяжності для конкретної моделі. Дана модель:

$$M_1 \frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + (B + B_1) \frac{dy_1(t)}{dt} + (K + K_1) y_1(t) - B \frac{dy_2(t)}{dt} - K y_2(t) = f_1(t),$$

$$M_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + (B + B_2) \frac{dy_2(t)}{dt} + (K + K_2) y_2(t) - B \frac{dy_1(t)}{dt} - K y_1(t) = -f_2(t),$$

Тут $f_1(t)$, $f_2(t)$ – зовнішні сили. На основі цієї моделі запишемо систему диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_3 + \frac{M_2}{B} y_4, \\ \dot{y}_2 = \frac{M_1}{B} y_3 + y_4, \\ \dot{y}_3 = \frac{-K - K_1}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_1 + \frac{K}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_2 + \frac{-B - B_1}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_3 + \frac{(-B - B_1) \frac{M_2}{B}}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_4 + f_1(t), \\ \dot{y}_4 = \frac{K}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_1 + \frac{-K - K_2}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_2 + \frac{(-B - B_2) \frac{M_1}{B}}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_3 + \frac{-B - B_2}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} y_4 + f_2(t). \end{array} \right.$$

Цю систему можна подати у вигляді

$$\dot{y} = Ay + Bf$$

де матриця A дорівнює:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & \frac{M_2}{B} \\ 0 & 0 & \frac{M_1}{B} & 1 \\ \frac{-K - K_1}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} & \frac{K}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} & \frac{-B - B_1}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} & \frac{(-B - B_1) \frac{M_2}{B}}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} \\ \frac{K}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} & \frac{-K - K_2}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} & \frac{(-B - B_2) \frac{M_1}{B}}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} & \frac{-B - B_2}{\frac{M_1 M_2}{B} - B} \end{array} \right),$$

матриця B дорівнює:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.1 Алгоритм з використанням грамміану керованості

1. Задаємо матриці A, B для системи (1.1).
2. Розв'язуємо диференційне рівняння для грамміана

$$\frac{dW(T, t_0)}{dt} = A(t)W(T, t_0) + W(T, t_0)A^*(t) + B(t)B^*(t).$$

За допомогою чисельного метода Ейлера отримаємо:

$$W(t_{k+1}) = W(t_k) + h(AW(t_k) + W(t_k)A^* + BB^*).$$

3. Знаходимо множину досяжності за допомогою формули

$$\chi(t) = \{x : x^T Q(t)^{-1} x \leq 1\}.$$

4.2 Алгоритм з використанням функції Беллмана

1. Задаємо матриці A, C для системи рівнянь (1.7) та матриці M, N, P_0 для функціоналу (1.8).
2. Розв'язуємо диференційне рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} \frac{dP(s)}{ds} + P(s)A(s) + A^*(s)P(s) + \\ + P(s)C(s)M^{-1}(s)C^*(s)P(s) = N(s), \end{aligned}$$

$$P(t_0) = P_0,$$

для знаходження функції Белмана

$$B(z, s) = (P(s)z, z).$$

За допомогою чисельного метода Ейлера отримаємо:

$$P(s) = P(s) + h(P(s)A + A^*P(s) + P(s)CM^{-1}C^*P(s)).$$

3. Знаходимо множину досяжності за допомогою формули

$$\chi(s) = \{z \in R^n : B(z, s) \leq r^2\}.$$

4.3 Алгоритми зовнішньої та внутрішньої оцінки множини досяжності лінійної системи керування

1. Задаємо матриці C, K для системи рівнянь (2.12) та матрицю G для формули (2.13).
2. Розв'язуємо диференційне рівняння (2.29) для матриці еліпсоїда Q^- :

$$\begin{aligned} [\dot{Q}^-] &= CQ^- + Q^-C^T + 2A^{-1}(ABA^T)^{\frac{1}{2}}(AQ^-A^T)^{\frac{1}{2}}(A^T)^{-1} = \\ &= CQ^- + Q^-C^T + 2B^{\frac{1}{2}}(B^{-\frac{1}{2}}Q^-B^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}} = \\ &= CQ^- + Q^-C^T + 2(Q^-)^{\frac{1}{2}}[(Q^-)^{-\frac{1}{2}}B(Q^-)^{-\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}(Q^-)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

За допомогою чисельного метода Ейлера отримаємо:

$$Q(t_{k+1}) = Q(t_k) + h \left(CQ(t_k) + Q(t_k)C^* + qQ(t_k) + \frac{B}{q} \right).$$

3. Розв'язуємо диференційне рівняння (2.30) для матриці еліпсоїда Q^+ :

$$[\dot{Q}^+] = CQ^+ + Q^+C^T + qQ^+ + q^{-1}B, Q^+(s) = Q_0,$$

$$q = n^{-1} \text{Tr}[(Q^+)^{-1}]^{\frac{1}{2}}, B = KGK^T.$$

За допомогою чисельного метода Ейлера отримаємо:

$$Q(t_{k+1}) = Q(t_k) + h \left(CQ(t_k) + Q(t_k)C^* + 2\sqrt{Q}\sqrt{\sqrt{Q}B\sqrt{Q}\sqrt{Q}} \right).$$

4.4 Алгоритми зовнішньої та внутрішньої оцінки множини досяжності нелінійної динамічної системи керування

Наведемо один з алгоритмів [7] зовнішнього оцінювання множин досяжності $X(t)$, що використовує для побудови зовнішньої багатозначної оцінки (3.14).

