Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЄФІМОВ ДАНИЛО ІГОРЕВИЧ

УДК 512.554.35

ДИСЕРТАЦІЯ
ЦЕНТРАЛІЗАТОРИ ЕЛЕМЕНТІВ В АЛГЕБРАХ ЛІ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ КІЛЕЦЬ МНОГОЧЛЕНІВ

111 математика

Подається на здобуття ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_______________ Єфімов Д.І.

Науковий керівник: **Петравчук Анатолій Петрович**, доктор фіз.-мат. наук, професор.

Київ — 2024

АНОТАЦІЯ

Єфімов Д.І. Централізатори елементів в алгебрах Лі диференціювань кілець многочленів. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2024.

Дисертаційна робота присвячена вивченню підалгебр та централізаторів елементів в алгебрах Лі диференціювань поліноміальних кілець над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль.

Нехай A — область цілісності над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, R — поле часток A. Диференціюванням алгебри A називається $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D : A \to A$, яке задовольняє рівності $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для усіх $f, g \in A$. Аналогічно визначаються диференціювання $\mathbb{K}$-алгебри R. Диференціювання алгебр A та R утворюють алгебри Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ та $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ над полем $\mathbb{K}$. Будь-яке диференціювання $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ єдиним чином може бути продовжене до диференціювання алгебри R.

Для будь-якого елемента $r \in R$ можна визначити диференціювання $rD \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ за правилом $rD(x) = r \cdot D(x), x \in R$. Позначимо через $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ лінійну оболонку (над полем R) множини $\{rD | r \in R, D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A\}$; $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ є алгеброю Лі. Для будь-якої підалгебри $L \subseteq R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ визначимо її ранг як розмірність над полем R векторного простору RL (породженого елементами вигляду $rD, r \in R, D \in L$). Нехай $F = F(L)$ — перетин усіх ядер диференціювань з підалгебри $L \subseteq R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. Підполе $F \subseteq R$ називається полем констант алгебри Лі L. Окрім того, RL та FL є підалгебрами алгебри Лі $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ (а також алгебрами Лі над полем F). Позначимо через $C_L(D)$ — централізатор елемента $D \in L$ в підалгебрі $L \subseteq R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$, тобто $C_L(D) = \{T \in L : [T, D] = 0\}$.

Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленів від n змінних над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ — алгебра раціональних функцій від n змінних над полем $\mathbb{K}$. Позначимо $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A = W_n(\mathbb{K})$

та $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R = \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$.

В роботі, зокрема, вивчались скінченновимірні розв'язні підалгебри $W_3(\mathbb{K})$ рангу 3 над $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$. Було доведено, що розв'язна скінченновимірна підалгебра $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$, яка має абелевий ідеал рангу 3 над R, ізоморфна підалгебрі загальної афінної алгебри Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. Якщо ж $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$ - розв'язна скінченновимірна підалгебра алгебри Лі рангу 3, яка має ідеал I рангу 2 над R й $F = F(I)$ - поле констант I в R, то алгебра Лі L вкладається в деяку підалгебру $\overline{L}$ алгебри Лі $\widetilde{W}_3(\mathbb{K})$ диференціювань поля раціональних функцій R. При цьому алгебра Лі $\overline{L}$ — розв'язна та є розширенням алгебри Лі розмірності 1 або 2 над $\mathbb{K}$ своїм ідеалом $F\overline{I} \subset \overline{L}$, де $\overline{I} = (RI) \cap L$. Ідеал $F\overline{I}$ має ранг 2 над полем R та може бути вкладений в $\mathrm{aff}_2(F)$.

В роботі досліджувались централізатори якобіанних диференціювань алгебри многочленів від двох змінних. Нехай $D_f \in W_2(\mathbb{K})$ — якобіанне диференціювання, породжене многочленом $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Маючи замкнений породжуючий для f многочлен $p \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$, був знайдений опис елементів централізатора $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ диференціювання D_f в алгебрі Лі $W_2(\mathbb{K})$. Окрім цього, у випадку, коли f — несталий многочлен, було доведено, що централізатор $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ є вільним модулем рангу 1 або 2 над підкільцем кільця $\mathbb{K}[p]$.

Були досліджені централізатори диференціювань $\mathbb{K}$-алгебр $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ та $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ в залежності від вигляду поля констант $F \subseteq R$. У випадку, коли поле констант має степінь трансцендентності 1 над полем $\mathbb{K}$, було знайдено, що централізатор $D \in \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ або є алгеброю Лі над полем $\operatorname{Ker}_R D = F$ скінченної розмірності k, або ж централізатор містить ідеал корангу 1 над полем R, який в свою чергу є алгеброю Лі над F розмірності $k-1$. Аналогічний опис отримали централізатори диференціювань алгебри A. Зокрема, коли F не містить несталих многочленів, централізатор в алгебрі Лі $W_n(\mathbb{K})$ має скінченну розмірність над $\mathbb{K}$. Також знайдені деякі результати, які стосуються централізаторів диференціювань вигляду $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, які називаютсья лінійними.

Досліджувалась трикутна алгебра Лі $u_n(\mathbb{K})$ диференціювань вигляду $D =$

$a_0\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_{n-1}\frac{\partial}{\partial x_n}$, де $a_0 \in \mathbb{K}, a_i \in P_i = [x_1, \ldots, x_i]$ для усіх $i = 1, \ldots, n$. Було показано, що ця алгебра є максимальною локально нільпотентною підалгеброю алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$. Також досліджувалась розв'язна алгебра Лі $s_n(\mathbb{K})$ диференціювань вигляду $D = (x_1a_0 + b_0)\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_na_n + b_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$, де $a_0, b_0 \in \mathbb{K}, a_i, b_i \in P_i$ для усіх $i = 1, \ldots, n$. Доведена максимальність $s_n(\mathbb{K})$ серед усіх розв'язних підалгебр Лі в $W_n(\mathbb{K})$.

Ключові слова: диференціювання, якобіанне диференціювання, лінійне диференціювання, централізатор диференціювання, поле констант, алгебра Лі, локально нільпотентна алгебра Лі, розв'язна алгебра Лі, загальна лінійна алгебра Лі, загальна афінна алгебра Лі, поліноміальне кільце, ідеал, трикутна алгебра Лі, максимальна розв'язна підалгебра, замкнений многочлен.

ABSTRACT

Danylo Yefimov Centralizers of elements in Lie algebras of derivations of polynomial rings. — Manuscript. The thesis for obtaining the Doctor of Philosophy degree on the speciality 111 Mathematics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv, MES of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation is devoted to studying subalgebras and centralizers of elements in Lie algebras of derivations of polynomial rings over algebraically closed field of characteristic zero.

Let A be an integral domain over the field $\mathbb{K}$ of characteristic zero, and let R be the field of fractions of A. The derivation of the algebra A is defined as a $\mathbb{K}$-linear mapping $D : A \to A$ that satisfies the equality $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ for all $f, g \in A$. The derivation of the $\mathbb{K}$-algebra R is defined in a similar fashion. The derivations of algebras A and R form Lie algebras $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ and $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ over the field $\mathbb{K}$. Any derivation $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ can be uniquely extended to a derivation of the algebra R. For any element $r \in R$, one can define the derivation $rD \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ according to the rule $rD(x) = r \cdot D(x)$, where $x \in R$. Let us denote the linear span (over the field R) of the set $rD \mid r \in R, D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ as $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$; $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ is a Lie algebra. For any subalgebra $L \subseteq R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$, we define its rank as the dimension (over the field R) of the vector space RL generated by elements of the form $rD, r \in R, D \in L$. Let $F = F(L)$ be the intersection of all kernels of derivations from the subalgebra $L \subseteq R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. The subfield $F \subseteq R$ is called the field of constants of the Lie algebra L. Additionally, RL and FL are subalgebras of the Lie algebra $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ (as well as Lie algebras over the field F). Let $C_L(D)$ be the centralizer of the element $D \in L$ in the subalgebra $L \subseteq R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$, i.e., $C_L(D) = T \in L : [T, D] = 0$.

Let $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ be the algebra of polynomials in n variables over an algebraically closed field $\mathbb{K}$ of characteristic zero. Let $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ be the algebra of rational functions in n variables over the field $\mathbb{K}$. Denote $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A = W_n(\mathbb{K})$ and $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R = \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$.

In the thesis, finite-dimensional solvable subalgebras $W_3(\mathbb{K})$ of rank 3 over $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$ have been studied, particularly. It has been proven that a solvable

finite-dimensional subalgebra $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$, which has an abelian ideal of rank 3 over R, is isomorphic to the subalgebra of the general affine Lie algebra $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. If, however, $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$ is a solvable finite-dimensional subalgebra of the Lie algebra of rank 3 with an ideal I of rank 2 over R and $F = F(I)$ is the field of constants of I in R, then the Lie algebra L can be embedded into a certain subalgebra $\overline{L}$ of the Lie algebra $\widetilde{W}_3(\mathbb{K})$ of derivations of the field of rational functions R. In this case, the Lie algebra $\overline{L}$ is solvable and it is an extension of a Lie algebra of dimension 1 or 2 over $\mathbb{K}$ by the ideal $F\overline{I} \subset \overline{L}$, where $\overline{I} = (RI) \cap L$. The ideal $F\overline{I}$ has rank of 2 over the field R and can be embedded into $\mathrm{aff}_2(F)$.

In the research, centralizers of Jacobian differentiations in the algebra of polynomials in two variables were also investigated. Let $D_f \in W_2(\mathbb{K})$ be a Jacobian derivation generated by the polynomial $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$. Given a closed generator for f as $p \in \mathbb{K}[x_1, x_2]$, a description of the elements of the centralizer $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ of the derivation D_f in the Lie algebra $W_2(\mathbb{K})$ has been found. Additionally, in the case where f is a non-constant polynomial, it has been proved that the centralizer $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ is a free module of rank 1 or 2 over the subring of the ring $\mathbb{K}[p]$.

Centralizers of derivations of $\mathbb{K}$-algebras $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ and $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ have been investigated depending on the structure of the field of constants $F \subseteq R$. In the case where the field of constants has transcendence degree 1 over the field $\mathbb{K}$, it has been found that the centralizer $D \in \widetilde{W}n(\mathbb{K})$ is either a Lie algebra over the field $\operatorname{Ker} RD = F$ of finite dimension k, or the centralizer contains an ideal of corank 1 over the field R, which, in turn, is a Lie algebra over F of dimension $k-1$. A similar description was obtained for the centralizers of derivations in the algebra A. Moreover, when F does not contain non-constant polynomials, the centralizer in the Lie algebra $W_n(\mathbb{K})$ has finite dimension over $\mathbb{K}$. Some results were also found concerning the centralizers of derivations of the form $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$, which are called linear derivations.

The triangular Lie algebra $u_n(\mathbb{K})$ of derivations of the form $D = a_0 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_{n-1} \frac{\partial}{\partial x_n}$, where $a_0 \in \mathbb{K}, a_i \in P_i = [x_1, \ldots, x_i]$ for all $i = 1, \ldots, n$, has been investigated. It has been shown that this algebra is a maximally locally nilpotent subalgebra

of the Lie algebra $W_n(\mathbb{K})$. The solvable Lie algebra $s_n(\mathbb{K})$ of derivations of the form $D = (x_1a_0+b_0)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_na_n+b_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$, where $a_0, b_0 \in \mathbb{K}, a_i, b_i \in P_i$ for all $i = 1, \ldots, n$, has been studied. The maximality of $s_n(\mathbb{K})$ has been proven among all solvable Lie subalgebras in $W_n(\mathbb{K})$.

Key words: derivation, Jacobian derivation, linear derivation, centralizer of a derivation, field of constants, Lie algebra, locally nilpotent Lie algebra, solvable Lie algebra, general linear Lie algebra, general affine Lie algebra, polynomial ring, ideal, triangular Lie algebra, maximal solvable subalgebra, closed polynomial.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні результати дисертації

1. Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients. Proc. Int. Geom. Cent. **14**(4), 257–270 (2022).

2. Chapovskyi, Y. Y., Efimov, D. I., Petravchuk, A. P.: Solvable Lie algebras of derivations of polynomial rings in three variables. Прикл. проблеми механіки і математики **16**, 7–13 (2018).

3. Efimov, D. I., Petravchuk, A. P., Sydorov, M. S.: Centralizers of Jacobian derivations. Algebra Discrete Math. **36**(1), 22-31 (2023).

4. Efimov, D. I., Sydorov, M. S., Sysak, K. Ya.: On maximality of some solvable and locally nilpotent subalgebras of the Lie algebra $W_n(K)$. Res. Math. **31**(2), 27-35 (2023).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. Chapovskyi, Y.Y., Efimov, D.I.: On centralizers of polynomial derivations. X All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians April 16–17 2021. Abstracts. – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute National Pedagogical Drahomanov University, National University of Kyiv-Mohyla Academy (2021). — p. 82.

2. Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields. International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928 - 18.12.2019). Odesa, Ukraine May 25-28, 2021. Abstracts, p. 113.

3. Efimov, D. I., Sydorov, M. S., Sysak, K. Ya.: Maximal solvable subalgebras of the Lie algebra $W_n(K)$. The international algebraic conference “At the End of the Year” 2022. December 27–28, 2022, Kyiv, Ukraine. Abstracts – Kyiv: Taras

Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, National University of Kyiv-Mohyla Academy (2022). — p. 18.

4. Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of linear derivations on polynomial rings. The 13th International Algebraic Conference in Ukraine. July 6–9, 2021. Book of abstracts – Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv (2021). — p. 27.

5. Efimov, D., Petravchuk, A., Sydorov, M.: Centralizers of jacobian derivations. The 14th Ukraine Algebra Conference. July 3-7, 2023. Book of abstracts – Sumy: Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko (2023). — p. 55.

Зміст

Перелік умовних позначень

$\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(A)$	алгебра Лі всіх диференціювань $\mathbb{K}$-алгебри A
$W(A)$	алгебра Лі $R\,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\,A$
$\mathrm{rank}_R\,L$	ранг алгебри Лі L над полем R
$\mathrm{Ker}\,D$	ядро диференціювання D (кільце або поле констант)
$\mathrm{LND}(A)$	множина всіх локально нільпотентних диференціювань алгебри A
$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$	алгебра многочленів від n змінних над полем $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$	алгебра раціональних функцій від n змінних над полем $\mathbb{K}$
$W_n(\mathbb{K})$	алгебра Лі всіх диференціювань алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
$\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$	алгебра Лі всіх диференціювань алгебри раціональних функцій $\mathbb{K}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$	централізатор диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ в алгебрі Лі $W_n(\mathbb{K})$
$u_n(\mathbb{K})$	алгебра Лі всіх трикутних диференціювань алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
D_f	диференціювання Якобі, індуковане многочленом $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	частинна похідна за змінною x_i в асоціативних алгебрах $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ та $\mathbb{K}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Вступ

Актуальність теми. Геометричні та алгебраїчні об'єкти, на яких задані векторні поля, або ж диференціювання, зустрічаються в багатьох математичних областях: диференціальна геометрія та теорія диференціальних (звичайних та з частинними похідними) рівнянь, алгебраїчна геометрія та комутативна алгебра, функціональний аналіз та теоретична фізика [10]. Важливим фактом є те, що векторні поля (диференціювання) утворюють алгебру Лі.

Наприклад, алгебра Лі $\Gamma(M)$ гладких векторних полів на гладкому дійсному многовиді M співпадає з алгеброю Лі диференціювань комутативно-асоціативного кільця гладких функцій $C^\infty(M)$. Нехай M — компактний многовид. Тоді існує взаємно однозначна відповідність між точками многовиду M та множиною всіх максимальних ідеалів алгебри Лі $\Gamma(M)$ (див., наприклад, [72]). З іншого боку, якщо M є тором класу C^ω, то алгебра Лі $\Gamma^\omega(M)$ дійсних аналітичних векторних полів на M є простою, тобто не містить нетривіальних ідеалів [36]. Більш того, якщо $m(M)$ — число зв'язних компонент дійсного C^ω-многовиду, $k(M)$ — число власних ідеалів алгебри Лі $\Gamma^\omega(M)$, то $k(M) = 2^{m(M)} - 2$; були також розроблені методи, які використовують замість максимальних ідеалів максимальні підалгебри скінченної корозмірності [32]. Отже, алгебраїчна структура алгебри Лі векторних полів є визначальною для структури гладкого многовиду M. Схожі результати також існують для інших геометричних об'єктів: наприклад, в роботі [73] досліджувалось питання особливих точок та гладкості афінного многовиду в контексті алгебр Лі диференціювань. Було встановлено, що афінний многовид X над полем $\mathbb{K}$ характеристики 0 з координатним кільцем A_X є гладким лише у випадку, коли Лі алгебра

$\operatorname{Der} A_X$ всіх $\mathbb{K}$-диференціювань на A_X є простою. Окрім цього, нормальні афінні многовиди X та X' ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\operatorname{Der} A_X$ та $\operatorname{Der} A_{X'}$ є ізоморфними алгебрами Лі.

Незважаючи на те, що тематика алгебр Лі диференціювань має геометричне походження й плідність геометричних підходів та інтерпретацій не викликають сумнівів, потужного розвитку ця теорія отримала в роботах математиків-алгебраїстів. Будова алгебр Лі диференціювань довільного асоціативного кільця вивчалась Н. Джекобсоном [40], К. Джордан, Д. Джорданом [41], [42], [43], А. Новіцкі [60], [61], А. Петравчуком [50], [63], [66], [67] та багатьма іншими дослідниками.

Цікавою для досліджень є $\mathbb{K}$-алгебра Лі $W_n(\mathbb{K})$, яка складається з усіх диференціювань кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ над полем $\mathbb{K}$. Зауважимо, що $W_n(\mathbb{K})$ є вільним модулем над кільцем $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$. Тоді централізатор $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ є підалгеброю $W_n(\mathbb{K})$, яка складається з усіх диференціювань, які комутують з D. Інформація про $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ може бути корисною в контексті наступної задачі. Кожне диференціювання (або векторне поле) $D \in W_n(\mathbb{C})$, що має вигляд $D = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$, визначає автономну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1}$$

з поліноміальними коефіцієнтами. Зауважимо, що множина стаціонарних точок потоку системи рівнянь (1) відповідає множині спільних нулів многочленів $f_1, \ldots, f_n$. Інформація про $\operatorname{Ker} D$ та $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ може бути дуже корисною для пошуку розв'язків (1) (див., наприклад, [57]). Множина елементів ядра $\operatorname{Ker} D$, які не є елементами поля $\mathbb{K}$, збігається з множиною перших інтегралів. Пошук перших інтегралів є важливою задачею у багатьох застосуваннях.

В даній дисертації вивчаються підалгебри та централізатори елементів алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$. Зокрема, вивчались скінченновимірні розв'язні підалгебри

$W_3(\mathbb{K})$ рангу 3 над $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$. Як відомо, задача класифікації усіх підалгебр в $W_3(\mathbb{K})$ є відкритою математичною проблемою.

Окрім цього, досліджувались централізатори якобіанних диференціювань алгебри многочленів від двох змінних; в такому випадку усі якобіанні диференціювання формують алгебру Лі, яка співпадає з множиною усіх локально нільпотентих диференціювань. Останні мають ряд застосувань у теорії інваріантів, алгебраїчній геометрії, теорії диференціальних рівнянь. Вивчалися централізатори деяких лінійних диференціювань. Зауважимо, що усі лінійні диференціювання формують алгебру Лі, ізоморфну загальній лінійній алгебрі Лі, яка є надзвичайно важливою в багатьох аспектах. Також вивчалися централізатори загальних диференціювань, поля констант яких мають степінь трансцендентності 1. Цікаво, що питання скінченнопородженості ядер диференціювань (як алгебр над полем) тісно пов'язане з Чотирнадцятою проблемою Гільберта, ряд прикладів за цією темою був наданий за допомогою трикутних диференціювань.

В останньому розділі дисертації було доведено, що алгебри Лі, які утворені усіма трикутними диференціюваннями, є максимальними за включенням локально нільпотентними підалгебрами в $W_n(\mathbb{K})$. Досліджувались також розв'язні алгебри Лі $s_n(\mathbb{K})$, які містять трикутні. Доведено, що $s_n(\mathbb{K})$ є максимальними розв'язними в $W_n(\mathbb{K})$.

Як бачимо, питання, які розглядаються в даній дисертації та окремих її розділах, пов'язані з багатьма областями математики, які зусиллями багатьох дослідників динамічно розвиваються, збагачуються новими результатами та ідеями. Тому тематика дисертації безумовно є актуальною.

Зв'язок дисертаційної роботи з науковими програмами. Дисертаційна робота є частиною досліджень кафедри алгебри і комп'ютерної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка з науково-дослідної теми №21БНН-06 "Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напряму "Математичні науки і природничі науки"" (номер державної реєстрації 0121U112941).

Мета і завдання дослідження. Метою дослідження є вивчення властивостей підалгебр та опис централізаторів елементів алгебр Лі диференціювань кілець многочленів.

Об'єктом дослідження є алгебра Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ всіх диференціювань алгебри A у випадку, коли A є алгеброю многочленів від n змінних над алгебраїчно замкненим полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль.

Предметом дослідження є централізатори елементів алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, її підалгебри.

Методи дослідження — методи теорії алгебр Лі, методи лінійної алгебри і комутативної алгебри, методи з диференціальної алгебри.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації одержано наступні основні нові результати:

- досліджені скінченновимірні розв'язні алгебри Лі $\mathbb{K}$-диференціювань кільця многочленів з абелевими ідеалами рангу 2 та 3;
- описані централізатори диференціювань алгебри многочленів та алгебри раціональних функцій, у яких степінь трансцендентності поля констант над основним полем дорівнює 1;
- отримані умови про рівність централізаторів в алгебрі лінійних диференціювань та в $W_n(\mathbb{K})$ для лінійних діагоналізованих диференціювань;
- отримані необхідні та достатні умови того, що диференціювання комутує з заданим якобіанним диференціюванням алгебри многочленів від двох змінних;
- доведено, що централізатори якобіанних диференціювань D_f алгебри многочленів від двох змінних є вільними модулями рангу 1 або 2 над ядром диференціювання D_f в алгебрі $\mathbb{K}[x, y]$;
- доведено, що трикутна алгебра Лі $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$, а алгебра Лі $s_n(\mathbb{K})$ є максимальною розв'язною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертаційній роботі результати мають теоретичний характер і можуть бути використані в дослідженнях з диференціальної алгебри, теорії кілець, теорії алгебр Лі, в суміжних розділах математики таких, як теорія диференціальних рівнянь, математична фізика та алгебраїчна геометрія.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертації, які виносяться на захист, одержані автором самостійно і опубліковані в чотирьох роботах, з яких чотири у співавторстві [13, 14, 24, 27]. В усіх роботах, опублікованих у співавторстві, внески авторів є рівними і нероздільними. Визначення напрямку досліджень та постановка задач належать науковому керівнику А. П. Петравчуку.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися

- on X All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians (April 16–17 2021, Kyiv, Ukraine);
- on International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk. (Odesa, Ukraine May 25-28, 2021);
- on The international algebraic conference "At the End of the Year" 2022 (December 27–28, 2022, Kyiv, Ukraine);
- on The 13th International Algebraic Conference in Ukraine. (July 6–9, 2021, Kyiv, Ukraine);
- on The 14th Ukraine Algebra Conference. (July 3-7, 2023, Sumy, Ukraine).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 9 наукових працях, з них одна стаття в науковому фаховому виданні України [14], три статті, опубліковані у виданнях, включених до наукометричої бази даних Scopus [13, 24, 27], і п'ять тез доповідей у матеріалах міжнародних конференцій [11, 12, 15, 25, 26].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, змісту, переліку умовних позначень, вступу, огляду літератури, означень та допоміжних результатів, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку. Повний обсяг роботи — 103 сторінки, обсяг основного тексту дисертації — 94 сторінки. Список використаних джерел викладений на 8-ми сторінках і містить 79 найменувань.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи, зазначено зв'язок з науковими програмами, встановлено об'єкт, предмет та методи дослідження, визначено його мету і завдання. Крім того, розкрито наукову новизну і практичне значення отриманих результатів, вказано особистий внесок здобувача.

Окремий розділ присвячений **огляду літератури**, пов'язаною з тематикою дисертації. Тут вказано ким і коли були отримані перші результати, вказані задачі, споріднені з проблематикою дослідження, та автори, які ними займалися.

В розділі **"Означення та допоміжні результати"** наведені основні означення, приклади та попередні результати, що широко застосовуються в подальшому викладі матеріалу. Нагадаємо деякі з них.

Нехай $\mathbb{K}$ — поле, A — довільна $\mathbb{K}$-алгебра (можливо, неасоціативна; наприклад, алгебра Лі). *Диференціюванням (або просто $\mathbb{K}$-диференціюванням)* алгебри A називається $\mathbb{K}$-лінійне відображення $D\colon A \to A$, яке задовольняє правилу Лейбніца, а саме: для усіх $x, y \in A$

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Множина $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ усіх диференціювань алгебри A є векторним простором над $\mathbb{K}$. Операція комутування, задана формулою

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1,$$

$D_1, D_2 \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$, визначає на просторі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ структуру алгебри Лі, яку називають *алгеброю Лі диференціювань* $\mathbb{K}$-алгебри A.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль та A — асоціативно-комутативна $\mathbb{K}$-алгебра з одиницею й без дільників нуля. Для області цілісності A коректним чином визначене її поле часток $\mathrm{Frac}(A) =: R$, яке також буде $\mathbb{K}$-алгеброю. Усі диференціювання D алгебри A єдиним чином продовжуються до диференціювання алгебри R. Визначимо для будь-яких $a \in A$ та $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ відображення $aD : R \to R$ за правилом $aD(x) = a \cdot D(x)$ для усіх $x \in A$. Це відображення також буде диференціюванням алгебри A. Отже, $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ є A-модулем.

Нехай $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$. Продовживимо D до диференціювання $\mathbb{K}$-алгебри R для усіх $r \in R$. Можна визначити диференціювання $rD \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$ за вже відомим правилом: $rD(x) = r \cdot D(x), x \in R$. Позначимо через $R\,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ лінійну оболонку (над полем R) множини $\{rD | r \in R, D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A\}$. Простір $R\,\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ замкнений відносно операції комутування, а тому може бути розглянутий як алгебра Лі; позначимо цю алгебру Лі через $W(A)$. Зауважимо, що R-простори $W(A)$ та $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$, взагалі кажучи, не будуть алгебрами Лі над R відносно введенної операції комутування.

Нехай L — підалгебра алгебри Лі $W(A)$, RL — лінійна оболонка над полем R елементів вигляду $rD, r \in R, D \in L$. Рангом L називатимемо розмірність векторного простору RL над полем R.

