

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Київський Національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису

Іваненко Дмитро Олександрович

УДК 519.21

Асимптотичні властивості оцінок параметрів
марковських процесів з пуассоновими шумами

01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник –
Кулик Олексій Михайлович,
доктор фізико-математичних
наук

Київ – 2016

ЗМІСТ

ЗМІСТ	ii
ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ І СКОРОЧЕННЯ	1
ВСТУП	1
1 Попередні відомості та означення	9
2 Огляд літератури та основних результатів дисертації	20
2.1. Основні підходи до вивчення асимптотичної ефективності оцінок.....	20
2.2. Огляд літератури, присвяченої ЛАН	24
2.3. Огляд літератури присвяченої використанню числення Малаєна у статистичних задачах.....	29
2.4. Результати дисертації.....	33
3 Інтегральне представлення похідних логарифмічної функції вірогідності і регулярність статистичного експеримента	42
3.1. Збурення випадкових пуассонових мір і відповідні диференціальні оператори	43
3.2. Диференціальні властивості розв'язку СДР керованого процесом Леві	50
3.3. Моментні оцінки для розв'язків СДР і їх стохастичних похідних.....	53
3.4. Існування густини перехідної імовірності та інтегральне представлення її логарифмічної похідної по параметру.....	55

3.5. Достатні умови регулярності статистичного експерименту .	59
3.6. Формули для складників інтегрального представлення другої похідної по параметру від густини перехідної імовірності	64
3.7. Інтегральне представлення для другої похідної по параметру від густини перехідної імовірності.....	66
3.8. Висновки	68
4 Властивість ЛАН для моделей зі сталим кроком спостережень	70
4.1. Властивість ЛАН моделей, породжених дискретними спостереженнями процесу Маркова	70
4.2. Властивість ЛАН для моделей породжених спостереженнями процесу, заданого СДР з шумом Леві.....	79
4.3. Висновки	84
5 Перевірка ефективності методу оцінювання	85
5.1. Попередні пояснення обговорення.....	85
5.2. Перше наближення теоретичної інформації Фішера	88
5.3. Приклад.....	96
5.4. Висновки	102
6 Властивість ЛАН для моделей в яких з високою частотою спостерігається процес Леві	103
6.1. Підготовчі результати.	105
6.2. Інтегральне представлення похідної логарифмічної функції вірогідності.....	111
6.2.1. Рівномірна φ обмеженість модифікованої ваги Малайвена.....	114
6.2.2. Справедливість формули для інтегрального представлення логарифмічної похідної густини перехідної імовірності.	120
6.3. Властивість ЛАН	125
6.3.1. Доведення теореми про достатні умови ЛАН.....	127

6.3.2. Доведення теореми про достатні умови рівномірної ЛАН.	134
6.4. Висновки	134
ВИСНОВКИ	136
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	138

*

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ І СКОРОЧЕННЯ

$\ \cdot\ $ ЛАН ОМВ СДР В E F $-d$ $L(\mathcal{P})$ ∂_P \rightarrow $P_{\theta, \theta}$ $E_{\theta, \theta}$ E_{θ} P_{θ} $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \Theta)$	модуль числа або вектора. локальна асимптотична нормальність. оцінка максимальної вірогідності. стохастичне диференціальне рівняння. борелівська σ -алгебра. математичне сподівання випадкової величини. потік σ -алгебр $(\mathcal{F}_t, t \in [0, \infty])$. збіжність за розподілом. закон розподілу випадкового елемента θ по відношенню до \mathcal{P} . частинна похідна $\frac{\partial}{\partial \theta}$. збіжність за імовірністю. міст, що відповідає процесу X_t , який стартує із x_0 при умові, що за час t він попаде в A (див. с. 55). умовне математичне сподівання відносно $P_{\theta, \theta}$. розподіл процесу $X_t = X_t^{\theta}$, стартуючого з x_0 . сподівання відносно P_{θ} . скінченновимірний розподіл для заданих часових моментів $t_1 < \dots < t_n$. $\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \Theta)$, $\theta, \theta \geq 0$ клас функцій $f: \mathbb{R} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$, що мають неперервні похідні $\frac{\partial f}{\partial \theta_i} := \frac{\partial f}{\partial \theta_i}$, $\theta_i \leq \theta$.
---	--

ВСТУП

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено асимптотичним властивостям статистичних моделей, в яких дискретно спостерігається процес Маркова з пуассоновим шумом. Існує багато методів оцінювання невідомих параметрів статистичних моделей, тому природнім чином виникає задача вибору оптимальної оцінки. Переважна більшість робіт присвячених цій темі стосується дифузійних моделей. В даній роботі розглядаються моделі, породжені дискретними спостереженнями процесів Леві та процесів заданих СДР з шумом Леві. Для таких моделей досліджуються асимптотичні властивості за допомогою яких можна встановити асимптотичні межі ефективності для оцінок параметрів і будувати оцінки, наближені до оптимальних.

У сучасній статистиці задача вибору асимптотично оптимальної оцінки розв'язується за допомогою концепції локальної асимптотичної нормальності (коротко ЛАН) введеної Ле Камом в 1960 р. Зокрема, властивість ЛАН виявляється зручним і потужним інструментом для встановлення нижньої границі ефективності для статистичних моделей.

Встановлення властивості ЛАН є суттєвим кроком у статистичному аналізі досліджуваної моделі. Для моделей, породжених процесами Леві, цей крок залишається не дослідженим. Властивість ЛАН статистичних моделей, що генеруються дискретними спостереженнями випадкового процесу з шумом Леві, була вивчена в основному у випадку, коли функція вірогідності (або щонайменше її головна частина) відома в деякому смислі. У більшості робіт розглядаються лише лінійні моделі, тобто такі, в яких спостерігається сам процес Леві, або спостерігається процес, що є розв'язком лінійного стохастичного диференціального рівняння з

шумом Леві (іншими словами, процес типу Орнштайна – Уленбека). Загальний нелінійний випадок залишається невивченим у значній мірі.

Для розв'язання статистичних задач, які потребують інформацію про функцію вірогідності, в якості інструмента в літературі ефективно використовується числення Малявена. Вперше числення Малявена було розроблено для доведення існування і гладкості щільності розподілу, в подальшому воно виявилось досить ефективним при дослідженні чутливості сподівань відносно параметрів. Таке поле застосувань мотивоване аналізом волатильності в моделях фінансової математики (див. наприклад [20]). Метод із застосуванням числення Малявена має природні розширення для статистичних завдань. Так у роботах [25, 26] було знайдено інтегральне представлення малявенівського типу похідної по параметру від логарифмічної функції вірогідності в моделі, породженій дискретними спостереженнями дифузії. За допомогою такого представлення в цих роботах була доведена властивість ЛАН. Декілька версій числення Малявена, що базуються на аналізі чутливості в імовірносному просторі Вінера-Пуассона, були запропоновані в [18] з подальшим застосуванням до доведення нерівності Крамера – Рао і вивченням асимптотичних властивостей ОМП для дискретно спостережуваних дифузійних процесів. Проте питання про зручну версію числення Малявена для моделей, заданих СДР, керованих шумом Леві залишається відкритим.

Особливий інтерес становлять моделі, в яких крок спостереження прямує до нуля, а сам процес, що спостерігається, забруднений фоновим шумом і, крім того, може мати велику інтенсивність стрибків великої амплітуди.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-

дослідної теми № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561) і № 16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв'язання наступних задач.

- Встановити існування густини перехідної імовірності розв'язку СДР з шумом Леві, і для неї знайти інтегральні представлення перших двох логарифмічних похідних по параметру, також побудувати інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності процесу Леві з важкими хвостами.
- Дослідити достатні умови регулярності статистичного експерименту, породженого дискретними спостереженнями розв'язку СДР з шумом Леві і встановити нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.
- Знайти достатні умови, за яких статистична модель, породжена дискретними спостереженнями процесу Маркова, має властивість ЛАН та довести властивість ЛАН, у випадку дискретних спостережень зі сталим кроком, моделей, заданих СДР з шумом Леві.
- Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу,

заданого СДР з шумом Леві, побудувати алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання і оцінити втрати інформації при умовному усередненні.

- Довести властивість ЛАН для моделей, в яких із прямоючим до нуля кроком спостерігається процес Леві на фоні заважаючого шуму і довести, що відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів.

Об'єктом дослідження є процеси Леві та СДР з шумами Леві та статистичні моделі, в яких такі процеси спостерігаються дискретним чином.

Предметом дослідження є локальні та асимптотичні властивості статистичних моделей породжених дискретними спостереженнями процесів Леві та розв'язків СДР з шумами Леві.

Методи дослідження. У дисертації використовуються класичні методи теорії імовірностей та теорії випадкових процесів у поєднанні з більш специфічними методами, такими як асимптотичні методи теоретичної статистики і стохастичне числення варіацій (числення Малявена).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з вступу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел. Перший розділ містить теореми і означення, відомі з літератури, які використовуються у дисертації. Другий розділ містить огляд літератури й основних результатів дисертації. Зокрема, у ньому висвітлено основні сучасні підходи до розв'язання задачі вибору оптимальної оцінки невідомих параметрів статистичних моделей. Третій розділ присвячено побудові версії числе-

ння Малявена для функціоналів від процесів Леві. Цей результат дає можливість довести існування густини перехідної імовірності розв'язку φ_i , СДР з шумом Леві, який має "легкі хвости" і побудувати інтегральне представлення похідних по параметру логарифмічної функції вірогідності, що відповідає дискретним спостереженням φ_i . Ці результати також представлені у третьому розділі. У четвертому розділі доводиться властивість ЛАН статистичної моделі, в якій зі сталим кроком спостерігається процес φ_i . У п'ятому розділі будується алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання і наводиться конкретний приклад його застосування. Останній розділ присвячено дослідженню властивості ЛАН у моделі, в якій на фоні завад спостерігається із прямуючим до нуля кроком процес Леві, який може мати необмежену інтенсивність великих стрибків.

Повний обсяг дисертації становить 151 сторінку, список використаних джерел займає 10 сторінок і містить 90 найменувань.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертація має як теоретичне, так і практичне значення. Теоретичне значення полягає у розробці необхідного математичного апарату для дослідження асимптотичних властивостей статистичних моделей, керованих процесами Леві без дифузійної компоненти. Практична цінність одержаних результатів полягає у тому, що їх можна використовувати для оцінки якості наявних і побудови нових точних оцінок параметрів статистичних моделей, які виникають при дослідженні явищ, що задаються СДР керованих шумами Леві: економічних, фізичних, геологічних, хімічних тощо.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертаційної роботи отримано здобувачем самостійно. Зі спільних з науковим керівником О. М. Куликом статей до основної частини дисертаційної роботи

включено лише ті результати, які належать здобувачу. Зі спільної з С. В. Боднарчуком статті включено лише ті результати, які належать здобувачу.

Наукова новизна одержаних результатів.

- Встановлено існування густини перехідної імовірності розв'язку СДР з шумом Леві, і для неї знайдено інтегральні представлення перших двох логарифмічних похідних по параметру, також побудовано інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності процесу Леві з важкими хвостами.
- Досліджено достатні умови регулярності статистичного експерименту, породженого дискретними спостереженнями розв'язку СДР з шумом Леві і встановлено нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.
- Знайдено достатні умови, за яких статистична модель, породжена дискретними спостереженнями процесу Маркова, має властивість ЛАН та доведено властивість ЛАН у випадку дискретних спостережень зі сталим кроком моделей, заданих СДР з шумом Леві.
- Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу, заданого СДР з шумом Леві, побудовано алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання і оцінено втрати інформації при умовному усередненні.
- Доведено властивість ЛАН для моделей, в яких із прямуючим до нуля кроком спостерігається процес Леві на фоні заважаючого шуму і доведено, що відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на наукових семінарах кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України, відділу наукових досліджень операцій Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Department of Mathematical Sciences of Ritsumeikan University, (Kusatsu, Japan), Osaka University (Osaka, Japan), кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут"; на міжнародних конференціях: "Modern stochastics: theory and applications III" (Kyiv, 2012), "11-th international Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics" (Vilnius, Lithuania, 2014), "Probability, reliability and stochastic optimization" (Kyiv, 2015), "Stochastic processes in abstract spaces" (Kyiv, 2015).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 статей у фахових виданнях [34], [39], [40], [41], [83] та 5 тез доповідей на конференціях [35], [36], [37], [38], [88].

РОЗДІЛ 1

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ ТА ОЗНАЧЕННЯ

У дисертаційній роботі розглядаються дві статистичні моделі. В першій з них зі сталим кроком Δt спостерігається процес X_t , що є розв'язком рівняння

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + dL_t, \quad (1.1)$$

тут W_t – процес Леві без дифузійної компоненти. У другій моделі спостерігається процес Леві, заданий у формі

$$dX_t = \sigma(X_t) dW_t + dL_t, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

тут W_t – локально σ -стійкий процес, а L_t – незалежний від нього процес Леві меншої активності ніж W_t , який можна інтерпретувати як заважаючий шум.

Наведемо далі відомі з літератури результати і означення, що використовуються в дисертаційній роботі. Ці відомості розділені тематично на три групи. Перша група складається з теорем теорії випадкових процесів, друга – з означень і теорем статистики випадкових процесів, третя – з теорем, присвячених ергодичним властивостям випадкових процесів.

Відомості з теорії випадкових процесів.

Для побудови числення Малявена для функціоналів від точкових пуассонових мір у роботі зокрема використовується критерій Скорохода аб-

солотної неперервності мір, що відповідають випадковим процесам з незалежними приростами [75].

Нехай $\theta_\nu(t)$, $\nu = 1, 2$ - випадкові процеси з незалежними приростами, одновимірні характеристичні функції яких задаються формулою

$$E \theta_\nu(t, \theta_\nu(t)) = \exp \left\{ \int_0^t \left(\theta_\nu(t) \theta_\nu(t) - \frac{1}{2} (\theta_\nu(t) \theta_\nu(t) + \int_0^t \theta_\nu(t) \theta_\nu(t) - 1) \theta_\nu(t) \theta_\nu(t) + \int_0^t \theta_\nu(t) \theta_\nu(t) \right) dt \right\},$$

де $\theta_\nu(t)$ - \mathbb{R}^d -значна неперервна функція $\theta_\nu(t)$ - неперервне по t лінійне перетворення \mathbb{R}^d таке, що $\theta_\nu(0)$ і $\theta_\nu(t + \tau) - \theta_\nu(t)$ при $\tau > 0$ - невід'ємні симетричні перетворення; θ_ν - міра на $[0, 1] \times \mathbb{R}^d$ така, що для всіх $\square > 0$, міра множини $\{[0, 1] \times \mathbb{R}^d \setminus [0, 1] \times \square\}$ (\square - куля в \mathbb{R}^d з центром в нулі і радіусом \square) скінченна і $\int_0^t \int_{\square} \theta_\nu(t) \theta_\nu(t) < \infty$. Позначимо $\theta_\nu(t)$ міри, породжені процесами $\theta_\nu(t)$, $\nu = 1, 2$.

Теорема 1.1 (Теорема А [75]). Для того, щоб $\theta_{\nu_2(t)}$ була абсолютно неперервна відносно $\theta_{\nu_1(t)}$ необхідно і достатньо щоб існувала $\theta(t, \theta)$ така, що

- для будь-якої борелівської множини $\theta \subset \mathbb{R}^d$

$$\int_{\theta_1} \int_{\theta \in \theta} \theta_2(\theta \times \theta) = \int_{\theta_1} \int_{\theta \in \theta} \theta(t, \theta) \theta_1(\theta \times \theta);$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - 1|^{1/2} |f(x) - 1| \nu_1(dx) < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - 1|^{1/2} (f(x) - 1) \nu_1(dx) < \infty,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \nu_1(dx) < \infty.$$

Крім того, за цих умов існує вектор-функція $\psi(\cdot)$ така, що

$$\psi_2(\cdot) - \psi_1(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^d} \dots$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - 1) \nu_1(dx) = \dots$$

$$[\dots] \psi(\cdot)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \dots < \infty.$$

Наведемо тепер теорему про диференційовність за параметром розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Зауважимо лише, що оскільки у даній роботі розглядаються СДР, керовані шумом Леві без дифузійної компоненти, то тут наводиться спрощення оригінальної теореми. Ця теорема використовується зокрема для побудови стохастичної похідної розв'язку СДР, керованого процесом Леві.

Теорема 1.2 (Теорема 4.1.12 [84]). Нехай для сім'ї СДР

$$\dots = \dots + \dots + \dots,$$

де $\nu \in (\nu_1, \nu_2) := \Theta$; ν_2, ν_1 - пуассонова і центрована пуассонова міри з мірами інтенсивності $\nu_i(\dots) = \dots, i = 1, 2$, відповідно.