Розглянемо розбиття $(t_i, t_i + 1)$ заданого відрізка $[t_0, T]$, де $t_i = t_0 + ih$ ($i = 1, \dots, m$), $h = (T - t_0)/m$, $t_m = T$.

1. Для заданого початкового еліпсоїда $X_0 = E(a, k_0^2 B^{-1})$ ($k_0 \neq 0$) побудуємо еліпсоїд $X_1 = E(a_1, Q_1)$ за теоремою 3.3 для $a_1 = a^+(\sigma)$, $Q_1 = Q^+(\sigma)$, $\sigma = h$.
2. Знайдемо найменше $k_1 > 0$ таке, що

$$E(a_1, Q_1) \subseteq \tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1}),$$

(число k_1^2 співпадає з максимальним власним значенням матриці $B^{1/2}Q_1B^{1/2}$).

3. Розглянемо динамічну систему на наступному відрізку $[t - 1, t_2]$ з еліпсоїдом $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$, прийнятим за початкову множину в момент часу t_1 .
4. Наступні кроки повторюють ітерації 1-3.

В результаті ітерацій ми отримаємо зовнішню еліпсоїдальну оцінку $E(a^+(T), Q^+(T))$ множини досяжності $X(T)$ (зі збільшеною точністю при $m \rightarrow \infty$).

Розглянемо алгоритм [7] побудови внутрішньої оцінки множини досяжності $X(t)$ системи (3.12) - (3.13).

Розглянемо розбиття $(t_i, t_i + 1)$ заданого відрізка $[t_0, T]$, де $t_i = t_0 + ih$ ($i = 1, \dots, m$), $h = (T - t_0)/m$, $t_m = T$. Для отримання внутрішньої оцінки повторюємо послідовно наступні кроки.

1. Для заданого початкового еліпсоїда $X_0 = E(a, k_0^2 B^{-1})$ ($k_0 \neq 0$) побудуємо еліпсоїд $X_1 = E(a_1, Q_1)$ за теоремою 3.4 для $a_1 = a^-(\sigma)$, $Q_1 = Q^-(\sigma)$, $\sigma = h$.
2. Знайдемо найменше $k_1 > 0$ таке, що

$$E(a_1, Q_1) \subseteq \tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1}),$$

(число k_1^2 співпадає з максимальним власним значенням матриці $B^{1/2} Q_1 B^{1/2}$).

3. Розглянемо динамічну систему на наступному відрізку $[t - 1, t_2]$ з еліпсоїдом $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$, прийнятим за початкову множину в момент часу t_1 .
4. Наступні кроки повторюють ітерації 1-3.

В результаті ітерацій ми отримаємо внутрішню еліпсоїдальну оцінку $E(a^-(T), Q^-(T))$ множини досяжності $X(T)$ (зі збільшеною точністю при $m \rightarrow \infty$).

4.5 Алгоритм проектування еліпсоїда на гіперпрощину

Розглянемо еліпсоїд $E(a, Q)$. Має місце така властивість [4, 5]

$$E(a, Q) = a + E(0, Q).$$

Нехай $M - n \times n$ - невироджена матриця. Тоді

$$ME(0, Q) = E(0, MQM^*).$$

Якщо матриця еліпсоїда Q вироджена, то еліпсоїдом $E = E(0, Q)$ називається множина, опорна функція якої має вигляд

$$c(E, p) = \langle Qp, p \rangle^{\frac{1}{2}}, p \in R^n.$$

Тоді якщо $M - n \times n$ - вироджена матриця, то формула

$$ME(0, Q) = E(0, MQM^*)$$

також справджується.

