Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2022, № 2 | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.9, 519.6

MSC 35B27, 35B40, 65N15

MODELING OF WAVE PROCESSES IN POROUS MEDIA AND ASYMPTOTIC EXPANSIONS

G. V. Sandrakov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: gsandrako@gmail.com

МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПРОЦЕСІВ У ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ

Г. В. Сандраков

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: gsandrako@gmail.com

Abstract. Models of wave processes in porous periodic media are considered. It is taken into account that the corresponding wave equations depend on small parameters characterizing the microscale, density, and permeability of such media. The algorithm for determining asymptotic expansions for these equations is given. Estimates for the accuracy of such expansions are presented.
Keywords: initial boundary value problems, wave equations, homogenized problems, Laplace transform.

Анотація. Розглядаються моделі хвильових процесів у пористих періодичних середовищах. Враховується, що відповідні хвильові рівняння залежать від малих параметрів, що характеризують мікромасштабність, щільність та проникність таких середовищ. Наведено алгоритм визначення асиптотичних розвинень для цих рівнянь. Презентовані оцінки точності таких розвинень.
Ключові слова: початково-крайові задачі, хвильові рівняння, осереднені задачі, перетворення Лапласа.

Вступ

Досліджуються початково-крайові задачі для нестаціонарних хвильових рівнянь в неоднорідних пористих середовищах, яки утворені великою кількістю «блоків», що мають низьку щільність і проникність, та розділені зв'язною системою «розламів» з високою проникністю. Як моделі пористих середовищ обираються періодичні середовища з малим коефіцієнтом мікромасштабності ε, який природно виникає через велику кількість блоків. Будуть визначені осереднені задачі, розв'язки яких визначають наближену асимптотику розв'язків таких задач. Осереднені задачі є або задачами зі згортками або задачами зі сталими коефіцієнтами для однорідних середовищ, що значно спрощує чисельне розв'язання і комп'ютерну симуляцію для таких задач, які моделюють хвильові процеси у пористих середовищах.

Метод осереднення первинно ґрунтувався на асимптотичних розвиненнях [1, 2]. Згодом з'ясувалося, що набагато простіше довести збіжність або двомасштабну збіжність розв'язків до розв'язку деякої осередненої двомасштабної задачі. Проте, такі двомасштабні задачі залежать від додаткових змінних і тип відповідних рівнянь таких задач не є очевидним. Крім того, точність апроксимацій у цьому випадку не була з'ясована і доведена.

Алгоритм визначення початкових асимптотичних розвинень розв'язків нестаціонарних задач із декількома параметрами було представлено та обґрунтовано у [3, 4] та розвинуто у [5, 6]. Для такого визначення використовувалося перетворення Лапласа для ізоморфного переведення (відповідно до [7]) нестаціонарних задач у стаціонарні задачі з параметром, до яких застосовувалися загальні асимптотичні методи, що запропоновані у [8] для еліптичних рівнянь довільного порядку. Такий підхід буде використовуватися і тут у розділах 2 та 3 для більш загальних задач. Точне формулювання проблеми, що розглядатиметься, наведено в наступному розділі.

1. Постановка задачі

Періодичні середовища з малим мікромасштабом ε визначаються наступним чином. Нехай для цілого $n \geq 2$ множина F_1 є відкритою зв'язною 1-періодичною (періодичною з періодом 1 за кожною з незалежних змінних $x_1, \dots, x_n$) підмножиною $\mathbb{R}^n$ з локально ліпшіцевою межею і $F_0 = \mathbb{R}^n \setminus \overline{F_1}$ є множиною з локально ліпшіцевою межею. Для додатного ε позначимо

$$F_1^\varepsilon = \varepsilon F_1 = \{\varepsilon x : x \in F_1\}, \quad F_0^\varepsilon = \varepsilon F_0 = \{\varepsilon x : x \in F_0\}.$$

Таким чином, множини $F_1 = F_1^1$ і $F_0 = F_0^1$ зі спільною межею ∂F_1 цілком визначаються множинами $Y_1 = F_1 \cap Y$ й $Y_0 = F_0 \cap Y$ з межею $\Gamma = \partial F_1 \cap Y$, де $Y = (0,1)^n$ позначає комірку періодичності. Так задані множини Y_1 і Y_0 розбивають комірку періодичності Y на дві множини, що розділені спільною межею Γ. Припускається, що Y_1 та Y_0 є множинами додатної міри Лебега $|Y_1|$ та $|Y_0|$ у просторі $\mathbb{R}^n$.

Нехай також задано обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Множини F_1^ε та F_0^ε для досить малого фіксованого ε природно визначають моделі для пористих середовищ з ε-періодичною структурою $\Omega_1^\varepsilon = F_1^\varepsilon \cap \Omega$ та $\Omega_0^\varepsilon = F_0^\varepsilon \cap \Omega$, які відповідають блокам і розламам в області Ω та обмежені межею $\partial\Omega$ цієї області Ω. Приклади таких пористих середовищ наведено на рисунку.

Для таких пористих середовищ визначимо дійсні коефіцієнти щільності та матриці проникності блоків і розламів в області Ω рівностями

$$m_\mu^\varepsilon = \mu\, m_0(x/\varepsilon),\ \ r_\mu^\varepsilon = \mu\, r_0(x/\varepsilon) \quad \text{в} \quad \Omega_0^\varepsilon,$$
$$A_\sigma^\varepsilon = \sigma A_0(x/\varepsilon),\ \ b^\varepsilon = b_0(x/\varepsilon) \quad \text{в} \quad \Omega_0^\varepsilon,$$
$$m_\mu^\varepsilon = m_1(x/\varepsilon),\ \ r_\mu^\varepsilon = r_1(x/\varepsilon),\ \ A_\sigma^\varepsilon = A_1(x/\varepsilon),\ \ b^\varepsilon = b_1(x/\varepsilon) \quad \text{в} \quad \Omega_1^\varepsilon,$$

де μ і σ є додатними параметрами та ε є малим параметром. Надалі для визначеності $0 < \mu \leq 1$, $0 < \sigma \leq 1$ і $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для деякого додатного ε_0.