Припустимо наступне:

- для кожного $\epsilon > 0$ існує локально обмежена функція $\psi_\epsilon(\cdot)$ така, що при $\dots \leq \dots$
- $$\dots + \dots$$

$$\|f''(\theta, \theta', \theta'')\| \leq \frac{1}{1-\theta^2} (1 + \theta^2);$$

- існують локально обмежені за сукупністю змінних похідні $\partial_{\theta} f(\theta, \theta')$, $\partial_{\theta'} f(\theta, \theta')$;

- існують похідні $\partial_{\theta}^2 f(\theta, \theta', \theta'')$, $\partial_{\theta'}^2 f(\theta, \theta', \theta'')$, $\theta = 1, 2$, причому функція $\partial_{\theta}^2 f(\theta, \theta', \theta'')^2 + \partial_{\theta'}^2 f(\theta, \theta', \theta'')^2$ є локально обмеженою;

- для будь-якого $\theta \in \Theta$ і $\delta > 0$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0, \theta' \rightarrow \theta'_0} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq \delta, |\theta' - \theta'_0| \leq \delta} \sup_{|\theta - \theta_0| \leq \delta} (\partial_{\theta} f(\theta, \theta') - \partial_{\theta} f(\theta_0, \theta'_0)) / \sqrt{(\partial_{\theta}^2 f(\theta, \theta') - \partial_{\theta}^2 f(\theta_0, \theta'_0))^2 + \text{arctg}(\partial_{\theta}^2 f(\theta, \theta') - \partial_{\theta}^2 f(\theta_0, \theta'_0))} = 0;$$

$\frac{1}{\delta}$ диференційовне за θ .

- θ_0

Тоді для всіх $\delta > 0$ існує похідна $\partial_{\theta} f$, яка є розв'язком СДР:

$$\partial_{\theta} f = \partial_{\theta} f_0 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_1(\theta, \theta') \theta + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_2(\theta, \theta') \theta^2 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_3(\theta, \theta') \theta^3 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_4(\theta, \theta') \theta^4 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_5(\theta, \theta') \theta^5 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_6(\theta, \theta') \theta^6 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_7(\theta, \theta') \theta^7 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_8(\theta, \theta') \theta^8 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_9(\theta, \theta') \theta^9 + \int_0^{\delta} \partial_{\theta} f_{10}(\theta, \theta') \theta^{10} + \dots$$

Наступний результат стосується існування розподілу "мосту" марківського процеса ϑ . В термінах сподівання по такому розподілу в роботі будується інтегральне представлення логарифмічної похідної густини перехідної імовірності спостережуваного процесу.

Позначимо через $(F_\vartheta)_{\vartheta \geq 0}$ - природну фільтрацію, породжену процесом ϑ . Розглянемо фелерівську сім'ю $(P_\vartheta)_{\vartheta \in \mathcal{E}}$ на локально компактно-му метричному просторі (\mathcal{E}, ϑ) з зліченною базою, відповідну напівгрупу $\mathcal{E} = (\vartheta_i)_{i \geq 0}$. Припустимо, що ϑ допускає перехідну густину $\vartheta_\vartheta(\cdot, \cdot)$ відносно деякої ϑ -скінченної міри ϑ на (\mathcal{E}, ϑ) у тому смислі, що

$$\vartheta_\vartheta(\vartheta) = \int \vartheta(\vartheta) \vartheta_\vartheta(\vartheta, \vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta).$$

Зафіксуємо $\vartheta \in \mathcal{E}$ і покладемо $P_\vartheta = \{\vartheta : \vartheta_\vartheta(\vartheta, \vartheta) > 0\}$. Припускаємо наступне:

- функція $\vartheta_\vartheta(\vartheta, \cdot)$ - неперервна для всіх $\vartheta \in (0, \vartheta]$;
- для кожного $\vartheta \in P_\vartheta$ і $0 < \vartheta < \vartheta$ має місце рівняння Колмогорова - Чепмена

$$\vartheta_\vartheta(\vartheta, \vartheta) = \int \vartheta_{\vartheta-\vartheta}(\vartheta, \vartheta) \vartheta_\vartheta(\vartheta, \vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta),$$

- функція $\vartheta_\vartheta(\vartheta, \vartheta)$ - неперервна для всіх $\vartheta, \vartheta \in \mathcal{E}, \vartheta \in (0, \vartheta)$.

Теорема 1.3 (Теорема 1 [16]). Для всіх $\vartheta \in P_\vartheta$ розподіли $P_\vartheta(\cdot / \vartheta_i \in \vartheta_i(\vartheta))$ слабо збігаються при $\vartheta \rightarrow 0$ до закону $P^\vartheta_{\vartheta, \vartheta}$ такого, що:

- функція $P^\vartheta_{\vartheta, \vartheta}$ - неперервна
- для довільної обмеженої функції ϑ і довільного обмеженого F_ϑ -вимірного функціонала ϑ

$$E_\vartheta(\vartheta \cdot \vartheta(\vartheta_i)) = \int_{P_\vartheta} E_{\vartheta, \vartheta}(\vartheta) \vartheta_\vartheta(\vartheta, \vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta).$$

Для доведення обмеженості моментів малявенівської похідної розв'язку СДР з шумом Леві, використовується наступний результат.

Теорема 1.4 (Лема 5.1 [9]). Нехай на імовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t)_{t \in [0, \theta]}, \mathbb{P})$ задано пуассонову точкову міру ν на $[0, \theta] \times \mathbb{R}$ і компенсатором $\nu(\{0\}, \{0\}) = \nu(\{0\}, \{0\})$, ν - ν -скінченна міра на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Нехай також $\nu \in \bigcap_{\theta \in [2, \infty)} \nu_\theta(\mathbb{R}, \nu)$. Тоді для кожного $\theta \in [2, \infty)$ існує

$$\nu = \nu(\{0\}, \{0\}, \nu) \text{ така, що}$$

$$E \sup_{0 \leq t \leq \theta} \int_0^t \nu(\{0\}, \nu)(\theta - t)(\nu, \nu) \leq \theta E \int_0^\theta \nu_\theta(\nu, \nu)$$

як тільки ν - \mathbb{R} -значна $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -вимірна функція на $\Omega \times [0, \theta] \times \mathbb{R}$, а ν - передбачуваний процес, який справджує нерівність $|\nu(\{0\}, \nu, \nu)| \leq \nu_\theta(\nu, \nu)$.

Означення і теореми з теоретичної статистики.

Будемо використовувати наступну термінологію і позначення, запозичені в [87]:

Означення 1.1. Нехай $\theta_1, \dots, \theta_n$ - вибірка, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ - невідомий параметр, $\nu(\theta)$ - нормуюча матриця, ν - довільний вектор з \mathbb{R}^d . Тоді статистична модель має властивість ЛАН, якщо логарифм відношення функцій вірогідності:

$$\log \frac{\nu_\theta(\theta + \nu(\theta)\nu, \theta_1, \dots, \theta_n)}{\nu_\theta(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n)} := \log \frac{\nu_\theta(\theta + \nu(\theta)\nu, \theta_1, \dots, \theta_n)}{\nu_\theta(\theta, \theta_1, \dots, \theta_n)}$$

допускає квадратичне представлення

$$\theta^T \Delta_\theta(\theta) - \frac{1}{2} \theta^T \Sigma_\theta(\theta) \theta + \Psi_\theta(\theta, \theta_0) \quad (1.3)$$

де

$$\Psi_\theta(\theta, \theta) \xrightarrow{P_\theta} 0, \quad \theta \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

$$L(\Delta_\theta(\theta), \Sigma_\theta(\theta)/P_\theta) \Rightarrow (\Delta(\theta), \Sigma(\theta)), \quad \theta \rightarrow \infty \quad (1.5) \text{ а}$$

$\Delta(\theta) = \Sigma(\theta)^{1/2} \theta$, $\Sigma(\theta)$ - не випадкова матриця і θ - стандартний нормальний вектор.

Означення 1.2. Статистичний експеримент $(X, U, P_\theta, \theta \in \Theta)$ називається регулярним, якщо $dP_\theta = \psi(\theta; \cdot) d\theta$ для деякої θ -скінченної міри θ і

- (а) функція $\psi(\cdot; \mathbf{x})$ - неперервна для θ -майже всіх $\mathbf{x} \in X$;
- (б) функція $\sqrt{\psi(\theta; \cdot)} \in \mathcal{L}_2(X, \theta)$ - диференційовна;
- (с) функція $\partial_\theta \sqrt{\psi(\theta; \cdot)} \in \mathcal{L}_2(X, \theta)$ - неперервна (похідна розуміється в $\mathcal{L}_2(X, \theta)$ смислі).

Розгорнуто пункт (с) означає, що існує така функція $\psi(\theta, \theta, \cdot) \in \mathcal{L}_2(X, \theta)$,

що

$$\int_X \frac{(\sqrt{\psi(\theta + \theta, \theta, \cdot)} - \sqrt{\psi(\theta, \theta, \cdot)})^2}{\psi(\theta, \theta, \cdot)} d\theta \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0;$$

Для регулярного статистичного експеримента з $\Theta \subset R^1$ відповідна інформація Фішера

$$I(\theta) = 4 \int_X (\partial_\theta \sqrt{\psi(\theta, \theta, \cdot)})^2 d\theta.$$

Наступний результат є узагальненням нерівності Крамера – Рао для зміщених оцінок.

Теорема 1.5 (Теорема I.7.3 [87]). Нехай $E = (X, U, P^\theta, \theta \in \Theta)$ – регулярний експеримент з інформаційною матрицею Фішера $I(\theta) > 0$, $\Theta \subset \mathbb{R}^p$. Якщо статистика $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p) : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ така, що ризик $E^\theta/\theta - \theta^2 \in$ обмеженим в околі точки $\theta \in \Theta$, то зміщення $A(\theta) = E^\theta \theta - \theta$ – неперервно диференційовне в деякому околі θ і справедлива нерівність

$$E^\theta(\theta - \theta)(\theta - \theta)^T \geq (1 + \partial_\theta A(\theta)) I(\theta)^{-1} (1 + \partial_\theta A(\theta))^T + A(\theta) A(\theta)^T.$$

Зокрема, якщо $\Theta \subset \mathbb{R}^1$, $I(\theta) > 0$, то

$$E(\theta - \theta)^2 \geq \frac{1 + \partial_\theta A(\theta)}{I(\theta)} + A(\theta)^2.$$

Наступна теорема визначає достатні умови за яких справджується властивість ЛАН у випадку незалежних спостережень і є об'єднанням Теорем II.3.1', Теорем II.6.1, Зауваження II.6.1 і Зауваження II.6.2 [87].

Теорема 1.6. Нехай $E_{i\theta}$, $i = 1, \dots, p$; $\theta = 1, 2, \dots$, – послідовність серій регулярних експериментів, причому $\theta_{i\theta}$ щільність розподілу експеримента $E_{i\theta}$ відносно θ -скінченної міри $\theta_{i\theta}$, а $I_{i\theta}(\theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ – відповідна інформаційна матриця. Покладемо $\Psi^2(\theta, \theta) = \sum_{i=1}^p \theta_{i\theta}(\theta)$ і припустимо, що Ψ^2 – додатньо визначена. Позначимо ще $\Psi^{-1}(\theta, \theta) = \left(\sum_{i=1}^p \theta_{i\theta}(\theta) \right)^{-1/2}$. Припустимо:

- для деякого $\epsilon > 0$ $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p E^\theta \Psi^{-1}(\theta, \theta) \partial_\theta \ln \theta_{i\theta}(\theta_{i\theta}, \theta) = 0$;

- для довільного $\epsilon > 0$ $\limsup_{\theta \rightarrow \infty / \theta \leq \theta} \sum_{i=1}^p \partial_\theta \left(\frac{\theta_{i\theta}(\theta)}{\theta_{i\theta}(\theta_{i\theta}, \theta)} - 1 \right) = 0$.

Тоді сім'я мір $P_{\theta}^\theta(\theta) = \prod_{i=1}^p \theta_{i\theta}(\theta_{i\theta}, \theta) \theta_{i\theta}(\theta_{i\theta}, \theta)$ задовольняє умові ЛАН

при $\theta = \theta$, причому $\theta(\theta) = \Psi^{-1}(\theta, \theta)$, $\Delta_\theta(\theta) = \theta(\theta) \sum_{i=1}^{\theta} \frac{\partial \theta(\theta, \theta)}{\partial \theta(\theta, \theta)}$

Граничні теореми.

Для перевірки властивості ЛАН статистичної моделі, що генерується спостереженнями процесу, заданого рівнянням (1.1), використовується варіант граничної теореми для стаціонарних процесів, що задовольняють умові сильного перемішування.

Нехай $\{F_\theta, \theta \geq 0\}$ - природня фільтрація процесу θ_θ , минуле процесу θ_θ визначається θ -алгебрами виду $F_{-\infty}^{-\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \theta$), а майбутнє θ -алгебрами $F_{\theta+1}^\infty$. Тоді [86] стаціонарний процес θ_θ задовольняє умові сильного перемішування, якщо

$$\theta(\theta) = \sup_{\substack{A \in F_{-\infty}^0 \\ B \in F_{\theta+1}^\infty}} |P(A \cap B) - P(A)P(B)| \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty, \theta > 0.$$

Функція $\theta(\theta)$ називається коефіцієнтом перемішування.

Теорема 1.7 (Теорема 18.5.3 [86]). Нехай стаціонарна послідовність θ_θ задовольняє умові сильного перемішування з коефіцієнтом $\theta(\theta)$. Нехай для деякого $\theta > 0$ $E|\theta_\theta|^{2+\theta} < \infty$. Якщо $\sum_{\theta \geq 1} \theta(\theta)^{\theta/(2+\theta)} < \infty$, то $\theta^2 = E\theta_0^2 + \sum_{\theta \geq 1} E\theta_0 \theta_\theta < \infty$, і, якщо, крім цього $\theta^2 > 0$, то

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{\theta} \theta_i < \theta \right\} = \Phi(\theta)$$

($\Phi(\theta)$ - функція розподілу стандартної нормальної величини).

Для застосування цієї теореми використовуються наведені нижче властивості марковських процесів.

Зокрема, наведемо результат, який дозволяє оцінити коефіцієнт θ -перемішування, що визначається співвідношенням

$$\theta^\theta(\theta) = \sup_{\theta \geq 0} E_\theta \sup_{\theta \in F_{\theta+\theta}^\infty} |P_\theta(\theta/F_\theta) - P_\theta(\theta)|, \theta \in P, \theta \in R^+.$$

Очевидно $\psi(\lambda) \leq \phi(\lambda)$. Тож, наведена нижче теорема в поєднанні з граничною теоремою вище дозволяє перевірити достатні умови властивості ЛАН у випадку, коли спостерігається процес заданий СДР, керованим шумом Леві.

Нехай $\phi_\lambda = \int_0^\lambda \int_{|\theta| \leq 1} \psi(\theta) \phi(\theta, \theta, \theta) + \int_0^\lambda \int_{|\theta| > 1} \psi(\theta) \phi(\theta, \theta, \theta)$, де ψ і ϕ - пуассонова і компенсована пуассонова міри з мірою інтенсивності $\phi(\theta, \theta, \theta) = \psi \Pi(\theta, \theta)$. Позначимо $P_\lambda^\psi(\cdot) = P\{\phi_\lambda \in \cdot / \phi_0 = \lambda\}$.

Позначимо далі P - простір імовірнісних мір на R^d , $\psi(\lambda) = \int_{R^d} \psi(\theta) \phi(\theta, \theta)$, $\psi \in P$, $\psi : R^d \rightarrow R$ - невід'ємна функція. Для двох мір $\psi, \tilde{\psi} \in P$ позначимо $[\psi \wedge \tilde{\psi}](\theta, \theta) = \min \frac{\psi(\theta) \tilde{\psi}(\theta)}{\psi(\theta) + \tilde{\psi}(\theta)}, \frac{\tilde{\psi}(\theta) \psi(\theta)}{\psi(\theta) + \tilde{\psi}(\theta)}$. Нехай також

$$\Omega = \{ \psi \in \mathcal{P}^2(R^d, R) / \exists \psi \text{ локально обмежена така, що}$$

$$\int_{|\theta| > 1} \psi(\theta + \psi(\theta)) \Pi(\theta, \theta) \leq \bar{\psi}(\lambda), \psi \in R^d \}$$

і для $\psi \in \Omega$, $\tilde{\psi} \in R^d$ запишемо

$$A\psi(\lambda) = \int_{R^d} [\psi(\theta + \psi(\theta)) - \psi(\theta) - (\nabla \psi(\theta), \psi(\theta))] \mathbf{1}_{|\theta| \leq 1} \Pi(\theta, \theta).$$

Теорема 1.8 (Теорема 1.2 [49]). Нехай для кожного $\epsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ таке, що $\inf_{|\theta|, |\tilde{\theta}| \leq \delta} R [P_\lambda^\psi \wedge P_\lambda^{\tilde{\psi}}](\theta, \theta) > 0$ (умова Дебліна). Припускаємо наступне: існує $\psi \in \Omega$ і сталі $\epsilon, \delta > 0$ такі, що $A\psi \leq -\epsilon \psi + \delta$ і $\psi(\lambda) \rightarrow +\infty, |\lambda| \rightarrow +\infty$. Тоді

- для кожної $\psi \in P$ з $\psi(\lambda) < +\infty$ коефіцієнт ψ -перемішування $\psi_\lambda(\lambda) \leq \psi_1[\psi(\lambda) + 1] \exp\{-\epsilon_2 \lambda\}$;
- $\psi(\lambda, \lambda) < +\infty$ і $\psi_{\lambda, \lambda}(\lambda) \leq \psi_1[\psi(\lambda, \lambda) + 1] \exp\{-\epsilon_2 \lambda\}$.