Лема 4.1. Заданий лінійний півпростір $L \subset R^n, \dim L = k$. Тоді існує матриця $M \in R^{(n-k) \times n}, \text{rang} M = n - k$

$$L = (x \in R^n : Mx = 0) = \text{Ker} M.$$

Спроекуємо еліпсоїд $E = E(0, Q)$ на півпростір L . Для цього запишемо проектор на ядро матриці M , який має вигляд $Z(M) = I - M^+M$. Тут M^+ - псевдообернена матриця до матриці M . Тоді проекція еліпсоїда E на півпростір L задається так: $Z(M)E$. Вона рівна

$$Z(M)E = Z(M)E(0, Q) = E(0, Z(M)QZ^*(M)).$$

Якщо MM^* - невироджена, то

$$Z(M) = I - M^*(MM^*)^{-1}M.$$

4.6 Обчислювальний експеримент

В прикладах 1-4 програма написана мовою програмування C++. В структурі програми є 3 класи - `Ellipse`, `Matrix` та `Controller`. Класи `Ellipse` та `Matrix` потрібні для створення відповідних об'єктів (еліпс та матриця) і проведення операцій над ними. Клас `Controller` відповідає за відображення вікна програми і зчитує натискання клавіш. Для відображення результатів використовується графічна бібліотека `OpenGL` з `glad`, `glfw`, `glm`.

Приклад 1

Знайдемо множину досяжності системи за диференціальним рівнянням для грамміана. Розглядаються обмеження на керування:

$$\|u\|_2^2 = \int_0^\infty u^*(t)u(t)dt \leq 1$$

Виберемо параметри:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 2.0099 \\ 0 & 0 & 1.3915 & 1.0000 \\ -0.8614 & 0.0009 & -4.8068 & -9.6611 \\ 0.0009 & -0.0267 & -4.5881 & -3.2973 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.2.$$

Після обчислення диференціального рівняння отримали:

$$W(t_k) = \begin{pmatrix} 1.0115 & -1.0115 & -5.3765 & 4.1151 \\ -1.0240 & 1.1355 & 5.1355 & -4.3312 \\ -5.3765 & 5.6834 & 29.4597 & -22.4779 \\ 4.1151 & -4.3312 & -22.4779 & 17.2241 \end{pmatrix},$$