Нехай $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} R$. Нагадаємо, що ядром відображення D називається $\mathrm{Ker}\, D = \{r \in R | D(r) = 0\}$. Ядро диференціювання R є підполем R, яке ще має іншу назву — *поле констант*. Полем констант $F = F(L)$ називається перетин

$$F = \bigcap_{D \in L} \mathrm{Ker}\, D.$$

Визначимо FL як лінійну оболонку множини диференціювань вигляду fD, де $f \in F, D \in L$. $\mathbb{K}$-простори RL та FL утворюють підалгебри Лі (над $\mathbb{K}$) в $W(A)$. Окрім цього, вони є алгебрами Лі над полем F.

В **розділі 1** вивчаються скінченновимірні підалгебри L алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$, які мають ранг 3 над полем раціональних функцій $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$ та абелевий ідеал корангу 0 або 1.

В підрозділі 1.1 встановлений результат, який характеризує підалгебри, які мають абелевий ідеал рангу 3.

Теорема 1.1.5. *Нехай L - розв'язна підалгебра $W_3(\mathbb{K})$. Якщо L має абелевий ідеал I рангу* 3 *над R, то тоді L ізоморфна деякій розв'язній підалгебрі загальної афінної алгебри Лі* $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. *Як наслідок,* $3 \leqslant \dim_{\mathbb{K}} L \leqslant 9$.

В підрозділі 1.2 були описані підалгебри, які мають абелевий ідеал рангу 2.

Теорема 1.2.2. *Нехай $L \subset W_3(\mathbb{K})$ — розв'язна підалгебра Лі, причому* $\dim_{\mathbb{K}} L < \infty$, $\mathrm{rank}_R L = 3$. *Нехай $I \subset L$ — ідеал рангу 2 над R та $F = F(I)$ — поле констант I в R. Тоді алгебра Лі L міститься в підалгебрі $\widetilde{W_3}(\mathbb{K})$ вигляду $\overline{L} = F\overline{I} + L$, де $\overline{I} = (RI) \cap L$. Алгебра Лі $\overline{L}$ є розв'язною, $F\overline{I}$ — її ідеал рангу 2 над полем R, який в свою чергу може бути вкладений в* $\mathrm{aff}_2(F)$. *Окрім цього, $\overline{L}$ є розширенням ідеалу $F\overline{I}$ алгеброю Лі розмірності 1 або 2 над $\mathbb{K}$.*

Окрім цього, був отриманий наступний опис.

Теорема 1.2.3. *Нехай справедливі умови Теореми 1.2.2. Крім цього, припустимо, що* $\dim_{\mathbb{K}} L > 6$. *Тоді або існують раціональні функції $r_1, r_2 \in R$, для яких $D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$ і кожне диференціювання $D \in F\overline{I}$ має вигляд*

$$D = f_1(r_1, r_2)D_1 + f_2(r_1, r_2)D_2,\ f_i \in \mathbb{K}[t_1, t_2],\ \deg f_i \leqslant 1$$

або існує $r_i \in R$, $i = 1$ або $i = 2$, для якого $D_i(r_j) = \delta_{ij}$ та усі елементи $D \in F\overline{I}$ можуть бути представлені у вигляді

$$D = g_1(r_i)D_1 + g_2(r_i)D_2,\ \deg g_j \leqslant 1.$$

Окрім того,

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2 r_2,\ D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2.$$

У випадку $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} = 2$ *можна обрати диференціювання $\overline{D} \in L \setminus (\mathbb{K}D_3 + \overline{I})$, для якого справедливі тотожності*

$$\overline{D} = r_3 D_3 + s_2 D_2,\ r_3 \in R,$$

$$D_3(r_3) = 1,\ D_1(r_3) = D_2(r_3) = 0,\ D_1(s_2) = 0.$$

Тоді

$$\lambda_1 = 0,\ g_2 = 0,\ s_2 = \lambda_2 r_2 r_3 + f,\ f \in \mathbb{K}.$$

В **розділі 2** досліджувались централізатори диференціювань алгебри многочленів або алгебри раціональних функцій.

В підрозділі 2.1 були отримані загальні результати, які описують будову централізаторів. Наприклад, наступна лема представляє самостійний інтерес, оскільки з неї випливає, що диференціювання з тривіальним полем констант $F = \mathbb{K}$ матиме скінченновимірний централізатор над основним полем $\mathbb{K}$

Лема 2.1.1. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ — ненульове диференціювання, F — поле констант D в R та $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді або $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D) = FD$, або $C = FD + FD_2 + \cdots + FD_k$ для деяких $D_2, \ldots, D_k \in C$, де $D, D_2, \ldots, D_k$ є лінійно незалежними над R.*

Далі були досліджені централізатори диференціювань алгебри многочленів, поле констант яких має степінь трансцендентності 1. Як видно з наступних результатів, централізатор диференціювання, у якого поле констант породжене замкненим многочленом, в деякому сенсі майже повністю представляє собою алгебру Лі над поліноміальним кільцем констант.

Твердження 2.1.6. *Нехай для диференціювання $D_1 \in \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ степінь трансцендентності поля констант $F = \mathrm{Ker}_R\, D_1$ над $\mathbb{K}$ дорівнює 1. Тоді ценралізатор $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D_1)$ є підалгеброю $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$, причому $\mathrm{rank}_R\, C = k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Окрім того,*

$$C = FD_1 + FD_2 + \cdots + FD_k$$

для деяких $D_2, \ldots, D_k \in C$. При цьому або C є алгеброю Лі над полем F та $\dim_F C = k$, або ж в $\mathbb{K}$-алгебрі Лі C існує ідеал I, який має ранг $k - 1$ над R та є алгеброю Лі над F розмірності $k - 1$.

Теорема 2.1.16. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ та $F = \mathrm{Ker}_R\, D$ — поле констант D в алгебрі раціональних функцій R, причому $F = \mathbb{K}(p)$ для деякого незвідного многочлена p. Позначимо $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді*

1. *У випадку* $\operatorname{rank}_R C = 1$ *маємо* $C = \mathbb{K}[p]D_0$, *де диференціювання* D_0 *є* p-*вільним,* $D = f(p)D_0$ *для деякого многочлена* $f(t) \in \mathbb{K}[t]$;

2. *У випадку* $\operatorname{rank}_R C \geqslant 2$ *маємо, що або* C *— алгебра Лі над* $\mathbb{K}[p]$ *рангу* k, *або існує ідеал* I *рангу* $k-1$ $\mathbb{K}$-*алгебри Лі* C, *який є алгеброю Лі над* $\mathbb{K}[p]$ *та* $C = I + \mathbb{K}[p]S$ *для деякого* $S \in C$.

Наслідок 2.1.17. *Нехай* $D \in W_n(\mathbb{K})$ *та* $F = \operatorname{Ker}_R D$, *причому* $F = \mathbb{K}(p)$ *для деякого незвідного многочлена* p. *Позначимо* $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. *Якщо* $\operatorname{rank}_R C = 2$ *та* $F \not\subset \cap_{D' \in C} \operatorname{Ker}_R D'$, *то* $C = \mathbb{K}[p]D_0 + \mathbb{K}[p]S$ *— вільний модуль рангу 2 над кільцем* $\mathbb{K}[p]$.

Теорема 2.1.18. *Нехай* $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D = 1$ *та* $(\operatorname{Ker}_R D) \cap A = \mathbb{K}$ *для диференціювання* $D \in W_n(\mathbb{K})$. *Тоді* $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$ *для деяких незвідних алгебраїчно незалежних многочленів* $p, q \in A$ *та диференціювання* D *можна представити у вигляді* $D = hf(p,q)D_0$, *де* D_0 *— редуковане диференціювання,* f *— однорідний многочлен від* p, q *та* h *—* p-q-*вільний многочлен. Позначимо* $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. *Тоді* $\dim_{\mathbb{K}} C < \infty$ *та будова централізатора має один з типів:*

1. $C = \mathbb{K}[p,q]_m hD_0$, *де* $\mathbb{K}[p,q]_m$ *— простір однорідних многочленів від* p, q, *степінь яких* $m = \deg_{p\text{-}q} f$; *як наслідок,* $\dim_{\mathbb{K}} C = m + 1$.

2. *Для деяких лінійно незалежних над* R *елементів* $D_2, \ldots D_k \in C$, $k \leqslant n$

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \mathbb{K}(p/q)D_2 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_k) \cap W_n(\mathbb{K})$$

У підрозділі 2.2 досліджувались лінійні діагоналізовані диференціювання.

Теорема 2.2.2. *Нехай* $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ *та* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— власні значення матриці* (a_{ij}). *Тоді справедливі наступні твердження:*

1. *Якщо елементи* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *є лінійно незалежними над* $\mathbb{Z}$, *то* $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$.

2. *Якщо* $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$, *то елементи* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *є лінійно незалежними над* $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Підрозділ 2.3 присвячений дослідженням якобіанних диференціювань алгебри многочленів від двох змінних.

Теорема 2.3.7. *Нехай $f \in \mathbb{K}[x,y]$, $f = \theta(p)$ для деякого замкненого многочлена $p \in \mathbb{K}[x,y]$, причому $\deg\theta \geqslant 1$. Диференціювання $T \in W_2(\mathbb{K})$ комутує з D_f, тоді і лише тоді, коли $T(p) = \psi(p)$ для деякого многочлена $\psi(t) \in \mathbb{K}[t]$ й*

$$\theta''(p)\psi(p) = \theta'(p)(\operatorname{div} T - \psi'(p)).$$

Наслідок 2.3.8. *Нехай $f \in \mathbb{K}[x,y]$ є замкненим (наприклад, незвідним) многочленом. Диференціювання $T \in W_2(\mathbb{K})$ комутує з D_f тоді і лише тоді, коли $T(f) = \psi(f)$ для деякого многочлена $\psi(t) \in \mathbb{K}[t]$ та $\operatorname{div} T = \psi'(f)$.*

Також був отриманий наступний результат.

Теорема 2.3.9. *Нехай $f \in \mathbb{K}[x,y]$, $\deg f \geqslant 1$, а D_f — відповідне якобіанне диференціювання алгебри $\mathbb{K}[x,y]$. Нехай p — замкнений породжуючий многочлен для f. Централізатор $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ є вільним модулем рангу 1 або 2 над $\mathbb{K}[p]$.*

В **розділі 3** досліджуються трикутні алгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ диференціювань та розв'язна алгебра Лі $s_n(\mathbb{K})$.

Підрозділ 3.1 присвячений доведенню того факта, що $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в алгебрі Лі диференціювань кільця многочленів.

Теорема 3.1.3. *Трикутна алгебра $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$.*

Підрозділ 3.2 присвячений розв'язній алгебрі Лі $s_n(\mathbb{K})$.

Лема 3.2.3. *Розглянемо для деякого $k \leqslant n$ диференціювання з $W_n(\mathbb{K})$ вигляду:*

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k-1} g_i\partial_i + \partial_k, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{k-1} h_i\partial_i - x_k^2\partial_k, \quad T_3 = \sum_{i=1}^{k-1} f_i\partial_i - 2x_k\partial_k.$$

Тоді T_1, T_2, T_3 породжують не розв'язну підалгебру Лі в $W_n(\mathbb{K})$.

Теорема 3.2.4. *Алгебра Лі* $s_n(\mathbb{K})$ *є максимальною розв'язною підалгеброю алгебри Лі* $W_n(\mathbb{K})$.

У висновках перелічено основні результати роботи. У додатку 1 вказано статті та тези наукових доповідей, де були опубліковані отримані результати, і назви наукових конференцій, на яких ці результати були представлені.

Автор висловлює щиру подяку науковому керівнику — доктору фіз.-мат. наук, професору Петравчуку Анатолію Петровичу за постановку розглянутих в дисертації задач, постійну увагу, всебічну підтримку та допомогу в роботі.

Огляд літератури

Сучасне поняття диференціювання довільної алгебри над полем було введене в роботі [40] Н. Джекобсона. Вивчення абстрактних диференціювань та утворених ними алгебр Лі стало невід'ємною частиною диференціальної алгебри [47, 70].

Важливою тематикою досліджень є диференціювання кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ та алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, які вони формують. Алгебра Лі $W_n(\mathbb{K})$ є нескінченновимірною над основним полем $\mathbb{K}$, а задача класифікації скінченновимірних підалгебр при $n \geqslant 4$ є дикою задачею, як показали В. М. Бондаренко та А. П. Петравчук в статті [9]. С. Лі [48], А. Гонсалес-Лопес, Н. Камран та П. Олвер [33], [34] виконали класифікацію скінченновимірних алгебр Лі диференціювань кілець многочленів над полем дійсних та комплексних чисел від n змінних при $n = 1$ та $n = 2$. При $n = 3$ на сьогодні задача залишається відкритою. Це питання почав вивчати ще С. Лі, а в статтях У. Амальді (див. [1] та [2]) була продовжена робота над цим питанням, хоча й ця класифікація потребує завершення. Крім цього, не отримали свого опису максимальні підалгебри $W_n(\mathbb{K})$, відомі лише деякі типи [3]. Алгебра Лі $W_n(\mathbb{K})$ над полем $\mathbb{K}$ є вільним $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$-модулем рангу n, що не можна сказати про її всі підалгебри; якщо ж підалгебра в $W_n(\mathbb{K})$ має цю властивість, то вона називається поліноміальною алгеброю Лі. І. Аржанцевим, Є. Македонським та А. П. Петравчуком в статті [4] були досліджені поліноміальні алгебри Лі рангу один, надана класифікація їх скінченновимірних підалгебр.

Нільпотентні і розв'язні підалгебри скінченного рангу алгебри $W(A) = R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ (де A — довільна асоціативна і комутативна алгебра без дільників нуля, $R = \operatorname{Frac}(A)$) були досліджені в роботі [50] Є. Македонським та А. П. Петравчуком в 2013 році. Зокрема, виявилось, що нільпотентні підалгебри $W(A)$ скінченного рангу є скінченновимірними нільпотентними алгебрами Лі над своїми полями констант. Окрім цього, для нільпотентних підалгебр скінченного рангу в $W(A)$ були побудовані ряди ідеалів зі зростаючими рангами, які мають схожі властивості з верхньоцентральним рядом скінченновимірної нільпотентної алгебри Лі. В 2017 році ці результати були узагальнені для локально нільпотентних алгебр Лі диференціювань в роботі [67].

Важливим та, мабуть, найбільш дослідженим класом диференціювань є локально нільпотентні диференціювання; нагадаємо, що $D \in W(A)$ називається локально нільпотентним, якщо для довільного $a \in A$ існує $n = n(a) \in \mathbb{N}$ для якого $D^n(a) = 0$. Множина усіх локально нільпотентних диференціювань позначається через $\mathrm{LND}(A)$. Зауважимо, що $\mathrm{LND}(A)$ не є навіть векторним простором над $\mathbb{K}$. Фройденбург [30] поставив питання про підалгебри Лі, які містяться у $\mathrm{LND}(A)$ — зокрема, максимальні. В роботі [66] А. П. Петравчук та К. Я. Сисак довели, що будь-яка скінченновимірна алгебра Лі, яка міститься у у множині $\mathrm{LND}(A)$ області цілісності A над $\mathbb{K}$ є нільпотентною. У випадку $A = \mathbb{K}[x, y]$ було показано, що будь-яка підалгебра Лі, яка складається з локально нільпотентних диференціювань, є спряженою (за допомогою автоморфізма A) з підалгеброю трикутної алгебри $u_2(\mathbb{K})$. Як наслідок, було отримано, що будь-яка максимальна (за включенням) підалгебра $W_2(\mathbb{K})$, яка міститься у $\mathrm{LND}(A)$, спряжена до $u_2(\mathbb{K})$ або її підалгебри.

Кожному локально нільпотентному диференціюванню D алгебри A ставиться у відповідність автоморфізм A вигляду $\exp D = \sum_{k\geqslant 0} \frac{D^k}{k!} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} A$. Для кожного $a \in A$ сума $(\exp D)(a) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{D^k(a)}{k!}$ буде мати скінченну кількість ненульових доданків з огляду на локальну нільпотентність D. Окрім цього, відображення, яке кожному елементу $t \in \mathbb{K}$ ставить у відповідність автоморфізм $\exp tD$, задає дію адитивної групи поля $\mathbb{K}$ на групі автоморфізмів $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} A$ (див., наприклад, [23]).

У вступі вже згадувалось, що кожному диференціюванню $D \in W_n(\mathbb{C})$, яке має вигляд $D = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}$, ставиться у відповідність система звичайних автономних диференціальних рівнянь $\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = f_k(x_1, \ldots, x_n), 1 \leqslant k \leqslant n$. Відомо, що ця система має строго поліноміальний потік (тобто загальний розв'язок виражається многочленами від t) тоді і лише тоді, коли відповідне диференціювання D є локально нільпотентним; це питання досліджувалось у роботі [16].

Як вже було зазначено вище, група автоморфізмів алгебри A пов'язана з локально нільпотентними диференціюваннями A. Підгрупа в $\operatorname{Aut}\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, яка породжується трикутними та лінійними автоморфізмами, називається ручною підгрупою $T_n(\mathbb{K})$ (а її елементи – ручними автоморфізмами). Важливим питанням є наступне: чи кожний автоморфізм алгебри многочленів є ручним? Відома теорема Юнга - ван дер Кулька стверджує, що $\operatorname{Aut}\mathbb{K}[x_1, x_2] = T_2(\mathbb{K})$. Перший контрприклад до загального питання був запронований Нагата в роботі [54] (без доведення; це було зроблено в 2004 році в роботі [78]). Басс в роботі [5] дав запропонував G_a-дію на $\mathbb{C}^3$ вигляду $\sigma_t = \exp(tpD) = (x_1, x_2 + tx_1p, x_3 + 2tx_2p + t^2x_1p^2)$, де $D = x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$ — триангуалізоване диференціювання (тобто яке спряжене до трикутного за допомогою деякого автоморфізма), $p = x_1x_3 - x_2^2$ — многочлен, який лежить в кільці констант диференціювання D. Випадок $t = 1$ у прикладі Басса відповідає автоморфізму Нагати.

В 1968 році Р. Ренчлер [69] довів, що для довільного локально нільпотентного диференціювання D алгебри многочленів $\mathbb{K}[x, y]$ над полем характеристики нуль існує автоморфізм $\alpha \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x, y]$ та многочлен $f \in \mathbb{K}[x]$, для яких має місце рівність $\alpha D\alpha^{-1} = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$. Інакше кажучи, $\operatorname{LND}(\mathbb{K}[x, y]) = \bigcup_{\theta\in\operatorname{Aut}(\mathbb{K}[x,y])}\theta u_2(\mathbb{K})\theta^{-1}$. Як наслідок, був отриманий наступний результат: усі дії адитивної групи поля $\mathbb{K}$ характеристики нуль на афінній площині $\mathbb{K}^2$ еквівалентні діям вигляду $t \cdot (x, y) = (x, y + f(x)t)$. В роботі [53] М. Міяніші вивчались дії на афінній площині $\mathbb{K}^2$ у випадку, коли основне поле є алгебраїчно замкненим та простої характеристики.

В роботі [18] Д. Дейґл вивчав питання про те, які з підалгебр факторіальної області цілісності над полем нульової характеристики є кільцями констант локально нільпотентних диференціювань. Окрім того, було показано, що у випадку, коли D — локально нільпотентне диференціювання алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, для якого кільце констант має вигляд $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$, має місце рівність $D = aD_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$ для деякого $a \in \operatorname{Ker} D$. Тут $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}} \in W_n(\mathbb{K})$ — якобіанне диференціювання, індуковане алгебраїчно незалежними многочленами $f_1, \ldots, f_{n-1}$. В статті Д. Дейґла та Ш. Калімана [21] були продовжені дослідження локально нільпотентних диференціювань та отримані пов'язані з ними алгебро-геометричні результати. В статті [49] Макар-Ліманов узагальнив вищенаведений результат Дейґла для диференціювань скінченнопороджених алгебр. Зазначимо також, що будь-яке локально нільпотентне диференціювання алгебри $\mathbb{K}[x, y]$ є якобіанним (див., наприклад, [30]). Централізатори таких диференціювань досліджені у другому розділі даної дисертації.

З локально нільпотентними диференціюваннями пов'язані деякі відомі математичні проблеми — наприклад, Чотирнадцята проблема Гільберта [37]. Нехай K — поле, $\mathbb{K} \subset K \subset \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$; чи є $K \cap \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ скінченнопородженою алгеброю над $\mathbb{K}$ (звісно, скінченна породженість K як розширення поля $\mathbb{K}$ випливає з Теореми 2.1.5)? О. Зариський в роботі [79] узагальнив це питання наступним чином. Нехай A — скінченнопороджена нормальна область цілісності над полем $\mathbb{K}$, K — підполе $\operatorname{Frac}(A)$, яке містить $\mathbb{K}$. Чи є $K \cap A$ скінченнопородженою алгеброю над полем $\mathbb{K}$? Сам Зариський дав позитивну відповідь, якщо $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} K \leqslant 2$ ("теорема Зариського"). Перший контрприклад до загальної постановки задачі дав Д. Ріс в роботі [68]. Після цього контрприклад до проблеми Гільберта надав Нагата [55]. Нагата та Новіцькі в роботі [56] довели, зокрема, що кільце констант диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ при $\leqslant 3$ є скінченнопородженим над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Якщо $n > 3$, то існує диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$, для якого $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} D \geqslant 3$ та $\operatorname{Ker} D$ не є скінченнопородженою алгеброю над $\mathbb{K}$. Як виявилось, справедливе наступне твердження: якщо D — локально нільпотентне диференціювання скінченнопородженої алгебри A, яке має слайс, то $\operatorname{Ker} D$ є скінченнопородженим У роботі [19] Д. Дейґла та Дж. Фройденбурга побудоване трикутне диференціювання $D \in u_5(\mathbb{K})$ з кільцем констант, яке не є скінченнопородженим. З іншого боку, ці ж автори встановили [20], що для усіх цілих $n \geqslant 3$ існує трикутне диференціювання $D \in u_4(\mathbb{K})$, для якого кільце констант $\operatorname{Ker} D$ є скінченнопородженою $\mathbb{K}$-алгеброю (але кількість породжуючих елементів не менша за n).

Цікавими прикладами локально нільпотентних підалгебр $W_n(\mathbb{K})$ виступають алгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ усіх трикутних диференціювань. В роботі [7] В. В. Бавулою дається явний опис групи автоморфізмів $\operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} u_n(\mathbb{K})$, а в [6] було встановлено ряд властивостей трикутних алгебр Лі (над полем нульової характеристики, однак без припущення про алгебраїчну замкненість). Алгебри $u_n(\mathbb{K})$ є розв'язними, локально скінченновимірними (кожна скінченнопороджена підалгебра — скінченновимірна), локально нільпотентними (але не є нільпотентними). Окрім того, $u_n(\mathbb{K})$ попарно неізоморфні при $n \geqslant 2$, а також усі внутрішні диференціювання алгебр Лі $u_n(\mathbb{K})$ є локально нільпотентними. Зазначимо, що трикутні диференціювання є локально нільпотентними, тобто $u_n(\mathbb{K}) \subset \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$. В роботі [74] було доведено, що $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною (за включенням) алгеброю Лі, яка містяться у $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$. У третьому розділі даної дисертаційної роботи доводиться що $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$.

Усі диференціювання, які комутують з заданим диференціюванням D, утворюють підалгебру $W_n(\mathbb{K})$, яка називається централізатором $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Інформація про поле констант та централізатор диференціювання може бути корисною для пошуку розв'язків системи автономних звичайних диференціальних рівнянь, які відповідають диференціюванню $D \in W_n(\mathbb{C})$. Множина елементів поля констант, які не є елементами основного поля, співпадає з множиною перших інтегралів вказаної системи рівнянь.

В роботі [57] вивчалась проблема поліноміальних векторних полів, які комутують із заданим поліноміальним векторним полем на площині. Відомий класичний результат стверджує, що можна записати формули розв'язку для автономної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка відповідає плоскому векторному полю, що має лінійно незалежне (трансверсальне) комутуюче векторне поле. Ця проблема також є центральною в питанні про лінеаризованість векторних полів. Розглянемо диференціювання $D = y\frac{\partial}{\partial x} + f(x)\frac{\partial}{\partial y}$, де $f \in \mathbb{K}[x]$. Це диференціювання відповідає консервативній системі Ньютона, а отже, диференціальному рівнянню $\ddot{x} = f(x)$. Нехай H — многочлен Гамільтона для D, тобто

$$H = \frac{1}{2}y^2 - \int f(x)dx.$$

Тоді централізатор $C_{W_2(\mathbb{K})}(D)$ утворює $\mathbb{K}[H]$-модуль MD. Наглоо, Овчинніков і Томсон [57] довели, що $\mathbb{K}[H]$-модуль MD має ранг 1 тоді і тільки тоді, коли $\deg f \geqslant 2$.

В роботі Д.Р. Фінстона та С. Уолчера [29] вивчалися централізатори локально нільпотентних диференціювань. Був отриманий, зокрема, наступний результат. Нехай $D \in W_3(\mathbb{C})$ — диференціювання, для якого відповідна автономна система звичайних диференціальних рівнянь $\frac{dx_k}{dt} = D(x_k), k = 1, 2, 3$ визначає строго поліноміальний векторний потік. Тоді D спряжене автоморфізмом $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ до деякого трикутного диференціювання (тобто D — триангульоване) тоді і тільки тоді, коли централізатор $C_{W_3(\mathbb{C})}$ містить локально нільпотентне диференціювання, для якого асоційована G_a-дія є спряженою до трансляції (тобто векторне поле може бути спрямлене поліноміально). Зазначимо, що триангульованість локально нільпотентного диференціювання D еквівалентна триангульованості G_a-дії, яка йому відповідає, тобто триангульованості автоморфізмів $\exp(tD)$ для усіх $t \in \mathbb{C}$.

В роботі [6] В. Бавули були, зокрема, класифіковані ідеали трикутних алгебр Лі $u_n(\mathbb{K})$ та показано, що всі ідеали алгебри $u_n(\mathbb{K})$ є інваріантними відносно автоморфізмів. централізатори $C_{u_n(\mathbb{K})}(I)$ усіх ідеалів I трикутної алгебри $u_n(\mathbb{K})$. В залежності від типу ідела централізатор має один з $2n-1$ наступних типів: $\mathbb{K}\partial_n$, $u_n(\mathbb{K})$, $P_i\partial_n$ при $1 \leqslant i \leqslant n-2$ та $\bigoplus_{i=m+1}^{n} P_{i-1}\partial_i, 1 \leqslant m \leqslant n-1$, де $P_i = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{i-1}]$.