Наступна теорема цього підрозділу встановлює достатні умови ергодичності процесу заданого СДР керованого шумом Леві.

Для двох імовірнісних мір ψ_1 та ψ_2 позначимо

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{\psi, \psi} = \int_{R^d} \frac{\psi_1 \psi_1}{\psi \psi} - \frac{\psi_2 \psi_2}{\psi \psi} \psi, \psi,$$

де ν – деяка ν -скінченна міра така, що $\nu_\theta \ll \nu, \theta = 1, 2$. Наступний результат стосується достатніх умов ергодичності процесу ν .

Теорема 1.9 (Твердження 0.1 [49]). Нехай ν – локально ліпшицева на \mathbb{R} і $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \nu(\theta)$

< 0 . Про міру Π припускаємо наступне:

- існує $\delta > 0$ таке, що $\int_{|\theta| > 1} \nu^\theta \Pi(\nu^\theta) < +\infty$,
- $\Pi(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$.

Тоді ν є експоненційно ергодичним, тобто його інваріантний розподіл $\nu^{\nu, \nu}$ існує, єдиний і такий, що для деякої сталої $\delta > 0$ і довільного $\theta \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}^\nu - \nu^{\nu, \nu} = \nu(\theta^{-\delta})$, $\theta \rightarrow +\infty$.

Наступна теорема дозволяє контролювати "відстань" між розподілами довільного і стаціонарного розв'язку СДР.

Нагадаємо, що каплінгом для двох процесів ν, ν називається довільний двокомпонентний процес $\nu = (\nu^1, \nu^2)$ такий, що ν^1 має такий самий розподіл як ν , а ν^2 такий самий як ν . Наслідуючи цю термінологію, для довільних ν^1, ν^2 із \mathcal{P} , в [50] розглядаються дві версії $\nu^{\nu^1, \nu^2}, \nu^{\nu^2, \nu^1}$ процесу ν з початковими розподілами рівними ν^1 і ν^2 відповідно, а (ν^1, ν^2) -каплінгом процесу ν називається двокомпонентний процес $\nu = (\nu^1, \nu^2)$, який є каплінгом для $\nu^{\nu^1, \nu^2}, \nu^{\nu^2, \nu^1}$. Також в [50] вводиться наступне означення.

Означення 1.3. Процес ν допускає експоненційний ν -каплінг, якщо для цього процесу існує інваріантна міра ν і сталі $\nu_\theta > 0$ і $\nu > 0$ такі, що для довільного $\theta \in \mathbb{X}$ існує (ν_θ, ν) -каплінг $\nu = (\nu^1, \nu^2)$, і

$$E \left(\nu(\nu^1) + \nu(\nu^2) \right) \nu_{\nu^1, \nu^2} \leq \nu_\theta \nu^{-\nu} \nu(\theta), \quad \nu \geq 0.$$

Для деякої замкненої множини \mathcal{D} позначимо $\mathcal{D}_0 = \inf\{\delta \geq 0 : \mathcal{D}_\delta \in \mathcal{D}\}$.

Теорема 1.10 (Теорема 2.2 [50]). Нехай \mathcal{D} задовольняє умові Дьобліна. Припустимо, що існує функція $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow [1, +\infty)$, замкнена множина $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ і $\delta > 0$ такі, що (а) $E[\psi(\mathcal{D}_\delta) \mathbf{1}_{\mathcal{D}(\mathcal{D}_\delta) > \delta}] \leq \delta^{-\alpha} \psi(\mathcal{D})$, $\delta \in \mathbb{R}^d$;

(б) $\sup_{\delta \in \mathcal{D}, \delta \in \mathbb{R}_+} E[\psi(\mathcal{D}_\delta) \mathbf{1}_{\mathcal{D}(\mathcal{D}_\delta) > \delta}] \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow +\infty$. Тоді \mathcal{D} допускає існування експоненційного \mathcal{D} -каплінгу.

Наступна теорема носить суто технічний характер і пов'язує збіжність за імовірністю з рівномірною інтегровністю послідовності випадкових величин.

Теорема 1.11 (Теорема А.І.4 [87]). Нехай випадкові величини \mathcal{D}_δ збігаються за імовірністю до випадкової величини \mathcal{D} . Тоді, якщо $\overline{\lim}_{\delta \rightarrow \infty} E[\psi(\mathcal{D}_\delta)] \leq E[\psi(\mathcal{D})]$, то послідовність \mathcal{D}_δ є рівномірно інтегрованою і $\lim_{\delta \rightarrow \infty} E[\psi(\mathcal{D}_\delta) - \psi(\mathcal{D})] = 0$.

РОЗДІЛ 2

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

2.1. Основні підходи до вивчення асимптотичної ефективності оцінок

Існує багато методів оцінювання невідомого параметра статистичних моделей, у зв'язку з чим природним чином виникає задача про вибір оптимальної в асимптотичному сенсі оцінки, тобто такої, в якій характеристики при нескінченному збільшенні статистичного матеріалу є найкращими.

Один з шляхів розв'язання задачі пошуку асимптотично оптимальної оцінки запропонував Фішер Р. [21]. У цій роботі розглядаються лише асимптотично нормальні оцінки невідомого параметра, а асимптотично ефективною оцінкою вважається та, у якій дисперсія граничного нормального розподілу мінімальна рівномірно на всій множині значень параметра. Алгоритм Фішера полягає в наступному:

- для всіх оцінок $\hat{\theta}_n^*$, нормований відхил яких від істинного значення, $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)$, є асимптотично нормальним з параметрами $(0, \mathcal{I}(\theta, \{\hat{\theta}_n^*\}))$ довести нерівність

$$\mathcal{I}(\theta, \{\hat{\theta}_n^*\}) \geq \mathcal{I}(\theta)^{-1}, \quad \theta \in \Theta,$$

в якій величина

$$\mathcal{I}(\theta) = -\partial_{\theta}^2 \ell(\theta, \theta) / \ell(\theta, \theta)$$

називається інформацією Фішера;

• знайти оцінку, або довести її існування (наприклад ОМВ $\hat{\theta}$) таку, що

$$E_{\theta}(\hat{\theta}, \{\hat{\theta}\}) = \theta(\theta)^{-1}.$$

Такий алгоритм виявляється незастосовним для зміщених оцінок (навіть асимптотично нормальних) і (або) "нерегулярних" оцінок. Цей ефект було продемонстровано Ходжесом [31]. Приклад Ходжеса показує, що недостатньо розглядати поведінку при кожному значенні параметра θ , поточно для всіх θ . Необхідно брати до уваги різні значення параметра одночасно, коли робиться граничний перехід при $\theta \rightarrow \infty$. Технічно, це досягається вивченням продуктивності оцінок для параметрів з "перемасштабованого" околу фіксованого значення θ .

В сучасній статистиці задача вибору асимптотично оптимальної оцінки невідомого параметра розв'язується за допомогою концепції ЛАН, введеної Ле Камом [53], [54]. Технічно, статистична модель має властивість ЛАН, якщо логарифм відношення функцій вірогідності допускає квадратичне представлення (розгорнуте означення можна знайти у розділі 1).

Властивість ЛАН виявилась дуже зручним інструментом для доведення асимптотичної ефективності оцінок, що демонструє локальна мінімаксна теорема, доведена Гаєком [30]:

Теорема 2.1. Нехай послідовність статистичних моделей має властивість ЛАН у точці $\theta = \theta$ з нормуючою матрицею $\theta(\theta)$ такою, що $\text{tr } \theta(\theta) \theta(\theta)^T \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow \infty$. Тоді для довільної послідовності оцінок $\{\hat{\theta}_n\}$, будь-якої функції втрат ℓ і всіх $\theta > 0$

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} \sup_{|\hat{\theta} - \theta| < \theta} E_{\theta} \ell(\hat{\theta}) \theta(\theta)^{-1} (\hat{\theta} - \theta) \geq E_{\theta} \ell(\theta),$$

де θ розподілена за законом $\theta(0, \Sigma(\theta)^{-1})$. Рівність можлива тільки якщо

$$\theta(\theta)(\theta_\theta - \theta) - \Delta_\theta(\theta) \xrightarrow{P_\theta} 0, \theta \rightarrow \infty.$$

Крім того, властивість ЛАН за додаткових припущень дає можливість доводити асимптотичні властивості ОМВ, такі як асимптотична ефективність, асимптотична нормальність і строга конзистентність (див. наприклад Теорему III.1.1 [87]). Техніка, близька до концепції ЛАН для дослідження асимптотичних властивостей ОМВ, також використовувалась у роботі [61].

Розвинення уряд Тейлора логарифмічного відношення вірогідностей, що лежить в основі концепції ЛАН, дає змогу довести існування асимптотично нормальних оцінок, які до того ж є "асимптотично достатніми" [77,78]. Основна ідея полягає у тому, що, якщо у співвідношенні (1.3) розглядати θ як відомий параметр, а θ , як параметр, що задає сім'ю розподілів, і не зважати на нехтуваний залишок:

$$\log \theta_\theta(\theta, \theta + \theta(\theta)\theta) \sim \theta^T \Delta_\theta(\theta) - \frac{1}{2} \theta^T \Sigma(\theta) \theta,$$

можна помітити, що логарифмічна функція вірогідності залежить від вибірки лише через статистику $\Delta_\theta(\theta)$. Іншими словами, статистика $\Delta_\theta(\theta)$ є достатньою для статистичної моделі, де θ – фіксований, а θ задає сім'ю розподілів. Така статистична модель називається "локальним експериментом" [77], індексованим "локальним параметром" θ . Таким чином, статистична модель, що має властивість ЛАН "асимптотично еквівалентна" статистичному експерименту $(\theta(\theta, \Sigma(\theta)), \theta \in \mathbb{R}^\theta)$. Крім того, "гарна" оцінка θ_θ параметра θ повинна задовольняти співвідношення

$$\theta(\theta)(\theta_\theta - \theta) - \Sigma(\theta)\Delta_\theta(\theta) \rightarrow 0,$$

за імовірністю. Така оцінка за термінологією Гаєка називається "найкра-

щою регулярною” або ”асимптотично ефективною” в смислі Рао – Крамера.

Наведемо модифікацію мінімаксної теореми Гаєка (Теорема 2.1).

Теорема 2.2 (Теорема 8.11 [77]). Нехай експеримент $(P^\theta, \theta \in \Theta)$ є диференційовним у середньому квадратичному (в термінології [87] – регулярний, див. означення 1.2) у точці θ з невиродженою інформаційною матрицею Фішера $I(\theta)$. Припустимо, що Ψ – диференційовна в θ , а θ_n – довільна послідовність оцінок θ експеримента $(P^\theta, \theta \in R^d)$. Тоді для довільної опуклої функції втрат ℓ і відкритої множини $\Theta \subset R^d$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} E^{\theta + I(\theta)^{-1}(\theta_n - \Psi(\theta + I(\theta)\theta_n))} \geq I(\theta) \ell(0, \Psi(\theta) I(\theta)^{-1} \Psi(\theta)^\tau). \quad (2.1)$$

Вибір нормального розподілу в якості ”оптимального” граничного не є догмою. Дійсно, оцінки з таким граничним розподілом нормованого відхилю мають оптимальні властивості, однак деякі фахівці вважають за краще використовувати оцінки Байєса або оцінки ”усадки” [77,78], які у деяких випадках задовольняють обернену до (2.1) нерівність.

Ще одним з підходів до пошуку оптимальної оцінки є так звана відносна ефективність. Основна ідея такого підходу полягає у дослідженні асимптотики відношення послідовностей оцінок [77, 78].

Треба зазначити, що у багатьох ситуаціях побудова ОМВ, як основного кандидата на асимптотично ефективну оцінку, унеможлиблюється тим, що функція вірогідності невідома. Існують декілька підходів до побудови асимптотично ефективних оцінок, перший з них полягає у тому, що будується функція, близька до функції вірогідності, і по ній шукається так звана квазі-ОМВ [27, 82]. Зокрема, у роботі [57] досліджувались асимптотичні властивості квазі-ОМВ параметрів зносу і волатильності в

моделі з високою частотою спостережень процесу з шумом Леві, в якому наявні дифузійна і стрибкова компоненти.

Інший підхід використовує ітераційний метод побудови оцінки, так звані однокрокові оцінки [43, 65]. Такі оцінки є першою ітерацією розв'язку рівняння максимальної вірогідності методом Ньютона – Рафсона. Нульовим наближенням у цьому методі береться довільна $\sqrt{\epsilon}$ -асимптотично конзистентна оцінка. Зручність такого підходу полягає у тому, що формули для оцінок виписуються явно і, крім того, доведення асимптотичної ефективності таких оцінок простіше ніж для ОМВ. Зазначимо, що для старту можна брати довільну ϵ -оцінку, асимптотичну нормальність якої (достатньо $\sqrt{\epsilon}$ -конзистентності) можна легко одержати, наприклад, за загальними теоремами з [85]. Зокрема, у роботі [72] для моделі, породженої спостереженнями ланцюга Маркова, було доведено $\sqrt{\epsilon}$ -конзистентність оцінок, які у свою чергу зручно використовувати для побудови однокрокових асимптотично ефективних оцінок.

2.2. Огляд літератури, присвяченої ЛАН

Основною перевагою концепції Ле Кама є те, що вона легко розповсюджується на різні моделі без зайвих структурних змін. Історично першою властивістю ЛАН була доведена Ле Камом для вибірки з незалежних однаково розподілених випадкових величин. Деталі цього доведення можна знайти у Теоремі II.1.1 і Теоремі II.3.1 [87]. Згодом властивість ЛАН було доведено для інших моделей. Так, у роботі [52] було доведено властивість ЛАН для експерименту, в якому неперервно спостерігається дифузійний процес, а в якості параметра виступає або сам знос, або параметр у ньому. За допомогою ЛАН у цій роботі було доведено асимптотичну ефе-

ктивність ОМВ і байєсівської оцінки. Також у цій роботі були побудовані однокрокові оцінки та доведена їх асимптотична ефективність.

Для моделі, де неперервно спостерігається лічильний процес, у роботі [89] було встановлено властивість ЛАН і з її допомогою доведено рівномірну асимптотичну нормальність, рівномірну збіжність моментів, асимптотичну ефективність ОМВ і оцінок Байєса параметра компенсатора.

У випадку дискретного спостереження дифузійного процесу властивість ЛАН досліджувалась в роботах [18, 25, 26].

Узагальнення доведення Ле Кама на марковські моделі відомі з літератури. Так, найзагальніший з таких результатів був запропонований в [28]. Цей результат, сформульований у термінах мартингальної теорії, був використаний у роботі [33] для встановлення ЛАН у випадку спостереження однорідного за часом крокового процесу Маркова без акумуляції стрибків і невідомим параметром генератора.

Інші варіанти загальних достатніх умов, за яких справджується властивість ЛАН у випадку залежних спостережень, досліджувались в [19, 42].

У роботі [29] властивість ЛАН була доведена для моделі в якій дискретно спостерігається напів-марковський процес з вбудованим марковським процесом відновлення. В цій моделі невідомим параметром розглядалися функція перехідної імовірності вбудованого процесу і умовний розподіл часу між стрибками.

Властивість ЛАН для моделей породжених ланцюгами Маркова досліджувалась в [69,70] (параметричні моделі) і [66] (непараметричні моделі).

Ще один клас моделей, що становить окремий інтерес для статистичних досліджень, складається з моделей, породжених спостереженнями з прямоючим до нуля кроком. Для дифузійних процесів такі дослідження

проводились в [23, 24, 45], процесів Леві в [1, 15, 58]. Одною з теоретичних переваг високої частоти спостережень є те, що вона дозволяє враховувати невеликий час наближення базової моделі. Завдяки цьому можна отримувати асимптотично ефективну оцінку. Це було досягнуто для дифузійних моделей в роботах [23, 24, 45].