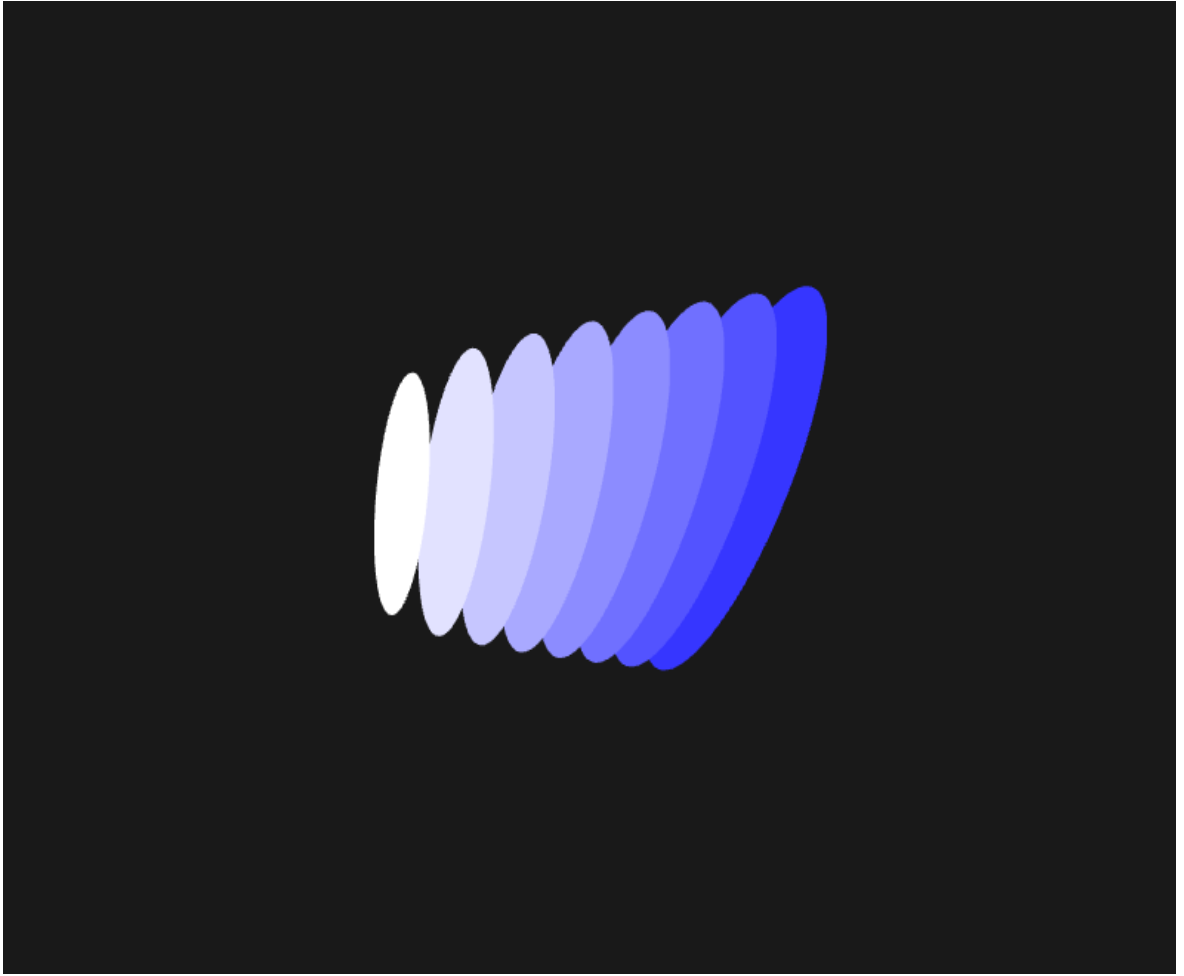


Рис. 1: Ілюстрація до прикладу 1

$$W^{-1}(t_k) = \begin{pmatrix} 41.5900 & -13.2737 & 5.3307 & -6.3176 \\ -13.2737 & 30.1168 & -8.1158 & 0.1532 \\ 5.3307 & -8.1158 & 10.2448 & 10.0553 \\ -6.3176 & 0.1532 & 10.0553 & 14.7283 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2

Знайдемо множину досяжності системи за диференціальним рівнянням для грамміана. Розглядаються обмеження на керування:

$$\|u\|_2^2 = \int_0^\infty u^*(t)u(t)dt \leq 1$$

Виберемо параметри:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 2.8345 \\ 0 & 0 & 0.5669 & 1.0000 \\ -1.8702 & 0.0019 & -6.7746 & -19.2024 \\ 0.0019 & -0.0579 & -7.4215 & -13.0915 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.2.$$

Після обчислення диференціального рівняння отримали:

$$W(t_k) = \begin{pmatrix} 0.4892 & -0.1016 & -3.8406 & 1.8244 \\ -0.1016 & 0.0260 & 0.8439 & -0.3991 \\ -3.8406 & 0.8439 & 30.9457 & -14.6783 \\ 1.8244 & -0.3991 & -14.6783 & 6.9897 \end{pmatrix},$$

$$W^{-1}(t_k) = \begin{pmatrix} 108.4165 & -110.1151 & 13.6449 & -5.9317 \\ -110.1151 & 448.9689 & -29.9021 & -8.4156 \\ 13.6449 & -29.9021 & 10.7006 & 17.2020 \\ -5.9317 & -8.4156 & 17.2020 & 37.3346 \end{pmatrix}.$$



Рис. 2: Ілюстрація до прикладу 2

Приклад 3

Знайдемо множину досяжності системи за диференціальним рівнянням Ріккати для функції Белмана. Розглядається функціонал:

$$I(u, x) = \int_{t_0}^T \{0.1x(t) + 3u(t)\}dt + x_0(t)$$

Виберемо параметри:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 2.0099 \\ 0 & 0 & 1.3915 & 1.0000 \\ -0.8614 & 0.0009 & -4.8068 & -9.6611 \\ 0.0009 & -0.0267 & -4.5881 & -3.2973 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.2, N = 0.1, M = 3, r = 0.5.$$

Після обчислення диференціального рівняння отримали:

$$P(t_k) = \begin{pmatrix} 0.2394 & 0.0877 & 1.9333 & 2.4890 \\ 0.0877 & 0.0804 & 0.0750 & 0.0806 \\ 1.9333 & 0.0750 & 23.9459 & 30.9308 \\ 2.4890 & 0.0886 & 30.9308 & 39.9545 \end{pmatrix}.$$