Передбачається, що всі функції $m_0(y)$, $m_1(y)$, $r_0(y)$, $r_1(y)$ та елементи матриць $A_0(y)$, $A_1(y)$, $b_0(y)$, $b_1(y)$ з цих рівностей є визначеними і обмеженими для $y \in \overline{Y}$. Крім того, матриці $A_0(y)$ та $A_1(y)$ є симетричними та еліптичними для $y \in \overline{Y}$. Тут еліптичність означає, що знайдуться такі сталі α та β, що в матричному розумінні виконуються нерівності

$$0 < \alpha E \leq A_0(y) \leq \beta E, \quad 0 < \alpha E \leq A_1(y) \leq \beta E,$$

де $y \in \overline{Y}$ та E є одиничною матрицею. Отже, елементи матриці A_σ^ε можуть бути розривними на межі $\partial\Omega_1^\varepsilon \setminus \partial\Omega$, що розділяє Ω_0^ε і Ω_1^ε, оскільки обмеження таких елементів на Ω_0^ε і Ω_1^ε можуть не співпадати на цій межі. Припускається також, що $m_0(y)$, $m_1(y)$ відділені від нуля для $y \in \overline{Y}$ і тому

$$\alpha \leq m_0 \leq \beta, \;\; \alpha \leq m_1 \leq \beta, \;\; |r_0| \leq \beta, \;\; |r_1| \leq \beta, \;\; |b_0| \leq \beta, \;\; |b_1| \leq \beta.$$

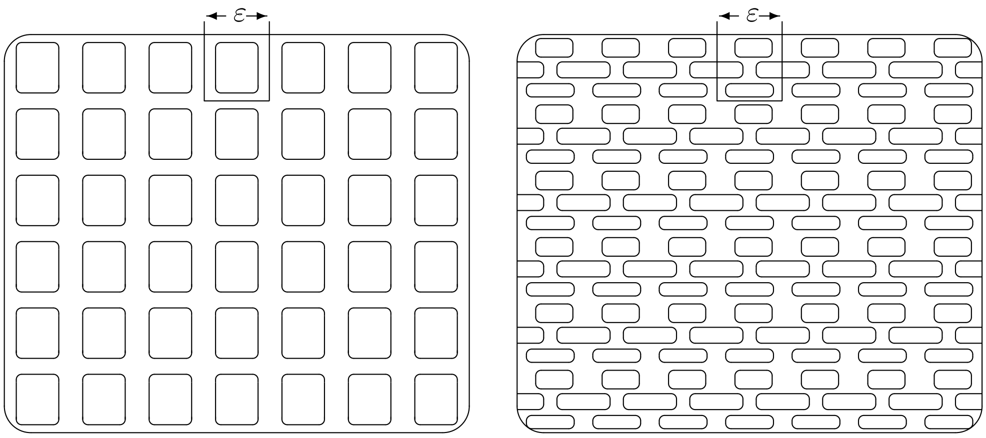

Рис 1. Моделі пористих середовищ

Нехай задано функції $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ і таку вектор функцію $g \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)$, що $g'_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)^n)$, де додатне T є фіксованим. Тут і надалі використовуються простори дійсні функцій, визначення яких наведено, наприклад, у [9]. Визначимо $u = u(t,x)$ як розв'язок у сенсі розподілів початково-крайової задачі

$$m_\mu^\varepsilon \, u''_{tt} \, - \, \operatorname{div} A_\sigma^\varepsilon \, (\, \nabla u \, + \, b^\varepsilon g \,) \, = \, r_\mu^\varepsilon \, f \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varrho^\varepsilon u_0, \;\; u'_t\big|_{t=0} = \varphi^\varepsilon u_1 \;\text{ в } \Omega, \;\; u = 0 \;\text{ на } \partial\Omega \times (0,T),$$

де осцилюючі множники $\varrho^\varepsilon = \varrho(x/\varepsilon)$, $\varphi^\varepsilon = \varphi(x/\varepsilon)$ були введені для повноти подальшого контексту і передбачається, що $\varrho(y)$ та $\varphi(y)$ є 1-періодичними регулярними функціями. Коефіцієнти рівняння такої проблеми визначаються періодичними функціями, коміркою періодичності яких є куб. Можна було б обрати як комірку періодичності довільний невироджений паралелеліпіпед. Однак, завжди можна перетворити такий паралелеліпіпед на куб за допомогою невиродженого перетворення, врахування якого в рівнянні задачі (1) призведе до еліптичних матриць A_0 та A_1 навіть якщо первісно ці матриці були одиничними. Доданок $b^\varepsilon g$ у рівнянні задачі (1), характеризує зазвичай сили гравітації і матриця b^ε як правило є одиничною, але ця матриця також може змінюватися при невироджених перетвореннях.

Для фіксованих параметрів μ, σ і ε задача (1) має єдиний розв'язок, наприклад, відповідно до [9]. Таким чином, можна спробувати побудувати асимптотичні розвинення такого розв'язку.

2. Регулярні асимптотичні розвинення розв'язків

Рівняння задачі (1) є гіперболічним для фіксованих параметрів μ, σ і ε. Однак, при дуже малих μ або σ ця гіперболічність може вироджуватися. Тому для початку розглянемо більш простий випадок $\sigma = 1$.

Введемо позначення $U = \widehat{u}$, $F = \widehat{f}$ та $G = \widehat{g}$ для перетворень Лапласа розв'язків та даних із задачі (1). Наприклад, за визначенням маємо

$$\widehat{u(t)} = \int_0^\infty e^{-z\,t} u(t)\,dt = U(z)$$

де $x \in \Omega$ розглядається як параметр і комплексний параметр z зазвичай належить комплексній півплощині $\mathbb{C}_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + iz_2, z_1 > 0\}$.

Застосовуючи перетворення Лапласа до задачі (1), маємо для $U \in H_0^1(\Omega)$ еквівалентну задачу з комплексним параметром

$$m_\mu^\varepsilon\, z^2\, U \,-\, \mathrm{div} A_\sigma^\varepsilon\,(\,\nabla U \,+\, b^\varepsilon G\,) = m_\mu^\varepsilon\,(z\,\varrho^\varepsilon u_0 + \varphi^\varepsilon u_1) + \, r_\mu^\varepsilon\, F \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{2}$$

де $z \in \mathbb{C}_0$. Подальші подробиці про таку еквівалентність можна знайти у [7].