Для диференціювань $\mathbb{K}[x, y]$, як вже було згадано вище, локальна нільпотентність рівносильна тому, що диференціювання є якобіанним. Окрім цього, серед диференціювань в $W_2(\mathbb{K})$ нульову дивергенцію мають лише якобіанні диференціювання. Цікавою підалгеброю $W_2(\mathbb{K})$ є алгебра Лі $sa_2(\mathbb{K})$, яка утворена диференціюваннями D алгебри многочленів $\mathbb{K}[x, y]$, у яких $\operatorname{div} D = 0$; інакше кажучи, ця алгебра Лі утворена усіми якобіанними диференціюваннями кільця многочленів від двох змінних. Нагадаємо, що многочлен $f \in \mathbb{K}[x, y]$ називається якобіанним, якщо існує такий многочлен $g \in \mathbb{K}[x, y]$, що якобіан $\det J(f, g)$ представляє собою ненульовий елемент поля $\mathbb{K}$. Позначимо також через p замкнений породжуючий многочлен для f. В роботі [64] А. П. Петравчука та О. Г. Єни вивчалися централізатори елементів алгебри Лі $sa_2(\mathbb{K})$; зокрема, був отриманий наступний результат. Нехай $D_f \in sa_2(\mathbb{K})$. Якщо f не є якобіанним многочленом, то $C_{sa_2(\mathbb{K})}(D_f) = \mathbb{K}[p]D_p$. Якщо f — якобіанний многочлен та $\det J(f, g) \in \mathbb{K}^*$, то $C_{sa_2(\mathbb{K})}(D_f) = \mathbb{K}[f]D_f + \mathbb{K}D_g$.

Вивчення підалгебри $sa_2(\mathbb{K})$ алгебри Лі $W_2(\mathbb{K})$ пов'язане з гіпотезою Якобіана для $n = 2$. Нехай α — ендоморфізм алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, визначений многочленами $f_1, \ldots, f_n$. Нагадаємо, що з умови $\alpha \in \operatorname{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ випливає $\det J(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{K}^*$. Обернене твердження називається гіпотезою якобіана та є поки що ані встановленим в загальному випадку для $n \geqslant 2$, ані спростованим. Гіпотеза якобіана вперше була сформульована Келлером для многочленів з цілими коефіцієнтами. Детальний огляд цієї задачі та еквівалентних її формулювань можна знайти в монографії ван дер Ессена [28]. А. Новіцкі [60] показав, що вона рівносильна наступному твердженню: якщо диференціювання $D_1, \ldots, D_n \in W_n(\mathbb{K})$ є лінійно незалежними над кільцем $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ та $[D_i, D_j] = 0$ для усіх $i, j = 1, \ldots, n$, то усі диференціювання $D_1, \ldots, D_n$ є локально нільпотентими. Наведемо також твердження, еквівалентне гіпотезі якобіана, яке сформулював Фройденбург [30]. Якщо якобіанне диференціювання $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$ має слайс (тобто такий елемент s, що $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}(s) = 1$), то $D_{f_1,\ldots,f_{n-1}}$ є локально нільпотентним та $\operatorname{Ker} D_{f_1,\ldots,f_{n-1}} = \mathbb{K}[f_1, \ldots, f_{n-1}]$.

Означення та допоміжні результати

Наведемо необхідні означення та загальновідомі результати з теорії алгебр Лі, детальний виклад яких можна знайти, наприклад, у книгах [38], [39], [46], [75]. Монографії [30] та [58] присвячені теорії диференціювань, а в [28] можна знайти детальний виклад теорії автоморфізмів кілець многочленів, які тісно пов'язані, зокрема, з локально нільпотентними диференціюваннями.

Означення 1. *Нехай* $\mathbb{K}$ *— поле,* $\mathfrak{g}$ *— векторний простір над* $\mathbb{K}$*. Будемо говорити, що* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Лі, якщо задана білінійна операція, яка кожній парі* $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ *ставить у відповідність елемент* $[x, y] \in \mathfrak{g}$, *задовольняючи наступним умовам:*

(1) $[x, x] = 0$ *для усіх* $x \in \mathfrak{g}$;

(2) $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ *для усіх* $x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$ (тотожність Якобі).

Зауважимо, що вищенаведене означення можна узагальнити, розглянувши замість основного поля комутативно-асоціативне кільце. Такі алгебри Лі також будуть брати участь в деяких результатах даної роботи.

Елемент $[x, y]$ називають комутатором елементів x та y, а саму визначену операцію — комутуванням. Якщо характеристика поля $\mathbb{K}$ відмінна від двох, то перша умова еквівалентна умові кососиметричності:

$$[x, y] = -[y, x] \text{ для всіх } x,\ y \in \mathfrak{g}.$$

Якщо ж для усіх $x, y \in \mathfrak{g}$ комутатор $[x, y] = 0$, то говорять, що $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра Лі. Наприклад, будь-який векторний простір V може бути розглянутий як абелева алгебра Лі, якщо вважати, що комутатор заданий тривіальним чином: $[a, b] = 0$ для усіх $a, b \in V$.

З умов, які накладаються на операцію комутування в вищенаведенному означені, не випливає умова асоціативності: в загальному випадку алгебри Лі не мають такої властивості. Натомість існує наступний спосіб побудови алгебри Лі з довільної асоціативної алгебри A , а саме: визначимо комутатор тотожністю $[a, b] = ab - ba$ для усіх $a, b \in A$. Визначений таким чином комутатор дійсно задає на A структуру алгебри Лі, яка буде абелевою тоді і лише тоді, коли алгебра A буде комутативною відносно своєї початкової операції множення. Наприклад, нехай $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ — асоціативна алгебра квадратних матриць розміру $n \times n$ над полем $\mathbb{K}$. Тоді комутатор матриць $[M, N] = MN - NM$ для всіх $M, N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ задає структуру алгебри Лі. Ця алгебра Лі називається загальною лінійною алгеброю Лі над полем $\mathbb{K}$ та має позначення $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Така конструкція узагальнюється, якщо подібним чином ввести комутатор на векторному просторі ендоморфізмів $\mathrm{End}\,V$ простору V довільної розмірності над полем $\mathbb{K}$. Отримана алгебра Лі позначається $\mathfrak{gl}(V)$.

Означення 2. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$.*

(1) *Підпростір $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ називається підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$, якщо $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для всіх $x, y \in \mathfrak{h}$;*

(2) *Підпростір $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ називається ідеалом алгебри $\mathfrak{g}$, якщо $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для всіх $x, y \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{g}$;*

Наприклад, алгебра Лі $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ має підалгебру $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$, елементами якої є матриці з нульовим слідом. Більш того, ця підалгебра, яка називається спеціальною лінійною алгеброю Лі, є ідеалом $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Алгебра Лі $\mathfrak{g}$ називається простою, якщо $\mathfrak{g}$ — не абелева алгебра, ідеали якої вичерпуються лише нульовим ідеалом та самою $\mathfrak{g}$. Якщо $\mathbb{K}$ — поле нульової характеристики, то $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ є простою алгеброю Лі.

Нехай $\mathfrak{h}$ — ідеал деякої алгебри Лі $\mathfrak{g}$. На просторі класів суміжності $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ можна задати нову операцію комутування:

$$[x + \mathfrak{h}, y + \mathfrak{h}]_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = [x, y] + \mathfrak{h}.$$

Стандартним чином може бути перевірена коректність цього визначення. Отже, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ має структуру алгебри Лі.

Означення 3. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$.*

(1) *Фактор-простір $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ по ідеалу $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ разом з індукованою структурою алгебри Лі називаєтсья фактор-алгеброю.*

(2) *Множина $C_{\mathfrak{g}}(x) = \{y \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0\}$ називається централізатором елемента $x \in \mathfrak{g}$. Якщо $M \subseteq \mathfrak{g}$ — підмножина (наприклад, підалгебра), то $C_M(x) = C_{\mathfrak{g}}(x) \cap M$ будемо називати централізатором елемента x в множині M.*

(3) *Множина $Z(\mathfrak{g}) = \{y \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0$ для усіх $x \in \mathfrak{g}\}$ називається центром алгебри Лі $\mathfrak{g}$.*

Зазначимо, що $C_{\mathfrak{g}}(x)$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$, а центр $Z(\mathfrak{g})$ є її ідеалом. Наприклад, нехай $\mathbb{K}$ — поле характеристики нуль. Тоді $Z(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})) = 0$, $Z(\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}I_n$, де I_n — одинична матриця розміру $n \times n$. Окрім того, задача пошуку централізатора $C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(A)$ матриці $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ є класичною та давно розв'язаною (див., наприклад, [31], Розділ VIII, § 2).

Нехай H, K — підпростори алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді визначимо $[H, K]$ як лінійну оболонку множини комутаторів $[h, k]$ для усіх $h \in H, k \in K$, а також нехай $H + K$ – множина усіх можливих сум вигляду $h + k$ для усіх $h \in H, k \in K$ (у випадку $H \cap K = \emptyset$ використовуємо запис $H \oplus K$). Зазначимо, що якщо H та K — підалгебри, то й $H + K$ є підалгеброю алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Наприклад, $[\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}), \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})] = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$. Крім цього, у нашому випадку поля характеристики нуль має місце рівність $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathbb{K}I_n$.

Твердження 4. *Нехай $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ — ідеали алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді також ідеалами $\mathfrak{g}$ будуть $\mathfrak{m} + \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{n}$ та $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$.*

Означення 5. *Нехай $\mathfrak{g}, \mathfrak{m}$ — алгебри Лі над полем $\mathbb{K}$. Лінійне відображення $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$, для якого $f([x, y]_{\mathfrak{g}}) = [f(x), f(y)]_{\mathfrak{m}}$ для усіх $x, y \in \mathfrak{g}$, називається* *гомоморфізмом алгебр Лі. Ядром гомоморфізму f називається множина* $\operatorname{Ker} f$ *елементів $x \in \mathfrak{g}$, для яких $f(x) = 0$.*

У випадку, коли гомоморфізм алгебр Лі $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ є ін'єктивним, сюр'єктивним або бієктивним, говоримо відповідно про мономорфізм, епіморфізм та ізоморфізм алгебр Лі. В останньому випадку алгебри $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{m}$ називають ізоморфними та позначають цей факт так: $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{h}$.

Зазначимо, що будь-яка скінченновимірна алгебра Лі ізоморфна підалгебрі повної лінійної алгебри Лі (Теорема Адо-Івасави, [40], Розділ VI).

Теорема 6. (1) *Нехай $\mathfrak{h}$ — ідеал алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Натуральна проекція $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, яка задається правилом $\pi(x) = x + \mathfrak{h}$, є епіморфізмом алгебр Лі.*

(2) *Ядро гомоморфізму алгебр Лі $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ є ідеалом алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Образ $f(\mathfrak{g})$ є підалгеброю алгебри $\mathfrak{m}$, причому $f(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{g}/\operatorname{Ker} f$.*

(3) *Нехай $\mathfrak{h}, \mathfrak{m}$ — ідеали алгебри Лі $\mathfrak{g}$, причому $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{m}$. Тоді*

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{m} \cong (\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{m}/\mathfrak{h}).$$

(4) *Нехай $\mathfrak{h}$ — ідеал алгебри Лі $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ — її підалгебра. Тоді $\mathfrak{h}$ — ідеал алгебри Лі $\mathfrak{m} + \mathfrak{h}$, перетин $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$ є ідеалом алгебри Лі $\mathfrak{m}$ та*

$$(\mathfrak{m} + \mathfrak{h})/\mathfrak{h} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}.$$

(5) *Нехай $\mathfrak{h}$ — ідеал, який міститься у ядрі* $\operatorname{Ker} f$ *гомоморфізму алгебр Лі $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$. Існує єдиний гомоморфізм алгебр Лі $\varphi : \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{m}$, для якого $f = \varphi \circ \pi$. Тут $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — натуральна проекція.*

Наприклад, фактор-алгебра $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})/\mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$ є абелевою та ізоморфна одновимірній алгебрі Лі $\mathbb{K}$. Дійсно, відображення обчислення сліду матриці є епіморфізмом алгебр Лі $\operatorname{tr} : \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, причому $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{K})$.

Перейдемо тепер до важливих для даної роботи означень класів алгебр Лі.

Означення 7. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$. Задамо наступну послідовність підалгебр*

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n]$$

для усіх натуральних $n \geqslant 1$.

(1) *Послідовність ідеалів*

$$\mathfrak{g}^0 \supseteq \mathfrak{g}^1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^n \supseteq \mathfrak{g}^{n+1} \supseteq \dots$$

називають нижнім центральним рядом алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

(2) *У випадку, коли $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ для деякого n, говорять, що $\mathfrak{g}$ — нільпотентна алгебра Лі.*

(3) *Похідною алгеброю називають підалгебру $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.*

(4) *У випадку, коли будь-яка скінченнопороджена підалгебра Лі алгебри $\mathfrak{g}$ є нільпотентною, говорять, що $\mathfrak{g}$ — локально нільпотентна алгебра Лі.*

Означення 8. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$. Задамо наступну послідовність підалгебр*

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(n+1)} = [\mathfrak{g}^{(n)}, \mathfrak{g}^{(n)}]$$

для усіх цілих $n \geqslant 0$.

(1) *Послідовність ідеалів*

$$\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(n)} \supseteq \mathfrak{g}^{(n+1)} \supseteq \dots$$

називаєтсья похідним рядом алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

(2) *У випадку, коли $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ для деякого n, говорять, що $\mathfrak{g}$ — розв'язна алгебра Лі.*

Як можна показати індукцією, $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}$ для усіх цілих $k \geqslant 0$; тому з нільпотентності алгебри Лі завжди випливає її розв'язність.

Зазначимо, що $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^2 = 0$ рівносильно тому, що $\mathfrak{g}$ — абелева алгебра Лі. Підалгебра $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}$ називається похідною підалгеброю $\mathfrak{g}$ та є її ідеалом. Якщо $\mathfrak{g}$ — проста (а тому не абелева) алгебра Лі, то $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. При цьому $Z(\mathfrak{g}) = 0$. Зазначимо, що якщо $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна розв'язна алгебра Лі над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, то розв'язність $\mathfrak{g}$ еквівалентна тому, що похідна підалгебра $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ є нільпотентною алгеброю Лі (Proposition 1.39, [46]).

Твердження 9. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі.*

(1) *Якщо $\mathfrak{g}$ — розв'язна (нільпотентна), то й будь-який гомоморфний образ алгебри $\mathfrak{g}$ є розв'язним (нільпотентним).*

(2) *Якщо $\mathfrak{h}$ — розв'язний ідеал алгебри $\mathfrak{g}$, а фактор-алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ є також розв'язною алгеброю Лі, то й $\mathfrak{g}$ є розв'язною.*

(3) *Якщо $\mathfrak{g}$ є скінченновимірною, то то існує максимальний за включенням розв'язний ідеал (який називається радикалом алгебри Лі $\mathfrak{g}$). В данному (скінченновимірному) випадку фактор-алгебра по радикалу є напівпростою алгеброю Лі.*

Вище був описаний спосіб, який дозволяє побудувати алгебру Лі, ввівши на асоціативній алгебрі операцію комутування. Розглянемо тепер поняття диференціювання, яке також приводить до алгебр Лі.

Означення 10. *Нехай B — довільна алгебра над полем $\mathbb{K}$. Диференціюванням D алгебри називаєтсья лінійне відображення $D\colon B \to B$, яке задовольняє правилу Лейбніца:*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

для усіх $a, b \in B$.

Позначимо через $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} B$ множину усіх диференціювань алгебри B. Ця множина є векторним простором над $\mathbb{K}$ та замкнена відносно операції комутування

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1,$$

де $D_1, D_2 \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} B$. Отже, можна говорити про $\mathbb{K}$-алгебру Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} B$, яка є підалгеброю $\mathfrak{gl}(B)$.

Означення 11. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі над полем $\mathbb{K}$. Визначимо для кожного $x \in \mathfrak{g}$ відображення $\mathrm{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ за правилом $y \mapsto [x, y]$, де $y \in \mathfrak{g}$. З тотожності Якобі випливає, що відображення ad_x є диференціюванням алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Диференціювання такого вигляду називаються внутрішніми диференціюваннями. алгебри Лі $\mathfrak{g}$.*

Позначимо через $\operatorname{IDer}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$ множину внутрішніх диференціювань алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Ця множина є ідеалом алгебри Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$. Дійсно, для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$ та $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$ маємо $[D, \mathrm{ad}_x](y) = [D(x), y] = \mathrm{ad}_{D(x)}(y)$. Відображення $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$, задане правилом $x \mapsto \mathrm{ad}_x$, є гомоморфізмом алгебр Лі. Оскільки $\operatorname{Ker}(\mathrm{ad}) = Z(\mathfrak{g})$, маємо

$$\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) \cong \operatorname{IDer}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} \subseteq \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}.$$

Алгебра Лі називається напівпростою, якщо розкладається у пряму суму простих алгебр Лі. Зазначимо, що у випадку, коли $\mathfrak{g}$ — напівпроста скінченно-вимірна алгебра Лі над полем нульової характеристики $\mathbb{K}$, має місце рівність $\operatorname{IDer}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g} = \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathfrak{g}$ (див., наприклад, [38], Theorem 5.3). Як було доведено в роботі [77], якщо $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі довільної розмірності над полем довільної характеристики, для якої $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \neq \mathfrak{g}$ та $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$, то вищезазначений результат справедливий й в цьому випадку. Зокрема, усі диференціювання нільпотентних (ненульових) алгебр Лі є внутрішніми.

Означення 12. (1) *Нехай $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ — алгебри Лі над полем $\mathbb{K}$. Розглянемо деякий гомоморфізм алгебр Лі $\rho : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} \mathfrak{h}$. Визначимо зовнішній напівпрямий добуток $\mathfrak{g} \leftthreetimes \mathfrak{h}$ алгебр Лі $\mathfrak{g}$ та $\mathfrak{h}$ як векторний простір $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, на якому заданий комутатор*

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], D_1(y_2) - D_2(y_1),)$$

де $D_1 = \rho(x_1), D_2 = \rho(x_2)$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$.

(2) *Говорять, що алгебра Лі є внутрішнім напівпрямим добутком свого ідеалу* $\mathfrak{n}$ *та підалгебри* $\mathfrak{b}$, *якщо* $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{b}$ *та* $\mathfrak{n} \cap \mathfrak{b} = 0$. *В такому випадку визначений природній гомоморфізм* $\mathfrak{b} \to \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\, \mathfrak{n}$.

Означення 13. *Нехай* V *— n-вимірна абелева алгебра Лі над полем* $\mathbb{K}$. *Тоді* $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} V = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. *За допомогою тотожнього гомоморфізмому* $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} V$ *задамо напівпрямий добуток*

$$\mathrm{aff}_n(\mathbb{K}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \leftthreetimes V,$$

який називається повною афінною лінійною алгеброю Лі.

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, A — комутативно-асоціативна $\mathbb{K}$-алгебра з одиницею та без дільників нуля. Нехай $R = \mathrm{Frac}(A)$ — поле часток області цілісності A.

Твердження 14. *Нехай* $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$.

1. *Якщо* M *— множина твірних алгебри* A, *то* D *визначається значеннями на елементах* M.

2. *Будь-яке диференціювання* $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$ *можна однозначно довизначити до* $\mathbb{K}$*-диференціювання алгебри* R. *Причому, зберігаючи позначення, значення диференціювання на* R *визначається за формулою:*
$$D(\frac{x}{y}) = \frac{D(x)y - xD(y)}{y^2}$$
для усіх $x, y \in A, y \neq 0$.

3. *Для будь-якого* $a \in A$ *та* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива рівність* $D(a^n) = na^{n-1}D(a)$. *Якщо* $a \neq 0$, *то рівність виконується для усіх* $n \in \mathbb{Z}$.

4. *Якщо* $k \in \mathrm{Ker}\, D$, *то* $D(ka) = kD(a)$ *для усіх* $a \in A$.

5. *Для усіх* $a, b \in A$ *та* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива рівність*
$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^{n} D^i(a)D^{n-i}(b).$$

Позначимо через $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ алгебру Лі $\mathbb{K}$-диференціювань алгебри R (надалі під “диференціюваннями” будемо розуміти тільки $\mathbb{K}$-диференціювання).

Визначимо для будь-яких $a \in A$ та $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ відображення $aD : R \to R$ за правилом $aD(x) = a \cdot D(x)$ для усіх $x \in A$. Це відображення також буде диференціюванням алгебри A. Отже, $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ є A-модулем. Нехай $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. Продовживши D до диференціювання $\mathbb{K}$-алгебри R, для довільного $r \in R$ можна визначити диференціювання $rD \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ за вже відомим правилом: $rD(x) = r \cdot D(x), x \in R$. Позначимо через $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ лінійну оболонку (над полем R) множини $\{rD | r \in R, D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A\}$. Простір $R \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ замкнений відносно операції комутування, а тому може бути розглянутий як алгебра Лі; позначимо цю алгебру Лі через $W(A)$. Отже, маємо таку послідовність $\mathbb{K}$-алгебр Лі:

$$\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A \subseteq W(A) \subseteq \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R.$$

Зазначимо, що $W(A)$ та $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$, взагалі кажучи, не будуть алгебрами Лі над полем R відносно введенної операції комутування.

Означення 15. *Нехай L — підалгебра алгебри Лі $W(A)$, RL — лінійна оболонка над полем R елементів вигляду $rD, r \in R, D \in L$. Рангом L називатимемо розмірність $\dim_R RL$ векторного простору RL над полем R.*

Нехай $D \in W(A)$. Тоді $\operatorname{Ker} D$ — підполе у R (поле констант диференціювання D). Отже, перетин ядер будь-якої непорожньої множини диференціювань з $W(A)$ також утворює підполе R, яке буде містити $\mathbb{K}$. Зокрема, якщо ця множина формує підалгебру $W(A)$. Далі в дисертаційній роботі ми будемо іноді говорити про поля констант $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker}_R D$ диференціювань $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$, маючи на увазі, що такі диференціювання можуть розумітися як елементи з $W(A)$.

Означення 16. *Нехай L — підмножина (наприклад, підалгебра) алгебри Лі $W(A)$, $\operatorname{Ker}_R D$ — ядро диференціювання $D \in W(A)$. Полем констант $F = F(L)$ називається перетин*

$$F = \bigcap_{D \in L} \operatorname{Ker}_R D.$$

Якщо L *— підмножина алгебри Лі* $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$*, а* $\operatorname{Ker}_A D \subseteq A$ *— ядро диференціювання* D*, то кільцем констант називаємо перетин* $\bigcap_{D \in L} \operatorname{Ker}_A D$*.*

В теорії локально нільпотентних диференціювань для підалгебри L визначається також так званий інваріант Макар-Ліманова, де перетин вище береться по диференціюванням $D \in \mathrm{LND}(L)$.

Теорема 17. *Нехай* A *— асоціативна комутативна область цілісності над полем* $\mathbb{K}$ *нульової характеристики,* $R = \operatorname{Frac}(A)$*.*

1. *Нехай* L *— підмножина в* $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$*. Тоді кільце констант* $\bigcap_{D \in L} \operatorname{Ker}_A D$ *є цілозамкненим підкільцем в* A*.*

2. *Нехай* L *— підмножина в* $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$*. Тоді поле констант* $\bigcap_{D \in L} \operatorname{Ker}_R D$ *є алгебраїчно замкненим підполем в* R*.*

Наприклад (лема 1.1.3), якщо диференціювання $D_1, \ldots, D_n$ алгебри раціональних функцій $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ утворюють базис векторного простору $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} R$ над полем R, то $\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} D_i = \mathbb{K}$.

Визначимо FL як лінійну оболонку над полем $F = F(L)$ множини диференціювань вигляду fD, де $f \in F$ та $D \in W(A)$.

Лема 18. (див. [50]) *Підпростори* FL *та* RL *є підалгебрами* $W(A)$*. Окрім того,* FL *та* RL *є алгебрами Лі над полем* F*. Якщо* L *абелева, нільпотентна або розв'язна, то таку саму властивість має алгебра Лі* FL*.*

Лема 19. (див. [50]) *Нехай* L *— підалгебра в* $W(A)$*, а* I *— ідеал алгебри Лі* L*. Тоді простір* $RI \cap L$ *над полем* $\mathbb{K}$ *є ідеалом в* L*.*

Означення 20. *Диференціювання* $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ *називається простим, якщо не існує такого ідеалу* $\mathfrak{a}$ *алгебри* A*, що* $D(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$*.*

Означення 21. *Нехай* I *— ідеал алгебри Лі* $L \subseteq W(A)$*, причому* $I = RI \cap L$*. Визначимо ранг (над полем* R*) фактор-алгебри* L/I *як розмірність векторного* R*-простору* RL/RI*:*

$$\operatorname{rank}_R L/I = \dim_R RL/RI.$$

Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ — алгебра многочленів над полем $\mathbb{K}$ від n змінних. Алгебра Лі $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ в цьому випадку позначається $W_n(\mathbb{K})$. Як вже зазначалося вище, $\operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ є A-модулем. Зокрема, алгебра Лі $W_n(\mathbb{K})$ є вільним модулем рангу n над кільцем $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, оскільки будь-яке диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ може бути записане у вигляді

$$D = f_1(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

де $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, а диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ діють як звичайні часткові похідні (зокрема, $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_i) = 1$ та $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = 0$, якщо $i \neq j$). Зазначимо, що $f_i(x_1, \dots, x_n) = D(x_i)$ для $i = 1, \dots, n$.

Означення 22. *Диференціювання $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$ називається локально нільпотентним, якщо для усіх $a \in A$ існує натуральне $n = n(a)$, для якого $D^n(a) = 0$.*

Наприклад, базисні диференціювання $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in W_n(\mathbb{K})$ є локально нільпотентними.

Означення 23. *Диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ вигляду*

$$D = f_1(x_2, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(x_3, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_{n-1}(x_n)\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + f_n\frac{\partial}{\partial x_n},$$

називаються трикутними диференціюваннями, а множина трикутних диференціювань позначається $u_n(\mathbb{K})$.

Множина $u_n(\mathbb{K})$ усіх трикутних диференціювань насправді є підалгеброю Лі в $W_n(\mathbb{K})$ Алгебри Лі $u_n(\mathbb{K})$ досліджувались в роботах [6], [7]; було, зокрема, встановлено, що ці алгебри розв'язні, локально скінченні, локально нільпотентні (але не нільпотентні), попарно неізоморфні при $n \geqslant 2$, а також внутрішні диференціювання алгебр Лі $u_n(\mathbb{K})$ є локально нільпотентними.

Позначимо через $\operatorname{LND}(A)$ множину усіх локально нільпотентних диференціювань $D \in \operatorname{Der}_{\mathbb{K}} A$. Зазначимо, що множина $\operatorname{LND}(A)$ не є підалгеброю Лі та навіть векторним підпростором $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A$. З іншого боку, кожне трикутне диференціювання є локально нільпотентним, тобто в множині $\mathrm{LND}(A)$ міститься алгебра Лі $u_n(\mathbb{K})$. Окрім того, справедливе наступне твердження.