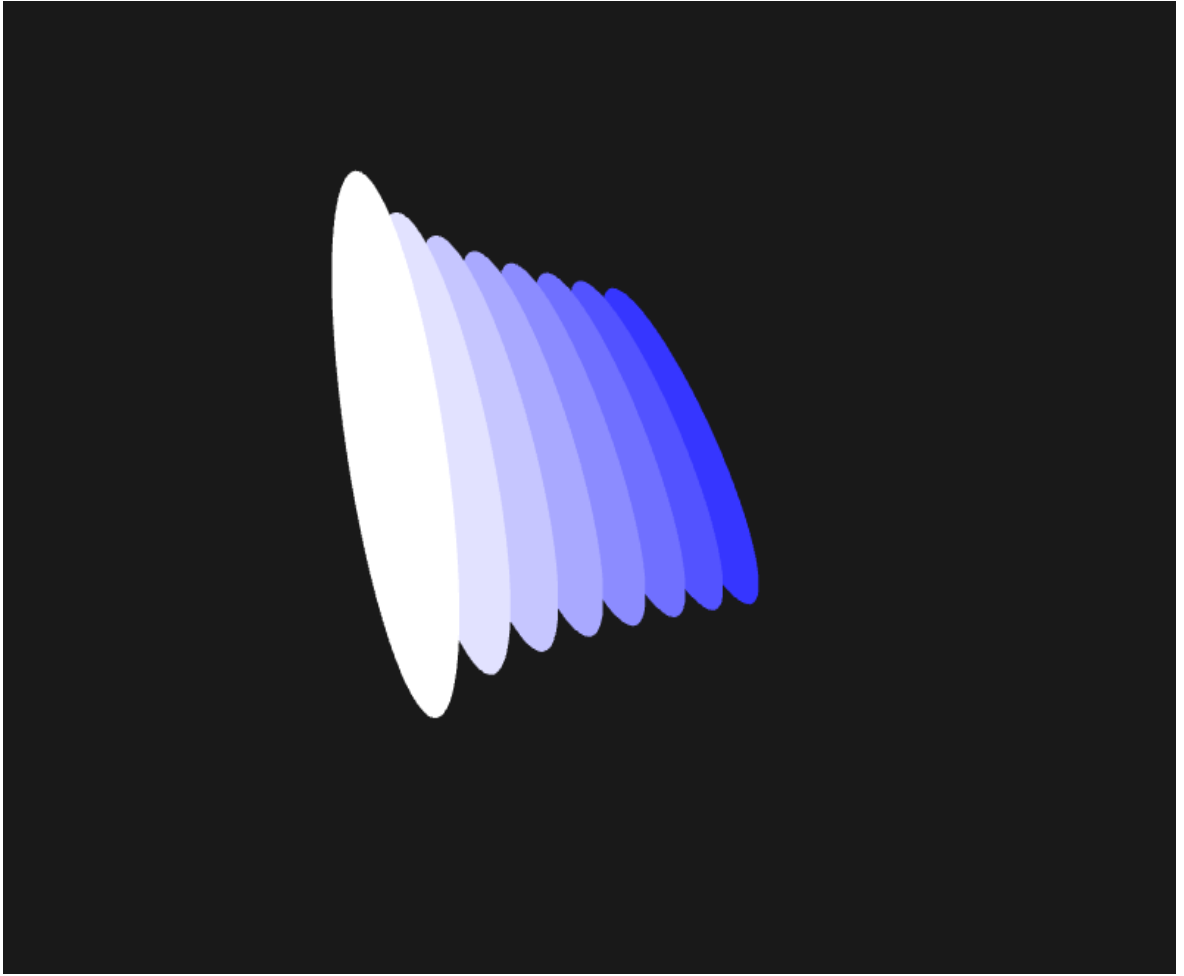


Рис. 3: Ілюстрація до прикладу 3

Приклад 4

Знайдемо множину досяжності системи за диференціальним рівнянням Ріккати для функції Белмана. Розглядається функціонал:

$$I(u, x) = \int_{t_0}^T \{0.1x(t) + 3u(t)\} dt + x_0(t)$$

Виберемо параметри:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 2.8345 \\ 0 & 0 & 0.5669 & 1.0000 \\ -1.8702 & 0.0019 & -6.7746 & -19.2024 \\ 0.0019 & -0.0579 & -7.4215 & -13.0915 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.2, N = 0.3, M = 5, r = 0.5.$$

Після обчислення диференціального рівняння отримали:

$$P(t_k) = \begin{pmatrix} 0.6848 & 0.3400 & 3.3400 & 7.2327 \\ 0.3400 & 0.2675 & 0.2859 & 0.4335 \\ 3.5570 & 0.2859 & 41.4309 & 86.4178 \\ 7.2327 & 0.4335 & 86.4178 & 180.3619 \end{pmatrix}$$