Зупинимось окремо на результатах, присвячених моделям, породженим процесами Леві. Відомо, що процеси Леві відіграють ключову роль у різних галузях науки, зокрема у фізиці при дослідженні турбулентності, лазерного охолодження і в квантовій теорії поля [22, 67, 79], в інженерії при дослідженні мереж і черг [80], в економіці [4, 60, 71], актуарній математиці для розрахунку страхування і перестраховання ризиків, фінансовій математиці [62], біології [76] тощо. У сучасному моделюванні дослідники у галузях економіки і природничих наук все частіше стикаються з необхідністю розглядати моделі, основу випадковості яких становлять стрибки [7]. Наприклад, у класичній моделі фінансової математики, що моделює коливання ціни акцій, використовується геометричний броунівський рух. Однак війни, рішення світових банків або інша інформація може викликати несподіваний стрибок вартості. Для того, щоб змоделювати такий вплив несподіваного надходження інформації, використовуються стрибкові процеси.

У дисертаційній роботі розглядаються дві статистичні моделі. В першій з них зі сталим кроком \diamond спостерігається процес \diamond , що є розв'язком рівняння (1.1) і припущенням про те, що \diamond має "легкі" хвости. Одним з важливих класів процесів Леві, що задовольняють умовам, накладеним на шум, є так звані пом'якшені \diamond -стійкі процеси [68]. Такі моделі мають застосування у статистичній фізиці, зокрема для опису турбулентності на короткому часовому інтервалі [48, 63], економічних моделях стохастичної нестабільності [13, 14], інших моделях фінансової математики [8, 17, 46]

тощо.

У другій моделі, що розглядається в цій роботі, спостерігається процес Леві, заданий у формі (1.2), спостереження відбуваються з прямуючим до нуля кроком. Тут ϕ – локально ϕ -стійкий процес, а ψ – незалежний від нього процес Леві меншої активності ніж ϕ та інтерпретується як шум.

Властивість ЛАН статистичних моделей, що генеруються дискретними спостереженнями випадкового процесу з шумом Леві, була вивчена в основному у випадку, коли функція вірогідності (або щонайменше її головна частина) відома у деякому смислі [1, 3, 32, 44, 47]. У згаданих вище роботах розглядаються лише лінійні моделі, тобто такі, в яких спостерігається сам процес Леві, або спостерігається процес, що є розв'язком лінійного стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві (іншими словами, процес типу Орнштайна – Уленбека).

Доведення властивості ЛАН проводиться у два етапи. Спочатку доводиться теорема про достатні умови за яких справджується властивість ЛАН загальної моделі, в якій спостережуваним є процес Маркова, Теорема 2.5. Доведення цієї теореми аналогічне доведенню ЛАН для вибірки з незалежних однаково розподілених випадкових величин, зробленого Ле Камом. Головна відмінність між Теоремою 2.3 і Теоремою 13 [28] полягає у базових умовах, що робить Теорему 2.5 більш зручною для доведення властивості ЛАН моделі заданої рівнянням (1.1). Так, в [28] основні умови формулюються у термінах функцій

$$\sqrt{\frac{\phi_\theta(\theta + \psi, \theta, \theta)}{\phi_\theta(\theta, \theta, \theta)} - 1},$$

у той час, як у нашому підході припущення робляться про логарифмічну похідну по параметру від щільності, $\phi_\theta(\theta, \theta, \theta)$, і можуть бути ефективно перевірені, наприклад, у моделі, де ψ визначається за допомогою СДР зі

стрибками. Ще одна важлива відмінність полягає в тому, що весь підхід в [28] розроблений у припущенні, що логарифмічна функція вірогідності гладко залежить від параметра θ . Для моделі, де θ визначається за допомогою СДР зі стрибками, таке припущення може бути дуже жорстким. З цієї причини у дисертаційній роботі використовується припущення про регулярність експериментів, яке набагато м'якше і легко перевіряється порівняно з гладкістю логарифмічної функції вірогідності. Технічно умова регулярності полягає в θ_2 -диференційовності кореня густини перехідної імовірності, (див. точне визначення 1.2). Розглянемо докладніше відмінність нашої моделі від моделей, досліджених в [18, 25, 26]. У дифузійних моделях, досліджених в [25, 26], функція вірогідності строго додатна, тому її логарифм належить класу θ^1 відносно θ . Зокрема, в [18] робиться наступне структурне припущення:

$$\text{носій густини } \theta^\theta \text{ не залежить від } \theta, \tag{2.2}$$

що дає неперервну диференційовність за параметром логарифмічної функції вірогідності, розглядаючи відповідний носій як простір станів X . Однак, як показує приклад нижче, умова (2.2) істотно обмежує модель, задану рівнянням (1.1).

Приклад 2.1. Нехай θ – пом'якшений θ -стійкий процес з $\theta \in (0, 1)$, який має тільки додатні стрибки, такий, що

$$\theta(d\theta) = \theta(\theta) \theta^{-\theta-1} \mathbf{1}_{\theta>0} d\theta$$

з деякою досить гладкою θ такою, що $\theta(\theta) = \text{const} > 0$ в околі точки $\theta = 0$ і $\theta(\theta) \rightarrow 0$ досить швидко при $\theta \rightarrow \infty$. Тоді за теоремою про носій з [74], топологічний носій $\theta^\theta(\theta, d\theta)$ дорівнює $[\theta^\theta(\theta), \infty)$, де $\theta^\theta(\theta)$ значення у момент часу $\theta = \theta$ розв'язку задачі Коші

$$\theta'(\theta) = \theta_\theta(\theta(\theta)), \quad \theta(0) = \theta$$

Загалом, $\rho_\epsilon(\theta)$ залежить від θ ; наприклад, при $\rho_\epsilon(\theta) = \theta^\epsilon$ маємо $\rho'_\epsilon(\theta) = \epsilon\theta^{\epsilon-1}$. Оскільки топологічний носій $\rho'_\epsilon(\theta, d\theta)$ є замиканням носія густини перехідної імовірності $\rho_\epsilon(\theta, \theta', \theta)$, це доводить, що умова (2.2) порушується.

Це спостереження спонукало вилучити умову (2.2). У запропонованому підході не накладаються умови потраєкторної регулярності логарифмічної функції вірогідності, замість цього доводиться регулярність експерименту, що дозволяє не тільки довести нерівність Крамера – Рао, а ще, що більш важливо, є природною передумовою для версії Ібрагімова – Хасьмінського підходу Гаєка – Ле Кама вивчення асимптотичних властивостей моделі ([87], Глава II.3 і Глава III.1).

2.3. Огляд літератури присвяченої використанню числення Малявена у статистичних задачах

Для застосування Теорема 2.3 у доведенні властивості ЛАН першої з моделей, що розглядаються у цій роботі окрім регулярності експерименту потрібно довести наступне:

1. θ^ϵ обмеженість ρ_ϵ (логарифмічної похідної за параметром від густини перехідної імовірності ρ_ϵ).
2. Центральну граничну теорему.
3. Закон великих чисел.

У дисертаційній роботі на модель накладаються умови, за яких спостережуваний процес є ергодичним. Тому для перевірки третього пункту використовується ергодична теорема Біргофа – Хінчіна, а для другого

Теорема 18.5.3 [86] (Теорема 1.7). В умовах відповідних теорем основою проблемою залишається встановлення моментної оцінки для φ_{θ} .

Тому другим етапом доведення властивості ЛАН є встановлення властивостей функції φ_{θ} , яка фігурує в умовах Теореми 2.3, зокрема її φ_{θ} обмеженість. Для цього застосовується числення Малявена. З літератури добре відомо, що за допомогою числення Малявена можна одержати інтегральне представлення для $\varphi_{\theta}(t, \theta, \theta)$. У випадку дифузії ($\varphi_{\theta} = \varphi_{\theta}$) цей результат був представлений у [55] і [64]. Числення Малявена для процесів Леві є класичним і дуже зручним інструментом, започаткованим у роботах [10] і [9]. Однак, пряме використання такої техніки занадто складне для встановлення ЛАН у досліджуваних моделях. Справа у тому, що на відміну від класичного підходу (див. [9], [10]) густина перехідної імовірності $\varphi_{\theta}(t, \theta, \theta)$ сама по собі (яка типово трактується у смислі зворотнього перетворення Фур'є) не потрібна, а потрібне відношення $\partial_t \varphi_{\theta}(t, \theta, \theta) / \varphi_{\theta}(t, \theta, \theta)$. Щоб отримати φ_{θ} оцінки для цього співвідношення і головне, побудувати апроксимативну процедуру, достатньо одержати інтегральне представлення для такого відношення в якомога простішій формі. В основному з цією метою, а також щоб зробити виклад самодостатнім, у дисертаційній роботі вводиться проста версія числення Малявена, див. також конструкцію в стохастичному контексті у [15].

Зазвичай, числення Малявена, що використовується для аналізу чутливості, використовує пару операторів. Перший з них диференціальний оператор D , а другий спряжений $\varphi = D^*$, визначений на досліджуваному імовірнісному просторі. У роботі буде представлена конструкція, побудована за допомогою збурень “амплітуд стрибків”, яка є досить відомою з літератури (наприклад, [10], [9]) і має багато модифікацій (наприклад, [5], [11], і посилання до них). Ця конструкція модифікується під знаходження інтегральних представлень, які використовуються при

доведенні властивості ЛАН.

Інша частина дисертаційної роботи стосується дослідження достатніх умов, за яких статистична модель, задана спостереженнями процесу ϕ у формі (1.2), має властивість ЛАН відносно параметра $\theta = (\theta, \phi)^T \in \mathbb{R}^2$. У випадку спостережень з високою частотою дифузійного процесу за допомогою числення Малявена властивість ЛАН була доведена у [25, 26]. У такій моделі структура граничних експериментів виявляється досить простою (нормальна або умовно нормальна). Одною із теоретичних переваг вибірки із спостережень високої частоти є можливість враховувати малий час наближення до базової моделі, що у свою чергу дозволяє побудувати асимптотично ефективну оцінку. Це було реалізовано для дифузії в [45] та [24]. Однак навіть для дифузії у цих роботах не наведено результатів для моделей, що задаються нелінійними СДР. Для моделей, заданих процесом Леві з високою частотою спостережень (не кажучи вже про моделі, що задаються стохастичними диференціальними рівняннями керованими шумом Леві), відомо дуже мало результатів, що встановлюють властивість ЛАН. Причиною цього є те, що у цьому випадку точна формула перехідної імовірності навряд чи доступна. Зокрема, у роботі [56] описано явні результати, що стосуються дослідження властивості ЛАН з подальшим застосуванням її у задачах статистичного оцінювання у моделях, заданих процесами Леві, що спостерігаються з високою частотою. Так, якщо основний процес Леві або найбільш активна частина спостережуваного процесу є симетричним ϕ -стійким процесом, властивість ЛАН була доведена у [1] і [58]. Також у [2] було досліджено точну асимптотичну поведінку інформаційної матриці Фішера для тих самих моделей, що і у [1].

Повна статистична задача, поставлена в [1, 2], включає дослідження рівномірної по класу шумів властивості ЛАН, а також модель з трендом,

що не було реалізовано в [1, 2]. З цих робіт відомо, що у багатьох фінансових додатках ϕ є процесом Вінера, а ϕ представляє коливання, які закладені у механіці процесів продажу. У таких моделях ϕ може мати необмежену активність. В інших додатках ϕ може представляти прості коливання вартості активів. Тоді ϕ інтерпретується як нечасте надходження інформації про актив. У цьому випадку ϕ – це складний процес Пуассона.

У дисертаційній роботі, на відміну від згаданих вище, висновок про ЛАН робиться за досить м'яких умов на спостережуваний процес. Тому досліджувана у дисертаційній роботі модель може бути застосована до різноманітних статистичних експериментів, в яких спостерігається процес Леві без дифузійної компоненти і з необмеженою активністю. Зокрема, ця робота узагальнює результати [1, 2], оскільки від спостережуваного процесу вимагається, щоб міра Леві поводи́ла себе як міра, що відповідає ϕ -стійкому процесу лише в околі нуля, отже слабша за умову ϕ -стійкості спостережуваного процесу, накладену в [1, 2]. Завдяки високій частоті спостережень, запропонований у дисертаційній роботі, підхід є нечутливим відносно шуму ϕ і дозволяє формулювати властивість ЛАН, рівномірну по класу шумових процесів.

Нелінійна модель, керована шумом Леві, однак без параметра волатильності, з високою частотою спостережень вивчалась в [15]. Числення Малявена у цьому випадку аналогічне до застосованого у дослідженні властивості ЛАН моделі зі сталим кроком спостережень, оскільки

$$\phi^{-1/\phi} \quad d \quad (\phi)$$

$$x \rightarrow x + \Delta x$$

Однак, в інтегральному представленні для x , зокрема фігурує похідна за параметром від процесу $x, \partial x / \partial \theta$, яка має важкі хвости навіть у випадку процесу типу Орнштайна – Уленбека. У роботі [15] ця проблема вирішувалась жорсткими умовами на знос. Треба зазначити, що проблема з $\partial x / \partial \theta$ виникає і тоді, коли розглядається параметр перед шумом (параметр волатильності). Підхід, запропонований у дисертаційній роботі, дозволяє розглядати параметр волатильності, а також розширити клас досліджуваних моделей на випадок нелінійних СДР і без зайвого навантаження на знос.

2.4. Результати дисертації

В першому змістовному розділі дисертації за допомогою числення Малаєна для процесів, заданих стохастичними диференціальними рівняннями, керованими шумом Леві без дифузійної компоненти будується інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності, а також доводиться регулярність стохастичного експерименту. Основні результати цього розділу такі:

Розглядається процес x , що є розв’язком рівняння (1.1), в якому x – процес Леві без дифузійної компоненти, тобто

$$dx = \mu x dt + \int_0^{\infty} \theta^\alpha (dW_\theta + \nu d\theta) + \int_0^1 \theta^\alpha (dW_\theta + \nu d\theta).$$

Тут ν - пуассонова точкова міра з інтенсивністю $d\nu = \nu(d\theta)$, а $\nu(d\theta, d\theta) = \nu(d\theta, d\theta) - d\nu \nu(d\theta)$ - відповідна компенсована міра. Крім цього про міру ν припускається наступне:

Н. (i) для деякого $\nu_0 > 0$,

$\nu \geq 1$

$$\nu^{2+\nu}(\theta\theta) < \infty,$$

(ii) для деякого $\nu_0 > 0$, звуження міри ν на $[-\nu_0, \nu_0]$ має додатну густину $\nu \in \nu^2([- \nu_0, 0) \cup (0, \nu_0])$;

(iii) існує ν_0 таке, що

$$|\nu'(\theta)| \leq \nu_0 |\nu|^{-1}(\theta), \quad |\nu''(\theta)| \leq \nu_0 |\nu|^{-2}(\theta), \quad |\theta| \in (0, \nu_0];$$

(iv)

$$\left(\log \frac{1}{\square} \right)^{-1} \left(\nu \left\{ \theta : |\theta| \geq \square \right\} \right) \rightarrow \infty, \quad \square \rightarrow 0.$$

Теорема 2.3. I. Нехай $\nu \in \nu^{2,0}(\mathbb{R} \times \Theta)$, має обмежені похідні $\partial_\nu \nu_\nu, \partial^2_{\nu\nu\nu}$.

Тоді марківський процес ν визначений рівнянням (1.1) має густину перехідної імовірності $\nu_\nu(\theta, \theta, \theta)$ відносно міри Лебега, яка допускає інтегральне представлення

$$\nu_\nu(\theta, \theta, \theta) = E_\nu^\nu[\mathbb{E}_\nu \mathbf{1}_{\theta > \theta}], \quad \nu > 0, \quad \theta, \theta \in \mathbb{R}.$$

Функція $\nu_\nu(\theta, \theta, \theta)$ неперервна по $(\theta, \theta, \theta, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$.

II. Нехай $\nu \in \nu^{3,1}(\mathbb{R} \times \Theta)$ і має обмежені похідні $\partial_\nu \nu, \partial^2_{\nu\nu}, \partial^2_{\nu\nu\nu}$,

$$\partial_{\theta}^3, \partial_{\theta}^4$$

$$|\partial_{\theta}(\theta)| + |\partial_{\theta}^2(\theta)| \leq \theta(1 + |\theta|), \quad \theta \in \Theta, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Тоді густина перехідної імовірності має похідну $\partial_{\theta} \theta_i(\theta, \theta, \theta)$, яка є неперервною по $(\theta, \theta, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$.