Твердження 24. (Principle 7, Principle 10, [19]) *Нехай A — комутативна область цілісності над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль.*

1. *Нехай $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}} A, a \in A$. Тоді $aD \in \mathrm{LND}(A)$ тоді і тільки тоді, коли $a \in \mathrm{Ker}\, D$ та $D \in \mathrm{LND}(A)$.*
2. *Нехай $D_1, D_2 \in \mathrm{LND}(A)$ та $[D_1, D_2] = 0$. Тоді $D_1 + D_2 \in \mathrm{LND}(A)$.*

Локально нільпотентні диференціювання є важливим класом диференціювань алгебри многочленів. Визначимо дивергенцію диференціювання як

$$\mathrm{div}\, D = \frac{\partial D(x_1)}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial D(x_n)}{\partial x_n}.$$

Твердження 25. *Якщо $D \in \mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$, то $\mathrm{div}\, D = 0$.*

Твердження 26. *Нехай A — комутативна область цілісності над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. Тоді група $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} A$ автоморфізмів $\mathbb{K}$-алгебри A діє на множині $\mathrm{LND}(A)$ спряженнями: $\alpha \cdot D = \alpha D \alpha^{-1}$ для будь-якого локально нільпотентного диференціювання $D \in \mathrm{LND}(A)$ та автоморфізму $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} A$.*

Наступна теорема Ренчлера описує локально нільпотентні диференціювання алгебри многочленів від двох змінних.

Теорема 27. (див. [69]) *Нехай $\mathbb{K}$ — поле характеристики нуль, $A = \mathbb{K}[x, y]$. Тоді для довільного диференціювання $D \in \mathrm{LND}(A)$ існує автоморфізм $\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} A$ та многочлен $f \in \mathbb{K}[x]$, для яких має місце рівність $\alpha D \alpha^{-1} = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$. Отже,*

$$\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y]) = \bigcup_{\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{K}[x,y])} \varphi u_2(\mathbb{K}) \varphi^{-1}.$$

Попереднє твердження насправді можна уточнити: в даному випадку група автоморфізмів має більш детальний опис. Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Автоморфізми α алгебри A, для яких $\alpha(x_i) = \sum_{i=1} a_{ij} x_j + b_i, a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, утворюють групу, яка називаєтсья повною афінною групою $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{K})$. Елементарними автоморфізмами A називаються автоморфізми, визначені на змінних за правилом $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_i + p, \ldots, x_n)$, де многочлен p не залежить від x_i. Тоді підгрупа $T_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} A$, породжена елементарними автоморфізмами та елементами $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{K})$, називається ручною підгрупою (а її елементи — ручними автоморфізмами).

Теорема 28. (Юнга — ван дер Кулька) *Будь-який автоморфізм алгебри многочленів від двох змінних є ручним, тобто* $T_2(\mathbb{K}) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, x_2]$.

Розділ 1

Розв'язні підалгебри Лі диференціювань кільця многочленів від трьох змінних

Результати цього розділу були опубліковані у роботі [13].

Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ — алгебра многочленів від трьох змінних та $R = \mathbb{K}(x_1, x_2, x_3)$ — алгебра раціональних функцій, $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль. Алгебра Лі $W_3(\mathbb{K})$ усіх $\mathbb{K}$-диференціювань на A є дуже цікавим математичним об'єктом, пов'язаним з групами симетрій диференціальних рівнянь з частинними похідними.

В даному розділі викладені дослідження скінченновимірних розв'язних підалгебр $W_3(\mathbb{K})$ рангу 3 над R.

1.1 Про підалгебри, які містять абелеві ідеали рангу 3 над полем раціональних функцій

Наступні дві леми є стандартними фактами про диференціювання (див. [50]).

Лема 1.1.1. *Нехай $D_1, D_2 \in W_n(\mathbb{K})$ та $a, b \in R$. Тоді*

$$[aD_1, bD_2] = ab[D_1, D_2] + aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Якщо $[D_1, D_2] = 0$, то

$$[aD_1, bD_2] = aD_1(b)D_2 - bD_2(a)D_1.$$

Лема 1.1.2. *Якщо $L \subseteq W_n(\mathbb{K})$ та $F = F(L)$ — поле констант L в R, то FL є алгеброю Лі над F. Якщо L є абелевою, нільпотентною чи розв'язною, то відповідна властивість переноситься й на алгебру FL.*

Нагадаємо, що якщо L — підалгебра алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$, то поле констант визначається як перетин

$$F(L) = \bigcap_{D \in L} \operatorname{Ker} D,$$

де $\operatorname{Ker} D$ — ядра (поля констант) окремих диференціювань D. Зазначимо, що $\mathbb{K} \subseteq F(L) \subseteq R$. Окрім того, поле констант $F(L)$ є алгебраїчно замкненим в полі R та існує диференціювання D', для якого $\operatorname{Ker} D' = F(L)$ (див. [59]). Наступна лема говорить про цілком очікувану рівність: $F(\widetilde{W}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}$.

Лема 1.1.3. *Нехай $D_1, \ldots, D_n$ є базисом векторного простору $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ над полем R. Тоді $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} D_i = \mathbb{K}$.*

Доведення. Всупереч умові леми припустимо, що $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} D_i \neq \mathbb{K}$ й нехай

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} D_i, \ \ f \in R \setminus \mathbb{K}.$$

Розглянемо підалгебру $\mathbb{K}(f) \subset R$. Функція $f \in \mathbb{K}(f)$ визначає диференціювання $\frac{\partial}{\partial f}$ алгебри $\mathbb{K}(f)$ й це диференціювання може бути продовжене до диференціювання $\frac{\partial}{\partial f}$ (ми не вводимо нового позначення) алгебри $\mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$. Але $\frac{\partial}{\partial f} = \sum_{i=1}^n s_i D_i$ для деяких $s_i \in R$, а тому

$$\frac{\partial f}{\partial f} = \sum_{i=1}^{n} s_i D_i(f_1) = 0,$$

згідно з вибором елемента f. Але це суперечить умові $\frac{\partial f}{\partial f} = 1$. Отримане протиріччя й доводить рівність $\bigcap_{i=1}^n \operatorname{Ker} D_i = \mathbb{K}$ □

Наслідок 1.1.4. *Нехай $L \subset \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ – абелева підалгебра й $\operatorname{rank}_R L = n$. В такому випадку $\dim_{\mathbb{K}} L = n$.*

Доведення. Нехай $D_1, \ldots, D_n$ — базис простору L над полем R. Тоді довільне диференціювання $D \in L$ може бути представлене у вигляді $D = \sum_{i=1}^{n} s_i D_i$ для деяких $s_i \in R$. З рівностей

$$[D_i, D] = 0 = \sum_{j=1}^{n} D_i(s_j) D_j,$$

отримаємо $D_i(s_j) = 0, \ \ i, j = 1, \ldots, n$ з огляду на довільність вибору диференціювання D. Згідно з лемою 1.1.3, $s_i \in \mathbb{K}$ та диференціювання $D_1, \ldots, D_n$ утворюють базис простору L над $\mathbb{K}$. Отже, $\dim_{\mathbb{K}} L = n$. □

Теорема 1.1.5. *Нехай L - розв'язна підалгебра $W_3(\mathbb{K})$. Якщо L має абелевий ідеал I рангу* 3 *над R, то тоді L ізоморфна деякій розв'язній підалгебрі загальної афінної алгебри Лі* $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. *Як наслідок,* $3 \leqslant \dim_{\mathbb{K}} L \leqslant 9$.

Доведення. Розглянемо довільний базис D_1, D_2, D_3 ідеалу I над R. Тоді будь-яке диференціювання $D \in L$ має вигляд

$$D = s_1 D_1 + s_2 D_2 + s_3 D_3, \quad s_i \in R.$$

З огляду на включення

$$[D_i, D] = D_i(s_1) D_1 + D_i(s_2) D_2 + D_i(s_3) D_3 \in I,$$

ми отримаємо (користуючись Лемою 1.1.3), що $D_i(s_j) \in \mathbb{K}, \ i, j = 1, 2, 3$. Отже, кожному диференціюванню $D \in L$ поставимо у відповідність матрицю

$$B_D = \begin{pmatrix} D_1(s_1) & D_1(s_2) & D_1(s_3) \\ D_2(s_1) & D_2(s_2) & D_2(s_3) \\ D_3(s_1) & D_3(s_2) & D_3(s_3) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \tag{1.1}$$

Нехай S — множина усіх стовпців матриць B_D, для усіх $D \in L$. Позначимо через $\mathrm{rank}_{\mathbb{K}} S$ максимальне число лінійно незалежних елементів, які лежать у множині $S \subseteq \mathbb{K}^3$. Бачимо, що $d = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}} S \leqslant 3$. Якщо $d = 0$, тоді всі стовпці для всіх $D \in L$ є нульовими, звідси отримаємо $s_i \in \mathbb{K}, \ i = 1, 2, 3$, згідно з Лемою 1.1.3. Але цього випливає $L = I$. Тому припустимо далі, що $d \geqslant 1$.

Випадок 1. $d = 1$. В цьому випадку існує диференціювання $D \in L \setminus I$, яке має вигляд

$$D = s_1 D_1 + s_2 D_2 + s_3 D_3,$$

причому усі стовбці S будуть пропорційними до стовпця $(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1))^T$ матриці, яка відповідає обраному диференціюванню D. Розглянемо довільний елемент $(D_1(t), D_2(t), D_3(t))^T \in S$. Існує $\gamma \in \mathbb{K}$, для якого

$$(D_1(t), D_2(t), D_3(t))^T = \gamma \left(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1)\right)^T.$$

Звідси отримаємо

$$D_1(t - \gamma s_1) = D_2(t - \gamma s_1) = D_3(t - \gamma s_1) = 0$$

З леми 1.1.3 маємо $t - \gamma s_1 = \delta$ для деякого $\delta \in \mathbb{K}$, тобто $t = \gamma s_1 + \delta$. Інакше кажучи, для будь-якого диференціювання $D \in L$, $D = t_1 D_1 + t_2 D_2 + t_3 D_3$, $t_i \in R$ матриця B_D має стовпці $(D_1(t_i), D_2(t_i), D_3(t_i))^T, i = 1, 2, 3$, причому $t_i = f_i(s)$, $\deg f_i \leqslant 1$, $f_i \in \mathbb{K}[t]$. З огляду на те, що

$$(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1))^T \neq (0, 0, 0),$$

ми можемо вважати

$$D_1(s_1) = 1,\ D_2(s_1) = \gamma_2,\ D_3(s_1) = \gamma_3$$

для деяких $\gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{K}$. Покладемо

$$D_1' = D_1,\ D_2' = D_2 - \gamma_2 D_1,\ D_3' = D_3 - \gamma_3 D_1.$$

Отже,

$$D_1'(s_1) = 1,\ D_2'(s_1) = 0,\ D_3'(s_1) = 0$$

та диференціювання D_1', D_2', D_3' формують базис I над полем R. Розглянемо довільне диференціювання $D = t_1 D_1 + t_2 D_2 + t_3 D_3 \in L$ та нехай $t_i = \gamma_i s_i + \delta_i$, $i = 1, 2, 3$. Визначимо мономорфізм L в загальну афінну алгебру Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$.

Для цього розглянемо відображення $\varphi : L \to \mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$, визначене за наступним правилом:

$$\varphi(D_i) = \frac{\partial}{\partial x_i},\ \varphi(s_1 D_i) = x_1 \frac{\partial}{\partial x_i},$$

а далі за лінійністю. Отримали бажане вкладення.

Випадок 2. $d = \mathrm{rank}_{\mathbb{K}} S = 2$. В цьому випадку оберемо два лінійно незалежних стовпці з S

$$\left(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1)\right)^T, \left(D_1(s_2), D_2(s_2), D_3(s_2)\right)^T. \tag{1.2}$$

Зазначимо, що ці стовбці необов'язково походять з однієї матриці B_D, $D \in L$. Отже, довільний стовпець $\left(D_1(t), D_2(t), D_3(t)\right)^T \in S$ є лінійною комбінацією стовбців (1.2). Тоді $t = f(s_1, s_2)$ для деякого многочлена $f \in \mathbb{K}[u, v]$, $\deg f \leqslant 1$. Оскільки матриця

$$\begin{pmatrix} D_1(s_1) & D_1(s_2) \\ D_2(s_1) & D_2(s_2) \\ D_3(s_1) & D_3(s_2) \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

має ранг 2, можемо вважати, що перший та другий рядки цієї матриці є лінійно незалежними. Тоді існують такі $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{K}$, що

$$(1, 0) = \gamma_1 \left(D_1(s_1), D_1(s_2)\right) + \gamma_2 \left(D_2(s_1), D_2(s_2)\right). \tag{1.4}$$

Позначимо $D_1' = \gamma_1 D_1 + \gamma_2 D_2$. Отримаємо $D_1'(s_1) = 1$, $D_1'(s_2) = 0$. Так само можна обрати такі $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{K}$, що диференціювання $D_2' = \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2$ задовольнятиме рівностям $D_2'(s_1) = 0$, $D_2'(s_2) = 1$.

Що стосується третього рядка матриці (1.3), то він є лінійною комбінацією перших двох. Отже, існують $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, для яких

$$(D_3 - \mu_1 D_1 - \mu_2 D_2)(s_1) = 0, \quad (D_3 - \mu_1 D_1 - \mu_2 D_2)(s_2) = 0.$$

Нехай $D_3' = D_3 - \mu_1 D_1 - \mu_2 D_2$. Тоді

$$D_i'(s_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2.$$

Для будь-якого диференціювання $D \in L$ матимемо $D = t_1D_1 + t_2D_2 + t_3D_3$ для деяких раціональних функцій $t_1, t_2, t_3 \in R$. Оскільки $t_i = f_i(s_1, s_2),\ \deg f_i \leqslant 1$, ми бачимо, що L може бути вкладена в алгебру Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$.

Випадок 3 $\mathrm{rank}_{\mathbb{K}} S = 3$. В цьому випадку оберемо три лінійно незалежних стовпці з S

$$\begin{gathered}(D_1(s_1), D_2(s_1), D_3(s_1))^T\,,\\ (D_1(s_2), D_2(s_2), D_3(s_2))^T\,,\\ (D_1(s_3), D_2(s_3), D_3(s_3))^T\,.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Довільний стовпець $(D_1(t), D_2(t), D_3(t))^T \in S$ є лінійною комбінацією стовбців (1.5). Тоді $t = f(s_1, s_2, s_3)$ для деякого многочлена $f \in \mathbb{K}[u, v, w],\ \deg f \leqslant 1$. Тоді існують такі $\gamma_{ij} \in \mathbb{K}$, що

$$(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) = \gamma_{i1}R_1 + \gamma_{i2}R_2 + \gamma_{i3}R_3,$$

де $R_i = (D_i(s_1), D_i(s_2), D_i(s_3))^T$, $i = 1, 2, 3$. Позначимо

$$D_i' = \gamma_{i1}D_1 + \gamma_{i2}D_2 + \gamma_{i3}D_3.$$

Отримаємо $D_i'(s_j) = \delta_{ij}$. Для будь-якого диференціювання $D = t_1D_1 + t_2D_2 + t_3D_3 \in L$ для деяких $t_1, t_2, t_3 \in R$, причому $t_i = f_i(s_1, s_2, s_3),\ \deg f_i \leqslant 1$. Ми знову бачимо, що L може бути вкладена в алгебру Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. □

1.2 Про підалгебри, які містять абелевий ідеал рангу $\leqslant 2$ над полем раціональних функцій

Лема 1.2.1. *Нехай $L \subset \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ — підалгебра Лі, I — ідеал L, $F = F(I)$ — поле констант ідеалу I в R. Тоді для будь-якого диференціювання $D \in L$ маємо $D(F) \subseteq F$.*

Доведення. Нехай $D \in L$ та $r \in F$. Для довільного диференціювання $D_1 \in I$ отримаємо $D_1(r) = 0$, а тому

$$0 = D(D_1(r)) = D_1(D(r)) + [D, D_1](r).$$

З огляду на те, що $[D, D_1] \in I$, маємо $[D, D_1](r) = 0$, звідси $D_1(D(r)) = 0$. Отже, $D(r) \in F$, тому що диференціювання D_1 є довільно обраним елементом ідеалу I. Отже, $D(F) \subseteq F$. $\square$

Теорема 1.2.2. *Нехай $L \subset W_3(\mathbb{K})$ — розв'язна підалгебра Лі, причому $\dim_{\mathbb{K}} L < \infty$, $\operatorname{rank}_R L = 3$. Нехай $I \subset L$ — ідеал рангу 2 над R та $F = F(I)$ — поле констант I в R. Тоді алгебра Лі L міститься в підалгебрі $\widetilde{W}_3(\mathbb{K})$ вигляду $\overline{L} = F\overline{I} + L$, де $\overline{I} = (RI) \cap L$. Алгебра Лі $\overline{L}$ є розв'язною, $F\overline{I}$ — її ідеал рангу 2 над полем R, який в свою чергу може бути вкладений в $\mathrm{aff}_2(F)$. Окрім цього, $\overline{L}$ є розширенням ідеалу $F\overline{I}$ алгеброю Лі розмірності 1 або 2 над $\mathbb{K}$.*

Доведення. Зауважимо, що $\overline{I} = (RI) \cap L$ дійсно є ідеалом алгебри Лі L згідно з Лемою 19. Крім цього, $\mathrm{rk}_R \overline{L} = 2$ й $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} \leqslant 2$ (див. [51]). Позначимо через F поле констант I в R. За Лемою 1.2.1 маємо $D(F) \subseteq F$ для усіх $D \in L$. Отже, підалгебра $F\overline{I}$ алгебри $\widetilde{W}_3(\mathbb{K})$ є ідеалом алгебри Лі $\overline{L} = F\overline{I} + L$. Звідси отримуємо $\operatorname{rank}_R \overline{I} = 2$. За Теоремою 1 статті [45], алгебра Лі $F\overline{I}$ (як алгебра Лі над полем F) ізоморфна деякій підалгебрі алгебри Лі $\mathrm{aff}_2(F)$. Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} \leqslant 2$, тоді отримаємо $\dim_{\mathbb{K}}(L + F\overline{I}/F\overline{I}) \leqslant 2$. $\square$

Цікаво, що в умови Теореми 1.2.2 в загальному випадку $\overline{L}$ не є алгеброю Лі над F та $\overline{L}$ є нескінченновимірною над $\mathbb{K}$ (хоча $\dim_F F\overline{I} \leqslant 7$). Оскільки основне поле $\mathbb{K}$ є алгебраїчно замкненим, а L — розв'язна, алгебра Лі L має ідеал вигляду $J = \mathbb{K}D_1 \subset I$; також існує ідеал фактор-алгебри L/J вигляду $\mathbb{K}D_2 + J$, що лежить у I/J. Більш того, існує ідеал вигляду $\mathbb{K}D_3 + \overline{I}$ фактор-алгебри $L/\overline{I}$. Тоді диференціювання D_1, D_2, D_3 є лінійно незалежними над полем R, а тому формують базис RL над R. З огляду на вибір D_1 та D_2 існують $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ та $f \in F$, для яких

$$[D_3, D_1] = \alpha_1 D_1, \ [D_3, D_2] = \alpha_2 D_2 + f D_1.$$

Наступний результат деталізує опис алгебри $\overline{L}$.

Твердження 1.2.3. *Нехай справедливі умови Теореми 1.2.2. Крім цього, припустимо, що $\dim_{\mathbb{K}} L > 6$. Тоді або існують раціональні функції $r_1, r_2 \in R$, для* *яких* $D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$ *і кожне диференціювання* $D \in F\overline{I}$ *має вигляд*

$$D = f_1(r_1, r_2)D_1 + f_2(r_1, r_2)D_2,\ f_i \in \mathbb{K}[t_1, t_2],\ \deg f_i \leqslant 1$$

або існує $r_i \in R$, $i = 1$ *або* $i = 2$, *для якого* $D_i(r_j) = \delta_{ij}$ *та усі елементи* $D \in F\overline{I}$ *можуть бути представлені у вигляді*

$$D = g_1(r_i)D_1 + g_2(r_i)D_2,\ \deg g_j \leqslant 1.$$

Окрім того,

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2 r_2,\ D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2.$$

У випадку $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} = 2$ *можна обрати диференціювання* $\overline{D} \in L \setminus (\mathbb{K}D_3 + \overline{I})$, *для якого справедливі тотожності*

$$\overline{D} = r_3 D_3 + s_2 D_2,\ r_3 \in R,$$

$$D_3(r_3) = 1,\ D_1(r_3) = D_2(r_3) = 0,\ D_1(s_2) = 0.$$

Тоді

$$\lambda_1 = 0,\ g_2 = 0,\ s_2 = \lambda_2 r_2 r_3 + f,\ f \in \mathbb{K}.$$

Доведення. Якщо відтворити аргументи з доведення Теореми 1.1.5 та використовувати перетворення стовпців матриці

$$B_D = \begin{pmatrix} D_1(s_1) & D_1(s_2) \\ D_2(s_1) & D_2(s_2) \end{pmatrix},$$

можна відшукати або раціональні функції r_1, r_2 з умовою $D_i(r_j) = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$, або ж раціональну функцію r, для якої справедливі умови: або $D_1(r) = 1,\ D_2(r) = \gamma$, або $D_1(r) = \delta,\ D_2(r) = 1$. У випадку $\delta \neq 0$ розглянемо диференціювання $D_2' = D_2 - \delta D_1,\ D_1' = D_1$, тоді $D_1'(r) = 0, D_2'(r) = 1$. Отже, можна припустити, що або $D_1(r) = 1,\ D_2(r) = 0$, або $D_1(r) = 0, D_2(r) = 1$ й r співпадає з r_1 або з r_2.

Розглянемо дію диференціювань D_i на $r_i, s_j,\ i = 1, 2, 3, j = 2, 3$. З рівності $D_1(r_1) = 1$ маємо $D_3(D_1(r_1)) = 0$, а тоді

$$D_1(D_3(r_1)) = D_3(D_1(r_1)) - [D_3, D_1](r_1) = 0 - \lambda_1 D_1(r_1) = -\lambda_1.$$

З рівностей $D_1(D_3(r_1)) = -\lambda_1$ та $D_1(-\lambda_1 r_1) = -\lambda_1$ отримаємо, що

$$D_1(D_3(r_1) + \lambda_1 r_1) = 0.$$

Інакше кажучи, для деякого $s' \in \operatorname{Ker} D_1$ маємо $D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 + s'$. Так само з рівності

$$D_2(d_3(r_1)) = D_3(D_2(r_1)) - [D_3, D_2](r_1)$$

випливає $D_3(r_1) = -g_2 r_2 + s''$ для деякого $s'' \in \operatorname{Ker} D_2$. Подіємо диференціюванням D_1 на обидві сторони рівності $-\lambda_1 r_1 + s' = -g_2 r_2 + s''$. Матимемо $-\lambda_1 = D_1(s'')$. Подіємо тепер диференціюванням D_2 на ту саму рівность. Маємо $D_2(s') = -g_2$. Тоді $s'' + \lambda_1 r_1 \in \operatorname{Ker} D_1$. Отже, з включення $s'' + \lambda_1 r_1 \in \operatorname{Ker} D_2$ випливає

$$s'' + \lambda_1 r_1 \in \operatorname{Ker} D_1 \cap \operatorname{Ker} D_2 = F.$$

Тоді для деякого $v_1 \in F$ маємо $s'' = -\lambda_1 r_1 + v_1$. Оскільки

$$-\lambda_1 r_1 + s' = -g_2 - \lambda_1 r_1 + v_1,$$

маємо $s' = -g_2 r_2 + v_1$. Отже, приходимо до рівності

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2 r_2 + v_1,\ v_1 \in F.$$

З рівностей

$$D_2(D_3(r_2)) = D_3(D_2(r_2)) - [D_3, D_2](r_2) = 0 - (\lambda_2 D_2 + g_2 D_1)(r_2) = -\lambda_2$$

отримаємо схожим чином рівність $D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2 + t'$, де $t' \in \operatorname{Ker} D_2$. Отже,

$$D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2 + v_2, v_2 \in F.$$

Диференціювання D_3 без втрати загальності можна замінити на $D_3' = D_3 - v_1 D_1 - v_2 D_2$, тобто маємо $D_3'(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2 r_2, D_3'(r_2) = -\lambda_2 r_2$. Зберігаючи попередню нотацію, отримаємо

$$D_3(r_1) = -\lambda_1 r_1 - g_2 r_2, D_3(r_2) = -\lambda_2 r_2.$$

Припустимо, що $\dim_{\mathbb{K}} L/\overline{I} = 2$ та нехай $\overline{D} = r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2$ —довільний елемент $L \setminus (\mathbb{K}D_3 + I)$. Тоді

$$[\overline{D}, D_3] = [r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_3] =$$

$$= -D_3(r_3)D_3 - D_3(s_1)D_1 - s_1[D_1, D_3] - D_3(s_2)D_2 - s_2[D_2, D_3] =$$
$$= -D_3(r_3)D_3 + (-D_3(s_1) + \lambda_1 s_1 + s_2 g_2)D_1 + (-D_3(s_2) + \lambda_2 s_2)D_2.$$

З цих рівностей отримаємо $D_3(r_3) = -\gamma$; тут елемент γ обраний з рівності $[\overline{D}, D_3] = \gamma D_3 + \widetilde{D}$, де $\widetilde{D} \in \overline{I}$. Окрім того, для деяких $\mu \in \mathbb{K}$ маємо

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_1] = \mu D_1,$$

з чого випливає $D_1(r_3) = 0, D_1(s_2) = 0$. З рівності

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_2] = f_1D_1 + f_2D_2$$

для деяких $f_1, f_2 \in F$ випливає, що $D_3(r_3) = 0$. Беручи все до уваги, отримаємо

$$D_1(r_3) = D_2(r_3) = 0, \qquad D_3(r_3) = 1, \qquad D_1(s_2) = 0. \tag{1.6}$$

З огляду на рівність $[\overline{D}, D_1] = \theta D_1$, яка виконується для деякого $\theta \in \mathbb{K}$, маємо

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_3] = (\lambda_1 r_3 - D_1(s_1))D_1,$$

а тому $\lambda_1 r_3 - D_1(s_1) = \theta$. Отже, $D_1(s_1) = \lambda_1 r_3 + \theta, \theta \in \mathbb{K}$. Окрім того, $[\overline{D}, D_2] = f_1D_1 + f_2D_2$ для деяких $f_1, f_2 \in F$. Аналогічно

$$[r_3D_3 + s_1D_1 + s_2D_2, D_2] = (r_3g_2 - D_2(s_1))D_1 + (\lambda_2 r_2 - D_2(s_2))D_2,$$

звідси маємо

$$D_2(s_1) = g_2r_3 - f_2, \qquad D_2(s_2) = \lambda_2 r_3 - f_2. \tag{1.7}$$

Зазначимо, що

$$s_1 = g_2r_2r_3 - r_2f_2 + f_3, \qquad s_2 = \lambda_2 r_2r_3 - r_2f_2 + f_4$$

для деяких $f_3, f_4 \in F$. Вище було показано, що $D_1(s_1) = \lambda_1 r_3 + \theta, \theta \in \mathbb{K}$, тому для деякого $f_5 \in F$ маємо

$$s_1 = \lambda_1 r_1 r_3 + \theta r_1 + f_5.$$

Діючи D_2 на обидві сторони рівності

$$\lambda_1 r_1 r_3 + \theta r_1 + f_5 = g_2 r_2 r_3 - r_2 f_2 + f_3, \tag{1.8}$$

отримаємо $g_2 r_3 - f_2 = 0$. Проте r_1, r_2, r_3 — лінійно незалежні над полем F; отже, з останньої рівності випливає $g_2 = 0$. Рівність (1.8) можна переписати наступним чином:

$$\lambda_1 r_1 r_3 + \theta r_1 + f_5 = -r_2 f_2 + f_3.$$

Діючи D_2 на обидві сторони останньої рівності, отримаємо $f_2 = 0$. Отже,

$$\lambda_1 r_1 r_3 + \theta r_1 + f_5 = f_3.$$

Діючи D_1 на обидві сторони останньої рівності, отримаємо $\lambda_1 r_3 + \theta = 0$. Зазначимо, що з $r_3 \notin \mathbb{K}$ випливає $\lambda_1 = 0$, а тому $s_1 = 0$. Можна так само припустити, що $f_4 = 0$ та $s_2 = \lambda_2 r_2 r_3$. Тому ми маємо

$$s_1 = 0, \qquad s_2 = \lambda_2 r_2 r_3, \qquad g_2 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \lambda_1 = 0.$$

Останні рівності дають

$$[D_3, D_1] = 0, \qquad [D_3, D_2] = \lambda_2 D_2, \qquad \overline{D} = r_3 D_3 + s_2 D_2,$$

де $s_2 = \lambda_2 r_2 r_3$ та $D_i(r_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Доведення закінчене.