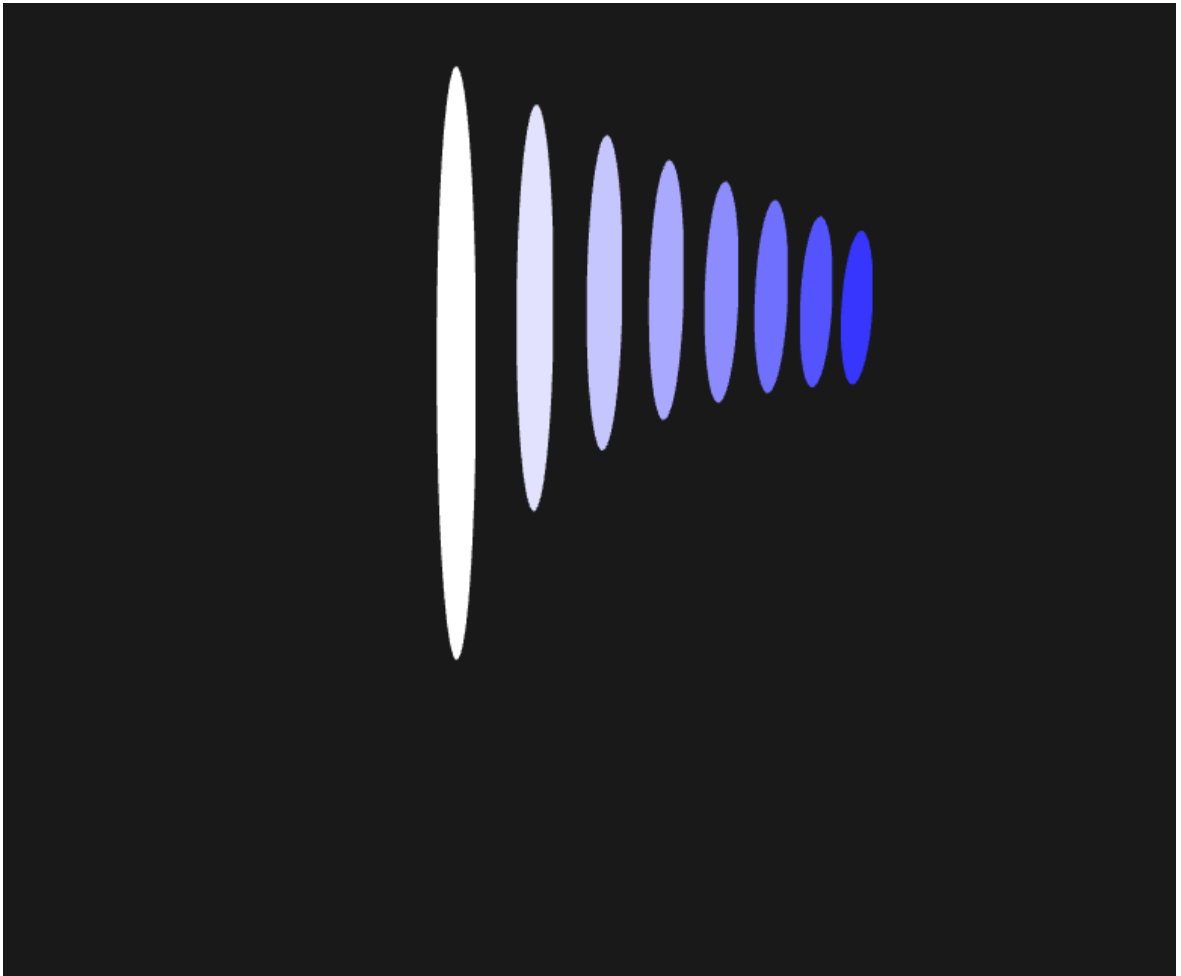


Рис. 4: Ілюстрація до прикладу 4

В прикладах 5-7 програма написана мовою програмування python. Для математичних операцій використано бібліотеки sympy і numpy. Для відображення результатів використовується matplotlib, для анімації - celluloid. Для знаходження оберненої матриці використовується LDLdecomposition (Cholesky decomposition).

Приклад 5

Знайдемо еліпсоїдальну оцінку множини досяжності. Розглядаються обмеження на керування:

$$a^2 u_1^2(t) + b^2 u_2^2(t) \leq r^2(t)$$

Виберемо параметри:

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 2.8345 \\ 0 & 0 & 0.5669 & 1.0000 \\ -1.8702 & 0.0019 & -6.7746 & -19.2024 \\ 0.0019 & -0.0579 & -7.4215 & -13.0915 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.001.$$

Після обчислення диференціальних рівнянь отримали:

$$Q^+(t_k) = \begin{pmatrix} 0.1950 & -0.0176 & -0.6364 & 0.2977 \\ -0.0176 & 0.1305 & 0.1180 & 0.0558 \\ -0.6364 & 0.1180 & 4.3074 & -2.0286 \\ 0.2977 & -0.0558 & -2.0286 & 0.9609 \end{pmatrix},$$

$$Q^-(t_k) = \begin{pmatrix} 0.1459 & -0.0120 & -0.4311 & 0.2007 \\ -0.0120 & 0.1015 & 0.0640 & -0.0304 \\ -0.4311 & 0.0640 & 2.5504 & -1.2048 \\ 0.2007 & -0.0304 & -1.2048 & 0.5693 \end{pmatrix}.$$

На рисунку 5 показані зміни зовнішньої апроксимації множини досяжності з часом.

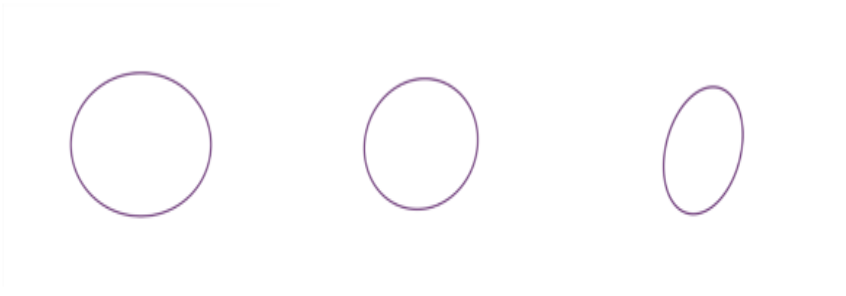


Рис. 5: Ілюстрація до прикладу 5

Приклад 6

Знайдемо еліпсоїдальну оцінку множини досяжності. Розглядаються обмеження на керування:

$$a^2 u_1^2(t) + b^2 u_2^2(t) \leq r^2(t)$$

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.0000 & 2.6239 \\ 0 & 0 & 0.7774 & 1.0000 \\ -0.0747 & 0.0467 & -5.0642 & -13.2881 \\ 0.0467 & -0.9811 & -5.5534 & -7.1430 \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$h = 0.001.$$