III. За умов твердження II, справджується

$$\partial_{\theta} \theta_i(\theta, \theta, \theta) = \theta_i(\theta, \theta, \theta) \theta_i(\theta, \theta, \theta),$$

де

$$\theta_i(\theta, \theta, \theta) = \begin{cases} E^{\theta, \theta} \Xi^1, & \theta_i(\theta, \theta, \theta) > 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Зауваження 2.1. Із тверджень II і III, випливає, що логарифм густини перехідної імовірності має неперервну похідну відносно θ на відкритій підмножині $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$ визначеній нерівністю $\theta_i(\theta, \theta, \theta) > 0$ і на цій множині допускає інтегральне представлення

$$\partial_{\theta} \log \theta_i(\theta, \theta, \theta) = E^{\theta, \theta} \Xi^1.$$

Другий результат розділу стосується базової властивості статистично-го експерименту

$$(R^{\theta}, B(R^{\theta}), P^{\theta}_{\theta, \{\theta_0\}_{\theta=1}}, \theta \in \Theta), \tag{2.3}$$

породженого спостереженнями марківського процесу θ з $\theta_0 = \theta$ в моменти часу $t_1 < \dots < t_n$. Експеримент (2.3) є регулярним, якщо функція $\theta_i(\theta, \theta_0, \cdot)$ - неперервно диференційовна в $\theta_2(X, \theta)$ (див. розгорнуте означення 1.2).

Теорема 2.4. Нехай умови твердження II Теорема 2.3 виконано і $\theta \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{N}, 0 < t_1 < \dots < t_n$ - фіксовані.

Тоді статистичний експеримент (2.3) - регулярний. Відповідна інформація Фішера дорівнює

$$I(\theta) = \sum_{\theta} E^{\theta} \left(\theta_i(\theta, \theta_0, \cdot) \right)^2,$$

де $\theta_0 := 0$.

$\theta = 1$

Оскільки в багатьох статистичних задачах виникає необхідність у другій похідній по параметру від логарифму густини перехідної імовірності θ , в цьому ж розділі знайдено відповідне інтегральне представлення. Зокрема таке представлення дозволяє побудувати однокрокові асимптотично ефективні оцінки.

Другий змістовний розділ присвячений встановленню достатніх умов за яких справджується властивість ЛАН у випадку, коли процес задається рівнянням (1.1), а спостереження відбуваються зі сталим кроком θ .

Припускається, що міра Леві θ , задовольняє умовам:

- $\theta(\theta\theta) = \theta(\theta)\theta\theta$, і для деякого $\theta > 0$, $\theta \in (0, 2)$

$$\theta(\theta) \sim \theta/\theta^{\theta-1}, \quad \theta \rightarrow 0;$$

- Для деякого $\theta > 0$ $\int_{|\theta| \geq 1} |\theta|^{2+\theta} \theta(\theta\theta) < \infty$,

- $\theta \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, існує $\theta_0 > 0$ таке що функція

$$\theta(\theta) = \frac{|\theta\theta'(\theta)|}{\theta(\theta)}$$

обмежена на $\{|\theta| \leq \theta_0\}$ і $\int_{|\theta| > \theta_0} \theta^{2+\theta}(\theta)\theta(\theta\theta) < \infty$.

Доведення властивості ЛАН для описаної вище моделі проводиться в два етапи. Спочатку доводиться теорема про достатні умови ЛАН для загальної моделі, в якій спостережуваним є процес Маркова:

Вважаємо, що існує густина перехідної імовірності $\theta_\theta(\theta, \theta, \theta)$ відносно θ -скінченної міри $\theta(\theta\theta)$. За марківською властивістю відношення функцій вірогідності

$$\theta_\theta(\theta, \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})$$

$$\vartheta_\vartheta(\vartheta_0, \vartheta) = \prod_{\vartheta=1}^{\infty} \frac{\vartheta_\vartheta(\vartheta_0; \vartheta_{\vartheta(\vartheta-1)}, \vartheta_{\vartheta\vartheta})}{\vartheta_\vartheta(\vartheta; \vartheta, \vartheta)} \quad *$$

Припускаємо, що експеримент є регулярним. Результат формулюється в термінах функцій:

$$\vartheta_\vartheta(\vartheta; \vartheta, \vartheta) = \sqrt{\vartheta_\vartheta(\vartheta; \vartheta, \vartheta)} \quad \text{і} \quad \vartheta_\vartheta(\vartheta; \vartheta, \vartheta) = 2\vartheta_\vartheta(\vartheta; \vartheta, \vartheta) \sqrt{\vartheta_\vartheta(\vartheta; \vartheta, \vartheta)}$$

Теорема 2.5. Нехай для деякої послідовності не випадкових

додатньо визначених матриць $\{\vartheta(\vartheta) = \vartheta(\vartheta, \vartheta_0), \vartheta \in \mathbb{N}\}$

$$1. \quad \vartheta_\vartheta := \vartheta(\vartheta) \sum_{\vartheta=1}^{\infty} \vartheta_\vartheta(\vartheta_0; \vartheta_{\vartheta(\vartheta-1)}, \vartheta_{\vartheta\vartheta}), \quad \vartheta_0 = \vartheta, \quad \vartheta \geq \mathbb{N}$$

асимптотично нормальна відносно \mathbb{P}^{ϑ_0} з параметрами ϑ і Σ .

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \text{Elim} \vartheta$$

$$\mathbb{E}^{\vartheta_0} \sum_{\vartheta \rightarrow \infty} \vartheta(\vartheta) \vartheta_\vartheta(\vartheta_0; \vartheta_{\vartheta(\vartheta-1)}, \vartheta_{\vartheta\vartheta})$$

$$= 0.$$

$$2. \quad \limsup_{\vartheta \rightarrow \infty} \sum_{\vartheta < \vartheta_0} \vartheta(\vartheta) \vartheta_\vartheta(\vartheta_0; \vartheta_{\vartheta(\vartheta-1)}, \vartheta_{\vartheta\vartheta})$$

$$\vartheta(d\vartheta) = 0.$$

2

Тоді послідовність статистичних моделей має властивість ЛАН в точці ϑ_0 .

Твердження Теорем 2.3 – 2.5 дозволяють довести таке:

Теорема 2.6. Нехай ϑ є розв'язком рівняння (1.1), в якому ϑ задовольняє описані вище умови. Припустимо наступне:

- ϑ має обмежені похідні

$$\partial \vartheta, \partial^2 \vartheta, \partial^3 \vartheta, \partial^4 \vartheta, \partial^5 \vartheta, \partial^6 \vartheta, \partial^7 \vartheta, \partial^8 \vartheta, \partial^9 \vartheta, \partial^{10} \vartheta$$

- $|\varphi(\theta)| + |\partial_\theta \varphi(\theta)| \leq \varphi(1 + |\theta|), \quad \theta \in \Theta, \quad \varphi \in \mathcal{R},$
- $\overline{\lim}_{|\theta| \rightarrow +\infty} \varphi(\theta) < 0, \quad \varphi \in \Theta.$

Тоді послідовність статистичних моделей має властивість ЛАН.

Після вибору методу оцінювання і побудови оцінки постає питання про ефективність останньої. В третьому змістовному розділі для описаної вище статистичної моделі будується алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання. Точне знаходження інформації Фішера $\varphi(\theta_0)$ унеможливується з наступних причин:

- інваріантна міра процесу φ невідома,
- для функції φ відоме лише інтегральне зображення (див. формулу (3.37)),
- усереднення відносно розподілу моста, що відповідає процесу φ є занадто складним для реалізації.

Для вирішення цієї проблеми пропонується наступна схема. Спочатку для заданої точності $\Delta > 0$ вибирається номер $\theta_0 = \theta_0(\Delta)$ такий, що

$$\left(\begin{array}{l} \varphi(\theta_0) - E^{\theta_0} \\ \varphi(\theta_0, \varphi_{\theta\theta}, \varphi_{\theta(\theta+1)}) \end{array} \right)^2 < \Delta, \quad (2.4)$$

потім за формулою для φ (див. (3.37)) та нерівністю Йенсена для умовного математичного сподівання записується оцінка

$$E^{\theta_0} \left(\varphi(\theta_0, \varphi_{\theta\theta}, \varphi_{\theta(\theta+1)}) \right)^2 \leq E^{\theta_0} \Xi_{\varphi}(\theta_0)^2,$$

з означенням $\overline{\varphi_\varepsilon(\varphi, \varphi_0)} \varphi_\varepsilon(\varphi)$ робимо висновок про ефективність методу і втраті випадковості при умовному усередненні.

Запропонований алгоритм ілюструється на конкретному прикладі.

Друга модель, для якої в цій роботі доводиться властивість ЛАН, наступна. Процес Леві, заданий у формі (1.2) спостерігається в точках $\{t_\nu, \nu = 0, 1, \dots, n\}$ зі змінним інтервалом між спостереженнями φ_ν ; припускаємо, що $\varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$, так, що спостереження процесу φ_ν мають високу частоту. Тут φ – локально φ -стійкий процес, а φ – незалежний від нього процес Леві меншої активності ніж φ і розглядається як заважаючий шум.

Припустимо, що в представленні Леві – Хінчина процесу φ ,

$$E \varphi^{\varphi \varphi \varphi} = \varphi^{\varphi(\varphi)},$$

φ має вигляд

$$\varphi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i \varphi \varphi} - 1 - i \varphi \varphi 1_{|\varphi| \leq 1} \right) \varphi(\varphi \varphi). \quad (2.5)$$

Про міру Леві φ процесу φ припускаємо наступне

H1. $\varphi(\varphi \varphi) = \varphi(\varphi) \varphi \varphi$ і для деякого $\varphi \in (0, 2)$

$$\varphi(\varphi) \sim \begin{cases} \varphi_+ / |\varphi|^{-\varphi-1}, & \varphi \rightarrow 0+, \\ \varphi_- / |\varphi|^{-\varphi-1}, & \varphi \rightarrow 0-, \end{cases} \quad \varphi_- + \varphi_+ > 0.$$

H2. $\varphi \in \varphi^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, існує $\varphi_0 > 0$ таке, що функція

$$\varphi(\varphi) = \frac{|\varphi \varphi'(\varphi)|}{\varphi(\varphi)}$$

обмежена на множині $\{|\varphi| \leq \varphi_0\}$ і задовольняє

$$\int_{|\varphi| > \varphi_0} \varphi^{2+\varphi}(\varphi) \varphi(\varphi \varphi) < \infty$$

для деякого $\varphi > 0$.

Зазначимо, що умова Н2 не вимагає від $\psi(\phi)$ обмеженості для “великих” ϕ ; ця умова справедлива для широкого класу процесів ψ таких як “подібні до стійких” процеси Леві з

$$\psi(\phi) = \psi(\phi) \psi_{\phi, \phi_{\pm}}(\phi),$$

де $\psi(\phi) \rightarrow \psi, |\phi| \rightarrow 0$.

Приклад 2.2. (Пом’якшкний ψ -стійкий процес). Наприклад, при

$$\psi(\phi) = \psi \phi^{-\sqrt{1+\phi^2}}, \quad \psi(\phi) = \psi \phi^{-\phi^2}, \quad \text{або } \psi(\phi) = \psi \phi^{-|\phi|},$$

умови Н1 і Н2 виконані, хоча $\psi(\phi)$ не є обмеженою. Приклад

2.3. (Гладко затухаючий ψ -стійкий процес). Нехай

$$\psi(\phi) = \psi(\phi) / \phi^{\phi-1} 1_{[-\phi_1, \phi_1]}(\phi), \quad \phi_1 > 0,$$

де ψ неперервна на \mathbb{R} , $\phi > 0$ при $\phi \in [-\phi_1, \phi_1]$ така, що $\psi(\phi) \rightarrow \psi$ коли $\phi \rightarrow 0$ і ψ гладко зануляється поза інтервалом $[-\phi_1, \phi_1]$ в такий спосіб, що функція $|\psi(\phi) / \psi'(\phi)| / \psi(\phi)$ є локально обмеженою і крім того функція $\{|\psi(\phi) / \psi'(\phi)| / \psi(\phi)\}^{\pm} \psi(\phi) - \psi \phi$ -інтегровна на множині $\{|\phi| \geq \phi_0\}$ для деякого $\phi > 0$ і $\phi_0 > 0$. Тоді умови Н1, Н2 виконані. Зазначимо, що $\psi(\phi) \leq |\psi(\phi) / \psi'(\phi)| / \psi(\phi) + \phi + 1$. Частковим випадком функції ψ є

$$\psi(\phi) = \phi^{-1/(\phi+\phi_1)-1/(\phi_1-\phi)} 1_{[-\phi_1, \phi_1]}(\phi).$$

Нагадаємо, що для ψ -стійкого процесу його міра Леві має густину

$$\psi_{\phi, \phi_{\pm}}(\phi) = \begin{cases} \psi_+ / \phi^{\phi-1}, & \phi > 0, \\ \psi_- / \phi^{\phi-1}, & \phi < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Позначимо

$$\psi_{\phi} = \psi \int_{\phi^{-1} \phi < |\phi| \leq 1} \psi(\phi \theta) d\theta. \quad (2.7)$$

*

Через φ^{\pm} позначаємо φ -стійкий процес, чия характеристична функція має вигляд (2.5) з мірою Леві (2.6), де φ_+, φ_- задані умовою Н1. Нехай також $\varphi_{\varphi, \varphi}$ – густина розподілу φ_1^{\pm} .

Для такої моделі в четвертому змістовному розділі доведено такий результат

Теорема 2.7. Нехай φ задовольняє умови n_1, n_2 , а φ – процес Леві, незалежний від φ і такий, що

$$\varphi^{-1/\varphi} \varphi_{\varphi} \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow 0 \tag{2.8}$$

за імовірністю. У випадку $\varphi \in (1, 2)$, додатково припускаємо, що

$$\varphi^{-1/2} \varphi^{1/\varphi-1} \rightarrow 0.$$

Тоді в кожній точці $\varphi_0 \in \Theta$ справджується властивість ЛАН з

$$\varphi(\varphi) = \varphi^{-1/2} \begin{pmatrix} \varphi^{1/\varphi-1} & \varphi_{\varphi, \varphi} \varphi^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma(\varphi) = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(\varphi) & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

де

$$\Sigma_{11}(\varphi_0) = \varphi^{-2} \left[\begin{matrix} \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) \\ \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) \end{matrix} \right]^2$$

$$\Sigma_{22}(\varphi_0) = \int_0^{\mathcal{H}} \left[\begin{matrix} \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) \\ \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) \end{matrix} \right]^2 \left(1 + \frac{\varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi)}{\varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi)} \right) d\varphi$$

Таким чином Теорема 2.7 узагальнює результат, одержаний в [1, 2]. Зокрема від основного процесу φ вимагається лише локальна φ -стійкість, властивість ЛАН доводиться рівномірно по класу шумів (справджується для всіх процесів φ , задовольняючих умову (2.8)), модель є двопараметричною (присутній тренд).

РОЗДІЛ 3

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПОХІДНИХ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ФУНКЦІЇ ВІРОГІДНОСТІ І РЕГУЛЯРНІСТЬ СТАТИСТИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТА

Відомо, що перевірка властивості ЛАН у випадку коли функцію вірогідності не можна виписати явно, як правило є важкою задачею. У статистичних задачах, в яких виникає необхідність досліджувати властивості функції вірогідності іноді достатньо інтегрального представлення для похідної по параметру

$$\square_{\theta} \varphi_{\theta}(\theta; \theta, \theta) = \varphi_{\theta}(\theta; \theta, \theta) \varphi_{\theta}(\theta; \theta, \theta).$$

У випадку дифузії таке представлення було одержане в роботах [25,26] за допомогою числення Малявена, далі за допомогою цього представлення була доведена властивість ЛАН.

В цьому розділі пропонується версія числення Малявена для функціоналів від пуассонових точкових мір, за її допомогою одержується інтегральне представлення для логарифмічної похідної φ_{θ} , а вже інтегральне представлення дає можливість довести довести регулярність статистичного експерименту і обмеженість моментів φ_{θ} .

3.1. Збурення випадкових пуассонових мір і відповідні диференціальні оператори

Нехай ν - пуассонова точкова міра, з мірою інтенсивності $d\nu = \nu(d\nu)$, $\nu(d\nu, d\nu) = \nu(d\nu, d\nu) - d\nu \nu(d\nu)$ - відповідна компенсована пуассонова міра. Крім того, припускаємо, що ν задовольняє наступним умовам:

Н. (i) для деякого $\delta > 0$,

$$\int_{|\nu| \geq 1} \nu^{2+\delta}(\nu) < \infty,$$

(ii) для деякого $\delta_0 > 0$, звуження ν на $[-\delta_0, \delta_0]$ має додатню густину $\nu \in \nu^2([-\delta_0, 0) \cup (0, \delta_0])$;

(iii) існує δ_0 таке, що

$$|\nu'(\nu)| \leq \delta_0 |\nu|^{-1} \nu(\nu), \quad |\nu''(\nu)| \leq \delta_0 \nu^{-2} \nu(\nu), \quad |\nu| \in (0, \delta_0];$$

(iv)

$$\left(\log \frac{1}{\square} \right)^{-1} \left(\nu : |\nu| \geq \square \right) \rightarrow \infty, \quad \square \rightarrow 0.$$

Нехай $\square : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ - ν^2 -функція з обмеженою похідною. Позначимо $\nu_i(\nu)$, $\nu \in \mathbb{R}$ - значення в момент часу $\nu = i$ розв'язку задачі Коші

$$\nu'(\nu) = \square(\nu(\nu)), \quad \nu(0) = \nu.$$

Тоді $\{\nu_i, \nu \in \mathbb{R}\}$ - група перетворень \mathbb{R} , а $\partial_\nu \nu_i(\nu)|_{\nu=0} = \square(\nu)$.