Для фіксованого $z \in \mathbb{C}_0$ слідуючи [1, 2] асимптотичне наближення до розв'язку задачі (1) можна обрати у вигляді

$$U_a = V(x) + \varepsilon\, V_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 V_2(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^3 V_3(x, x/\varepsilon), \tag{3}$$

де функції $V_1(x, y)$, $V_2(x, y)$, $V_3(x, y)$ є 1-періодичними за змінною $y \in \mathbb{R}^n$.

Для визначення доданків асимптотичного розвинення (3), наступні дві формули для функцій виду $W(x, x/\varepsilon)$, які залежать від ε спеціальним чином, будуть часто використовуватися надалі

$$\begin{gathered}\nabla(W(x, x/\varepsilon)) = \big(\varepsilon^{-1}\nabla_y W(x, y) + \nabla_x W(x, y)\big)\big|_{y=x/\varepsilon}\,, \\ \mathrm{div}(W(x, x/\varepsilon)) = \big(\varepsilon^{-1}\mathrm{div}_y W(x, y) + \mathrm{div}_x W(x, y)\big)\big|_{y=x/\varepsilon}\,.\end{gathered} \tag{4}$$

Підставимо рівність (3) замість U до рівняння (2) та врахуємо (4). Тоді, зберігаючи лише суттєві для подальшого доданки, отримуємо

$$\begin{gathered} m_\mu^1\, z^2\, V - \varepsilon^{-1}\mathrm{div}_y(A_1^1 \nabla_y V_1) - \varepsilon^{-1}\mathrm{div}_y A_1^1(\,\nabla_x V + b^1 G\,) - \\ - \mathrm{div}_y(A_1^1 \nabla_y V_2) - \mathrm{div}_x A_1^1(\,\nabla_x V + b^1 G\,) - \mathrm{div}_x(A_1^1 \nabla_y V_1) - \\ - \mathrm{div}_y(A_1^1 \nabla_x V_1) - \varepsilon\,\mathrm{div}_x(A_1^1 \nabla_x V_1) - \varepsilon\,\mathrm{div}_x(A_1^1 \nabla_y V_2) - \\ - \varepsilon\,\mathrm{div}_y(A_1^1 \nabla_x V_2) - \varepsilon\,\mathrm{div}_y(A_1^1 \nabla_y V_3) = m_\mu^1\,(z\,\varrho^1 u_0 + \varphi^1 u_1) + \, r_\mu^1\, F \end{gathered} \tag{5}$$

при $y = x/\varepsilon$ і $x \in \Omega$, де, наприклад, за визначенням $m_\mu^1 = m_1(y)$ для $y \in Y_1$ та $m_\mu^1 = \mu\, m_0(y)$ для $y \in Y_0$. Нагадаємо, що розглядається випадок $\sigma = 1$.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^{-1} в асимптотичній рівності (5) маємо

$$-\,\mathrm{div}_y(A_1^1(y)\nabla_y V_1(x, y)) = \mathrm{div}_y(A_1^1(y)\nabla_x V(x) + A_1^1(y)\, b^1(y) G(x)). \tag{6}$$

Така рівність буде виконана, якщо обрати $V_1 = N_a(y)\nabla_x V(x) + N_b(y)G(x)$ та визначити вектор функції $N_a(y)$ і $N_b(y)$ як 1-періодичні розв'язки задач

$$-\operatorname{div}_y(A_1^1\nabla_y N_a) = \operatorname{div}_y A_1^1, \quad -\operatorname{div}_y(A_1^1\nabla_y N_b) = \operatorname{div}_y A_1^1\, b^1. \tag{7}$$

Відомо [1, 2], що таки розв'язки задач (7) існують і визначені з точністю до сталих, які фіксуватимемо умовами $\int_Y N_a(y)\,dy = 0$ та $\int_Y N_b(y)\,dy = 0$.

Таким чином, у рівності (6) вдалося розділити змінні x та y і ці рівності виконані для всіх x та y, зокрема, при $y = x/\varepsilon$. За такого вибору V_1 коефіцієнти при ε^{-1} в асимптотичній рівності (5) дорівнюють нулю.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0 в асимптотичній рівності (5) маємо

$$-\operatorname{div}_y(A_1^1\nabla_y V_2) = \operatorname{div}_x\big((A_1^1 + A_1^1\nabla_y N_a)\nabla_x V + (A_1^1 b^1 + A_1^1\nabla_y N_b)G\big) + \tag{8}$$
$$+\operatorname{div}_y\big(A_1^1 N_a\nabla_x^2 V + A_1^1 N_b\nabla_x G\big) + m_\mu^1\varrho^1 z\, u_0 + m_\mu^1\varphi^1 u_1 + r_\mu^1 F - m_\mu^1 z^2 V,$$

де було враховано в очевидних позначеннях, що $V_1 = N_a\nabla_x V + N_b G$.

За аналогією з (6) розглянемо цю рівність як 1-періодичну задачу для $V_2 = V_2(x,y)$ при фіксованому $x \in \Omega$. Відомо [2], що ця задача є коректною тоді і лише тоді, коли права частина ортогональна 1 у $L^2(Y)$ і тому

$$m\, z^2\, V - \operatorname{div}_x A(\nabla_x V) = \operatorname{div}_x B\, G + m_\varrho z\, u_0 + m_\varphi u_1 + rF, \tag{9}$$

де сталі та матриці зі сталими компонентами визначено такими рівностями

$$m = \int_Y m_\mu^1(y)\,dy = \mu\int_{Y_0} m_0(y)\,dy + \int_{Y_1} m_1(y)\,dy \equiv \mu\, m^0 + m^1,$$

$$r = \int_Y r_\mu^1(y)dy, \quad m_\varrho = \int_Y m_\mu^1(y)\varrho^1(y)dy, \quad m_\varphi = \int_Y m_\mu^1(y)\varphi^1(y)dy, \tag{10}$$

$$A = \int_Y \big(A_1^1(y) + A_1^1(y)\nabla_y N_a(y)\big)dy, \quad B = \int_Y \big(A_1^1(y)b^1(y) + A_1^1(y)\nabla_y N_b(y)\big)dy.$$

Рівність (9) визначає осереднену задачу зі сталими коефіцієнтами для задачі (1). Дійсно, застосовуючи зворотне перетворення Лапласа до цієї рівності маємо для $v = v(t,x)$ таку осереднену початково-крайову задачу

$$m\, v_{tt}'' - \operatorname{div} A\,(\nabla v) = r\, f + \operatorname{div} B\, g \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{11}$$
$$v\big|_{t=0} = m^{-1} m_\varrho u_0, \ \ v_t'\big|_{t=0} = m^{-1} m_\varphi u_1 \ \text{ в } \Omega, \ \ v = 0 \ \text{ на } \partial\Omega\times(0,T),$$

оскільки $m\left(z^2\, V - z\, v\big|_{t=0} - v_t'\big|_{t=0}\right)$ збігається з перетворенням Лапласа від другої похідної $m\, v_{tt}''$. Відзначимо також, що $A = B$ у разі коли $b^\varepsilon = E$.