Після обчислення диференціальних рівнянь отримали:

$$Q^+(t_k) = \begin{pmatrix} 1.3849 & -0.5604 & -6.7481 & 3.8992 \\ -0.5604 & 0.3753 & 3.1015 & -1.7982 \\ -6.7481 & 3.1015 & 37.4835 & -21.6323 \\ 3.8992 & -1.7982 & -21.6323 & 12.4954 \end{pmatrix},$$

$$Q^-(t_k) = \begin{pmatrix} 0.5666 & -0.0979 & -0.7804 & 0.4202 \\ -0.0979 & 0.2086 & 1.2182 & -1.1319 \\ -0.7804 & 1.2182 & 6.3576 & -2.3633 \\ 0.4202 & -1.1319 & -2.3633 & 1.7877 \end{pmatrix}.$$

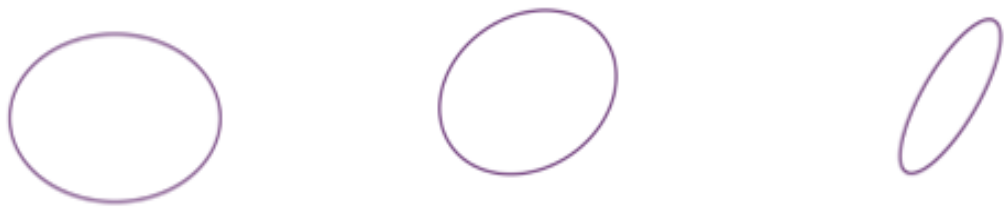


Рис. 6: Ілюстрація до прикладу 6

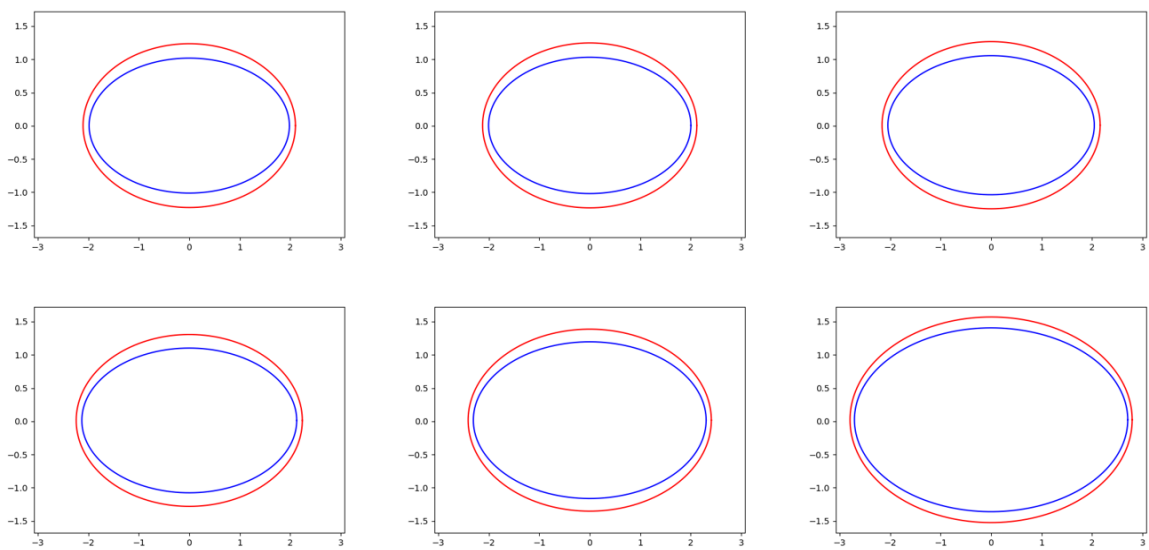


Рис. 7: Ілюстрація до прикладу 7

На рисунку 6 показані зміни зовнішньої апроксимації множини досяжності з часом.

Приклад 7

Розглянемо приклад, що ілюструє побудову еліпсоїдальної оцінки множини досяжності для нелінійної динамічної системи. Розглянемо диференційне включення

$$\dot{x} \in A(x) + f(x)d + rB(0, 1), \quad x \in R^2, \quad 0 \leq t \leq T = 0.22, \quad r = 0.01,$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in X_0 = B(0, 1) = E(0, I),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + x_2^2, \quad d = (0, 0.3).$$

На Рис. 7 червоним контуром зображена зовнішня еліпсоїдальна оцінка множини досяжності $E(a^+(t), Q^+(t))$ і синім - внутрішня еліпсоїдальна оцінка множини досяжності $E(a^-(t), Q^-(t))$, отримані за алгоритмом 4.4.