Позначимо через \mathcal{O} - простір локально скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, тобто сім'ю всіх множин $\square \subset \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ таких, що для довільних $\square > 0$, $\delta > 0$, $\delta > 0$ множина

$$\square \cap [0, \delta] \times \{ \nu : \square < |\nu| < \delta \}$$

є скінченною. Такий простір природньо наділений грубою топологією (vague topology); тобто, мінімальною топологією, відносно якої є непе-

першим довільне відображення виду

$$\square \mapsto \sum_{(\theta, \varphi) \in \square} \varphi(\theta, \varphi),$$

тут $\varphi: \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ неперервна і зосереджена на множині виду $[0, \varphi_0] \times \{\varphi: \varphi < \varphi_0 / \varphi < \varphi_0\}$. Це є природній простір станів, якщо випадкову точкову міру φ розглядати як випадковий елемент. Позначимо через \mathbb{P}_φ - розподіл φ в $(0, B(0))$. Визначимо тепер початковий імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з $(0, B(0), \mathbb{P}_\varphi)$ і покладемо $\varphi(\varphi) = \varphi$. Така постановка не обмежує загальності, при цьому кожна $\varphi \in \mathcal{O}$ є локально скінченною колекцією точок (θ, φ) , де $\theta \in \mathbb{R}^+$ - "момент стрибка", а $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - "амплітуда стрибка".

Для заданих $\varphi_0 > 0$ і \square визначимо $\{Q_\varphi, \varphi \in \mathbb{R}\}$, групу перетворень простору конфігурацій \mathcal{O} , наступним чином. Перетворення Q_φ переводить конфігурацію φ в колекцію точок виду

$$\begin{cases} (\theta, \varphi_\varphi(\theta)), & (\theta, \varphi) \in \varphi \text{ і } \theta \leq \varphi; \\ (\theta, \varphi), & (\theta, \varphi) \in \varphi \text{ і } \theta > \varphi. \end{cases}$$

Тоді Q_φ перетворює φ в пуассонову точкову міру φ_φ ,

$$\varphi_\varphi(\varphi \times \varphi) = \varphi \left(\varphi \cap [0, \varphi] \right) \times \varphi^{-1}(\varphi) + \varphi \left(\varphi \cap [\varphi, \infty) \right) \times \varphi, \\ \varphi \in B(\mathbb{R}_+), \varphi \in B(\mathbb{R}),$$

при цьому міра інтенсивності для φ_φ має вид

$$\mathbf{1}_{\theta \leq \varphi} d\varphi[\varphi \circ \varphi_\varphi^{-1}](d\varphi) + \mathbf{1}_{\theta > \varphi} d\varphi \varphi(d\varphi). \tag{3.1}$$

Зафіксуємо $\varphi_1 \in (0, \varphi_0)$, де φ_0 береться з умови Н (ii). Далі вибираємо функцію \square , що фігурує в означенні $\varphi_\varphi, \varphi \in \mathbb{R}$ таким чином, щоб

$$\square(\varphi) = \begin{cases} \varphi^2, & \varphi \leq \varphi_1; \\ 0, & \varphi \geq \varphi_0 \end{cases}.$$

Тоді міра інтенсивності (3.1) має густину відносно $d\theta$ $\theta(d\theta)$ і рівну

$$\theta_{\theta, \theta}(\theta, \theta) = \mathbf{1}_{\theta \leq \theta} \theta_{\theta}(\theta) + \mathbf{1}_{\theta > \theta}, \tag{3.2}$$

де

$$\theta_{\theta}(\theta) = \frac{d[\theta \circ \theta_i]^{-1}}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{\theta(\theta^{-1}(\theta))} \frac{\theta(\theta^{-1}(\theta))}{\theta(\theta)},$$

а

$$\theta_{\theta}(\theta) := \partial_{\theta} \theta_{\theta}(\theta) = \exp \int_0^{\theta} \theta'(\theta_i(\theta)) d\theta.$$

За побудовою, $\theta_{\theta}(\theta) \equiv \theta, \theta \in \mathbb{R}$, якщо $|\theta| \geq \theta_0$. З іншого боку, для довільного заданого $\theta \in \mathbb{R}$ існує $\theta(\theta) > 0$ таке, що

$$\theta_{\theta}(\theta) = \left(\frac{1}{\theta - \theta} \right)^{-1} = \frac{\theta}{1 - \theta\theta}, \quad |\theta| \leq |\theta|, \quad |\theta| \leq \theta(\theta).$$

Тому існує $\theta(\theta) \in (0, \theta(\theta))$, для якого

$$\frac{\theta_{\theta}(\theta)}{\theta} \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right], \quad |\theta| \leq |\theta|, \quad |\theta| \leq \theta(\theta). \tag{3.3}$$

Із співвідношення $\theta^{-1} = \theta_{-}$, безпосередньо випливає, що

$$\theta_{\theta}(\theta^{-1}(\theta)) = \theta(|\theta|), \quad \theta \rightarrow 0.$$

Використовуючи (3.3) і Н (iii), одержимо при $|\theta| \leq \theta(\theta)$:

$$\theta(\theta^{-1}(\theta)) - \theta(\theta) = \int_0^{\theta} \theta'(\theta_i^{-1}(\theta)) \theta_i^{-1}(\theta) d\theta \leq 2|\theta| \int_0^{\theta} \theta'(\theta_i(\theta)) d\theta$$

З умови Н(iii) виводимо, для деякого $\theta_2 > 0$ і $\theta > 1$,

$$\theta(\theta\theta) \leq \theta\theta(\theta), \quad \theta \in [1/2, 2], \quad |\theta| \leq \theta_2.$$

Із сказаного вище випливає, що для заданого θ функція $\log \theta_{\theta}$ - неперервна, прямує до нуля при $|\theta| \geq \theta_0$ і справджує рівність

$$\log \theta_{\theta}(\theta) = \theta(|\theta|), \quad \theta \rightarrow 0.$$

Звідси маємо

$$\frac{1 - \varphi_{\theta, \theta}(\varphi, \varphi) / d\varphi\varphi(d\varphi) + \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \frac{\log^2 \varphi_{\theta, \theta}(\varphi, \varphi)}{1 + \log^2 \varphi_{\theta, \theta}(\varphi, \varphi)} d\varphi\varphi(d\varphi) < \infty$$

/log $\varphi_{\theta, \theta}$
/≥log 2

Застосувавши критерій Скорохода для абсолютно неперервних розподілів (Теорема 1.1) до пуассонових точкових мір, виводимо наступне.

Твердження 3.1. Розподіл $P_{\theta, \theta}$ елемента θ в $(O, B(O))$ є абсолютно неперервним відносно P_{θ} і

$$\frac{dP_{\theta, \theta}}{dP_{\theta}}(\varphi) = \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \log \varphi_{\theta}(\varphi) \varphi(d\varphi, d\varphi) + \int_{\mathbb{R}} (1 - \varphi_{\theta}(\varphi) + \log \varphi_{\theta}(\varphi)) \varphi(d\varphi) \right\}. \quad (3.4)$$

Тому перетворення $Q_{\theta} : \Omega \rightarrow \Omega$ породжує відображення $\vartheta_0(\Omega, F, P)$ в себе за наступним правилом (залишаємо той самий символ Q_{θ} для цього відображення):

$$Q_{\theta} \vartheta(\varphi) = \vartheta(Q_{\theta} \varphi), \quad \vartheta \in \vartheta_0(\Omega, F, P).$$

Пряме обчислення показує, що для кожного $\vartheta = 0$

$$\partial_{\theta} \vartheta_{\theta}(\varphi) / \vartheta=0 = - \frac{(\vartheta(\varphi) \square(\varphi))'}{\vartheta(\varphi)} =: \vartheta'(\varphi).$$

Дотого ж

$$\left(\frac{\vartheta_{\theta}(\varphi) - 1}{\vartheta(\varphi)} \right)^2 \vartheta(d\varphi) \rightarrow 0, \quad \vartheta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Оскільки $\vartheta_{\theta}(\varphi) = 1, \vartheta \geq \vartheta_0$, останнє співвідношення і (3.4) дають

$$\frac{\vartheta_{\theta}(\varphi) - 1}{\vartheta} \int_{\mathbb{R}} \vartheta'(\varphi) \varphi(d\varphi, d\varphi) \text{ в } \vartheta_2(\Omega, F, P), \quad \vartheta \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Доведення співвідношень (3.5) і (3.6). Позначимо

$$\vartheta_{\theta} = \int_{\mathbb{R}} (1 - \vartheta_{\theta}(\varphi) + \log \vartheta_{\theta}(\varphi)) \vartheta(d\varphi) + \int_{\mathbb{R}} \log \vartheta_{\theta}(\varphi) \vartheta(d\varphi, d\varphi).$$

Достатньо показати, що

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E \left(\int_0^1 \left| \epsilon^{-1} \phi_\epsilon - \int_0^1 \log \phi_\epsilon \right|_{\epsilon=0}^2 (d\phi, d\phi) \right) = 0 \quad (3.7)$$

і існує стала ϵ_0 така, що для довільного $\epsilon > 4$

$$E(\epsilon^{-1} \phi_\epsilon)^2 + E \text{ch}(\phi_\epsilon) \leq \epsilon. \quad (3.8)$$

Тоді з огляду на очевидні (не)рівності $\int_0^1 \phi_\epsilon^{-1} = \int_0^1 \frac{1}{\phi_\epsilon} \leq 2 \text{ch}(\phi_\epsilon) \frac{\epsilon}{\epsilon}$, вираз $\epsilon^{-1}(\phi_\epsilon - 1)$ є рівномірно неперервним в ϕ_2 і прямує до $\int_0^1 \phi_\epsilon / \epsilon = 0$ за імовірністю, що приводить до (3.5).

Покажемо, що справджується (3.7). З рівності $\int_0^1 \phi_\epsilon / \epsilon = 0 = \int_0^1 \log \phi_\epsilon / \epsilon = 0$ одержимо

$$E \left(\int_0^1 \left| \epsilon^{-1} \phi_\epsilon - \int_0^1 \log \phi_\epsilon \right|_{\epsilon=0}^2 (d\phi, d\phi) \right) \leq 2 \epsilon \int_{|\phi| \leq \epsilon_0} \left(\epsilon^{-1} \log \phi_\epsilon(\phi) - \int_0^1 \log \phi_\epsilon(\phi) / \epsilon = 0 \right)^2 / \epsilon^{\epsilon-1} d\phi + 2 \epsilon^2 \int_{|\phi| \leq \epsilon_0} \left(\epsilon^{-1} (\phi_\epsilon(\phi) - 1) - \int_0^1 \phi_\epsilon(\phi) / \epsilon = 0 \right)^2 / \epsilon^{\epsilon-1} d\phi. \quad (3.9)$$

Нехай $|\phi| < \epsilon_0$. Тоді існують сталі ϵ_1 і ϵ_2 такі, що

$$\epsilon^{-1} \log \phi_\epsilon(\phi) - \int_0^1 \log \phi_\epsilon(\phi) / \epsilon = 0 \leq \epsilon_1^2 \log \phi_\epsilon(\phi) / \epsilon = 0 \leq \epsilon_2^2 \epsilon.$$

Аналогічно маємо

$$\epsilon^{-1} (\phi_\epsilon(\phi) - 1) - \int_0^1 \phi_\epsilon(\phi) / \epsilon = 0 \leq \epsilon_1^2 \phi_\epsilon(\phi) / \epsilon = 0 \leq \epsilon_2^2 \epsilon.$$

Отже права частина (3.9) не перевищує

$$\frac{2 \epsilon^2 \epsilon}{\epsilon^2} \int_{|\phi| \leq \epsilon_0} / \epsilon^{\beta-\epsilon} d\phi + \epsilon \int_{|\phi| \leq \epsilon_0} / \epsilon^{1-\epsilon} d\phi,$$

що дає (3.7).

Покажемо тепер, що справджується (3.8). Зазначимо, що для стохастичного інтеграла

$$E \exp \left\{ \int_0^R \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right) \right\} = \exp \left\{ \int_0^R \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right) \right\} - 1$$

$$d\theta \left(\frac{d\theta}{\theta} \right)$$

Тоді $E \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right) = \exp \left\{ \int_0^R \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right) \right\} - 1$. Звід-

си виводимо обмеженість $E \ln(\theta)$. Далі $E \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right)$ є також обмеженим оскільки за нерівністю Буркхольдера – Ганді

$$E \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right)^8 \leq E \left(\int_0^R \left(\frac{1}{\theta} \left(\frac{d\theta}{\theta} \right) \right) \right)^8 + E \left(\int_0^R \left(\frac{1}{\theta} \log \theta \right)^2 \right)^4 + E \left(\int_0^R \left(\frac{1}{\theta} \log \theta \right)^8 \right)$$

Права частина останньої нерівності обмежена, внаслідок

$$\frac{1}{\theta} (1 - \theta) \leq \frac{1}{\theta} \log \theta \leq \frac{1}{\theta} \log \theta$$

Тож (3.8) доведено. □

Означення 3.1. . Функціонал $\phi \in \mathcal{D}_2(\Omega, F, P)$ називається стохастично диференційовним, якщо існує $\mathcal{D}_2(\Omega, F, P)$ -границя

$$\hat{D}\phi = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (Q(\phi + h) - \phi) \tag{3.10}$$

Замикання D оператора \hat{D} , визначене внаслідок (3.10), називається стохастичною похідною. Спряжений оператор $\phi = D^*$ називається оператором дивергенції, або розширеним стохастичним інтегралом.

Зауваження 3.1. З (3.11) і (3.17) приведених нижче, $\text{dom}(D)$ є щільною в $\mathcal{D}_2(\Omega, F, P)$, тому ϕ визначений. Крім того, за третім пунктом Твердження

3.2 нижче $\text{dom}(\delta)$ - щільна в $\mathcal{D}_2(\Omega, F, P)$, отже \hat{D}

- замкнений. Оператор δ також є замкненим як спряжений до замкненого за Теоремою VIII.1 [73]. В наступному твердженні зібрано основні властивості операторів D, δ .

Твердження 3.2. 1. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ має обмежені похідні і $\varphi \in \text{dom}(D)$, $\delta = \overline{1, \delta}$.

Тоді $\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_d) \in \text{dom}(D)$ і

$$D[\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_d)] = \sum_{\varphi=1}^d [\partial_{\varphi} \varphi](\varphi_1, \dots, \varphi_d) D \varphi_{\varphi}. \quad (3.11)$$

2. Стала функція 1 належить $\text{dom}(\delta)$ і

$$\delta(1) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \delta(\varphi) \nabla(d \varphi, d \varphi). \quad (3.12)$$

3. Нехай $\varphi \in \text{dom}(D)$ і

$$E(\delta(1) \varphi)^2 < \infty. \quad (3.13)$$

Тоді $\varphi \in \text{dom}(\delta)$ і $\delta(\varphi) = \delta(1) \varphi - D \varphi$.

Доведення. 1. Достатньо розглянути $\varphi_{\varphi}, \varphi = 1, \varphi$, що задовольняють (3.10). тоді функція

$$\frac{1}{\varphi} (Q_{\varphi} \varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_d) - \varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_d)) \quad (3.14)$$

збігається за імовірністю до правої частини (3.11), квадрат якої не перебільшує

$$\sup_{\varphi} \| \varphi(\varphi) \|^2 \sum_{\varphi=1}^d \int_{\mathbb{R}} (Q_{\varphi} \varphi - \varphi)^2$$

і тому є рівномірно інтегровним. отже, (3.14) збігається в $\mathcal{D}_2(\Omega, F, P)$.

2. Для довільного φ , що задовольняє (3.10), з урахуванням (3.6), маємо

$$E \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \delta(\varphi) \nabla(d \varphi, d \varphi) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi} E \delta(\varphi - 1) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1}{\varphi} E(Q_{\varphi} \varphi - \varphi) = E(D \varphi),$$

що разом із означенням $\delta = D^*$ дає $\delta(1) = \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \delta(\varphi) \nabla(d \varphi, d \varphi)$.