Відомо [2], що матриця A еліптична і тому єдиний розв'язок задачі (11) існує і є регулярним для регулярних даних. Отже, визначено два доданки в асимптотичному наближенні (3). Для визначення третього доданку $V_2(x,y)$ віднімемо від (8) рівність (9) для перетворення Лапласа $\widehat{v} = V$ від розв'язку задачі (11). Тоді, у природних позначеннях, отримуємо

$$-\operatorname{div}_y\big(A_1^1\nabla_y V_2\big) = \Big(\operatorname{div}_y A_1^1 N_a + \widetilde{A}\Big)\nabla_x^2 V + \Big(\operatorname{div}_y A_1^1 N_b + \widetilde{B}\Big)\nabla_x G + \tag{12}$$
$$+\widetilde{m}_\varrho z\, u_0 + \widetilde{m}_\varphi u_1 + \widetilde{r}\, F - \widetilde{m}\, z^2\, V,$$

де 1-періодичні матричні функції та 1-періодичні функції

$$\widetilde{A} = A_1^1 + A_1^1 \nabla_y N_a - A, \qquad \widetilde{B} = A_1^1 b^1 + A_1^1 \nabla_y N_b - B,$$

$$\widetilde{m}_\varrho = m_\mu^1 \varrho^1 - m_\varrho, \;\; \widetilde{m}_\varphi = m_\mu^1 \varphi^1 - m_\varphi, \;\; \widetilde{r} = r_\mu^1 - r, \;\; \widetilde{m} = m_\mu^1 - m$$

є такими, що їх компоненти і самі функції ортогональні 1 у просторі $L^2(Y)$.

Таким чином, рівність (12) і тому рівність (8) є виконаними, якщо обрати

$$V_2 = N_a^1(y) \nabla_x^2 V(x) + N_b^1(y) \nabla_x G(x) + \tag{13}$$

$$+ N_\varrho(y) z\, u_0(x) + N_\varphi(y)\, u_1(x) + N_r(y) F(x) - N_m(y)\, z^2\, V(x),$$

та визначити, наприклад, функції N_r і N_m як 1-періодичні розв'язки задач

$$-\operatorname{div}_y(A_1^1 \nabla_y N_r) = \widetilde{r}, \quad \operatorname{div}_y(A_1^1 \nabla_y N_m) = \widetilde{m}. \tag{14}$$

Відомо [2], що таки розв'язки задач (14) існують і визначені з точністю до сталих, які фіксуватимемо умовами $\int_Y N_r(y)\, dy = 0$ та $\int_Y N_m(y)\, dy = 0$. Аналогічно, можна визначити 1-періодичні функції $N_\varrho(y)$, $N_\varphi(y)$ та матричні функції $N_a^1(y)$, $N_b^1(y)$ у рівності (13). За такого вибору V_2 усі коефіцієнти при ε^0 в асимптотичній рівності (5) дорівнюють нулю.

Отже, асимтотична рівність (5) виконана з точністю до $O(\varepsilon)$, принаймні для досить регулярних даних та $V_3 = 0$ у визначенні (3). Тому асимптотичне розвинення $U_a(x, x/\varepsilon)$ наближає також рівняння задачі (2) з точністю до $O(\varepsilon)$. Слідуючи [3, 4] і використовуючи зворотне перетворення Лапласа від $U_a(x, x/\varepsilon)$ можна перевірити енергетичними методами, що з останнього твердження випливає, наприклад, така оцінка точності

$$\|u - v\|^2_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu\, \|u - v\|^2_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C\, \varepsilon, \tag{15}$$

де u є розв'язком задачі (1), v є розв'язком осередненої задачі (11) і стала C не залежить від μ і ε при $0 < \mu \le 1$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідного ε_0.

Крім того, для випадку малих μ можна вивести таку оцінку точності

$$\|u - v_0\|^2_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu\, \|u - v_0\|^2_{C^0([0,T]; L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \le C \left(\varepsilon + \mu^2\right), \tag{16}$$

де u є розв'язком задачі (1), v_0 є розв'язком задачі (11) при $\mu = 0$ і стала C не залежить від μ і ε при $0 < \mu \le \mu_0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ для відповідних μ_0 і ε_0.

Можна також визначити $V_3 = V_3(x, x/\varepsilon)$ в асимптотичному наближенні (3) так, щоб $U_a(x, x/\varepsilon)$ наближало рівняння задачі (2) з точністю до $O(\varepsilon^2)$. Однак це не призводить до покращення показника степені ε в оцінках точності (15) і (16), оскільки доданок $V_1 = N_a \nabla_x V + N_b\, G$ з розкладання (3) може не задовольняти однорідним крайовим умовам на межі $\partial\Omega$. Насправді для перевірки наведених оцінок точності достатньо обмежитися випадком $V_2 = 0$ та $V_3 = 0$ у визначенні (3). До того ж, використовувати безпосередньо $V_2 = V_2(x, x/\varepsilon)$ у перевірці таких оцінок не зручно, оскільки після застосування зворотного перетворення к (13) у цій рівності виникають таки дельта-функції $(N_\varrho - m^{-1} m_\varrho N_m)\, \delta_t'(t)\, u_0$ та $(N_\varphi - m^{-1} m_\varphi N_m)\, \delta(t)\, u_1$.