Приклад 8

Розглянемо другий приклад, що ілюструє побудову еліпсоїдальної оцінки множини досяжності для нелінійної динамічної системи. Розглянемо диференційне включення

$$\dot{x} \in A(x) + f(x)d + rB(0, 1), \quad x \in R^2, \quad 0 \leq t \leq T = 0.22, \quad r = 0.01,$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in X_0 = B(0, 1) = E(0, I),$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = 0.25x_1^2 + 0.5x_2^2, \quad d = (0, 0.5).$$

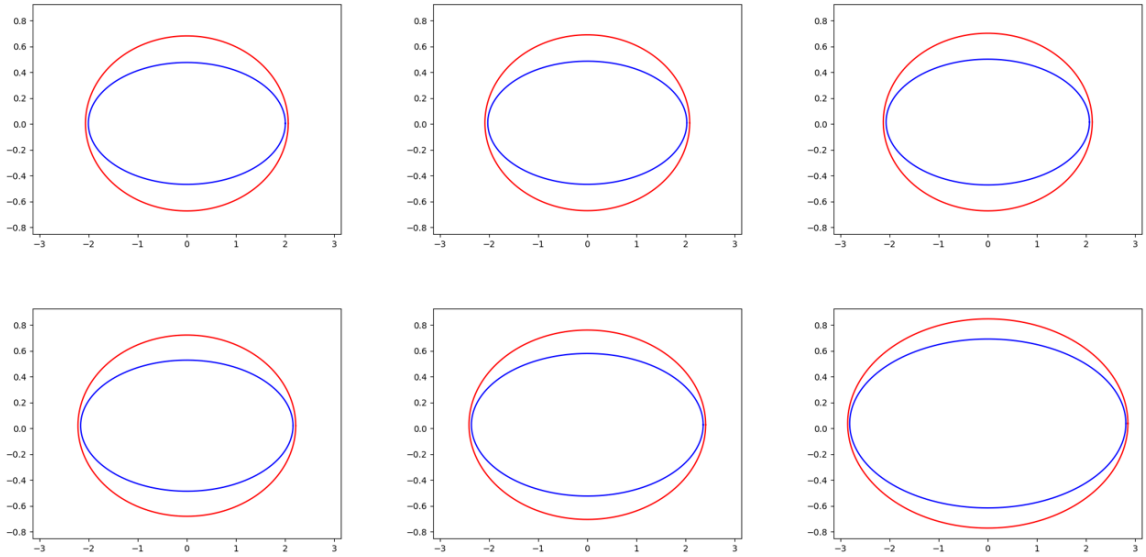


Рис. 8: Ілюстрація до прикладу 8

На Рис. 8 червоним контуром зображена зовнішня еліпсоїдальна оцінка множини досяжності $E(a^+(t), Q^+(t))$ і синім - внутрішня еліпсоїдальна оцінка множини досяжності $E(a^-(t), Q^-(t))$, отримані за алгоритмом 4.4.

Висновки

В роботі розглянуто два алгоритми побудови множини досяжності для лінійних систем керування при функціональних обмеження і два алгоритми побудови множини досяжності для лінійних систем керування при геометричних обмеженнях. Наведено приклади роботи алгоритмів на основі математичної моделі коливання двох тіл з врахуванням тертя. Також описана побудова зовнішньої та внутрішньої апроксимації множини досяжності для нелінійних динамічних систем керування, базуючись на теоремах, які випливають з теорії еволюційних рівнянь типу рівнянь інтегральної лійки. Виведено відповідні диференціальні рівняння. Написано дві програми на мовах програмування: C++ і Python. Проведено обчислювальні експерименти, які дозволяють проаналізувати, як змінюється множина досяжності з часом.

Література

1. Александров В.В., Болтянский В.Г., Лемак С.С., Парусников Н.А, Тихомиров В.М. Опимальное управление движением. - М.: Физматлит, 2005. - 276 с.
2. Башняков О.М., Пічкур В.В. Задача синтезу в теорії керування: Навчальний посібник. - К.: „Сталь”, 2012. - 116 с.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. - М.: Наука, 2002. - 303 с.
4. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. - М.: Наука, 1988. - 320 с.
5. Kurzhanski A., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. - Boston: IIASA and Birkhauser, 1997. - 321p.
6. Панасюк А. И., Панасюк В. И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. - М.: Наука и техника, 1986. - 211 с.
7. Филиппова, Т.Ф., Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы, 16 (1) (2010), 223-232.