$\square$

1.3 Висновки

У першій частині розділу вивчались розв'язні підалгебри алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$, які мають абелеві ідеали рангу 3 над полем раціональних функцій. Було доведено, що розв'язна скінченновимірна підалгебра $L \subseteq W_3(\mathbb{K})$, яка має абелевий ідеал рангу 3 над R, вкладається у загальну афінну алгебру Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$.

У другій частині розділу вивчались скінченновимірні підалгебри алгебри Лі $W_3(\mathbb{K})$ рангу 3, які мають абелеві ідеали рангу 1 або 2 над полем раціональних функцій. Якщо L має абелевий ідеал I рангу 2 над полем раціональних функцій R, то L вкладається в підалгебру $\bar{L} \in \widetilde{W_3}(\mathbb{K}) = Der_{\mathbb{K}}R$, причому $\overline{L}$ буде розширенням алгебри Лі розмірності $\leqslant 2$ підалгеброю загальної афінної алгебри Лі $\mathrm{aff}_2(F)$, де F є полем констант ідеалу I в полі R.

Природнім подальшим напрямом дослідження можуть бути розв'язні (або більш загально — нільпотентні) скінченновимірні підалгебри $W_n(\mathbb{K})$ з абелевими ідеалами корангу 0, 1 або 2. На жаль, повна класифікація скінченновимірних підалгебр $W_n(\mathbb{K})$ є дикою задачею.

Розділ 2

Централізатори диференціювань поліноміальних кілець

Результати цього розділу опубліковані в статтях [13], [24].

Нехай $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — алгебра многочленів над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль $\mathbb{K}$ та $R = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ — алгебра раціональних функцій від n змінних (поле часток A). Позначимо через $W_n = W_n(\mathbb{K})$ алгебру Лі всіх $\mathbb{K}$-диференціювань на A (у випадку $\mathbb{C}$ це алгебра Лі всіх векторних полів на $\mathbb{C}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами). Для заданого $D \in W_n(\mathbb{K})$ будова централізатора $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ залежить від поля констант диференціювання D, яке є підполем поля R. Ми природнім чином розширюємо кожне диференціювання D алгебри A на алгебру R; зауважимо, що під **полем** констант диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ ми завжди маємо на увазі ядро $\operatorname{Ker}_R D$ розширення D на алгебру R. Якщо ж мова йде про **кільце** констант, то мається на увазі ядро $\operatorname{Ker}_A D$ відображення D, заданого на A.

Підрозділ 2.1 присвячений опису централізаторів диференціювань $D \in W_n(\mathbb{K})$, у яких поле констант $\operatorname{Ker}_R D \subset R$ має степінь трансцендентності $\leqslant 1$ над $\mathbb{K}$. Інакше кажучи, для таких диференціювань з $f, g \in \operatorname{Ker}_R D$ завжди випливає, що f та g є алгебраїчно залежними раціональними функціями над $\mathbb{K}$.

Якщо $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}_R D = 0$, то поле констант $\operatorname{Ker}_R D$ співпадає з $\mathbb{K}$ й тоді $\dim_{\mathbb{K}} C_{W_n}(D) \leqslant n$ (Наслідок 2.1.2).

Якщо $\operatorname{tr.deg}_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}_R D = 1$, то за Лемою 2.1.9 можливі два випадки: $\operatorname{Ker}_R D =$

$\mathbb{K}(p)$ або або $\operatorname{Ker}_R D = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$, де p, q є незвідними та алгебраїчно незалежними над $\mathbb{K}$ многочленами.

Детальніше, у випадку $\operatorname{Ker}_R D = \mathbb{K}(p)$ централізатор $C = C_{W_n}(D)$ — модуль над $\mathbb{K}[p]$ рангу k, $1 \leqslant k \leqslant n$; окрім цього, C є або алгеброю Лі над кільцем $\mathbb{K}[p]$, або містить ідеал I, $\operatorname{rank}_R I = k - 1$, який є алгеброю Лі над $\mathbb{K}[p]$ та для деякого елемента $T \in C$ маємо $C = I + \mathbb{K}[p]T$ (Теорема 2.1.16).

Якщо ж $\operatorname{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$, то централізатор матиме вигляд

$$C_{W_n}(D) = (\mathbb{K}(p/q)D + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_{k-1}) \cap W_n(\mathbb{K}),$$

причому $\dim_{\mathbb{K}} C_{W_n}(D) < \infty$ (Теорема 2.1.18).

Підрозділ 2.2 присвячений лінійним диференціюванням.

В підрозділі 2.3 вивчаються централізатори якобіанних диференціювань алгебри многочленів від двох змінних $\mathbb{K}[x, y]$. Встановлено опис елементів централізатора якобіанного диференціювання $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$. Було доведено, що $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ є вільним модулем рангу 1 або 2 над кільцем вигляду $\mathbb{K}[p]$.

Як вже зазначалося раніше, $W_n(\mathbb{K})$ є вільним A-модулем, а тоді кожне диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ єдиним чином може бути записане у вигляді

$$D = f_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}$$

для деяких $f_i \in A$. Більш того, для будь-якого ненульового диференціювання D маємо $D = hD_0$, де D_0 — редуковане диференціювання; останнє означає, що рівність $D_0 = h_1 D_1$ для деякого $D_1 \in W_n(\mathbb{K})$ та $h_1 \in A$ дає $h_1 \in \mathbb{K}^*$. Як і всюди вище, через $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ позначається алгебра Лі усіх $\mathbb{K}$-диференціювань асоціативної алгебри раціональних функцій R. Зауважимо також, що $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ — векторний простір розмірності n над R (найочевиднішим базисом якого є $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$), але не алгебра Лі над полем R.

2.1 Централізатори диференціювань алгебри многочленів від n змінних

Лема 2.1.1. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ — ненульове диференціювання, F — поле констант D в R та $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді або $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D) = FD$, або $C = FD + FD_2 + \cdots + FD_k$ для деяких $D_2, \ldots, D_k \in C$, де $D, D_2, \ldots, D_k$ є лінійно незалежними над R.*

Доведення. Зазначимо, що C — підалгебра в $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$, а також, звісно, $D \in C$. Нехай $D, \ldots, D_k$ (можливо, $k = 0$) є базисом векторного простору RC над R. Оскільки $C \subseteq RC$, кожне диференціювання $T \in C$ може бути представлене у вигляді

$$T = rD + r_2D_2 + \cdots + r_kD_k$$

для деяких раціональних функцій $r, r_i \in R$. Однак тоді $D(r_i) = 0$ для усіх $i = 1, \ldots, k$ з огляду на рівність $[D, T] = 0$; іншими словами, $r_i \in \operatorname{Ker} D = F$.

Навпаки, будь-яке диференціювання з $FD + \cdots + FD_k$ лежить у C. Отже,

$$C = FD + \cdots + FD_k.$$

У випадку, коли для усіх $i \geqslant 2$ справедливе включення $F \subseteq \operatorname{Ker} D_i$, централізатор C є не лише k-вимірним простіром над F, але й F-алгеброю Лі.

□

Наслідок 2.1.2. *За умовами Леми 2.1.1, у випадку $F = \mathbb{K}$ централізатор C є алгеброю Лі над $\mathbb{K}$ розмірності k.*

Приклад 2.1.3. Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ має вигляд

$$D = f_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n},$$

де $f_i(x_1, \ldots, x_n) = D(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Такі диференціювання називаються лінійними, вони є темою підрозділу 2.2. Припустимо, що матриця (a_{ij}) має діагональну жорданову нормальну форму вигляду

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

де $\lambda_i \in \mathbb{K}$ — лінійно незалежні над $\mathbb{Z}$ власні значення матриці (a_{ij}). В такому випадку без втрати загальності матрицю (a_{ij}) можна вважати діагональною (інакше виконаємо лінійні перетворення змінних). Маємо $\operatorname{Ker}_R D = \mathbb{K}$, як випливає з Теореми 10.1.2 з [58] Розглянемо

$$L = \{\sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \mid \mu_j \in \mathbb{K}\}.$$

Тоді $L \subseteq C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ та $\operatorname{rank}_R L = n$. Отже, $\operatorname{rank}_R C = n$. Тоді C є $\mathbb{K}$-алгеброю Лі та $\dim_{\mathbb{K}} C = n$, як випливає з Наслідку 2.1.2.

Наведемо також наступний результат.

Твердження 2.1.4. (див. [8]) *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ — локально нільпотентне диференціювання. Тоді $\operatorname{rank}_R C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = n$.*

Наступне твердження є відомою теоремою Гордана.

Теорема 2.1.5. (див. [71]) *Нехай k — довільне поле довільної характеристики, $k \subset K \subset k(x_1, \dots, x_n)$, причому степінь трансцендентності розширення K над k дорівнює 1. Тоді $K = k(\varphi)$ для деякої $\varphi \in k(x_1, \dots, x_n)$.*

Твердження 2.1.6. *Нехай для диференціювання $D_1 \in \widetilde{W}_n(\mathbb{K})$ степінь трансцендентності поля констант $F = \operatorname{Ker}_R D_1$ над $\mathbb{K}$ дорівнює 1. Тоді ценралізатор $C = C_{\widetilde{W}_n(\mathbb{K})}(D_1)$ є підалгеброю $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$, причому $\operatorname{rank}_R C = k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Окрім того,*

$$C = FD_1 + FD_2 + \dots + FD_k$$

для деяких $D_2, \dots, D_k \in C$. При цьому або C є алгеброю Лі над полем F та $\dim_F C = k$, або ж в $\mathbb{K}$-алгебрі Лі C існує ідеал I, який має ранг $k-1$ над R та є алгеброю Лі над F розмірності $k-1$.

Доведення. Для деякої замкненої раціональної функції $\varphi \in R$ $F = \mathbb{K}(\varphi)$, як випливає з Теореми 2.1.5. Оберемо який-небудь базис C над R: $D_1, D_2, \ldots, D_k$. Оскільки $[D_1, D_i] = 0$, $i = 1, \ldots, k$, маємо $D_i(\operatorname{Ker} D_1) \subseteq \operatorname{Ker} D_1$. Таким чином, $D_i(\varphi) = f_i(\varphi)$ для деяких раціональних функцій $f_i(t), i = 1, \ldots, k$.

Якщо $f_1(t) = \cdots = f_n(t) = 0$, то $F \subseteq \operatorname{Ker} D_i$ для $i = 1, \ldots, k-1$. Отже, $C = FD_1 + \ldots + FD_k$ є k-вимірною алгеброю Лі над полем F.

Припустимо тепер, що $f_i(t) \neq 0$ для деякого $i, 2 \leqslant i \leqslant n$. Звідси випливає, що $f_i(\varphi) \neq 0$. Позначимо через $C_0 = \{T \in C \mid T(\varphi) = 0\}$ анігілятор елементу φ в централізаторі C. Так як $D_i(\operatorname{Ker} D) \subseteq \operatorname{Ker} D$, ми бачимо, що C_0 є ідеалом C. Крім цього, $\operatorname{rank}_R C_0 = k-1$. Дійсно, якщо $T, S \in C \setminus C_0$, то $T(\varphi) = g(\varphi)$ та $S(\varphi) = h(\varphi)$ для деяких ненульових раціональних функцій $g(t)$ та $h(t)$. Тоді $h(\varphi)T - g(\varphi)S \in C_0$, а тому $\operatorname{rank}_R C/C_0 = 1$. Отже, маємо $\operatorname{rank}_R C_0 = k-1$. $\square$

Розглянемо приклад диференціювань $D_2, \ldots, D_n \in W_n(\mathbb{K})$, які мають централізатори $C_i = C_{W_n}(D_i)$, ранги яких спадають:

$$\operatorname{rank}_R C_i = n - i + 1, i = 2, \ldots, n.$$

Для цього візьмемо просте диференціювання з [58], Приклад 13.4.3.

Твердження 2.1.7. *Розглянемо послідовність диференціювань вигляду*

$$D_k = \frac{\partial}{\partial x_1} + (1 + x_1x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots (1 + x_{k-1}x_k)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

при $2 \leqslant k \leqslant n$. *Тоді*

1. $KerD_k = \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n], k < n$, $KerD_n = \mathbb{K}$;
2. $C_k = \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots x_n]D_k + \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots x_n]\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \cdots + \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots x_n]\frac{\partial}{\partial x_n}$, *де* $C_{W_n(\mathbb{K})}(D_k) = C_k$ *при* $k < n$ *та* $C_n = \mathbb{K}D_n$. *Зокрема,* $\operatorname{rank}_R(C_k) = n-k+1$.

Доведення. 1. Зауважимо, що $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ може бути розглянуте як кільце многочленів від змінних $x_1, \ldots, x_k$ над кільцем $F := \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Диференціювання D_k є простим диференціюванням кільця $F[x_1, \ldots x_k]$ (див. [58], Приклад 13.4.3). Зауважимо, що $F \subseteq KerD_k$. Тоді кільця констант диференціювань D_k в

$F[x_1, \dots x_k]$ співпадають з кільцем F. Отже, кільце констант диференціювання D_k в A співпадає з $\mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$.

2. Нехай $T \in C = C_{W_n(\mathbb{K})}, T = f_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n\frac{\partial}{\partial x_n}$. Тоді з рівності $[T, D_k] = 0$ маємо

$$D_k(f_1) = T(1) = 0$$

а тоді $f_1 \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$ та отримаємо рівності

$$D_k(f_2) = x_1 f_2 + x_2 f_1,$$

$$\dots$$

$$D_k(f_k) = x_{k-1} f_k + x_k f_{k-1},$$

$$D_k(f_{k+1}) = 0,$$

$$\dots$$

$$D_k(f_n) = 0.$$

З цих $n - k$ рівностей випливає, що $f_{k+1} \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n], \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$. З того, що $f_1 \neq 0$, випливає $f_1 D_k \in C_k$ та $T - f_1 D_k \in C_k$. Отже, ми можемо припустити, що $f_1 = 0$. В такому випадку $D_k(f_2) = x_1 f_2$, з чого випливає рівність $f_2 = 0$, тому що D_k — просте диференціювання кільця $F[x_1, \dots, x_k]$. Міркуючи далі аналогічним чином, приходимо до висновку, що $f_3 = 0, \dots, f_k = 0$. Отже,

$$T - f_1 D_k \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots x_n]\frac{\partial}{\partial x_{k+1}} + \dots + \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots x_n]\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Зважаючи на те, що $f_1 \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots x_n]$, приходимо до бажаного твердження. $\square$

Для повноти викладу наведемо деякі поняття з комутативної алгебри.

Означення 2.1.8. *Многочлен $p \in A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ називаєтьcя замкненим, якщо підкільце $\mathbb{K}[p]$ є цілозамкненим у кільці A. Раціональна функція $\varphi \in R = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ називаєтсья замкненою, якщо підполе $\mathbb{K}(\varphi)$ є алгебраїчно замкненим в полі R.*

Зауважимо, що будь-який незвідний многочлен є замкненим. Обернене твердження невірне: наприклад, многочлен $f(x, y) = xy$ також є замкненим. Нагадаємо також (Теорема 17), що кільця (поля) констант диференціювань є цілозамкненими підкільцями (алгебраїчно замкненими підполями відповідно). Наступна важлива для подальшого лема є уточненням Теореми 2.1.5.

Лема 2.1.9. *Нехай $\mathbb{K}$ – алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль, $\mathbb{K} \subset K \subset R$, причому K — алгебраїчно замкнене в полі раціональних функцій R та степінь трансцендентності розширення K над $\mathbb{K}$ дорівнює 1.*

1. *Якщо K містить відмінний від константи многочлен з A, то $K = \mathbb{K}(p)$ для деякого незвідного $p \in A$.*

2. *Якщо $K \cap A = \mathbb{K}$, то $K = \mathbb{K}(p/q)$ для незвідних $p, q \in A$, які є алгебраїчно незалежними над $\mathbb{K}$.*

Доведення. За Теоремою 2.1.5 маємо $K = \mathbb{K}(\varphi)$ для деякої раціональної функції $\varphi \in R$. Припустимо, що $K \cap A = \mathbb{K}$. Тоді з Наслідку 1 роботи [65] випливає, що $L = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$ для деяких незвідних та алгебраїчно незалежних над $\mathbb{K}$ многочленів p та q. Припустимо тепер, що $K \cap A \neq \mathbb{K}$ та $r \in (K \cap A) \setminus \mathbb{K}$. З Теореми 2.1.5 випливає, що можливі дві ситуації: $r = F(\frac{p}{q})$ або $r = F(p)$ для деякої раціональної функції $F(t) \in \mathbb{K}(t)$; нехай F має вигляд

$$F(t) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}, a_i, b_j \in \mathbb{K}, a_0b_0 \neq 0.$$

Припустимо, що $r = F(p/q)$. В цьому випадку

$$F(p/q) = \frac{a_0p^m + \cdots + a_mq^m}{b_0p^n + \cdots + b_nq^n}q^{n-m}.$$

Зазначимо, що знаменник та чисельник — однорідні многочлени (від p та q) степеня $\max\{m, n\}$. Нехай $n \geqslant m$ для простоти. Отже,

$$r = F(p/q) = \frac{(\alpha_1p + \beta_1q)\ldots(\alpha_np + \beta_nq)}{(\gamma_1p + \delta_1q)\ldots(\gamma_np + \delta_nq)} \tag{2.1}$$

для деяких $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{K}$, тому що $\mathbb{K}$ є алгебраїчно замкненим полем.

Зазначимо, що у випадку, коли многочлени $\alpha_i p + \beta_i q$ та $\gamma_j p + \delta_j q$ є взаємно простими, маємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_j & \delta_j \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо ж вищезгадані многочлени є пропорційними з точністю до множника з $\mathbb{K}^*$, маємо

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_j & \delta_j \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, якщо припустити, що для многочлена r має місце рівність (2.1), то отримаємо принаймні для однієї пари індексів $1 \leqslant i, j, \leqslant j$ рівність вигляду

$$\alpha_i p + \beta_i q = \varepsilon(\gamma_j p + \delta_j q), \quad \varepsilon \neq 0.$$

Тоді

$$(\alpha_i - \varepsilon\gamma_j)p + (\beta_i - \varepsilon\delta_j)q = 0,$$

що суперечить тому, що p, q — алгебраїчно незалежні над $\mathbb{K}$. Отже, в даному випадку рівність $K = \mathbb{K}(\frac{p}{q})$ неможлива, а тоді матимемо $K = \mathbb{K}(p)$ для незвідного многочлена $p(x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

В подальшому нас буде цікавити відокремлення множників многочлена, які належать до кільця (поля) констант диференціювання, тому розглянемо наступні поняття.

Означення 2.1.10. *Нехай $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ — незвідний многочлен. Многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ називається p-**вільним**, якщо f не ділиться ні на який многочлен від p додатнього степеня.*

Зауважимо, що довільний многочлен $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ може бути записаний у вигляді добутку p-вільного многочлена та многочлена від p (степінь якого визначається g та може дорівнювати нулю).

Означення 2.1.11. *Нехай $g = g_0 g_1$, де g_0 є p-вільним многочленом та $g_1 = g_1(p)$ є многочленом від p. Степінь по p многочлена $g_1(p)$ називається p-**степенем** многочлена g та позначається через $\deg_p g$.*

Означення 2.1.12. *Нехай p та q — алгебраїчно незалежні та незвідні многочлени з кільця $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ називається p-q-***вільним***, якщо f не ділиться на будь-який однорідний многочлен додатнього степеня від p та q.*

Як і раніше, кожен многочлен $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ розкладається у добуток p-q-вільної частини та однорідного многочлена від p та q степеня, однозначно визначеного многочленом g.

Означення 2.1.13. *Нехай $g = g_0 g_1$, де g_0 — p-q-вільний многочлен та g_1 — однорідний многочлен від p та q. Загальна степінь g_1 в p, q називається p-q-***степенем*** многочлена g та позначається $\deg_{p-q} g$.*

Означення 2.1.14. *Диференціювання D_0 називається редукованим, якщо рівність $D_0 = h_1 D_1$ для деякого $D_1 \in W_n(\mathbb{K})$ та $h_1 \in A$ дає $h_1 \in \mathbb{K}^*$. Диференціювання D_0 називається p-вільним, якщо рівність вигляду $D_0 = h_1 D_1$ для деякого многочлена $h_1 = h_1(p)$ дає $h_1 \in \mathbb{K}^*$.*

Будь-яке диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ може бути представлене у вигляді hD_0, де $D_0 \in W_n(\mathbb{K})$ — редуковане диференціювання та $h \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Диференціювання D називається p-вільним, якщо многочлен h є p-вільним. Підіб'ємо підсумки у наступній лемі.

Лема 2.1.15. *Для будь-якого ненульового $D \in W_n(\mathbb{K})$ однозначно (з точністю до множника з $\mathbb{K}^*$) визначене таке редуковане D_0 та многочлени $f(p, q)$ та h, для яких $D = f(p, q) h D_0$, причому $f(p, q)$ — однорідний многочлен від p, q та многочлен h є p-q-вільним.*

Теорема 2.1.16. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ та $F = \mathrm{Ker}_R\, D$ — поле констант D в алгебрі раціональних функцій R, причому $F = \mathbb{K}(p)$ для деякого незвідного многочлена p. Позначимо $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді*

(1) У випадку $\mathrm{rank}_R\, C = 1$ маємо $C = \mathbb{K}[p] D_0$, де диференціювання D_0 є p-вільним, $D = f(p) D_0$ для деякого многочлена $f(t) \in \mathbb{K}[t]$;

(2) У випадку $\operatorname{rank}_R C \geqslant 2$ *маємо, що або* C *— алгебра Лі над* $\mathbb{K}[p]$ *рангу* k*, або існує ідеал* I *рангу* $k-1$ $\mathbb{K}$*-алгебри Лі* C*, який є алгеброю Лі над* $\mathbb{K}[p]$ *та* $C = I + \mathbb{K}[p]S$ *для деякого* $S \in C$*.*

Доведення. Як випливає з Леми 2.1.15, існує p-вільне диференціювання D_0 та многочлен $f \in \mathbb{K}[t]$, однозначно визначені диференціюванням D з точністю до множника з групи $\mathbb{K}^*$, для яких $D = f(p)D_0$.

(1) Припустимо, що $\operatorname{rank}_R C = 1$. Розглянемо довільне диференціювання $T \in C$. Тоді $T = \varphi(p)D_0$ для деякої $\varphi \in \mathbb{K}(t)$, де $\varphi(p) = g(p)/h(p)$ для деяких многочленів $g(t)$, $h(t) \in \mathbb{K}[t]$, які можна вважати взаємно простими. З означення T отримаємо $h(p)T = g(p)D_0$. Представимо D_0 та T у вигляді

$$D_0 = \sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad T = \sum_{j=1}^{n} Q_j(x_1, \dots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j},$$

де $P_i, Q_j \in A$. Припустимо, що многочлен h не є константою. З огляду на те, що D_0 є p-вільним, принаймні один з многочленів P_i не кратний многочлену $h(p)$. Нехай, наприклад, P_1 є таким многочленом. Отже, $h(p)T = g(p)D_0$ дає, зокрема, рівність $hQ_1 = gP_1$. Оскільки $g(p)$ та $h(p)$ є взаємно простими, маємо $h|P_1$, що призводить до суперечності. Отже, $h \in \mathbb{K}^*$ та $\varphi = g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}$. В такому випадку $T = g(p)D_0$, а тому отримали бажану рівність $C = \mathbb{K}[p]D_0$, з огляду на довільний вибір диференціювання T.

(2) Припустимо, що $\operatorname{rank}_R C = k \geqslant 2$. Якщо $F \subset \cap_{D' \in C} \operatorname{Ker}_R D'$, то, зважаючи на Лему 1.1.1, централізатор C є алгеброю Лі рангу k над F, а тоді й над $\mathbb{K}[p] \subset F$. Зауважимо, що централізатор C необов'язково є $\mathbb{K}[p]$-модулем. Нехай тепер $F \not\subset \cap_{D' \in C} \operatorname{Ker}_R D'$, тобто можна обрати $S \in C$, для якого $S(F) \neq 0$. Звідси маємо $S(p) \neq 0$. Можна обрати диференціювання S таким чином, щоб мінімізувати $\deg_p S(p)$. Для будь-якого диференціювання $T \in C$ многочлен $T(p)$ ділиться на $S(p)$. Доведемо це. Припустимо, що

$$S(p) = v(p), \ T(p) = u(p)$$

для многочленів $v(t), u(t) \in \mathbb{K}[t]$. Зважаючи на вибір диференціювання S, можна записати

$$u(t) = v(t)q(t) + r(t)$$

для деяких $q(t), r(t) \in \mathbb{K}[t]$, де $\deg r(t) < \deg v(t)$. Отже, $u(p) = v(p)q(p) + r(p)$ та $T - q(p)S \in C$. Беручи до уваги

$$(T - q(p)S)(p) = r(p)$$

та $\deg_p r(p) < \deg_p S(p)$, отримаємо, знову згадавши про вибір S, що $r(p) = 0$ та $(T - q(p)S)(\mathrm{Ker}_R D) = 0$. Тоді $(T - q(p)S)(\mathbb{K}[p]) = 0$. Нехай C_0 — підалгебра в $\mathbb{K}$-алгебрі Лі C, яка скаладається диференціювань $D' \in C$, для яких $D'(\mathbb{K}[p]) = 0$. Як було показано вище, $T - q(p)S \in C_0$. Знову згадуючи про довільність вибору диференціювання T, отримаємо бажану рівність $C = C_0 + \mathbb{K}[p]S$.