3. Для обмежених $\varphi, \psi \in \text{dom}(D)$, з урахуванням (3.11), маємо $\varphi\psi \in \text{dom}(D)$ і $D(\varphi\psi) = \varphi D\psi + \psi D\varphi$. Тож за другим твердженням

$$E\varphi D\psi = E\psi \left(\varphi(1) - D\varphi \right). \tag{3.15}$$

З огляду на (3.11), для довільної $\varphi \in \text{dom}(D)$ можемо вибрати послідовність обмежених $\varphi_n \in \text{dom}(D)$ таких, що $\varphi_n \rightarrow \varphi$ і $D\varphi_n \rightarrow D\varphi$ в

$\mathcal{D}_2(\Omega, F, P)$. Цим доводиться співвідношення (3.15) для довільного $\varphi \in \text{dom}(D)$, а отже і третій пункт твердження за додаткової умови обмеженості φ . Наблизивши φ обмеженими $\varphi_n \in \text{dom}(D)$ і взявши до уваги те, що φ – замкнений оператор, виводимо необхідне твердження без додаткових припущень. \square

3.2. Диференціальні властивості розв'язку СДР керуваного процесом Леві

Нехай φ – процес Леві без дифузійної компоненти, тобто

$$\varphi_t = \varphi_0 + \int_0^t \int_{|\varphi|>1} \varphi \varphi(d\varphi, d\varphi) + \int_0^t \int_{|\varphi| \leq 1} \varphi \varphi(d\varphi, d\varphi), \tag{3.16}$$

де φ – пуассонова точкова міра, що задовольняє умові Н.

Позначимо $\varphi'_t = Q_t \varphi_t$. І покажемо, що

$$\frac{1}{\varphi} (\varphi'_t - \varphi_t) \rightarrow D\varphi_t := \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \square(\varphi) \varphi(d\varphi, d\varphi) \text{ в } \mathcal{D}_2(\Omega, F, P) \tag{3.17}$$

рівномірно по $\varphi \in [0, \varphi]$ для довільного φ . Для цього запишемо

$$E \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \square(\varphi) \varphi(d\varphi, d\varphi) \right)^2 = E \left(\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \varphi^{-1} (\varphi'_t - \varphi_t) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \square(\varphi) d\varphi \varphi(d\varphi) \right)^2$$

Безпосередній підрахунок дає при $|\vartheta| \leq \vartheta_0$

$$\vartheta, \vartheta = \left(|\vartheta|^{-1} - \vartheta^{-1} \right)^{-1},$$

що разом із формулою Тейлора і теоремою Лебега про мажоровану збіжність доводить (3.17).

Розглянемо тепер процес ϑ , заданий стохастичним диференціальним рівнянням (1.1), в якому ϑ заданий співвідношенням (3.16), а ϑ задовольняє умові Н. Без обмежень загальності припускаємо, що Θ скінченний відкритий інтервал на \mathbb{R} .

Покажемо, що якщо $\vartheta \in \mathcal{C}^{2,0}(\mathbb{R} \times \Theta)$, має обмежені похідні $\partial_{\vartheta} \vartheta, \partial^2 \vartheta$ і задовольняє умові лінійного росту

$$|\partial_{\vartheta}(\vartheta)| \leq \vartheta(1 + |\vartheta|), \quad \vartheta \in \Theta, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$$

то ϑ, ϑ - \mathcal{C}_2 -диференційовний і випишемо формулу для відповідної стохастичної похідної.

Розглянемо $\vartheta, \vartheta = Q, \vartheta, \vartheta$ як розв'язок наступного збуреного СДР:

$$d \vartheta, \vartheta = \vartheta, \vartheta(\vartheta, \vartheta) d\vartheta + d \vartheta, \vartheta. \tag{3.18}$$

За Теоремою 1.2, з урахуванням умов про ϑ , одержимо, що для довільного фіксованого $\vartheta \in \Theta$ і початкового значення $\vartheta \in \mathbb{R}$ сім'я ϑ, ϑ диференційовна в \mathcal{C}_2 ; тобто

$$\frac{1}{\vartheta}(\vartheta, \vartheta - \vartheta, \vartheta) \rightarrow D \vartheta, \vartheta \text{ в } \mathcal{C}_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \quad \vartheta \rightarrow 0. \tag{3.19}$$

За означенням 3.1, похідна в правій частині (3.19) є стохастичною похідною ϑ, ϑ . Крім того, збіжність (3.19) справедлива рівномірно по $\vartheta \in [0, \vartheta]$ для кожного ϑ . Процес $\vartheta, \vartheta := D \vartheta, \vartheta$ є розв'язком лінійного СДР

$$d \vartheta, \vartheta = \partial_{\vartheta} \vartheta, \vartheta(\vartheta, \vartheta) \vartheta, \vartheta d\vartheta + dD \vartheta, \vartheta, \quad \vartheta_0 = 0,$$

і може бути виписаний явно:

$$D\varphi_\theta = E_\theta \int_0^\theta E_\theta^{-1} \square(\varphi) \theta(d\varphi, d\varphi), \quad E_\theta := \exp \int_0^\theta R$$

$$\partial_{\theta\theta} \varphi_\theta(d\varphi). \quad (3.20)$$

З тих самих міркувань, оскільки припущення про φ'' в Н (iii) забезпечує обмеженість φ' , то справджується наступне

$$\int_0^\theta D\varphi(1) = 0 \quad R \theta'(\varphi) \square(\varphi) \theta(d\varphi, d\varphi). \quad (3.21)$$

В свою чергу обмеженість похідних $\partial_{\theta\theta} \varphi, \partial_{\theta\theta}^2 \varphi$ встановлює, що друга похідна $D^2 \varphi_\theta$ також є стохастично диференційовною і

$$D^2 \varphi_\theta := D(D\varphi_\theta) = DE_\theta \int_0^\theta E_\theta^{-1} \square(\varphi) \theta(d\varphi, d\varphi) + E_\theta \int_0^\theta (E_\theta^{-1} \square(\varphi) \theta'(\varphi) - E_\theta^{-2} DE_\theta \square(\varphi)) \theta(d\varphi, d\varphi), \quad (3.22)$$

$$DE_\theta = E_\theta \int_0^\theta \partial_{\theta\theta}^2 \varphi_\theta(\varphi) D\varphi_\theta d\varphi. \quad (3.23)$$

Точна формула для $D^3 \varphi_\theta$, аналогічна до (3.22) і винесена в окремий підрозділ (див. Лема 3.3). Зазначимо лише, що для її існування потрібно додатково вимагати обмеженості $\partial_{\theta\theta\theta}^3 \varphi$.

Зауважимо, що хоча це і не відображається в позначенні, розв'язок φ_θ рівняння (1.1) є функцією залежною від параметра θ . Застосувавши Теорему 1.2 ще раз, отримаємо:

Лема 3.1. Нехай $\varphi \in \mathcal{O}^{2,1}(R \times \Theta)$, має обмежені похідні $\partial_{\theta\theta} \varphi, \partial_{\theta\theta}^2 \varphi, \partial_{\theta\theta}^3 \varphi, \partial_{\theta\theta\theta}^3 \varphi$ і

$$|\varphi'(\varphi)| + |\partial_{\theta\theta} \varphi(\varphi)| \leq \varphi(1 + |\varphi|), \quad \varphi \in \Theta, \quad \varphi \in R. \quad (3.24)$$

Тоді φ_θ – \mathcal{O}_2 -диференційовний по φ (в тому самому смислі, що і (3.19)),

а відповідна похідна дорівнює

$$\partial_{\theta\theta} \varphi_\theta = E_\theta \int_0^\theta E_\theta^{-1} [\partial_{\theta\theta} \varphi](\varphi) d\varphi. \quad (3.25)$$

Ця похідна φ_2 -неперервна по φ і стохастично диференційовна, а

$$E^{-1} \int_0^t D(\varphi, \varphi_s) = DE_{\varphi} \int_0^t \varphi_s^{-1} [\partial_{\varphi} \varphi_s] (\varphi_s) d\varphi \quad (3.26)$$

$$\varphi_s^{-1} (E^{-1} [\partial_{\varphi}^2 \varphi_s] - E^{-2} DE_{\varphi} [\partial_{\varphi} \varphi_s] (\varphi_s)) d\varphi + E_{\varphi}$$

3.3. Моментні оцінки для розв'язків СДР і їх стохастичних похідних

В цьому підрозділі зібрано декілька тверджень про моментну обмеженість, потрібну в подальших доведеннях. Припускаємо, що φ задовольняє умові лінійного росту, є тричі неперервно диференційовною по φ , а відповідні похідні припускаються обмеженими.

Перш за все, покажемо, що для кожного $\varphi \geq 1$ існує φ_0 така, що

$$E \varphi_0^{\varphi} \leq \varphi \in \mathbb{R}, \varphi \in \Theta, \varphi \leq \varphi_0. \quad (3.27)$$

Зазначимо, що оскільки $\partial_{\varphi} \varphi_0$ – обмежена, то існують додатні φ_1, φ_2 такі, що

$$\varphi_1 \leq E_{\varphi} \leq \varphi_2, \quad \varphi \in [0, \varphi_0]. \quad (3.28)$$

Тому (3.27) випливає з такої ж обмеженості інтеграла Іто від детермінованої функції \square відносно φ . Щоб довести цю обмеженість, застосуємо Лему 5.1 [9] до $\varphi \equiv 1, \varphi = \square$ і оцінимо окремо інтеграл по компенсатору $d\varphi - \varphi(d\varphi)$. Оскільки $\partial_{\varphi}^2 \varphi_0$ – обмежена, аналог (3.27) справджується для DE_{φ} замість $D\varphi$; див. (3.23). Повторивши ці міркування з мінімальними змінами виводимо, що аналог (3.27) справджується для

$$D^2 \varphi_0, \quad D^2 E_{\varphi}, \quad D^3 \varphi_0.$$

Зокрема, щоб одержати аналог (3.27) для $D^2 \varphi_0$ заданого (3.22), використовуємо (3.28), а для аналогу (3.27) з DE_{φ} використовуємо нерівність Гельдера і Теорему 1.4 до $\varphi_0 = DE_{\varphi}, \varphi = \square$.

Остаточно за припущенням Н (iii) і вибором \square , функція

$$\varphi = -(\varphi'/\varphi)\square - \square'$$

обмежується φ/φ' і зануляється при $\varphi/\varphi' \geq \varphi_0$. Звідси, аналог (3.27) справджується для $\varphi(1)$, заданого формулою (3.12).

Далі зазначимо, що за умовою Н (i) $E/\varphi_1^{2+\varphi} \leq \varphi$, $\varphi \leq \varphi$. Нагадаємо, що $\varphi_1(\varphi)$ має лінійно обмежений ріст по φ . Тоді за лемою Гронуола - Белмана

$$F^{\varphi_1/\varphi_1} \leq \varphi(1 + \varphi/\varphi^{\varphi}), \quad \varphi \in [1, 2 + \varphi]. \quad (3.29)$$

Відповідні обмеженості при $\varphi < 2 + \varphi$ справедливі для $\partial_{\varphi} \varphi_1$ і $D(\partial_{\varphi} \varphi_1)$. Це випливає з формул (3.25), (3.26), нерівності Гельдера і φ -обмеженості (з довільним великим φ) для $D \varphi_1, DE_{\varphi}$. Так само, $D \varphi_1, D^2 \varphi_1, D^3 \varphi_1$ - φ_2 -диференційовні по параметру φ , саме в цьому місці виникає необхідність в обмеженнях на $\partial_{\varphi}^2 \varphi_1, \partial_{\varphi}^3 \varphi_1, \partial_{\varphi}^4 \varphi_1$. Відповідні похідні $\partial_{\varphi} D \varphi_1, \partial_{\varphi} D^2 \varphi_1, \partial_{\varphi} D^3 \varphi_1$ можуть бути виписані явно і задовольняють нерівностям аналогічним (3.29).

Остаточно, покажемо, що для кожного $\varphi \geq 1, \varphi \in (0, \varphi]$ існує $\varphi_{\varphi, \varphi}$ таке, що

$$E_{\varphi}(D \varphi_1)^{-\varphi} \leq \varphi_{\varphi, \varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \varphi \in \Theta \quad (3.30)$$

(нагадаємо, що $\square \geq 0$ і тому $D \varphi_1$ - невід'ємна). За (3.28) і невід'ємністю \square ,

$$D \varphi_1 \geq (\varphi_2/\varphi_1) \int_0^{\varphi} \square(\varphi) \varphi(d \varphi, d \varphi) \geq (\varphi_2/\varphi_1) \int_0^{\varphi} \varphi^2 \varphi(d \varphi, d \varphi).$$

Звідси за припущенням Н (iv)

$$P_{\varphi}^{\varphi}(D \varphi_1 < \square) \leq P_{\varphi}^{\varphi} \left(\int_0^{\varphi} (\varphi_1 \square/\varphi_2)^{1/2} \leq \varphi/\varphi_0 \quad \varphi^2 \varphi(d \varphi, d \varphi) = 0 \right)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\theta_1 \square / \theta_2 \right)^{1/2} \leq \theta / \leq \theta_0 \right\} = \theta(\square^\theta), \square \rightarrow 0$$

для кожного $\theta \geq 1$, що й доводить необхідне твердження.

3.4. Існування густини перехідної імовірності та інтегральне представлення її логарифмічної похідної по параметру

Тепер застосуємо розроблену вище версію числення Малявена до встановлення регулярності статистичного експеримента і побудови інтегральних представлень похідних по параметру логарифмічних функцій вірогідності.

Розглядаємо процес θ заданий рівнянням (1.1). З одного боку (1.1) єдиним чином задає процес Маркова θ . З іншого боку, розв'язок θ рівняння (1.1) – випадкова функція визначена на тому ж імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, що і процес θ , додатковою залежністю від параметра θ і початковим значення $\theta = \theta(0)$ (для спрощення позначень ця залежність не відображається).

Далі буде показано, що, за відповідних припущень, процес Маркова θ допускає густину перехідної імовірності $\theta_\theta(\theta; \theta, \theta)$ відносно міри Лебега, яка є неперервною по $(\theta, \theta, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Тоді за Теоремою 1.3 для всіх $\theta > 0, \theta, \theta \in \mathbb{R}$ таких, що

$$\theta_\theta(\theta, \theta, \theta) > 0, \tag{3.31}$$

існує слабка границя в $D([0, \theta])$

$$P_{\theta, \theta}^{\theta, \theta} = \lim_{\square \rightarrow 0} P_{\theta, \theta}^{\theta, \theta} \left(\cdot, \cdot \mid \theta_\theta - \theta \leq \square \right),$$

що природнім чином інтерпретується як міст процеса φ стартуючого з ϑ і попадаючого в ϑ за час t .

Крім того, буде доведено існування перших двох логарифмічних похідних по параметру $\vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta)$ і побудовано відповідні інтегральні представлення.

Позначимо

$$\Xi_{\vartheta} := \vartheta \left(\frac{1}{D \vartheta_i} \right) = \frac{\vartheta(1)}{D \vartheta_i} + \frac{D^2 \vartheta_i}{(D \vartheta_i)^2}. \quad (3.32)$$

$$\Xi_{\vartheta}^1 := \vartheta \left(\frac{\partial_{\vartheta} \vartheta_i}{D \vartheta_i} \right) = \frac{(\partial_{\vartheta} \vartheta_i) \vartheta(1)}{D \vartheta_i} + \frac{(\partial_{\vartheta} \vartheta_i) D^2 \vartheta_i - D(\partial_{\vartheta} \vartheta_i)}{(D \vartheta_i)^2}. \quad (3.33)$$

Теорема 3.1. I. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}^{2,0}(\mathbb{R} \times \Theta)$ і має обмежені похідні $\partial_{\vartheta} \vartheta_i, \partial_{\vartheta \vartheta}^2 \vartheta_i$.

Тоді Марківський процес φ визначений рівнянням (1.1) має густину перехідної імовірності ϑ_{ϑ} відносно міри Лебега, яка допускає інтегральне представлення

$$\vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) = E_{\vartheta}^{\vartheta} [\Xi_{\vartheta}^1 \mathbf{1}_{\vartheta > \vartheta}], \quad \vartheta > 0, \quad \vartheta, \vartheta \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Функція $\vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) \in C^{\infty}$ по $(\vartheta, \vartheta, \vartheta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$.

II. Нехай $\varphi \in \mathcal{D}^{3,1}(\mathbb{R} \times \Theta)$, має обмежені похідні $\partial_{\vartheta} \vartheta_i, \partial_{\vartheta \vartheta}^2 \vartheta_i, \partial_{\vartheta \vartheta \vartheta}^3 \vartheta_i, \partial_{\vartheta \vartheta \vartheta \vartheta}^4 \vartheta_i$

$$|\partial_{\vartheta} \vartheta_i(\vartheta)| + |\partial_{\vartheta \vartheta}^2 \vartheta_i(\vartheta)| \leq \vartheta(1 + |\vartheta|), \quad \vartheta \in \Theta, \quad \vartheta \in \mathbb{R}. \quad (3.35)$$

Тоді густина перехідної імовірності має похідну $\partial_{\vartheta} \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta)$, що є неперервною по $(\vartheta, \vartheta, \vartheta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$.