Для усунення таких дельта-функцій з цієї рівності можна представити асимптотичне наближення для розв'язку задачі (1) у вигляді $v_a = u_a + \varepsilon^2 w''_{tt}$, де u_a позначає зворотне перетворення Лапласа від U_a з визначення (3) при $V_3 = 0$, а w задовольняє початковим умовам

$$w\big|_{t=0} = -(N_\varrho - m^{-1} m_\varrho N_m)\, u_0, \;\; w'_t\big|_{t=0} = -(N_\varphi - m^{-1} m_\varphi N_m)\, u_1 \;\text{ в }\; \Omega$$

та перетворення Лапласа від w''_{tt} задовольняє рівняння задачі (2) з точністю до $O(\varepsilon)$. Таке w нескладно визначити і $w = 0$ тільки, якщо $\varrho = \varphi = 1$. Проте, таке уточнення не покращує оцінки точності (15) і (16). Крім того, використовуючи прості асимптотичні розвинення можна довільно поліпшити показник степені малого параметра μ в оцінці (16) відповідно до [4].

Таким чином, при моделюванні хвильових процесів у пористих середовищах замість розв'язання задачі (1) (наприклад, чисельного) можна розв'язувати осереднену задачу (11) з гарантованою точністю для малих ε. Природно, що чисельне розв'язання задачі (1) значно складніше розв'язання задачі (11), оскільки потрібна дуже дрібна розрахункова сітка, щоб врахувати геометрію дуже великого числа блоків в області Ω.

3. Сингулярні асимптотичні розвинення розв'язків

Припустимо далі, що σ є малим параметром у задачі (1). У такому випадку втрачається гіперболічність задачі (1) на частині області Ω_0^ε, яка відповідає блокам. Це призводить до необхідності заміни 1-періодичних задач (7) і (14) (які прийнято називати задачами на комірці) на задачі Неймана на частині комірці Y_1, що відповідає розламам.

У зв'язку з цим нагадаємо наступне твердження про розв'язання таких проблем. Це твердження добре відоме у разі обмежених коефіцієнтів та гладкої межі $\Gamma = \partial Y_1$ (як підмноговида n-вимірного тора). Для липшицевих коефіцієнтів та межі це твердження доведено в [10].

Лема 1. *Нехай $V \in L^2(Y_1)$, $W \in H^{-1/2}_{per}(\Gamma)$ і $D \in L^2(Y_1)^n$ є такими, що*

$$\int_{Y_1} V(y)\, dy = \int_\Gamma W(s)\, ds,$$

де Y_1 розглядається як підмноговид n-вимірного тора. Тоді існує єдиний розв'язок $U \in H^1_{per}(Y_1)/\mathbb{R}$ наступної 1-періодичної проблеми Неймана:

$$-\, div_y(A_1 \nabla_y U) = V + div_y D \;\text{ в }\; Y_1, \quad -\Upsilon\cdot(A_1 \nabla_y U) = W + \Upsilon\cdot D \;\text{ на }\; \Gamma,$$

де Υ – зовнішня нормаль до Γ та $\Upsilon\cdot D$ – скалярне множення Υ на D.

Відповідно до припущень область Ω складена з двох областей Ω_0^ε і Ω_1^ε, які розділені загальною межею $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_1^\varepsilon \setminus \partial\Omega$. Тому, слідуючи [2], задачу (1) можна перезаписати в еквівалентному вигляді як початково-крайову задачу з умовами спряження на межі розділу цих областей:

$$\begin{gathered}
\mu\, m_0^\varepsilon\, u''_{tt} - \sigma \operatorname{div} A_0^\varepsilon\, (\, \nabla u + b_0^\varepsilon\, g\,) = \mu\, r_0^\varepsilon\, f \quad \text{в} \quad \Omega_0^\varepsilon \times (0,T),\\
m_1^\varepsilon\, u''_{tt} - \operatorname{div} A_1^\varepsilon\, (\, \nabla u + b_1^\varepsilon\, g\,) = r_1^\varepsilon\, f \quad \text{в} \quad \Omega_1^\varepsilon \times (0,T), \qquad (17)\\
u\big|_{t=0} = \varrho^\varepsilon u_0, \;\; u'_t\big|_{t=0} = \varphi^\varepsilon u_1 \;\text{ в }\; \Omega, \;\; u = 0 \;\text{ на }\; \partial\Omega \times (0,T),\\
\Upsilon_\varepsilon \cdot (\, A_1^\varepsilon \nabla u + A_1^\varepsilon\, b_1^\varepsilon\, g\,) = \sigma\, \Upsilon_\varepsilon \cdot (\, A_0^\varepsilon \nabla u + A_0^\varepsilon\, b_0^\varepsilon\, g\,) \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon \times (0,T)
\end{gathered}$$

и $u \in H_0^1(\Omega)$ для майже всіх $t \in (0,T)$. Остання рівність означає неперервність потоків на внутрішній межі (поверхні контакту середовищ, що розглядаються). У такій рівності, наприклад, слід $\Upsilon_\varepsilon\cdot(A_1^\varepsilon\nabla u + A_1^\varepsilon b_1^\varepsilon g)$ у точці $x_0 \in \Gamma_\varepsilon$ обчислюється як граничне значення при $x \to x_0$ функції $\Upsilon_\varepsilon\cdot(A_1^\varepsilon\nabla u + A_1^\varepsilon b_1^\varepsilon g)$, яка розглядається у внутрішніх точках $x \in \Omega_1^\varepsilon$. Тут і надалі Υ_ε позначає зовнішню нормаль до локально липшицевої межі Γ_ε та введено позначення $m_0^\varepsilon = m_0(x/\varepsilon)$, $A_0^\varepsilon = A_0(x/\varepsilon)$, $\ldots$, $r_1^\varepsilon = r_1(x/\varepsilon)$.

Еквівалентна форма (17) для задачі (1) точно пояснює, що розглядаються середовища з малими коефіцієнтами щільності та проникності на частини Ω_0^ε при малих μ та σ. Зрозуміло, що можна помножити рівняння у задачі (17) на σ^{-1} та розглядати випадок великих коефіцієнтів щільності та проникності на частини Ω_1^ε при малих σ та $\mu = \sigma$. Відповідно, помножуючи ці рівняння на $\sigma^{-1/2}$ можна розглядати випадок малих коефіцієнтів на Ω_0^ε і великих на Ω_1^ε при малих σ та $\mu = \sigma$. Можливі і інші варіанти при множенні на $\mu^{-\kappa}$. Звичайно, що такі множення не впливають на остаточний вид асимптотичних розвинень розв'язків задачі (1).