□

Наслідок 2.1.17. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ та $F = \mathrm{Ker}_R D$, причому $F = \mathbb{K}(p)$ для деякого незвідного многочлена p. Позначимо $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Якщо $\mathrm{rank}_R C = 2$ та $F \not\subset \cap_{D' \in C} \mathrm{Ker}_R D'$, то $C = \mathbb{K}[p]D_0 + \mathbb{K}[p]S$ — вільний модуль рангу 2 над кільцем $\mathbb{K}[p]$.*

Теорема 2.1.18. *Нехай $\mathrm{tr.deg}_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker} D = 1$ та $(\mathrm{Ker}_R D) \cap A = \mathbb{K}$ для диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$. Тоді $\mathrm{Ker} D = \mathbb{K}(p/q)$ для деяких незвідних алгебраїчно незалежних многочленів $p, q \in A$ та диференціювання D можна представити у вигляді $D = hf(p,q)D_0$, де D_0 — редуковане диференціювання, f — однорідний многочлен від p, q та h — p-q-вільний многочлен. Позначимо $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Тоді $\dim_{\mathbb{K}} C < \infty$ та будова централізатора має один з типів:*

(1) *$C = \mathbb{K}[p,q]_m hD_0$, де $\mathbb{K}[p,q]_m$ — простір однорідних многочленів від p, q, степінь яких $m = \deg_{p\text{-}q} f$; як наслідок, $\dim_{\mathbb{K}} C = m + 1$.*

(2) *Для деяких лінійно незалежних над R елементів $D_2, \dots D_k \in C$, $k \leqslant n$*

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \mathbb{K}(p/q)D_2 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_k) \cap W_n(\mathbb{K})$$

Доведення. За Лемою 2.1.9 маємо $\mathrm{Ker}\, D = \mathbb{K}(p/q)$ для деяких незвідних алнебраїчно незалежних над $\mathbb{K}$ многочленів p, q. За Лемою 2.1.15 існують єдині (з точністю до множника з $\mathbb{K}^*$) многочлени $f(p,q)$ та h, для яких $D = f(p,q)hD_0$, де D_0 є редукованим диференціюванням, $f(p,q)$ — однорідний многочлен від p, q та h є p-q-вільним многочленом.

Припустимо, що $\operatorname{rank}_R C = 1$. В цьому випадку для довільного $D_1 \in C$ отримаємо $D_1 = rD_0$ для якогось многочлена $r \in A$ (тому що D_0 є редукованим). Як зазначалося раніше, для деякого однорідного многочлена $f_1(p,q)$ від p, q та p-q-вільного многочлена h_1 маємо $r = f_1h_1$. Зважаючи на вибір D_1, отримаємо $0 = [D, D_1] = [f_1h_1D_0, fhD_0]$. З останньої рівності випливає $D_0(fh/(f_1h_1)) = 0$. За Лемою 2.1.9 маємо $fh/(f_1h_1) = u(p,q)/v(p,q)$ для однорідних многочленів u, v від p, q, причому $\deg u = \deg v$. Отримуємо рівність $hfv = h_1f_1u$, де fv та f_1u — однорідні многочлені від p, q та h, h_1 є p-q-вільними многочленами. Але розклад многочлена у добуток p-q-вільної частини та однорідних множників, які залежать від p, q визначений єдиним чином, з точністю до множника з $\mathbb{K}^*$. Оскільки $h_1 = hc$, маємо $c \in \mathbb{K}^*$ та $fv = c^{-1}f_1u$. Тоді

$$\deg_{p-q} f = \deg_{p-q} f_1 = m.$$

З цього випливає рівність

$$D = f_1h_1D_0 \in \mathbb{K}[p,q]_m hD_0.$$

Але диференціювання $D_1 \in C$ обране довільним чином. Отже, отримали включення $C \subseteq \mathbb{K}[p,q]_m hD_0$. Легко бачити, що $\mathbb{K}[p,q]_m hD_0 \subseteq C$, а тому $C = \mathbb{K}[p,q]_m hD_0$.

Припустимо тепер, що $\operatorname{rank}_R C =\geqslant 2$. Доповнимо елемент D до базиса $D, D_2, \ldots, D_k$ централізатора C над полем R. Тоді, згідно з Твердженням 2.1.6, маємо

$$C = (\mathbb{K}(p/q)D + \mathbb{K}(p/q)D_2 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_k) \cap W_n(\mathbb{K}).$$

Індукцією по k покажемо, що $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ є скінченновимірним над $\mathbb{K}$. Для $k = 0$ (тобто $\operatorname{rank}_R C = 1$) це вже було продемонстровано. Отже, припустимо, що $k \geqslant 2$. Позначимо $D_1 = D$. Кожне диференціювання D_i може бути представлене у вигляді $D_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ для деяких многочленів $P_{ij} \in A$, $i = 1, \ldots, k$.

Розглянемо довільне диференціювання $T \in C$ та розкладемо його в базисі D_i:

$$T = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i D_i$$

для деяких $\alpha_i \in R$. З іншого боку,

$$T = \sum_{j=1}^{n} Q_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

для деяких многочленів $Q_1, \ldots, Q_n \in A$. Розглянемо диференціювання $D_1, \ldots, D_{k-1}, T$. Нехай (P'_{ij}) — поліноміальна матриця, у якої перші $k-1$ рядків сформовані з коефіцієнтів в розкладах $D_1, \ldots, D_{k-1}$, а k-й рядок має вигляд $(Q_1, \ldots, Q_n)$. Отже,

$$P'_{ij} = P_{ij}, i = 1, \ldots k-1, j = 1, \ldots, n, P'_{kj} = Q_j, j = 1, \ldots, n.$$

Нехай $\delta = \delta_{i_1,\ldots,i_k}$ — мінор на стовпцях $i_1, \ldots, i_k$ матриці (P_{ij}), $\mu = \mu_{i_1,\ldots,i_k}$ — мінор, сформований стовпцями матриці (P'_{ij}) з тими ж номерами. Оскільки $T = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i D_i$, маємо рівність $\mu = \alpha_k \delta$. Міркування, аналогічні до тих, які були в доведені Леми 2.1.9, приводять до висновку: існують однорідні многочлени u, v від p, q, $\deg_{p-q} u = \deg_{p-q} v$, для яких $\alpha_k = u/v$. Зважаючи на рівність $\mu = \alpha_k \delta$ (записану у вигляді $v\mu = u\delta$), отримаємо $\deg_{p-q} \mu = \deg_{p-q} \delta$. Більш того, p-q-вільні частини многочленів μ та δ співпадають з точністю до множника з $\mathbb{K}^*$, з огляду на рівність $v\mu = u\delta$, згадану вище. Можемо припустити, що p-q-вільні частини многочленів u та v співпадають; позначимо їх через h. Через $M_1, \ldots, M_s$ позначимо в якому-небудь порядку усі $s = \binom{n}{k}$ мінорів розміру $k \times k$ матриці (P'_{ij}). Зауважимо, що ці мінори є многочленами з A. Нехай $m = m_i$ є p-q-степенем многочлена M_i та f_i — однорідний многочлен, який формує $p-q$-частину многочлена M_i. Диференціюванню T будемо співставяти набір $\theta(T) = (f_1, \ldots, f_s)$ однорідних многочленів, степені яких рівні $m_1, \ldots, m_s$ відповідно. Побудували відображення

$$\theta : C \to N = \mathbb{K}[p,q]_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{K}[p,q]_{m_s},$$

де m_i є p-q-степенем многочлена $M_i, i = 1, \ldots, s$. Відображення θ є $\mathbb{K}$-лінійним. Ядро $\operatorname{Ker}\theta$ сформоване з таких $T \in C$, що усі відповідні мінори порядку k є нульовими многочленами. Отже,

$$T \in (\mathbb{K}(p/q)D_1 + \cdots + \mathbb{K}(p/q)D_{k-1}) \cap W_n(\mathbb{K}) = C_{k-1}.$$

Таким чином, $\dim C/C_{k-1} < \infty$. За індуктивним припущенням підпростір C_{k-1} є скінченновимірним над полем $\mathbb{K}$. Оскільки $\dim_{\mathbb{K}} N < \infty$, маємо $\dim_{\mathbb{K}} C < \infty$.
$\square$

2.2 Лінійні диференціювання та їх централізатори

Диференціювання D називаєтсья лінійним, якщо усі $D(x_i)$ є однорідними многочленами першого степеня, $D(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Лінійному диференціюванню $D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ можна дати у відповідність квадратну матрицю (a_{ij}) порядку n, та якщо $D' = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$, то $[D, D']$ також є лінійним диференціюванням з відповідною матрицею $(c_{ij}) = [(a_{ij}), (b_{ij})]$. Отже, можемо говорити про підалгебру $W_n(\mathbb{K})$ усіх лінійних диференціювань, яка ізоморфна загальній лінійній алгебрі Лі $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Для простоти підалгебру лінійних диференціювань позначатимемо так само, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

Нехай $D = \sum_{i=1}^n a_{ij}x_j\frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$. Централізатор $C_0 = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$ в алгебрі $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ та централізатор $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ в $W_n(\mathbb{K})$ пов'язані відношенням $C_0 \subseteq C$. Будова C_0 давно описана, тому що його елементами є усі лінійні диференціювання, відповідні матриці яких комутують з (a_{ij}). Пошук централізатора заданої (a_{ij}) є класичною розв'язаною задачею (див., наприклад, [31], Розділ VIII, § 2]). Отже, цікаво вивчити наступне питання: за яких умов $C = C_0$? Якщо ця рівність справедлива, то опис $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ випливатиме з класичного результату. Теорема 2.2.2 містить необхідну умову та достатню умову (ці умови, варто зазначити, не співпадають) того, щоб для лінійного диференціювання D мала місце рівність $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$. Перейдемо тепер до простої леми, яка нам знадобиться в подальшому.

Лема 2.2.1. *Нехай* $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $T = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in W_n(\mathbb{K})$, *де* $f_i, g_i \in A$. *Диференціювання* D *та* T *комутують тоді й лише тоді, коли* $D(g_i) = T(f_i)$ *для усіх* $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Рівність $DT(f) = TD(f)$ справедлива для усіх многочленів $f \in A$ тоді й лише тоді, якщо для усіх $i = 1, \ldots, n$ маємо $DT(x_i) = TD(x_i)$. Але $T(x_i) = g_i(x_1, \ldots, x_n)$ та $D(x_i) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ для усіх $i = 1, \ldots, n$. Отже, $D(g_i) = T(f_i)$. $\square$

Теорема 2.2.2. *Нехай* $D = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j} x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ *та* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *— власні значення матриці* (a_{ij}). *Тоді справедливі наступні твердження:*

1. *Якщо елементи* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *є лінійно незалежними над* $\mathbb{Z}$, *то* $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$.
2. *Якщо* $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$, *то елементи* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *є лінійно незалежними над* $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доведення. (1) Нехай власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ матриці (a_{ij}) є лінійно незалежними над $\mathbb{Z}$. Розглянемо довільне диференціювання $T \in C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ вигляду

$$T = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f_i \in A.$$

Можемо вважати, що (a_{ij}) — діагональна матриця та має вигляд

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є різними, тому матрицю (a_{ij}) можна привести до діагональної). З огляду на це припущення, диференціювання D має вигляд $D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Отримаємо рівності

$$D(f_i) = T(\lambda x_i) = \lambda_i f_i.$$

Отже, коефіцієнти f_i у розкладі T — це власні вектори (многочлени Дарбу) для D з власними значеннями (кофакторами) $\lambda_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n$. Більш того, $D(x_i) = \lambda_i x_i, i = 1, \ldots, n$. В такому випадку

$$D\left(\frac{f_i}{x_i}\right) = \frac{D(f_i)x_i - f_i D(x_i)}{x_i^2} = 0,\ \ i = 1, \ldots n,$$

тобто раціональні функції f_i/x_i лежать у полі констант D, $i = 1, \ldots n$. Всі власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є лінійно незалежними над $\mathbb{Z}$, то згідно з Теоремою 10.1.2 з [58] маємо $f_i/x_i = \mu_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n$. Останнє означає, що

$$T = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}),$$

а тоді $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$.

(2) Нехай тепер $C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$. З цієї рівності централізаторів випливає, що $\mathrm{Ker}D = \mathbb{K}$. Дійсно, якщо $h \in \mathrm{Ker}D \setminus \mathbb{K}$, тоді $hD \in C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ та диференціювання hD не є лінійним. З Теореми 10.1.1 в [58] випливає, що власні значення $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є лінійно незалежними над $\mathbb{N}_0$. $\square$

Зауваження 2.2.3. Зауважимо, що диференціювання

$$D = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

поліноміального кільця $\mathbb{K}[x_1, x_2]$ з власними значеннями $1, 2$ має нелінійні елементи в централізаторі в $W_2(\mathbb{K})$, наприклад, $x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_2}$. Отже, умова (2) не є достатньою.

2.3 Централізатори якобіанних диференціювань з $W_2(\mathbb{K})$

Даний підрозділ присвячений централізаторам якобіанних диференціювань алгебри многочленів від двох змінних.

Означення 2.3.1. *Диференціювання $D_f \in W_2(\mathbb{K})$ називається якобіанним диференціюванням, асоційованим з многочленом $f \in \mathbb{K}[x, y]$, якщо для будь-*

якого $h \in \mathbb{K}[x, y]$

$$D_f(h) = \det J(f, h) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що дивергенція $\operatorname{div} T$ диференціювання $T = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$, визначається як $\operatorname{div} T = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$. Диференціювання $T = P\partial_x + Q\partial_y$ називається бездивергентним, якщо $\operatorname{div} T = 0$; в цьому випадку $T = D_f$ для деякого многочлена f, який є "потенціалом" для векторного поля, визначеного T. Зауважимо, що множина якобіанних диференціювань алгебри многочленів $\mathbb{K}[x, y]$ формує алгебру Лі, централізаторам в цій алгебрі присвячена робота [64].

В подальшому для базисних диференціювань $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ іноді будемо використовувати більш лаконічне позначення ∂_x, ∂_y. Перейдемо до важливих для цього підрозділу лем.

Лема 2.3.2. *1. Нехай $f \in \mathbb{K}[x, y]$ та p є породжуючим замкненим многочленом для f. Тоді $\operatorname{Ker} D_f = \mathbb{K}[p]$ (див., наприклад, [56]).*

2. Якщо $T \in W_2(\mathbb{K})$ та $\operatorname{div} T = 0$, то існує многочлен $g \in \mathbb{K}[x, y]$, для якого $T = D_g$. (див., наприклад, [58]).

3. $T \in W_2(\mathbb{K})$ є локально нільпотентним тоді і лише тоді, коли існує многочлен $g \in \mathbb{K}[x, y]$ для якого $T = D_g$ (див. [30], Наслідок 4.6)

Отже, множина $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x, y])$ співпадає з множиною усіх якобіанних диференціювань $\mathbb{K}[x, y]$ та з алгеброю Лі $sa_2(\mathbb{K})$ бездивергентних диференціювань. Наведемо результати, які стосуються централізаторів якобіанних диференціювань в алгебрі Лі $sa_2(\mathbb{K})$. Нагадаємо, що многочлен $f \in \mathbb{K}[x, y]$ називається якобіанним, якщо для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$ маємо $\det J(f, g) \in \mathbb{K}^*$.

Теорема 2.3.3. (див. [64]) *Нехай $D_f \in sa_2(\mathbb{K})$ та p — замкнений породжуючий многочлен для f.*

1. Якщо f не є якобіанним многочленом, то $C_{sa_2(\mathbb{K})}(D_f) = \mathbb{K}[p]D_p$.

2. Якщо f — якобіанний многочлен та $\det J(f,g) \in \mathbb{K}^*$, *то* $C_{sa_2(\mathbb{K})}(D_f) = \mathbb{K}[f]D_f + \mathbb{K}D_g$.

Перейдемо до питання опису централізаторів в $W_2(\mathbb{K})$. Насамперед задля цієї мети встановимо наступне твердження.

Лема 2.3.4. *Нехай $T \in W_2(\mathbb{K})$ та $T(f) = \lambda f$ для деяких многочленів $f, \lambda \in \mathbb{K}[x,y]$. Тоді*

$$[T, D_f] = D_{\lambda f} - (\operatorname{div} T)D_f.$$

Доведення. Запишемо диференціювання T у вигляді $T = P\partial_x + Q\partial_y$ для деяких многочленів $P, Q \in \mathbb{K}[x,y]$. Тоді умова $T(f) = \lambda f$ може бути записана у вигляді

$$Pf'_x + Qf'_y = \lambda f \tag{2.2}$$

Продиференцюймо останню рівність по x та по y. Отримаємо

$$P'_x f'_x + Pf''_{x^2} + Q'_x f'_y + Qf''_{yx} = \lambda'_x f + \lambda f'_x, \tag{2.3}$$

$$P'_y f'_x + Pf''_{xy} + Q'_y f'_y + Qf''_{y^2} = \lambda'_y f + \lambda f'_y. \tag{2.4}$$

Обчислимо комутатор T та D_f:

$$\begin{aligned}[T, D_f] = {} & (P'_x f'_y - P'_y f'_x - Pf''_{yx} - Qf''_{y^2})\partial_x + \\ & +(Pf''_{x^2} + Qf''_{xy} + f'_y Q'_x - f'_x Q'_y)\partial_y\end{aligned} \tag{2.5}$$

Позначимо $\alpha = -P'_y f'_x - Pf''_{yx} - Qf''_{y^2}$ та $\beta = Pf''_{x^2} + Qf''_{xy} + f'_y Q'_x$. Перепишемо рівність (2.5) у вигляді

$$[T, D_f] = (P'_x f'_y + \alpha)\partial_x + (\beta - f'_x Q'_y)\partial_y.$$

Використовуючи (2.3) та (2.4), останню рівність можна переписати у наступній формі:

$$[T, D_f] = (P'_x f'_y - \lambda'_y f - \lambda f'_y + Q'_y f'_y)\partial_x + (\lambda'_x f + \lambda f'_x - P'_x f'_x - f'_x Q'_y)\partial_y.$$

Після перегрупування доданків, отримаємо

$$[T, D_f] = ((\operatorname{div} T)f'_y - (\lambda f)'_y)\partial_x + ((\lambda f)'_x - (\operatorname{div} T)f'_x)\partial_y$$

З останнього й отримаємо заявлену рівність:

$$[T, D_f] = (\operatorname{div} T)(f'_y\partial_x - f'_x\partial_y) + D_{\lambda f} = D_{\lambda f} - (\operatorname{div} T)D_f.$$

□

Оскільки $D_{\lambda f} = \lambda D_f + fD_\lambda$, рівність, отриману в Лемі 2.3.4, можна переписати у наступному вигляді:

$$[T, D_f] = \lambda D_f + fD_\lambda - (\operatorname{div} T)D_f = fD_\lambda + (\operatorname{div} T - \lambda)D_f.$$

Наступна лема говорить про те, що в централізаторі ненульового диференціювання, яке не є якобіанним, не можуть лежати ненульові якобіанні диференціювання.

Лема 2.3.5. *Нехай для диференціювання $T \in W_2(\mathbb{K})$ та многочлена $f \in \mathbb{K}[x, y]$ має місце рівність $[T, D_f] = 0$. Якщо $T(f) = c$ для деякого $c \in \mathbb{K}$, то тоді $T = D_g$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$.*

Доведення. Запишемо диференціювання T у вигляді $T = P\partial_x + Q\partial_y$ для деяких многочленів $P, Q \in \mathbb{K}[x, y]$. Тоді $Pf'_x + Qf'_y = c$. Продиференціюємо останню рівність по x, а потім по y; отримаємо наступні дві рівності:

$$P'_x f'_x + Pf''_{x^2} + Q'_x f'_y + Qf''_{yx} = 0, \tag{2.6}$$

$$P'_y f'_x + Pf''_{xy} + Q'_y f'_y + Qf''_{y^2} = 0. \tag{2.7}$$

З рівності (2.6) отримаємо

$$Pf''_{x^2} + Q'_x f'_y = -P'_x f'_x - Qf''_{xy}.$$

Рівність (2.7) аналогічно дає

$$P'_y f'_x + Pf''_{xy} = -Q'_y f'_y - Qf''_{y^2}.$$

Рівність (2.5) можна переписати дещо інакше:

$$[T, D_f] = (-Q'_y f'_x - P'_x f'_x)\partial_y + (P'_x f'_y + Q'_y f'_y)\partial_x =$$

$$= f'_y(P'_x + Q'_y)\partial_x - f'_x(P'_x + Q'_y)\partial_y = \operatorname{div} T \cdot (-D_f).$$

Отже, $[T, D_f] = -(\operatorname{div} T)D_f$. За умовою даної леми T та D_f комутують, тому маємо $\operatorname{div} T = 0$. З Леми 2.3.2 випливає $T = D_g$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$. □

Наслідок 2.3.6. *1. Нехай $T \in C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$. Якщо $T(f) = 0$, то для деякої раціональної функції $\phi \in \mathbb{K}(x, y)$ маємо $T = \phi D_f$, причому $\phi \in \operatorname{Ker} D_f$.*

2. Якщо $T(f) = c$ для якогось елемента $c \in \mathbb{K}^*$, то $T = D_g$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$, причому $D_f(g) = -D_g(f) = 1$.

Доведення. 1. Зафіксуємо такий многочлен $h \in \mathbb{K}[x, y]$, що f та h є алгебраїчно незалежними над полем $\mathbb{K}$. Позначимо $g_1 = D_f(h), g_2 = T(h)$. Тоді $g_1 \neq 0$, оскільки в протилежному випадку ядро $\operatorname{Ker} D_f$ мало би степінь трансцендентності 2 в $\mathbb{K}(x, y)$, що неможливо. Зазначимо, що

$$(g_2 D_f - g_1 T)(h) = (g_2 D_f - g_1 T)(f) = 0.$$

Повторюючи попередні міркування, ми бачимо, що $g_2 D_f - g_1 T = 0$. Отже, $T = (g_2/g_1)D_f$. З рівності $[T, D_f] = 0$ випливає, що $D_f(g_2/g_1) = 0$, тобто $g_2/g_1 \in \operatorname{Ker} D_f$.

2. Оскільки $T(f) = c$, за Лемою 2.3.4 ми маємо $T = D_g$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$. Але тоді

$$T(f) = D_g(f) = \det J(g, f) = c \in \mathbb{K}^*.$$

Тепер, якщо це необхідно, залишилось g замінити на $-c^{-1}g$. □

Теорема 2.3.7. *Нехай $f \in \mathbb{K}[x, y]$, $f = \theta(p)$ для деякого замкненого многочлена $p \in \mathbb{K}[x, y]$, причому $\deg \theta \geqslant 1$. Диференціювання $T \in W_2(\mathbb{K})$ комутує з D_f, тоді і лише тоді, коли $T(p) = \psi(p)$ для деякого многочлена $\psi(t) \in \mathbb{K}[t]$ й*

$$\theta''(p)\psi(p) = \theta'(p)(\operatorname{div} T - \psi'(p)). \qquad (2.8)$$

Доведення. Нехай $[T, D_f] = 0$, $f = \theta(p)$ для деякого замкненого многочлена p та $\theta(t) \in \mathbb{K}[t], \deg\theta \geqslant 1$. Легко бачити, що

$$D_f = \theta'(p)D_p.$$

За Лемою 2.3.2 $\operatorname{Ker} D_f = \mathbb{K}[p]$. З рівності $[T, D_f] = 0$ випливає, що $T(\operatorname{Ker} D_f) \subseteq \operatorname{Ker} D_f$, звідси $T(p) = \psi(p)$ для деякого многочлена $\psi(t) \in \mathbb{K}[t]$. Нехай $\deg\psi(t) \geqslant 1$. Оскільки $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле, можемо записати $\psi(t) = a_0(t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)$, де $k \geqslant 1$ й $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Звідси $T(p) = a_0(p-\lambda_1)\dots(p-\lambda_k)$. Ця рівність може бути записана у вигляді

$$T(p-\lambda_1) = a_0(p-\lambda_1)\dots(p-\lambda_k),$$

а після зміни позначень можемо записати

$$T(p) = a_0p(p-\mu_2)\dots(p-\mu_k)$$

для деяких $\mu_k \in \mathbb{K}$ (зазначимо, що многочлен $p-\lambda_1$ такой замкнений й кільця $\mathbb{K}[p]$ та $\mathbb{K}[p-\lambda_1]$ співпадають). Остання рівність може бути записана у вигляді

$$T(p) = p\mu(p) \text{ for } \mu(p) = a_0p(p-\mu_2)\dots(p-\mu_k).$$

Лема 2.3.4 дає наступну рівність:

$$[T, D_p] = D_{\psi(p)} - (\operatorname{div} T)D_p = (\psi'(p) - \operatorname{div} T)D_p. \tag{2.9}$$

З іншого боку, з рівності

$$[T, D_f] = [T, \theta'(p)D_p] = 0$$

випливає, що $T(\theta'(p))D_p = -\theta'(p)[T, D_p]$. Тому

$$[T, D_p] = \frac{T(\theta'(p))}{\theta'(p)}D_p \tag{2.10}$$

(варто зазначити, що $\theta'(p) \neq 0$, тому що $f = \theta(p)$ та $f \neq const$).

З (2.9) та (2.10) випливає

$$-\frac{T(\theta'(p)}{\theta'(p)} = \theta''(p)T(p) = \theta''(p)\psi(p).$$

Отже, має місце рівність

$$\theta''(p)\psi(p) = \theta'(p)(\operatorname{div} T - \psi'(p)).$$

Тепер нехай $\deg \psi(t) < 1$. Останнє означає, що $\psi(t) = c \in \mathbb{K}$.

За Лемою 2.3.5, $T = D_g$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$, а тому $\operatorname{div} T = 0$. Якщо $c = 0$, то $\psi(t) \equiv 0$ і ми бачимо, що рівність (2.8) має місце. Нехай $c \neq 0$. Тоді $D_g(p) = c$ й многочлени p, g, як говорять в такому випадку, формують якобіанну пару. Покажемо, що $\deg \theta = 1$ в цьому випадку. Дійсно, інакше

$$[D_g, D_f] = [D_g, \theta'(p)D_p] = \theta''(p) \cdot c \cdot D_p \neq 0,$$

а це протирічить тому, що $D_g = T$. Оскільки $\deg \theta(t) = 1$, маємо $\theta''(p) = 0$; приймаючи до уваги рівності $\operatorname{div} T = 0$, $\psi'(p) = 0$, бачимо, що й в даному випадку (2.8) має місце.

Нехай тепер $T(p) = \psi(p), f = \theta(p)$ і (2.8) виконується. Покажемо, що $[T, D_f] = 0$, тобто $[T, \theta'(p)D_p] = 0$. Остання рівність еквівалентна рівності

$$T(\theta'(p))D_p = -\theta'(p)[T, D_p].$$

Розглянемо спочатку випадок $\deg \psi(t) \geqslant 1$. Без втрати загальності можна вважати, що $\psi(t) = t - \lambda(t)$ для деякого многочлена $\lambda(t) \in \mathbb{K}[t]$. За Лемою 2.3.4, маємо $[T, D_p] = (\psi'(p) - \operatorname{div} T)D_p$. Остання рівність еквівалента (2.8)

$$\theta''(p)\psi(p)D_p = -\theta'(p)(\operatorname{div} T - \psi'(p))D_p,$$

Отже, маємо $[T, D_f] = 0$ у випадку $\deg \psi(t) \geqslant 1$.

Розглянемо випадок $\deg \psi(t) = 0$. Якщо $\psi(t) \equiv 0$, тоді з рівності (2.8) випливає, що $\operatorname{div} T = \psi'(p) = 0$, а тому $T = D_g$ для деякого многочлена $g \in \mathbb{K}[x, y]$. Тоді $T(p) = 0 = D_g(p)$, звідки випливає $D_p(g) = 0$. Оскільки $\operatorname{Ker} D_p = \mathbb{K}[p]$, бачимо, що $g = \mu(p)$ для деякого многочлена $\mu(t) \in \mathbb{K}[t]$. Тоді $T = D_g = \mu'(p)D_p$.

З огляду на те, що $D_f = D_{\theta(p)} = \theta'(p)D_p$, маємо

$$[T, D_f] = [\mu'(p)D_p, \theta'(p)D_p] = 0.$$

Нехай тепер $\psi(t) = c, c \in \mathbb{K}^*$. Тоді $T(p) = c$, та з умов теореми отримаємо $\theta''(p) \cdot c = \theta'(p) \operatorname{div} T$. Отже,

$$\operatorname{div} T = \frac{\theta''(p) \cdot c}{\theta'(p)}$$

and if $\operatorname{div} T \neq 0$ ми маємо $\deg \theta''(p) \geqslant \deg \theta'(p)$. Останнє є неможливим, а тому $\operatorname{div} T = 0$ та $T = D_g$ для деякого многочлена $g(t) \in \mathbb{K}[t]$. З умов теореми випливає, що $\theta''(p) = 0$, а тому $\theta(p) = \alpha p + \beta$ для деяких $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$. Без втрати загальності можна вважати, що $f = \theta(p) = p$. Ми маємо $T(p) = c$ та $T = D_g$. Тоді $D_p(g) = -c$, а тому многочлени p, g формують якобіанну пару. Останнє означає, що

$$[T, D_f] = [D_g, D_f] = D_{[p.g]} = D_c = 0,$$

тобто диференціювання T та D_f комутують. Доведення теореми на цьому завершується. $\square$

Наслідок 2.3.8. *Нехай $f \in \mathbb{K}[x, y]$ є замкненим (наприклад, незвідним) многочленом. Диференціювання $T \in W_2(\mathbb{K})$ комутує з D_f тоді і лише тоді, коли $T(f) = \psi(f)$ для деякого многочлена $\psi(t) \in \mathbb{K}[t]$ та* $\operatorname{div} T = \psi'(f)$.

Доведення. Оскільки f є замкненим многочленом, $\theta(t) = t$ й $\theta''(t) = 0$. З рівності (2.8) випливає $\operatorname{div} T = \psi'(f)$. $\square$

Наведемо приклад якобіанних диференціювань, для яких відповідні системи диференціальних рівнянь розв'язуються у квадратурах. Нехай $f, g \in \mathbb{K}[x, y]$ — ненульові многочлени, для яких справедлива рівність $D_f(g) = g$. Зазначимо, що $[D_f, D_g] = D_h$, де $h = D_f(g)$. Тоді

$$[fD_g - gD_f, D_g] = -D_g(f)D_g - g[D_f, D_g] = gD_g - gD_g = 0.$$

Диференціювання $fD_g - gD_f$ та D_g є лінійно незалежними над кільцем $\mathbb{K}[x, y]$. Отже, централізатор якобіанного диференціювання D_g в алгебрі Лі $W_2(\mathbb{K})$ має централізатор рангу 2 над своїм ядром $\operatorname{Ker} D \subseteq \mathbb{K}[x, y]$. Розглянемо, наприклад, многочлени

$$f(x, y) = x(x-1)y, \quad g(x, y) = x^3(x-1)y^2.$$

Для цієї пари многочленів дійсно $D_g(g) = g$. Тоді диференціювання

$$D_g = -2yx^3(x-1)\frac{\partial}{\partial x} + (4x^3 - 3x^2)y^2\frac{\partial}{\partial y}$$

має централізатор рангу 2 над ядром $\operatorname{Ker} D$, яке буде мати вигляд $\mathbb{K}[p]$ для деякого замкненого многочлена $p \in \mathbb{K}[x, y]$. Відповідна автономна система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = -2yx^3(x-1), \quad \frac{dy}{dt} = (4x^3 - 3x^2)y^2$$

розв'язується у квадратурах (див., наприклад, [57]).

Перейдемо до наступного результату даного підрозділу, в якому отримаємо опис централізаторів якобіанних диференціювань як вільних модулів над своїми ядрами в алгебрі многочленів.

Теорема 2.3.9. *Нехай* $f \in \mathbb{K}[x, y]$, $\deg f \geqslant 1$, *а* D_f *— відповідне якобіанне диференціювання алгебри* $\mathbb{K}[x, y]$. *Нехай* p *— замкнений породжуючий многочлен для* f. *Централізатор* $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ *є вільним модулем рангу 1 або 2 над* $\mathbb{K}[p]$.

Доведення. За означенням p ми маємо $f = \theta(p)$ для деякого многочлена $\theta(t) \in \mathbb{K}[t]$. Очевидно, що $D_f = \theta'(p)D_p$ і $\operatorname{Ker} D_p = \operatorname{Ker} D_f$ в $\mathbb{K}[x, y]$. З Леми 2.3.2 маємо $\operatorname{Ker} D_p = \mathbb{K}[p]$ й централізатор $C = C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ є $\mathbb{K}[p]$-модулем. Розглянемо $\mathbb{K}[x, y]$-модуль $C_1 = \mathbb{K}[x, y]$. Оскільки $W_2(\mathbb{K})$ є вільним модулем рангу 2 над $\mathbb{K}[x, y]$, то ранг $\mathbb{K}[x, y]$-модуля C_1 не перевищує 2.

Нехай спочатку $\operatorname{rank}_{\mathbb{K}[x,y]} C_1 = 1$. Покажемо, що в цьому випадку $\operatorname{rank}_{\mathbb{K}[p]} C = 1$ та D_p породжує C як вільний модуль. Розглянемо довільне ненульове диференціювання $T \in C$. З огляду на зроблене нами припущення щодо модуля C_1, існують такі многочлени $g, h \in \mathbb{K}[x, y]$, що

$$gD_p + hT = 0,$$

причому принаймні один з многочленів g, h не є тотожньо нульовим. Оскільки $D_p \neq 0$, то $h \neq 0$, а тому $T = -(g/h)D_p$. Але тоді

$$[D_f, T] = 0 = [D_f, \frac{g}{h}D_p],$$

з чого випливає, що $D_f(\frac{g}{h}) = 0$. Таким чином, $\frac{g}{h} \in \operatorname{Ker}_R D_f$. Але $\operatorname{Ker}_R D_f = \mathbb{K}(p)$ (наприклад, [65]), а тому

$$\frac{g}{h} = \frac{a(p)}{b(p)}$$

для деяких многочленів $a(t), b(t) \in \mathbb{K}[t]$, які можуть бути обраними взаємно простими. Отже, ми прийшли до рівності

$$a(p)D_p + b(p)T = 0.$$

З цієї рівності бачимо, що $b(p)$ є дільником D_p, тобто $D(p) = b(p)D_1$ для деякого $D_1 \in W_2(\mathbb{K})$. Тоді $b(p) \equiv \beta \in \mathbb{K}^*$, тому що $D_p = -p'_y\partial_x + p'_x\partial_y$ й многочлен $b(p)$ не ділить p'_y та p'_x, якщо $\deg b(p) > 0$. Отже, ми маємо

$$T = -\beta^{-1}a(p)D_p$$

та D_p породжує $C = C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ як вільний $\mathbb{K}[p]$-модуль.

Нехай тепер $\operatorname{rank}_{\mathbb{K}[x,y]} C_1 = 2$. Оберемо таке довільне диференціювання $T \in C$, що T й D_p будуть лінійно незалежними над $\mathbb{K}[x, y]$. Тоді $T(\operatorname{Ker}(D_f)) \subseteq \operatorname{Ker}(D_f)$, тому $T(\mathbb{K}[p]) \subseteq \mathbb{K}[p]$. Отже, $T(p) = \mu(p)$ для деякого многочлена $\mu(t) \in \mathbb{K}[t]$. Оберемо серед усіх елементів централізатора C такий T_0, який не буде пропорційний до D_p й для якого степінь $\deg \mu_0(t)$ є мінімальною. Неважко показати, що многочлен $\mu(t)$, який відповідає T, ділиться на $\mu_0(t)$. Дійсно, нехай $\mu(t) = \mu_0(t)q(t) + r(t)$, де $\deg r(t) < \deg \mu_0(t)$. Тоді $T - q(p)T_0 \in C$ та

$$(T - q(p)T_0)(p) = r(p).$$

За нашим вибором T_0 ми маємо $r(t) = 0$ та $\mu_0(t)$ ділить $\mu(t)$.

Таким чином, кожне диференціювання $T \in C$ може бути записане у вигляді $T = q(p)T_0 + T_1$, де $T_1 := T - q(p)T_0$ задовольняє рівність $T_1(p) = 0$. За Лемою 2.3.5, $T_1 = \delta(p)D_p$ для деякого многочлена $\delta(t) \in \mathbb{K}[t]$, тому ми маємо

$$T = q(p)T_0 + \delta(p)D_p.$$

Інакше кажучи, T_0 та D_p формують повну систему породжуючих вільного $\mathbb{K}[p]$-модуля C. Доведення теореми завершене.

$\square$

2.4 Висновки

У підрозділі 2.1 досліджувались централізатори елементів алгебри Лі $D \in W_n(\mathbb{K})$, у яких ядро диференціювання D в полі раціональних функцій R має степінь трансцендентності 1 над над основним полем $\mathbb{K}$. У випадку, коли ядро $\operatorname{Ker}_R D$ є простим розширенням поля $\mathbb{K}$ з незвідним породжуючим елементом $p \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, був описаний централізатор $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$. Окрім цього, були описані централізатори диференціювань, які мають степінь трансцендентності 1 над $\mathbb{K}$ та у яких ядро $F = \operatorname{Ker}_R D$ не містить многочленів, окрім постійних. В такому випадку ядро F має вигляд $\mathbb{K}(p/q)$.

В підрозділі 2.2 для лінійних диференціювань досліджувались централізатори $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ та $C_0 = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$. Були встановлені необхідні та достатні умови для співпадіння цих централізаторів у випадку діагоналізованої матриці диференціювання.

В секції 2.3 розділу досліджувались централізатори якобіанних диференціювань кільця многочленів від двох змінних. Зокрема, був отриманий критерій належності довільного диференціювання до централізатора якобіанного диференціювання. Також було доведено, що централізатор якобіанного диференціювання $D_f \in W_2(\mathbb{K}), \deg f \geqslant 1$, є вільним $\mathbb{K}[p]$-модулем рангу 1 або 2.

Розділ 3

Максимальні підалгебри $W_n(\mathbb{K})$

Результати даного розділу були опубліковані в роботі [27].

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле характеристики нуль. Введемо позначення: $P_0 = \mathbb{K}$ та $P_i = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_i] \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $i \leqslant n$. Також в цьому розділі замість позначення $\frac{\partial}{\partial x_i}$ використовуватимемо лаконічніший запис ∂_i.

Означення 3.0.1. *Трикутною алгеброю Лі називається підалгебра в $W_n(\mathbb{K})$ вигляду*

$$u_n(\mathbb{K}) = P_0\partial_1 + \dots + P_{n-1}\partial_n.$$

Трикутні алгебри Лі є розв'язними, не нільпотентними, але локально нільпотентними. Такі алгебри досліджувались в роботах [6], [7], де було встановлено ряд їх властивостей та описані централізатори ідеалів в $u_n(\mathbb{K})$. Цікаві приклади, пов'язані з питанням скінченної породженості кілець констант диференціювань, були надані в термінах трикутних диференціювань (див., наприклад, [19], [20]).

Означення 3.0.2. *Визначимо $s_n(\mathbb{K})$ як підалгебру в $W_n(\mathbb{K})$ вигляду*

$$s_n(\mathbb{K}) = (P_0 + x_1P_0)\partial_1 + \dots + (P_{n-1} + x_nP_{n-1})\partial_n.$$

Зауважимо, що $u_n(\mathbb{K}) \subset s_n(\mathbb{K})$. Окрім цього, $s_n(\mathbb{K})$ є розв'язною (див. [52]).

3.1 Максимальність трикутних алгебр Лі $u_n(\mathbb{K})$

Лема 3.1.1. *Нехай $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n], \deg f \geqslant 1$. Тоді:*

1. *Існують такі невід'ємні цілі числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, що многочлен $\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(f)$ є ненульовою константою.*

2. *Якщо $\deg_{x_i} f \geqslant 1$, то існують невід'ємні цілі $\beta_1, \ldots, \beta_n$, значення яких залежить від індексу i, для яких $\partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\beta_n}(f) = \lambda_i x_i + g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, де $\lambda_i \in \mathbb{K}^*$.*

Доведення. 1. Нехай $d = \deg f$, $f = f_0 + \cdots + f_d$ — розклад f у суму однорідних компонент. Оберемо довільний моном $ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ однорідного многочлена f_d. Тоді

$$\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}) = \gamma$$

для деякого $\gamma \in \mathbb{K}^*$. Якщо існує інший моном $bx_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$ многочлена f_d, то многочлен $\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(bx_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n})$ є константою. Ця константа є ненульовою тільки у тому випадку, коли $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Однак це неможливо з огляду на вибір монома $bx_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n}$. Отже, $\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(f_d) = \gamma$. Оскільки $\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(f_i) = 0$, маємо

$$\partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(f_d) = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{K}^*.$$

2. Нехай $\deg_{x_i} f \geqslant 1$. Розпишемо f по степеням x_i: $f = h_0 + h_1 x_i + h_d x_i^d$, де $\deg_{x_i} h_j = 0, j = 1, \ldots, d$. Тоді

$$\partial_i^{d-1} = t_0(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + t_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)x_i.$$

Якщо многочлен $t_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ не є константою, то, як випливає з першої частини даної леми, існують такі цілі невід'ємні числа $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n$, що

$$\partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_{i-1}^{\alpha_{i-1}} \partial_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(t_1) = \lambda_i \in \mathbb{K}^*.$$

Нехай $\beta_i = d - 1$. Тоді

$$\partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}(t_1) = \lambda_i x_i + g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

де $g_i = \partial_1^{\beta_1} \ldots \partial_{i-1}^{\beta_{i-1}} \partial_{i+1}^{\beta_{i+1}} \ldots \partial_n^{\beta_n}(t_0), \lambda_i \in \mathbb{K}^*$. □

Лема 3.1.2. *Якщо існує локально нільпотентна підалгебра S алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, яка містить $u_n(\mathbb{K})$ в якості власної підалгебри, тоді існує ненульове лінійне диференціювання $D \in S \setminus u_n(\mathbb{K})$ вигляду $D = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j \partial_i$, де $\lambda_{ij} = 0$ для усіх $i > j$.*

Доведення. Припустимо, що твердження леми не вірне, тобто $S \setminus u_n(\mathbb{K})$ не містить ненульових лінійних диференціювань. Оберемо диференціювання $D \in S \setminus u_n(\mathbb{K})$ найменшого степеня й запишемо його у вигляді $D = f_1\partial_1 \cdots + f_n\partial_n$, $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Оскільки $\partial_i \in S, i = 1 \ldots, n$, ми маємо, що

$$[\partial_i, D] = \partial_i(f_1)\partial_1 + \cdots + \partial_i(f_n)\partial_n \in S.$$

Окрім того, $\deg[\partial_i, D] < \deg D$. Зважаючи на вибір D, ми бачимо, що $[\partial_i, D] \in u_n(\mathbb{K}), i = 1, \ldots, n$. Покажемо, що $\deg_{x_i} f_i \leqslant 1$ для $j \geqslant i$. Дійсно, якщо $\deg_{x_i} f_i \geqslant 2$, то тоді $\deg_{x_j} \partial_j(f_i) \geqslant 1$, що протирічить включенню $[\partial_j, D] \in u_n(\mathbb{K})$, згаданому вище.

Розпишемо многочлени f_i по степеням x_j. Маємо $f_i = f_{i0} + f_{i1}x_j$ для деяких $f_{i0}, f_{i1} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n]$. Якщо многочлен f_{i1} не є константою, то $\partial_k(f_{i1})$ для деяких $k, 1 \leqslant k \leqslant n$. Але тоді $\deg_{x_j} \partial_k(f_i) = 1$, тобто $[\partial_k, D] \notin u_n(\mathbb{K})$. Це протирічить доведеому вище. Отже, $f_i = f_{i0} + f_{i1}x_j$ для деякого $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$. Повторюючи ці міркування для кожного $j \geqslant i$, ми бачимо, що f_i може бути обраний у вигляді

$$f_i = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{ij} x_j + \bar{f}_i,$$

де $\lambda_{ii} = 0$ для усіх $i > j$ та многочлени $\bar{f}_i$ не залежать від $x_j, j \geqslant i$. Іншими словами, $\bar{f}_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_{i-1}]$. Але тоді $\bar{f}_i\partial_i \in u_n(\mathbb{K})$, а тому ми можемо відняти $\bar{f}_i\partial_i$ від диференціювання D. Повторюючи дані міркування для усіх f_i, ми отримуємо твердження леми.

□

Теорема 3.1.3. *Трикутна алгебра $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$.*

Доведення. Припустимо протилежне: існує локально нільпотентна підалгебра S алгебри $W_n(\mathbb{K})$, яка містить $u_n(\mathbb{K})$ в якості власної підалгебри. За Лемою 3.1.2 існує диференціювання $D \in S \setminus u_n(\mathbb{K})$ вигляду

$$D = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \lambda_{ij} x_j \partial_i, \lambda_{ij} \in \mathbb{K},$$

тобто

$$D = f_1\partial_1 + \cdots + f_n\partial_n,$$

де $f_i = \lambda_{ii}x_i + \lambda_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + \lambda_{in}x_n$. Доведемо спочатку, що для диференціювання D матриця (λ_{ij}) має бути діагональною. Припустимо, що це не так й множина $S \setminus u_n(\mathbb{K})$ містить лінійне диференціювання D, яке не є діагональним. Зауважимо, що $x_i\partial_j \in u_n(\mathbb{K})$, якщо $i < j$. Введемо диференціювання $D_0 = [x_i\partial_j, D]$. Тоді

$$D_0 = [x_i\partial_j, \sum_{s=1}^{n} \lambda_{1s}x_s\partial_1 + \cdots + \sum_{s=k}^{n} \lambda_{ks}x_s\partial_s + \cdots + \lambda_{nn}x_n\partial_n] =$$

$$= x_i\lambda_{1j}\partial_1 + \cdots + x_i\lambda_{ij}\partial_i + \cdots + x_i\lambda_{jj}\partial_j - (\lambda_{1i}x_i + \cdots + \lambda_{1i}x_i)\partial_j. \qquad (3.1)$$

Бачимо, що $[D_0, x_i\partial_j] = \lambda_{ij}x_i\partial_j$, тобто диференціювання $x_i\partial_j$ є власним вектором лінійного оператора $\operatorname{ad} D_0 : W_n(\mathbb{K}) \to W_n(\mathbb{K})$. За нашим припущенням D не є діагональним диференціюванням, тому існує ненульовий коефіцієнт $\lambda_{ij}, i < j$. Проте це неможливо, зважаючи на те, що підалгебра S є локально нільпотентною. Отримана суперечність демонструє, що будь-яке лінійне диференціювання з множини $S \setminus u_n(\mathbb{K})$ є діагональним.

Нехай $D \in S \setminus u_n(\mathbb{K})$ — лінійне діагональне диференціювання,

$$D = \mu_1x_1\partial_1 + \cdots + \mu_nx_n\partial_n.$$

Бачимо, що $D \neq 0$. Крім того, покажемо, що $S \setminus u_n(\mathbb{K})$ містить диференціювання вигляду $D_1 = \mu E_n$, де $E_n = x_1\partial_1 + \cdots + x_n\partial_n$ — диференціювання Ейлера. Якщо D не пропорційне до E_n, тоді існують $\mu_i, \mu_j, \mu_i \neq \mu_j$. Підалгебра S містить елемент

$$[\sum_{s=1}^{n} \mu_sx_s\partial_s, x_i\partial_j] = (\mu_i - \mu_j)x_i\partial_j, \mu_i - \mu_j \neq 0.$$

Останнє означає, що диференціювання $x_i\partial_j$ є власним вектором лінійного оператора $\operatorname{ad} D$. Як вже зазначалося вище, така ситуація неможлива, оскільки S є локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$. Отже, $D = \mu E_n$ для деякого $\mu \in \mathbb{K}^*$. Тоді для диференціювання $x_1^2\partial_2 \in w_n(\mathbb{K}) \subseteq S$ маємо

$$[\mu E_n, x_1^2\partial_2] = \mu x_1^2\partial_2.$$

Це неможливо й отримана зуперечність показує, що $S = u_n(\mathbb{K})$, тобто $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$.

$\square$

Зауважимо, що за Лемою 2.3.2 у випадку $n = 2$ маємо $\mathrm{LND}(\mathbb{K}[x_1, x_2]) = sa_2(\mathbb{K})$ та трикутна алгебра $u_2(\mathbb{K})$ є максимальною підалгеброю у $sa_2(\mathbb{K})$.

3.2 Максимальність розв'язних алгебр Лі $s_n(K)$

Даний підрозділ присвячений підалгебрам в $W_n(\mathbb{K})$ вигляду

$$s_n(\mathbb{K}) = (P_0 + x_1P_0)\partial_1 + \cdots + (P_{n-1} + x_nP_{n-1})\partial_n.$$

Бачимо, що $u_n(\mathbb{K}) \subset s_n(\mathbb{K})$. Крім цього, ця підалгебра є розв'язною, степінь розв'язності дорівнює $2n$.

Відомо, що для розв'язних підалгебр Лі в $W_n(\mathbb{K})$ степінь розв'язності не перевищує $2n$ (див. [50], [52]). Отже, підалгебра $s_n(\mathbb{K})$ має максимально можливу степінь розв'язності. Більш того, доведемо в Теоремі 3.2.4, що $s_n(\mathbb{K})$ є максимальною розв'язною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$.

Означення 3.2.1. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$ – диференціювання вигляду*

$$D = f_1\partial_1 + \cdots + f_n\partial_n,$$

де $f_i \in P_n, i = 1\ldots, n$. Будемо говорити, що диференціювання D має індекс k, якщо $f_k \neq 0$ та $f_m = 0$ для усіх $m > k$.

Означення 3.2.2. *Будемо говорити, що многочлен $f \in P_n$ має індекс s, якщо $\frac{\partial f}{\partial x_s} \neq 0$ та $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ для усіх $i > s$.*

Лема 3.2.3. *Розглянемо для деякого $k \leqslant n$ диференціювання з $W_n(\mathbb{K})$ вигляду:*

$$T_1 = \sum_{i=1}^{k-1} g_i \partial_i + \partial_k, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{k-1} h_i \partial_i - x_k^2 \partial_k, \quad T_3 = \sum_{i=1}^{k-1} f_i \partial_i - 2x_k \partial_k.$$

Тоді T_1, T_2, T_3 породжують не розв'язну підалгебру Лі в $W_n(\mathbb{K})$.

Доведення. Прямі обчислення дають

$$[T_1, T_2] = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \partial_i - 2x_k \partial_k,$$

$$[T_3, T_1] = \sum_{i=1}^{k-1} b_i \partial_i + 2\partial_k,$$

$$[T_3, T_2] = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \partial_i + 2x_k^2 \partial_k$$

для деяких многочленів $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Нехай L – підалгебра в алгебрі Лі $W_n(\mathbb{K})$, породжена диференціюваннями T_1, T_2, T_3, а L_1 — підалгебра, породжена диференціюваннями $\partial_k, -x_k^2, -2x_k\partial_k$. Визначимо відображення $\phi : \{T_1, T_2, T_3\} \to \{\partial_k, -x_k^2\partial_k, -2x_k\partial_k\}$ формулами

$$\phi(T_1) = \partial_k, \quad \phi(T_2) = -x_k^2 \partial_k, \quad \phi(T_3) = -2x_k \partial_k.$$

Продовжимо це відображення, зважаючи на лінійність та правило збереження комутатора, до епіморфізму алгебр Лі $L \to L_1$. З огляду на те, що L_1 є ізоморфною алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$, отримаємо за Твердженням 9, що L не є розв'язною. $\square$

Теорема 3.2.4. *Алгебра $s_n(\mathbb{K})$ є максимальною розв'язною підалгеброю алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$.*

Доведення. Припустимо протилежне, а саме: існує розв'язна підалгебра $S \subseteq W_n(\mathbb{K})$, яка містить власну підалгебру $s_n(\mathbb{K})$. Позначимо через k найменший індекс диференціювань з множини $S \setminus s_n(\mathbb{K})$ та розглянемо множину $\mathfrak{D}_k$ усіх диференціювань $D \in S \setminus s_n(\mathbb{K})$, які мають індекс k. Оберемо диференціювання

$D \in \mathfrak{D}_k$ таким чином, що многочлен $D(x_k) = f_k$ має мінімально можливий індекс q. Тоді маємо

$$D = f_1\partial_1 + \cdots + f_k\partial_k, \tag{3.2}$$

де $f_i \in P_n, i = 1, \ldots, k$, причому для $i > q$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_q} \neq 0, \quad \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \neq 0.$$

Покажемо спочатку, що $q \geqslant k$ та у випадку $q = k$ отримаємо $\deg_{x_q} f_k \geqslant 2$. Припустимо, що $q < k$. Тоді $f_k\partial_k \in u_n(\mathbb{K})$, оскільки $f_k \in P_q$. За нашим припущенням $s_n(\mathbb{K}) \subseteq S$. Тоді

$$D - f_k\partial_k \in S \setminus s_n(\mathbb{K});$$

але це диференціювання має індекс менший, ніж k, а це суперечить нашому вибору диференціювання D. Отже, $q \geqslant k$. Нехай $q = k$. Тоді $x_q = x_k$, $\frac{\partial f_k}{\partial x_k} \neq 0$ та $f_k \in P_k$. Нехай $t = \deg_{x_k} f_k$. Розпишемо многочлен f_k по степеням x_k:

$$f_k(x_1, \ldots, x_k) = h_0(x_1, \ldots, x_{k-1}) + h_1(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k + \cdots + h_t(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k^t,$$

де $h_0, \ldots, h_t \in P_{k-1}$. Якщо $t = 1$, то

$$f_k\partial_k = (h_0(x_1, \ldots, x_{k-1}) + h_1(x_1, \ldots, x_{k-1})x_k)\partial_k \in s_n(\mathbb{K}).$$

Окрім цього, диференціювання $D - f_k\partial_k$ лежить у $S \setminus s_n(\mathbb{K})$ та має індекс менший, ніж k. Останнє суперечить вибору D. Отже, якщо $q = k$, то $\deg_{x_k} f_k \geqslant 2$. Звідси випливає, що довільне диференціювання $D \in \mathfrak{D}_k$ можна записати у вигляді (3.2), де $\deg_{x_q} f_k \neq 0$, $\deg_{x_i} f_k = 0$ для усіх $i > q$ та $q \geqslant k$.