Застосовуючи перетворення Лапласа до задачі (17) в позначеннях з (2), маємо для $U \in H_0^1(\Omega)$ еквівалентну задачу з комплексним параметром

$$\begin{gathered}\mu\, m_0^\varepsilon\, z^2\, U - \sigma \mathrm{div} A_0^\varepsilon\,(\,\nabla U + b_0^\varepsilon G\,) = \mu\, m_0^\varepsilon\,(z\,\varrho^\varepsilon u_0 + \varphi^\varepsilon u_1) + \mu\, r_0^\varepsilon\, F \ \text{ в } \ \Omega_0^\varepsilon,\\ m_1^\varepsilon\, z^2\, U - \mathrm{div} A_1^\varepsilon\,(\,\nabla U + b_1^\varepsilon G\,) = m_1^\varepsilon\,(z\,\varrho^\varepsilon u_0 + \varphi^\varepsilon u_1) + r_1^\varepsilon\, F \quad \text{в} \quad \Omega_1^\varepsilon, \qquad (18)\\ \Upsilon_\varepsilon\cdot(\,A_1^\varepsilon\nabla U \,+ A_1^\varepsilon\, b_1^\varepsilon\, G\,) = \sigma\,\Upsilon_\varepsilon\cdot(\,A_0^\varepsilon\nabla U \,+ A_0^\varepsilon\, b_0^\varepsilon\, G\,) \quad \text{на} \quad \Gamma_\varepsilon.\end{gathered}$$

У відповідності з [8] для побудови асимтотики розв'язку задачі (18) слід передусім описати ядро оператора старшого порядку на 1-періодичних функціях при $\varepsilon = 1$. Для першого рівняння (18) таке ядро є тривіальним, наприклад, при $\sigma = \varepsilon^2$, а для другого рівняння ядро утворено функціями, які є кратними 1. Тому асимптотику на множині Ω_1^ε будемо шукати у вигляді (3) при $V_3 = 0$, а для визначення асимптотики на множині Ω_0^ε додамо в (3) функцію $V_0 = V_0(x, x/\varepsilon)$, яка дорівнює нулю на $\overline{\Omega}_1^\varepsilon$. Отже, маємо

$$U_a = V(x) + \varepsilon\, V_1(x, x/\varepsilon) + \varepsilon^2 V_2(x, x/\varepsilon) + V_0(x, x/\varepsilon). \qquad (19)$$

Зазначимо, що вибір форми першого доданку, що залежить тільки від x, якраз пов'язаний з тим, що ядро утворене функціями, які є кратними 1.

Підставимо рівність (19) замість U до другого рівняння з (18) та врахуємо (4). Тоді, зберігаючи лише суттєві для подальшого доданки, маємо в точності асимптотичну рівність (5), що розглядається при $y = x/\varepsilon$ і $x \in \Omega_1^\varepsilon$. Аналогічно, для умов спряження з (18) отримуємо

$$\begin{gathered}\Upsilon\cdot(A_1\nabla_y V_1 + A_1\nabla_x V + A_1 b_1 G + \varepsilon A_1\nabla_y V_2 + \varepsilon A_1 \nabla_x V_1) = \qquad (20)\\ = \varepsilon\,\Upsilon\cdot(\vartheta A_0\nabla_y V_0 + \varepsilon\,\vartheta A_0\nabla_x V_0 + \varepsilon\,\vartheta A_0\nabla_x V + \varepsilon\,\vartheta A_0\, b_0\, G + \varepsilon\,\vartheta A_0 \nabla_y V_1)\end{gathered}$$

при $y = x/\varepsilon$ і $x \in \Gamma_\varepsilon$, де $\vartheta = \sigma/\varepsilon^2$ розглядається як параметр.

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^{-1} в асимптотичній рівності (5) маємо рівняння (6). Відповідно, коефіцієнт при ε^0 в (20) можна записати у формі

$$-\Upsilon\cdot(A_1\nabla_y V_1) = \Upsilon\cdot(A_1\nabla_x V + A_1 b_1 G) \quad \text{при} \ \ y = x/\varepsilon \ \text{ і } \ x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Таким чином, можна обрати $V_1 = N_a^1(y)\nabla_x V(x) + N_b^1(y)G(x)$ та визначити вектор функції $N_a^1(y)$ і $N_b^1(y)$ як 1-періодичні розв'язки задач Неймана

$$- \operatorname{div}_y(A_1\nabla_y N_a^1) = \operatorname{div}_y A_1 \ \text{ в } \ Y_1, \quad -\Upsilon\cdot\big(A_1\nabla_y N_a^1\big) = \Upsilon\cdot A_1 \ \text{ на } \ \Gamma, \tag{21}$$
$$- \operatorname{div}_y(A_1\nabla_y N_b^1) = \operatorname{div}_y A_1\, b_1 \ \text{ в } \ Y_1, \ \ -\Upsilon\cdot\big(A_1\nabla_y N_b^1\big) = \Upsilon\cdot A_1\, b_1 \ \text{ на } \ \Gamma,$$

В силу леми 1 таки розв'язки задач (21) існують і визначені з точністю до сталих, які фіксуватимемо умовами $\int_{Y_1} N_a^1(y)\,dy = 0$ та $\int_{Y_1} N_b^1(y)\,dy = 0$.

Продовжимо такі вектор функції на Y_0 як 1-періодичні розв'язки задач

$$- \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y N_a^1) = 0 \ \text{ в } \ Y_0, \quad N_a^1 = N_a^1 \ \text{ на } \ \overline{Y_1}, \tag{22}$$
$$- \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y N_b^1) = 0 \ \text{ в } \ Y_0, \quad N_b^1 = N_b^1 \ \text{ на } \ \overline{Y_1}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при ε^0 в асимптотичній рівності (5) маємо рівняння (8). Відповідно, коефіцієнт при ε^1 в (20) можна записати у формі

$$-\Upsilon\cdot(A_1\nabla_y V_2) = -\Upsilon\cdot(\,\vartheta A_0\nabla_y V_0) + \Upsilon\cdot\big(A_1 N_a^1\nabla_x^2 V + A_1 N_b^1\nabla_x G\big)$$

при $y = x/\varepsilon$ і $x \in \Gamma_\varepsilon$. За аналогією з (6) розглянемо рівняння (8) з такими крайовими умовами як 1-періодичну задачу для $V_2(x,y)$ при фіксованому $x\in\Omega$. В силу леми 1 така задача є коректною тоді і лише тоді, коли

$$m^1 z^2 V - \operatorname{div}_x A^1(\nabla_x V) = \operatorname{div}_x B^1 G + m_\varrho^1 z\, u_0 + m_\varphi^1 u_1 + r^1 F + \vartheta\int_\Gamma \Upsilon\cdot A_0\nabla_y V_0 ds. \tag{23}$$

Тут сталі m^1, m_ϱ^1, m_φ^1, r^1 та матриці A^1, B^1 зі сталими компонентами визначено рівностями (10), де інтеграли по Y замінено на інтеграли по Y_1.

Підставимо рівність (19) замість U до першого рівняння з (18) та врахуємо (4). Тоді, зберігаючи лише суттєві для подальшого доданки, отримуємо

$$\mu m_0 z^2 V_0 - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y V_0) = \mu r_0 F + \mu m_0(z\varrho u_0 + \varphi u_1) - \mu m_0 z^2 V \tag{24}$$

при $y = x/\varepsilon$ і $x \in \Omega_0^\varepsilon$, де $\vartheta = \sigma/\varepsilon^2$ розглядається як параметр. Така рівність буде виконана, якщо обрати $V_0 = V_0(z,x,y)$ у вигляді

$$V_0 = P_r(z,y)F(z,x) + P_\varrho(z,y)z\,u_0(x) + P_\varphi(z,y)u_1(x) - P_m(z,y)z^2V(z,x), \tag{25}$$

де P_r, P_ϱ, P_φ, P_m визначаються як 1-періодичні розв'язки таких задач

$$\begin{gathered}
\mu\, m_0(z^2 P_r - m_0^{-1} r_0) - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y P_r) = 0 \ \text{ в } \ Y_0, \quad P_r = 0 \ \text{ на } \ \overline{Y_1},\\
\mu\, m_0(z^2 P_\varrho - \varrho) - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y P_\varrho) = 0 \ \text{ в } \ Y_0, \quad P_\varrho = 0 \ \text{ на } \ \overline{Y_1},\\
\mu\, m_0(z^2 P_\varphi - \varphi) - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y P_\varphi) = 0 \ \text{ в } \ Y_0, \quad P_\varphi = 0 \ \text{ на } \ \overline{Y_1},\\
\mu\, m_0(z^2 P_m - 1) - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y P_m) = 0 \ \text{ в } \ Y_0, \quad P_m = 0 \ \text{ на } \ \overline{Y_1},
\end{gathered} \tag{26}$$

Зазначимо, що зворотне перетворення Лапласа від таких задач визначає еквівалентні нестаціонарні 1-періодичні задачі на комірці наступного виду

$$\begin{gathered}
\mu\, m_0(p_r)''_{tt} - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y\, p_r) = 0 \ \text{ в } \ Y_0\times(0,\infty),\\
p_r\big|_{t=0} = 0, \ \ (p_r)'_t\big|_{t=0} = m_0^{-1} r_0 \ \text{ в } Y_0, \ \ p_r = 0 \ \text{ на } \ \overline{Y_1}\times(0,\infty),\\
\mu\, m_0(p_\varrho)''_{tt} - \vartheta \operatorname{div}_y(A_0\nabla_y\, p_\varrho) = 0 \ \text{ в } \ Y_0\times(0,\infty),\\
p_\varrho\big|_{t=0} = 0, \ \ (p_\varrho)'_t\big|_{t=0} = \varrho(y) \ \text{ в } Y_0, \ \ p_\varrho = 0 \ \text{ на } \ \overline{Y_1}\times(0,\infty)
\end{gathered} \tag{27}$$

та p_φ, p_m є розв'язками аналогічних задач, де $\widehat{p}_r = P_r$, $\widehat{p}_\varrho = P_\varrho$, $\widehat{p}_\varphi = P_\varphi$, $\widehat{p}_m = P_m$ є перетвореннями Лапласа таких розв'язків. Добре відомо [9], що відповідні розв'язки задач (27) існують та визначені однозначно. Таким чином, функція $V_0 = V_0(z,x,y)$ є визначеною і рівність (24) має вигляд

$$\vartheta\,\mathrm{div}_y(A_0\nabla_y V_0) = \mu m_0(z^2P_r - m_0^{-1}r_0)F - \tag{28}$$
$$-\,\mu m_0(z^2P_m-1)z^2V + \mu m_0(z^2P_\varrho-\varrho)zu_0 + \mu m_0(z^2P_\varphi-\varphi)u_1.$$

Проінтегруємо цю рівність по Y_0 та частинами. Тоді отримуємо

$$-\,\vartheta\int\limits_\Gamma \Upsilon\cdot A_0\nabla_y V_0\,ds = \mu S_rF - \mu S_m(z^2V - (m_\varrho^1/m^1)z\,u_0 - (m_\varphi^1/m^1)u_1) + \tag{29}$$
$$+\,\mu(S_\varrho - (m_\varrho^1/m^1)S_m)z\,u_0 + \mu(S_\varphi - (m_\varphi^1/m^1)S_m)u_1,$$

де

$$S_r = \int\limits_{Y_0} m_0(z^2P_r - m_0^{-1}r_0)dy, \quad S_m = \int\limits_{Y_0} m_0(z^2P_m-1)dy$$

та аналогічні рівності для S_ϱ і S_φ. Зворотне перетворення Лапласа від таких функцій, що залежать тільки від $z\in\mathbb{C}_0$, визначається рівностями

$$s_r = \int\limits_{Y_0} m_0(p_r)''_{tt}dy,\ \ s_m = \int\limits_{Y_0} m_0(p_m)''_{tt}dy,\ \ s_\varrho = \int\limits_{Y_0} m_0(p_\varrho)''_{tt}dy,\ \ s_\varphi = \int\limits_{Y_0} m_0(p_\varphi)''_{tt}dy,$$

що залежать тільки від $t\in[0,\infty)$, де p_r, p_m, p_ϱ, p_φ є розв'язками задач (27).