Дослідимо два можливі випадки: $q > k$ та $q = k$.

Випадок 1. Почнемо з випадку $q > k$. Розглянемо диференціювання D вигляду (3.2) та розпишемо поліноміальний коефіцієнт $f_k \in P_q$ по степеням x_q:

$$f_k(x_1, \ldots, x_q) = g_0(x_1, \ldots, x_{q-1}) + g_1(x_1, \ldots, x_{q-1})x_q + \cdots + g_1(x_1, \ldots, x_{q-1})x_q^l$$

для деякого $l \geqslant 1$, $g_i \in P_{q-1}, g_j \neq 0$. Нехай $D_0 = [\partial_q, \ldots, [\partial_q, D] \ldots] \in S$ ($l - 1$ раз помножили зліва на ∂_q). Тоді диференціювання D_0 може бути записане у вигляді

$$D_0 = \alpha_1\partial_1 + \dots + \alpha_{k-1}\partial_{k-1} + (u_0(x_1, \dots, x_{q-1}) + u_1(x_1, \dots, x_{q-1})x_q)\partial_k,$$

для деяких $\alpha_i \in P_n$, $i = 1, \dots, k-1, u_0, u_1 \in P_{q-1}$ та $u_1 \neq 0$ згідно з вибором q. За Лемою 3.1.1 існує такий диференціальний оператор $\partial_1^{\beta_1} \dots \partial_{q-1}^{\beta_{q-1}}$, $\beta_i \geqslant 0$, що

$$\partial_1^{\beta_1} \dots \partial_{q-1}^{\beta_{q-1}}(u_1) = \lambda \in \mathbb{K}^*,$$

де $\mathbb{K}^*$ мультиплікативна група поля $\mathbb{K}$. Подіємо цим оператором на D_0 та отримаємо диференціювання D_1 вигляду

$$D_1 = \gamma_1\partial_1 + \dots + \gamma_{k-1}\partial_{k-1} + (v_0(x_1, \dots, x_{q-1}) + \lambda x_q)\partial_k,$$

для деяких $\gamma_i \in P_n, i = 1, \dots, k-1$, $v_0 \in P_{q-1}$ та $\lambda \neq 0$. Диференціювання $D_1 \in S \setminus s_n(\mathbb{K})$, оскільки $\lambda \neq 0$ та $q > k$.

Розглянемо підвипадок $q - 1 > k$. В такій ситуації матимемо

$$\begin{aligned}&[x_{q-1}\partial_q, (v_0(x_1, \dots, x_{q-1}) + \lambda x_q)\partial_k] = \\ &x_{q-1}\partial_q(v_0(x_1, \dots, x_{q-1}) + \lambda x_q)\partial_k - (v_0(x_1, \dots, x_{q-1}) + \lambda x_q)\partial_k(x_{q-1})\partial_q,\end{aligned} \tag{3.3}$$

й останній вираз дорівнює $\lambda x_{q-1}\partial_k$, оскільки $\partial_k(x_{q-1}) = 0$ при $q - 1 > k$. Окрім того, для усіх $i = 1, \dots, k-1$ маємо

$$[x_{q-1}\partial_q, \gamma_i\partial_i] = x_{q-1}\partial_q(\gamma_i)\partial_i - \gamma_i\partial_i(x_{q-1})\partial_q = x_{q-1}\partial_q(\gamma_i)\partial_i. \tag{3.4}$$

Беручи до уваги рівності (3.3) та (3.4), отримаємо

$$[x_{q-1}\partial_q, D_1] = \sum_{i=1}^{k-1} x_{q-1}\partial_q(\gamma_i)\partial_i + \lambda x_{q-1}\partial_k.$$

Оскільки $q - 1 > k$, маємо $[x_{q-1}\partial_q, D_1] \notin s_n(\mathbb{K})$. Отже,

$$[x_{q-1}\partial_q, D_1] \in S \setminus s_n(\mathbb{K}).$$

Ми отримали суперечність: многочлен λx_{q-1} має індекс менший, ніж q. На цьому розгляд підвипадку $q - 1 > k$ завершується.

Розглянемо тепер підвипадок $q-1=k$. В цій ситуації $\partial_k(x_q)=0$, а отже

$$[x_q\partial_q,(v_0(x_1,\ldots,x_{q-1})+\lambda x_q)\partial_k]=$$
$$x_q\partial_q(v_0(x_1,\ldots,x_{q-1})+\lambda x_q)\partial_k-(v_0(x_1,\ldots,x_{q-1})+\lambda x_q)\partial_k(x_q)\partial_q. \tag{3.5}$$

Останній вираз дорівнює $\lambda x_q\partial_k$. Оскільки $\partial_k(x_q)=0$ для усіх $i=1,\ldots,k-1$ та, зважаючи на рівність (3.5), отримаємо

$$[\lambda^{-1}x_q\partial_q,D_1]=\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}x_q\partial_q(\gamma_i)\partial_i+x_q\partial_k.$$

Позначимо $D_2=\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}x_q\partial_q(\gamma_i)\partial_i+x_q\partial_k$. Бачимо, що $D_2\in S\setminus s_n(\mathbb{K})$, тому що $q=k+1$. Розглянемо диференціювання

$$[x_k^2\partial_{k+1},D_2]=[x_k^2\partial_{k+1},\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{k-1}x_q\partial_q(\gamma_i)\partial_i+x_{k+1}\partial_k]=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\partial_i+[x_k^2\partial_{k+1},x_{k+1}\partial_k]$$

де $\alpha\in\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_n]$. Це диференціювання лежить у S, оскільки $x_k^2\partial_{k+1}\in s_n(\mathbb{K})$. З іншого боку,

$$[x_k^2\partial_{k+1},x_{k+1}\partial_k]=x_k^2\partial_k-2x_kx_{k+1}\partial_{k+1}.$$

Отже,

$$[x_k^2\partial_{k+1},D_2]=\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\partial_i+x_k^2\partial_k-2x_kx_{k+1}\partial_{k+1}.$$

Оскільки $2x_kx_{k+1}\partial_{k+1}\in s_n(\mathbb{K})$, приходимо до висновку, що

$$\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\partial_i+x_k^2\partial_k\in s_n(\mathbb{K}).$$

Окрім цього, $\partial_k,x_k\partial_k\in s_n(\mathbb{K})$ й позначимо

$$T_1=\partial_k,T_2=-\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\partial_i-x_k^2\partial_k,T_3=-2x_k\partial_k.$$

Тоді за Лемою 3.2.3 алгебра S не є розв'язною, що суперечить вибору S. Отже, підвипадок $q>k$ є неможливим.

Випадок 2. Розглянемо тепер ситуацію, коли $q = k$. Як показано вище, в такому випадку $\deg_{x_q} f_k = \deg_{x_k} f_k \geqslant 2$. Аналогічно до випадку, розглянутого вище, диференціювання D може бути записане у вигляді (3.2), причому $\deg_{x_i} f_k = 0$ для усіх $i > k$. Розпишемо многочлен $f_k \in P_k$ по степеням x_k:

$$f_k(x_1, \dots, x_k) = g_0(x_1, \dots, x_{k-1}) + g_1(x_1, \dots, x_{k-1})x_k + \dots + g_l(x_1, \dots, x_{k-1})x_k^l,$$

де $g_l \neq 0, l \geqslant 2$, $g_i \in P_{k-1}, i = 1, \dots, l$. Повторюючи міркування у попередньому випадку, розглянемо добуток:

$$\begin{aligned} D_0 = &\underbrace{[\partial_k, \dots, [\partial_k, D] \dots]}_{l-1} = \alpha_1\partial_1 + \dots + \alpha_{k-1}\partial_{k-1} + \\ &+ (u_0(x_1, \dots, x_{k-1}) + u_1(x_1, \dots, x_{k-1})x_k + u_2(x_1, \dots, x_{k-1})x_k^2)\partial_k \in S, \end{aligned} \tag{3.6}$$

де $\alpha_i \in P_n, i = 1, \dots, k-1$, $u_0, u_1, u_2 \in P_{k-1}$ та $u_2 \neq 0$. Використовуючи диференціальний оператор $\partial_1^{\gamma_1} \dots \partial_{k-1}^{\gamma_{k-1}}$ з деякими $\gamma_i \geqslant 0, i = 1, \dots, k-1$, ми можемо припустити без втрати загальності, що $u_2(x_1, \dots, x_{k-1}) = \lambda_k \in \mathbb{K}^*$. Отримаємо диференціювання

$$D_1 = \mu_1\partial_1 + \dots + \mu_{k-1}\partial_{k-1} + (v_0(x_1, \dots, x_{k-1}) + v_1(x_1, \dots, x_{k-1})x_k + \lambda_k x_k^2)\partial_k \in S \backslash s_n(\mathbb{K}),$$

де $\mu_i \in P_n, i = 1, \dots, k-1$ та $v_0, v_1 \in P_{k-1}$. Оскільки

$$(v_0(x_1, \dots, x_{k-1}) + v_1(x_1, \dots, x_{k-1})x_k + \lambda_k x_k^2)\partial_k \in s_n(\mathbb{K}),$$

ми маємо диференціювання

$$D_2 = \mu_1\partial_1 + \dots + \mu_{k-1}\partial_{k-1} + \lambda_k x_k^2 \partial_k \in S \setminus s_n(\mathbb{K}).$$

Позначимо через L_1 підалгебру S, породжену диференціюваннями T_1, T_2, T_3. За Лемою 3.2.3 підалгебра L_1 не є розв'язною, що суперечить тому, що вона є підалгеброю розв'язної алгебри S. Отримана суперечність показує, що $q = k$ також є неможливим випадком. Отже, наше припущення про S є неправильним, тобто $s_n(\mathbb{K})$ є максимальною розв'язною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$, що й вимагалось довести.

□

3.3 Висновки

В розділі досліджувалась дві важливі підалгебри Лі диференціювань: трикутна алгебра $u_n(\mathbb{K})$ та розв'язна алгебра

$$s_n(\mathbb{K}) = (P_0 + x_1 P_0)\partial_1 + \cdots + (P_{n-1} + x_n P_{n-1})\partial_n.$$

Було доведено, що трикутна алгебра $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$, а алгебра $s_n(\mathbb{K})$ є максимальною розв'язною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$.

Подальшим напрямом досліджень може бути опис централізаторів $C_{u_n(\mathbb{K})}(D)$ диференціювань $D \in u_n(\mathbb{K})$ саме в $u_n(\mathbb{K})$; аналогічне питання може бути розглянуте для максимальної розв'язної алгебри $s_n(\mathbb{K})$. Можливо, реальною задачею для цієї більш широкої алгебри є побудова класифікації централізаторів ідеалів, аналогічної існуючій для трикутної алгебри $u_n(\mathbb{K})$.

Висновки

У дисертації були отримані наступні нові результати, пов'язані з вивченням підалгебр та централізаторів елементів алгебр Лі диференціювань.

- Були досліджені скінченновимірні розв'язні підалгебри $L \subset W_3(\mathbb{K})$ рангу 3 над полем раціональних функцій. Було встановлено, що якщо L має абелевий ідеал I рангу 3 над R, то L вкладається в загальну афінну алгебри Лі $\mathrm{aff}_3(\mathbb{K})$. Досліджений також випадок, коли L має ідеал I рангу 2 над R.

- Вивчалися централізатори C диференціювань алгебри раціональних функцій, у яких степінь трансцендентності поля констант F над основним полем дорівнює 1. Було доведено, що в такому випадку C є скінченновимірним векторним простором над F, розмірність якого співпадає з рангом C над полем раціональних функцій. Крім того, як виявилось, або C є алгеброю Лі над F, або ж C містить ідеал корангу 1 над полем раціональних функцій, який є алгеброю Лі над F.

- Досліджувалися централізатори диференціювань алгебри многочленів з полем констант, степінь трансцендентності якого дорівнює 1. У випадку, коли поле констант диференціювання має вигляд $F = \mathbb{K}(p)$, було знайдено, що централізатор є алгеброю Лі над кільцем $\mathbb{K}[p]$, або ж містить ідеал корангу 1, який є алгеброю Лі над $\mathbb{K}[p]$. Також була описана структура централізатора диференціювання, коли $F = \mathbb{K}(p/q)$.

- Були досліджені централізатори лінійних діагоналізованих диференціювань.

- Були досліджені централізатори якобіанних диференціювань алгебри многочленів $\mathbb{K}[x, y]$. Зокрема, встановлено, що централізатор $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ якобіанного диференціювання D_f складається з тих диференціювань T, для яких $T(f) = \psi(f)$ для деякого многочлена $\psi(t) \in \mathbb{K}[t]$ та $\operatorname{div} T = \psi'(f)$. Було також доведено, що $C_{W_2(\mathbb{K})}(D_f)$ є вільним модулем рангу 1 або 2 над кільцем констант $\mathbb{K}[p]$ якобіанного диференціювання $D_f \in W_2(\mathbb{K})$.

- Було встановлено, що трикутна алгебра $u_n(\mathbb{K})$ є максимальною локально нільпотентною підалгеброю в $W_n(\mathbb{K})$. Доведено також, що розв'язна алгебра Лі $s_n(\mathbb{K})$, яка містить трикутну алгебру Лі, є максимальною розв'язною підалгеброю алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$.

Список використаних джерел

[1] Amaldi U. Contributo all determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario I. Giornale Mat. Battaglini Prog. Studi Univ. Ital. – 1901. – 39. – P. 273–316.

[2] Amaldi U. Contributo all determinazione dei gruppi continui finiti dello spazio ordinario II. Giornale Mat. Battaglini Prog. Studi Univ. Ital. – 1902. – 40. – P. 105–141.

[3] Amemiya I., Masuda K., Shiga K.: Lie algebras of differential operators. Osaka J. Math. **12**, 139-172, 1975.

[4] Arzhantsev, I. V., Makedonskii, E. A., Petravchuk, A. P.: Finite-dimensional subalgebras in polynomial Lie algebras of rank one. Ukrainian Math. Journal **63**(5), 708-712 (2011).

[5] H. Bass, A non-triangular action of G_a on A^3. J. Pure Appl. Algebra **33**, 1-5 (1984).

[6] Bavula, V. V. : Lie algebras of triangular polynomial derivations and an isomorphism criterion for their Lie factor algebras. Izv. RAN. Ser. Mat. **77**(6), 3-44 (2013).

[7] Bavula, V. V. : The groups of automorphisms of the Lie algebras of triangular polynomial derivations. J. Pure Appl. Algebra **218**(5), 829-851 (2014).

[8] Bedratyuk, L., Petravchuk, A., Chapovskyi, E.: Centralizers of linear and locally nilpotent derivations. Ukrainian Mathematical Journal, 1-13 (2013).

[9] Bondarenko, V. M., Petravchuk, A. P.: Wildness of the problem of classifying nilpotent Lie algebras of vector fields in four variables. Linear Algebra and its Applications **568**, 165-172 (2019).

[10] Buchholz, D., Grundling, H. Lie Algebras of Derivations and Resolvent Algebras. Commun. Math. Phys. 320, 455–467 (2013).

[11] Chapovskyi, Y.Y., Efimov, D.I.: On centralizers of polynomial derivations. X All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians April 16–17 2021. Abstracts. – National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute National Pedagogical Drahomanov University, National University of Kyiv-Mohyla Academy (2021). — p. 82.

[12] Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields. International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928 - 18.12.2019). Odesa, Ukraine May 25-28, 2021. Abstracts, p. 113.

[13] Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients. Proceedings of the International Geometry Center **14** (4) , 257-270 (2022).

[14] Chapovskyi, Y. Y., Efimov, D. I., Petravchuk, A. P.: Solvable Lie algebras of derivations of polynomial rings in three variables Прикл. проблеми механіки і математики **16**, 7–13 (2018).

[15] Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of linear derivations on polynomial rings. The 13th International Algebraic Conference in Ukraine. July 6–9, 2021. Book of abstracts – Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv (2021). — p. 27.

[16] Coomes, B., Zurkowski, V.: Linearization of polynomial flows and spectra of derivations. J. Dynamics Differential Equations **3**, 29-66 (1990).

[17] Cohen, A., Draisma, J.: From Lie algebras of vector fields to algebraic group actions. J. Transformation Groups **8**, 51-68 (2003).

[18] Daigle, D.: On some properties of locally nilpotent derivations. J. Pure Appl. Algebra **114**, 221-230 (1997).

[19] Daigle, D., Freudenburg, G.: A counterexample to Hilbert's fourteenth problem in dimension five. J. Algebra **221**, 528-535 (1999).

[20] Daigle, D., Freudenburg, G.: A note on triangular derivations of $k[X_1, X_2, X_3, X_4]$. Proc. Amer. Math. Soc. **129**, 657–662 (2001).

[21] Daigle, D., Kaliman, S.: A note on locally nilpotent derivations and variables of $k[x, y, z]$. Canad. Math. Bull. **52**(4), 535–543 (2009).

[22] Derksen, H. G. J.: The kernel of a derivation. J. Pure Appl. Algebra **84**, 13-16 (1993).

[23] Deveney, J.K., Finston, D.R.: G_a-actions on $\mathbb{C}^n$. Comm. Algebra **22**, 4977-4988 (1994).

[24] Efimov, D. I., Petravchuk, A. P., Sydorov, M. S.: Centralizers of Jacobian derivations. Algebra Discrete Math. **36**(1), 22-31 (2023).

[25] Efimov, D., Petravchuk, A., Sydorov, M.: Centralizers of Jacobian derivations. The 14th Ukraine Algebra Conference. July 3-7, 2023. Book of abstracts – Sumy: Sumy State Pedagogical University named after A.S. Makarenko (2023). — p. 55.

[26] Efimov, D. I., Sydorov, M. S., Sysak, K. Ya.: Maximal solvable subalgebras of the Lie algebra $W_n(K)$. The international algebraic conference "At the End of the Year" 2022. December 27–28, 2022, Kyiv, Ukraine. Abstracts – Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, National University of Kyiv-Mohyla Academy — p. 18, (2022).

[27] Efimov, D. I., Sydorov, M. S., Sysak, K. Ya.: On maximality of some solvable and locally nilpotent subalgebras of the Lie algebra $W_n(K)$. Res. Math. **31**(2), 27-35 (2023).

[28] Essen van den, A.: Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture. Birkhauser, Boston (2000).

[29] Finston, D.R., Walcher, S.: Centralizers of locally nilpotent derivations. Journal of Pure and Applied Algebra **120**, 39-49 (1997).

[30] Freudenburg, G.: Algebraic theory of locally nilpotent derivations, Springer-Verlag, Berlin (2006).

[31] Gantmaher, F. R.: The theory of matrices. Vol. 1, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (1998)

[32] Grabowski, J.: Isomorphisms and ideals of the Lie algebras of vector fields. Inventiones math. **50**, 13-33 (1978).

[33] González-López, A., Kamran, N., Olver, P. J.: Lie algebras of differential operators in two complex variables. Amer. J. Math. **114**, 1163-1185 (1992).

[34] González-López, A., Kamran, N., Olver, P. J.: Lie algebras of vector fields in the real plane. Proc. London Math. Soc. **s3-64**(2), 339-368 (1992).

[35] Hermann, R., Ackerman, M.(ed.): Sophus Lie's 1880 transformation group paper. Math. Sci. Press, Brookline, Mass. (1975).

[36] Herman, M.R.: Sur l'agebre de lie des champs de vecteurs R-analytiques du tore. Differential Topology and Geometry. Lecture Notes in Mathematics, vol 484, Springer, Berlin, Heidelberg, 43-50 (1975).

[37] Hilbert, D.: Mathematical problems, Bull. Amer. Math. Soc. **8**, 437–479 (1902).

[38] Humphreys, J.E.: Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. GTM, vol. 9, 1st edn, Springer, New York (1972)

[39] Jacobson, N.: Lie algebras. Interscience Publishers, New York–London (1962).

[40] Jacobson, N.: Abstract derivation and Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **42**, 206-224 (1937).

[41] Jordan, C. R., Jordan, D. A.: Lie rings of derivations of associative rings. J. London Math. Soc. **2**(17), 33-41 (1978).

[42] Jordan, C. R., Jordan, D. A.: The Lie structure of a commutative ring with a derivation. J. London Math. Soc. **2**(18), 39-49 (1978).

[43] Jordan, D. A.: Simple Lie rings of derivations of commutative rings. J. London Math. Soc. **2**(18), 443-448 (1978).

[44] Jordan, D. A.: On the ideals of Lie algebra of derivations. J. London Math. Soc. **2**(33), 33-39 (1986).

[45] Klymenko, I. S., Lysenko, S. V., Petravchuk, A. P.: Lie algebras of derivations with large abelian ideals. Algebra Discrete Math. **28** 1, 123–129 (2019).

[46] Knapp, A.: Lie Groups Beyond an Introduction. Progress in Math., Birkhäuser (2002).

[47] Kolchin, E. R.: Differential algebra and algebraic groups. Academic Press, New York, London (1973).

[48] Lie, S.: Theorie der Transformationsgruppen, Vol. 3. Leipzig, (1893).

[49] Makar-Limanov, L.: Locally nilpotent derivations of affine domains. MPIM Preprint Series **92** (2004).

[50] Makedonskyi, Ie. O., Petravchuk, A. P.: On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations. Journal of Algebra **401**, 245-257 (2014).

[51] Makedonskyi, Ie. O., Petravchuk, A. P.: On finite dimensional Lie algebras of planar vector fields with rational coefficients. Methods Func. Analysis Topology **19**(4), 376-388 (2013).

[52] Martello M., Ribon J.: Derived length of solvable groups of local diffeomorphisms. Mathematische Annalen **358**, 701-728 (2014).

[53] Miyanishi, M.: G_a-action of the affine plane. Nagoya Math J. **41**, 97-100 (1971).

[54] Nagata, M.: On Automorphism Group of $k[x, y]$. Lectures in Math. Kyoto Univ., vol. **5** (1972).

[55] Nagata, M.: Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1965).

[56] Nagata, M., Nowicki, A.: Rings of constants for k-derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$. J . Math. Kyoto Univ., 28-1, 111-118 (1988).

[57] Nagloo, J., Ovchinnikov, A., Thompson, P.: Commuting planar polynomial vector fields for conservative newton systems. Communications in Contemporary Mathematics **22** (2019).

[58] Nowicki, A.: Polynomial Derivations and their Rings of Constants. Uniwersytet Mikolaja Kopernika, Torun (1994).

[59] Nowicki, A.: Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero. Journal of Pure and Applied Algebra **96**, 47-55 (1994).

[60] Nowicki, A.: The Lie structure of a commutative ring with a derivation. Arch. Math. **45**, 328-335 (1985).

[61] Nowicki, A.: Commutative basis of derivations in polynomial and power series rings. Journal of Pure and Appl. Algebra **40**, 279-283 (1986).

[62] Nowicki, A.: The Fourteenth problem of Hilbert for polynomial derivations. Banach center publications **58**, 177-188 (2002).

[63] Petravchuk, A. P.: On nilpotent Lie algebras of derivations of fraction fields. Algebra and Discrete Math. **22**, 116-128 (2016).

[64] Petravchuk, A. P., Iena O.G.: On Centralizers of Elements in the Lie Algebra of the Special Cremona Group $SA_2(k)$. Journal of Lie Theory **16** 561–567 (2006).

[65] Petravchuk, A. P., Iena O.G.: On closed rational functions in several variables. Algebra and Discrete Math. **2**, 115 – 124 (2007).

[66] Petravchuk, A. P., Sysak, K. Ya.: On Lie algebras consisting of locally nilpotent derivations. Journal of Lie Theory **27**(4), 1057-1068 (2017).

[67] Petravchuk, A. P., Shevchyk, O. M., Sysak, K. Ya.: On locally nilpotent Lie algebras of derivations of integral domains. Appl. Problems of Mech. and Math. **15**, 7-15 (2017).

[68] Rees, D.: On a problem of Zariski. Illinois J. Math. **2** 145–149 (1958).

[69] Rentschler, R.: Operations du groupe additif sur le plan affine. C. R. Acad. Sc. Paris **267**, 384-387 (1968).

[70] Ritt, J. F.: Differential algebra. Amer. Math. Soc., Colloq. Pub., New York (1950).

[71] Schinzel, A.: Polynomials with special regard to reducibility. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. **77**, Cambridge University Press (2000).

[72] Shanks, M. E., Pursell, L. E.: The Lie algebra of a smooth manifold. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 468-472 (1954).

[73] Siebert, T.: Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic 0. Math. Ann. **305**, 271-286 (1996).

[74] Skutin, A.A.: Maximal Lie subalgebras among locally nilpotent derivations. Sbornik: Mathematics **212**:2, 265–271 (2021).

[75] Stewart, Ia.: Lie algebra. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg (1970).

[76] Sysak, K.: On nilpotent Lie algebras of derivations with large center. Algebra Discrete Math. **21**(1), 153-162 (2016).

[77] Tôgô, S.: Outer derivations of Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 128, 264-276 (1967).

[78] Umirbaev, U. U.; Shestakov, I. P.: The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables. Journal of the American Mathematical Society, **17** (1): 197–227 (2004).

[79] Zariski, O.: Interprétations algébro-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math. **78**, 155–168 (1954).

ДОДАТОК 1

Список опублікованих праць

1. Chapovskyi, Y., Efimov, D., Petravchuk, A.: Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients. Proc. Int. Geom. Cent. **14**(4), 257–270 (2022).

2. Chapovskyi, Y. Y., Efimov, D. I., Petravchuk, A. P.: Solvable Lie algebras of derivations of polynomial rings in three variables. Прикл. проблеми механіки і математики **16**, 7–13 (2018).

3. Efimov, D. I., Petravchuk, A. P., Sydorov, M. S.: Centralizers of Jacobian derivations. Algebra Discrete Math. **36**(1), 22-31 (2023).

4. Efimov, D. I., Sydorov, M. S., Sysak, K. Ya.: On maximality of some solvable and locally nilpotent subalgebras of the Lie algebra $W_n(K)$. Res. Math. **31**(2), 27-35 (2023).

Апробація результатів дисертації

1. X All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians (April 16–17 2021, Kyiv, Ukraine);

2. International Online Conference Algebraic and Geometric Methods of Analysis dedicated to the memory of Yuriy Trokhymchuk (17.03.1928 - 18.12.2019). (Odesa, Ukraine May 25-28, 2021);

3. The international algebraic conference “At the End of the Year” 2022. (December 27–28, 2022, Kyiv, Ukraine);

4. The 13th International Algebraic Conference in Ukraine. (July 6–9, 2021, Kyiv, Ukraine);

5. The 14th Ukraine Algebra Conference. (July 3-7, 2023, Sumy, Ukraine).