Рівність (23) з урахуванням (29) визначає осереднену проблему для задачі (1). Дійсно, застосовуючи зворотне перетворення Лапласа до цієї рівності маємо для $v = v(t,x)$ таку осереднену початково-крайову задачу

$$m^1\,v''_{tt} - \mu\,s_m*(v''_{tt}) - \mathrm{div}A^1(\nabla v) = r^1f - \mu\,s_r*f + \mathrm{div}B^1g +$$
$$+\,\mu(s_\varrho - (m_\varrho^1/m^1)s_m)'_t\,u_0 + \mu(s_\varphi-(m_\varphi^1/m^1)s_m)\,u_1 \quad \text{в} \quad \Omega\times(0,T), \tag{30}$$
$$v\big|_{t=0} = (m_\varrho^1/m^1)u_0,\ \ v'_t\big|_{t=0} = (m_\varphi^1/m^1)u_1 \ \text{ в } \Omega,\ \ v=0 \ \text{ на } \partial\Omega\times(0,T),$$

де $*$ позначає оператор згортки відносно t, наприклад, за визначенням

$$s_m*(v''_{tt}) = \int_0^t s_m(t-\tau)(v''_{\tau\tau}(\tau,x))\,d\tau.$$

Відомо [2], що матриця A^1 є еліптичною. Для однорідних початкових умов в [4] доведено, що єдиний розв'язок такої задачі існує для фіксованого μ і є регулярним для регулярних f та g. Отже, визначено три доданки в (19). Для четвертого доданку $V_2(x,y)$ можна отримати визначення, яке аналогічне (13). Можна більш загально визначити $V_0 = V_0^0(x,y) + \varepsilon\,V_0^1(x,y)$ в (19). Однак, відповідна рівність для $V_0^1(x,y)$, яка аналогічна (25), міститиме шістнадцять доданків і буде дуже громіздкою. Зазначимо, що зворотне перетворення від наближення (19) для $V_2 = 0$ має таке представлення

$$v_a = v + \varepsilon N_a^{1\varepsilon}\nabla v + \varepsilon N_b^{1\varepsilon}g + p_r^\varepsilon*f + (\widetilde{p}_\varrho^\varepsilon)'_tu_0 + (\widetilde{p}_\varphi^\varepsilon)u_1 - p_m^\varepsilon*(v''_{tt})$$

відповідно (25), де $p_r^\varepsilon = p_r(t,x/\varepsilon)$, $p_m^\varepsilon = p_m(t,x/\varepsilon)$, $\widetilde{p}_\varrho^\varepsilon = p_\varrho^\varepsilon - (m_\varrho^1/m^1)\,p_m^\varepsilon$, $\widetilde{p}_\varphi^\varepsilon = p_\varphi^\varepsilon - (m_\varphi^1/m^1)\,p_m^\varepsilon$ визначаються задачами (27) і дорівнюють 0 на Ω_1^ε.

Для однорідних початкових умов слідуючи [3, 4] можна перевірити, що з останнього представлення випливає, наприклад, така оцінка точності

$$\|u - v\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega_1^\varepsilon))} + \mu \|u - v_a\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega_0^\varepsilon))} \leq C(\varepsilon + \sigma),$$

де u є розв'язком задачі (1), v є розв'язком осередненої задачі (30) і стала C не залежить від μ, σ і ε при $0 < \mu \leq 1$, $0 < \sigma \leq \sigma_0$ і $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Таку оцінку точності можна уточнити також для досить малих μ.

Таким чином, при моделюванні хвильових процесів у пористих середовищах замість розв'язання задачі (1) (наприклад, чисельного) можна розв'язувати осереднену задачу (30) з гарантованою точністю для малих ε і σ. Крім того, наведені оцінки точності відображають появу сильно осцилюючих доданків у розвиненні розв'язків задачі (1), що характеризує втрату енергії на блоках з низькою проникністю і може бути використане для проектування хвиле-поглинаючих композиційних матеріалів.

Робота виконана за підтримки Міністерства освіти і науки України: проєкт 0122U002026 та грант Міністерства освіти і науки України на перспективний розвиток наукового напряму «Математичні науки та природознавство» у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка.

Література

1. Bensoussan A., Lions J.-L., and Papanicolau G. Asymptotic analysis for periodic structures. North-Holland, Amsterdam 1978.
2. Bakhvalov N. S. and Panasenko G. P. Homogenization: averaging processes in periodic media. Kluwer, Dordrecht 1989.
3. Sandrakov G. V. The homogenization of nonstationary equations with contrast coefficients. *Doklady Mathematics.* 1997. Vol. 56:1. P. 586–589.
4. Sandrakov G. V. Homogenization of elasticity equations with contrasting coefficients. *Sbornik: Mathematics.* 1999. Vol. 190:12. P. 1749–1806. https://doi.org/10.1070/SM1999v190n12ABEH000443
5. Sandrakov G. V. Multiphase models of nonstationary diffusion in homogenization. *Comput. Math. Math. Phys.* 2004. Vol. 44:10. P. 1741–1756.
6. Sandrakov G. V. Multiphase homogenized diffusion models for problems with several parameters. *Izvestiya: Mathematics.* 2007. Vol. 71:6. P. 1193–1252. https://doi.org/10.1070/IM2007v071n06ABEH002387
7. Agranovich M. S. and Vishik M. I. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type. *Russian Math. Surveys.* 1964. Vol. 19:3. P. 53–157. https://doi.org/10.1070/RM1964v019n03ABEH001149
8. Sandrakov G. V. Averaging principles for equations with rapidly oscillating coefficients. *Mathematics of the USSR - Sbornik.* 1991. Vol. 68:2. P. 503–553. https://doi.org/10.1070/SM1991v068n02ABEH002111
9. Duvaut G. end Lions J.-L. Les inequations en mecanique et en physique. Dunod, Paris 1972.
10. Mitrea M., Taylor M. Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds. *J. Functional Analysis.* 1999. Vol. 163:2. P. 181–251. https://doi.org/10.1006/jfan.1998.3383

Надійшла: 25.09.2022 / Прийнята: 11.10.2022