III. В умовах твердження II маємо

$$\partial_{\vartheta} \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) = \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta), \quad (3.36)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{\vartheta}^{\vartheta} \Xi_{\vartheta}^1, \quad \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) > 0, \end{array} \right.$$

$$\varphi(\varphi; \varphi, \varphi) = \varphi, \varphi \quad (3.37)$$

0, інакше.

Зауваження 3.2. Згідно з твердженнями II і III, логарифм густини перерідної імовірності має неперервну похідну по φ на відкритій підмножині множини $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$ визначеної нерівністю (3.31) і на цій підмножині допускає інтегральне представлення

$$\partial_\varphi \log \varphi(\varphi; \varphi, \varphi) = E_{\varphi, \varphi}^{\varphi, \varphi} \Xi^1. \quad (3.38)$$

Доведення. Доведем спершу, що $(D\varphi_\varphi)^{-1} \in \text{dom}(\varphi)$ і що справджується (3.32). Для цього зафіксуємо довільне $\square > 0$ і розглянемо величину $\varphi_{\varphi, \square} = (D\varphi_\varphi + \square)^{-1}$. За першим пунктом Твердження 3.2, застосованого до $\varphi = D\varphi_\varphi$ і $\varphi \in \varphi^1(\mathbb{R})$ такої, що $\varphi(\varphi) = 1/\varphi, \varphi \geq \square$, величина $\varphi_{\varphi, \square}$ має стохастичну похідну $-D^2 \varphi_\varphi / (D\varphi_\varphi + \square)^2$. Тоді за пунктом 3 Твердження 3.2

$$\Xi_{\varphi, \square} = \varphi(\varphi_{\varphi, \square}) = \frac{\varphi(1)}{D\varphi_\varphi + \square} + \frac{D^2 \varphi_\varphi}{(D\varphi_\varphi + \square)^2}. \quad (3.39)$$

За (3.27) і (3.30), $\varphi_{\varphi, \square} \rightarrow (D\varphi_\varphi)^{-1}$ в φ_2 . Використавши додатково аналог (3.27) до $\varphi(1)$ і $D^2 \varphi_\varphi$, бачимо, що права частина співвідношення (3.39) збігається до правої частини (3.32) в φ_2 при $\square \rightarrow 0$. Тому (3.32) справджується внаслідок того, що φ є замкненим оператором.

Тепер можемо завершити доведення пункту I. За Твердженням 3.2, визначенням $\varphi = D^*$ і співвідношенням (3.32), для довільного $\square \in \varphi^1(\mathbb{R})$ маємо

$$E_{\varphi, \square}^{\varphi}(\varphi_\varphi) = E_{\varphi, \square}^{\varphi} D(\square(\varphi_\varphi)) \left(\frac{1}{D\varphi_\varphi} \right) = E_{\varphi, \square}^{\varphi}(\varphi_\varphi) \varphi \left(\frac{1}{D\varphi_\varphi} \right) = E_{\varphi, \square}^{\varphi}(\varphi_\varphi) \Xi_\varphi.$$

Наближаючи $\square_\nu := \mathbf{1}_{[0, \infty)}(\cdot - \nu)$ послідовністю $\square_\nu \in \mathcal{D}_\nu(\mathbb{R})$, одержимо представлення (3.34).

За Теоремою 1.2 застосованою до рівняння (1.1), \mathcal{E}_ν неперервно залежить (в \mathcal{D}_2) від параметрів ν, ν, ν . Ті самі міркування дають неперервність (в \mathcal{D}_2) $D \mathcal{E}_\nu$ і $D^2 \mathcal{E}_\nu$ по параметрам ν, ν, ν ; зазначимо, що обидві ці похідні можуть бути визначені як розв'язки відповідних СДР, тому можна ітеративно застосувати Теорему 1.2. Тоді просто показати, що \mathcal{E}_ν також неперервно залежить (в \mathcal{D}_2) від параметрів ν, ν, ν . Насправді з неперервності $D \mathcal{E}_\nu, D^2 \mathcal{E}_\nu$ і невід'ємності $D \mathcal{E}_\nu$, випливає, що при кожному $\square > 0$ функціонал $\mathcal{E}_{\nu, \square}$, визначений (3.39), є неперервним. Використовуючи моментну оцінку (3.27) і (3.30) легко показати, що $\mathcal{E}_{\nu, \square}$ збігається до \mathcal{E}_ν в \mathcal{D}_2 при $\square \rightarrow \infty$ рівномірно в деякому околі довільної заданої точки $(\nu, \nu, \nu) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \Theta$. Тому граничний функціонал \mathcal{E}_ν неперервно залежить від ν, ν, ν .

З представлення (3.34) маємо

$$P_\nu(\mathcal{E}_\nu = \nu) = 0, \quad \nu, \nu \in \mathbb{R}, \quad \nu > 0, \quad \nu \in \Theta. \quad (3.40)$$

Тоді \mathcal{D}_2 -неперервність \mathcal{E}_ν і представлення (3.34) доводить, що неперервною по $(\nu, \nu, \nu, \nu) \in \mathcal{D}_\nu(\mathcal{D}_2)$ є також $\mathcal{E}_\nu(\nu, \nu, \nu)$.

Щоб довести пункт II, ще раз проінтегруємо частинами праву частину (3.34). Аналогічно до доведення (3.32), використовуємо Твердження 3.2 і (3.27), (3.30) щоб показати, що $\mathcal{E}_\nu / (D \mathcal{E}_\nu)$ лежить в $\text{dom}(\nu)$. Тож можемо записати

$$\nu \left(\frac{\mathcal{E}_\nu}{D \mathcal{E}_\nu} \right) = \frac{(\nu(1))^2 - D \nu(1)}{(D \mathcal{E}_\nu)^2} + \frac{3 \nu(1) D^2 \mathcal{E}_\nu - D^3 \mathcal{E}_\nu}{(D \mathcal{E}_\nu)^3} + \frac{3(D^2_2 \mathcal{E}_\nu)}{(D \mathcal{E}_\nu)^4}. \quad (3.41)$$

Далі з (3.34) маємо

$$\Phi(\phi; \phi, \phi) = E^{\phi} \Phi(\phi, \phi) \left(\frac{\Xi_{\phi}}{D\phi} \right) \text{ — } D\phi, \quad (3.42)$$

де $\Phi(\cdot) \in C^0$ - абсолютно неперервна функція з похідними рівними \square_{ϕ} . Нагадаємо, що $\Phi \in \mathcal{D}_2$ -диференційовним по параметру ϕ , див. (3.25) для його похідної. Крім того, $D\Phi, D^2\Phi, \text{ і } D^3\Phi$ - \mathcal{D}_2 -диференційовні по ϕ і всі ці похідні задовольняють моментним оцінкам аналогічним до (3.29). Тепер легко показати, що $\Phi(\Xi_{\phi}/(D\phi)) \in \mathcal{D}_2$ -диференційовною по ϕ (явна формула похідної опущена). Можна замінити $D\Phi$ в знаменнику формули (3.41) на $D\Phi + \square$, довести, що цей новий функціонал $\in \mathcal{D}_2$ -диференційовним по ϕ використовуючи правило ланцюга, а потім показати за допомогою (3.30), що обидва ці функціонали і їх похідні по ϕ збігаються (локально рівномірно) в \mathcal{D}_2 при $\square \rightarrow 0$ відповідно до $\Phi(\Xi_{\phi}/(D\phi))$ і до функціонала $\partial_{\phi}\Phi(\Xi_{\phi}/(D\phi))$, який прийшов з формального диференціювання співвідношення (3.41). Ці міркування також показують, що $\Phi(\Xi_{\phi}/(D\phi))$ і $\partial_{\phi}\Phi(\Xi_{\phi}/(D\phi))$ неперервно залежать (в \mathcal{D}_2) від ϕ, ϕ, ϕ . Тому, можемо взяти похідну в правій частині (3.42), що дає

$$\partial_{\phi}\Phi(\phi; \phi, \phi) = E^{\phi} \left[\square_{\phi}(\phi) \partial_{\phi}\Phi \left(\frac{\Xi_{\phi}}{D\phi} \right) + \Phi(\phi) \partial_{\phi} \left(\frac{\Xi_{\phi}}{D\phi} \right) \right].$$

*

Ця функція є неперервною по $(\theta, \theta, \theta, \theta)$ оскільки $\theta, \partial_\theta \theta, \theta$ $(\Xi_\theta / (D\theta))$ і $\partial_\theta \theta (\Xi_\theta / (D\theta))$ неперервно залежать (в θ_2) від θ, θ, θ і справджується (3.40).

Щоб довести пункт III використовуємо моментну оцінку для $\partial_\theta \theta,$

$D(\partial_\theta \theta), D\theta, D\theta^2,$ щоб одержати, аналогічно до доведення (3.32), що $\partial_\theta \theta / (D\theta)$ належить $\text{dom}(\theta)$ і справджується співвідношення (3.33). Тоді для довільної тест-функції $\theta \in \theta^1(\mathbb{R})$ з обмеженою похідною маємо

$$\begin{aligned} \partial_\theta E_\theta^\theta(\theta) &= E_\theta^\theta(\theta)(\partial_\theta \theta) = E_\theta^\theta D\theta(\theta) \frac{(\partial_\theta \theta)}{D\theta} \\ &= E_\theta^\theta(\theta) \Xi_\theta^{-1} = E_\theta^\theta(\theta) \theta(\theta, \theta, \theta); \end{aligned} \tag{3.43}$$

див. (3.37) щодо визначення $\theta(\theta, \theta, \theta)$. Оскільки тестова функція θ - довільна, інтегральна рівність (3.43) доводить (3.36). □

3.5. Достатні умови регулярності статистичного експерименту

Наступна теорема стосується регулярності статистичного експерименту

ту

$$\left(\mathbb{R}^\theta, \mathbb{B}(\mathbb{R}^\theta), \mathbb{P}^\theta_{\theta, \theta \in \Theta} \right), \tag{3.44}$$

$\theta, \{\theta_\theta\}_{\theta=1}$

породженого спостереженнями процесу Маркова θ з фіксованим $\theta_0 = \theta$ в моменти часу $\theta_1 < \dots < \theta_\theta$.

Теорема 3.2. Нехай виконано умови твердження II Теорема 3.1 і $\theta \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{N}, 0 < \theta_1 < \dots < \theta_\theta$ - фіксовані.

Тоді статистичний експеримент (3.44) – регулярний. Відповідна ін-^{*}формація Фішера дорівнює

$$I(\theta) = \sum_{\theta=1}^{\infty} E_{\theta} \left(\left| \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_{\theta}(x) \right|^2 \right),$$

де $\theta := 0$.

Перед доведенням теореми спершу сформулюємо декілька властивостей I_{θ} і $I_{\theta} = \partial_{\theta} \log I_{\theta}$, які випливають з інтегральних представлень для цих функцій і моментних оцінок, отриманих в підрозділі 3.3.

Лема 3.2. Для кожного $\theta < 2 + \theta$ існує стала θ залежна тільки від θ і θ така, що

$$I_{\theta}(\theta, \theta, \theta) \leq \theta (1 + |\theta - \theta|)^{-\theta}, \quad (3.45)$$

$$E_{\theta} \left(I_{\theta}(\theta, \theta, \theta) \right)^{\theta} \leq \theta (1 + |\theta|)^{\theta}. \quad (3.46)$$

Доведення. За моментними оцінками з Підрозділа 3.3 і формулами (3.32), (3.33) маємо

$$E_{\theta} \left(I_{\theta} \right)^{\theta} \leq \theta \quad (3.47)$$

для довільного $\theta \geq 1$ і

$$E_{\theta} \left(\frac{1}{I_{\theta}} \right)^{\theta} \leq \theta (1 + |\theta|)^{\theta} \quad (3.48)$$

для кожного $\theta \in [1, 2 + \theta]$, з сталими θ залежними тільки від θ, θ' (відповідно θ).

Оскільки

$$I_{\theta}(\theta, \theta, \theta) = E_{\theta} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} \log p_{\theta}(x) \right|^2,$$

нерівність (3.46) безпосередньо випливає з (3.48) і нерівності Йенсена. Щоб отримати (3.45) запишемо на підставі представлення (3.34) і нерівності Гельдера

$$P^\nu(\theta_i > \theta) \leq \frac{C}{(\nu-1)\theta^\nu}$$

Нагадаємо, що θ_i має скінченні моменти порядку $2+\nu$, а θ має обмежену похідну по θ . Тоді за лемою Гронуола

$$F^\nu_{\theta/\theta_i} - \theta/2+ \leq C. \tag{3.49}$$

Тому при $\nu > \nu$

$$P^\nu_{\theta_i}(\theta_i > \theta) \leq \min\{1, \theta/\theta - \theta/^{-(2+\nu)}\}$$

що дає (3.45) з $\nu = (\nu-1)(2+\nu)/\nu$; пізніше величина може бути вибрана як завгодно близькою до $2+\nu$ відповідним вибором ν . При $\nu < \nu$ замість (3.34) використовуємо представлення

$$\theta_i(\theta, \theta, \theta) = -E^\nu_{\theta}[\Xi 1_{\theta \leq \theta}],$$

яке є еквівалентним (3.34), оскільки Ξ - стохастичний інтеграл і тому має нульове сподівання. □

Доведення теореми 3.2. Формула (3.51) і перше твердження Теореми 3.1 зразу дають властивість неперервності (а) з означення регулярності статистичного експерименту. Щоб довести властивість (b), θ_2 -диференційовності і (c), θ_2 -неперервності похідної, покладемо при $\square > 0$

$$\theta_\square(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \square/2, \\ \frac{(\theta-\square/2)^2}{2^{3/2}}, & \theta \in [\square/2, \square], \\ \theta - \frac{7}{8}\square, & \theta \geq \square. \end{cases}$$

За побудовою $\theta_\square \in \theta^1$ і $\theta_\square(\theta) = 0$ при $\theta \leq \square/2$. Тоді за другим твердженням Теореми 3.1 і другим твердженням Лема 3.2 відображення $\theta \mapsto \theta_\square := \theta_\square(\theta) \in \theta_2(R^\nu, \theta)$ є неперервно диференційовним з похідною, рівною

$$\theta_\square := \frac{d}{d\theta} \theta_\square = \theta'_\square(\theta) \partial_{\theta, \theta};$$

див. (3.52) для формули $\partial_{\theta} \theta^{\theta}$. За побудовою

$$\theta_{\square}(\theta) \rightarrow \theta_0(\theta) := \sqrt{\theta, \theta'}(\theta) \rightarrow \theta'(\theta) = 1$$

$$\sqrt{\quad}, \quad \square \rightarrow 0.$$

$$\square \quad 0 \quad \frac{\quad}{2 \quad \theta}$$

Звідси, щоб довести властивості (b), (c), достатньо показати, що

$$\theta_{\square} \rightarrow \theta_0 := \theta_0(\theta'), \quad \theta_{\square} \rightarrow \theta_0 := \theta_0(\theta') \partial_{\theta} \theta' \quad \text{в} \quad \mathcal{D}_2(\mathbb{R}, \theta) \quad (3.50)$$

рівномірно по θ . Покажемо другу збіжність в (3.50), доведення першої є аналогічним і простішим. З явного вигляду θ_{\square} і нерівності Гельдера

$$\int_{\mathbb{R}^{\theta}} (\theta' - \theta')^2 d\theta \leq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^{\theta}} (\theta')^2 \theta' d\theta \leq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}^{\theta}} \theta' / \theta' \theta' d\theta \right)^2 \left(\int_{\mathbb{R}^{\theta}} \theta' d\theta \right)^{\frac{\theta-2}{\theta}}$$

при $\theta \geq 2$. Візьмемо $\theta \in (2, 2 + \theta)$, тоді за нерівністю Йенсена представлення (3.52) і (3.29)

$$\int_{\mathbb{R}^{\theta}} \theta' / \theta' \theta' d\theta = E^{\theta} \sum_{\theta=1}^{\theta} \theta_{\theta-1}^{-1} (\theta, \theta_{\theta-1}^{-1})$$

$$\leq \theta^{\theta-1} \sum_{\theta=1}^{\theta} E^{\theta} \theta_{\theta-1}^{-1} (\theta, \theta_{\theta-1}^{-1}) \leq \theta^{\theta-1} \theta \sum_{\theta=1}^{\theta} E^{\theta} 1 + \theta^{-1} \leq \tilde{\theta},$$

де стала $\tilde{\theta}$ не залежить від θ . З іншого боку,

$$\int_{\mathbb{R}^{\theta}} \theta' d\theta \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^{\theta}} \theta' \theta' d\theta}$$

а за (3.45) при $\theta \in (2, 2 + \theta)$

$$\int_{\mathbb{R}^{\theta}} \theta' d\theta \leq \theta \left(1 + \theta \right)^{-\theta/2} \dots \theta \theta \theta$$

$$\int_{R^{\varphi}} \dots \leq \int_{R^{\varphi=1}} \dots$$

з константою φ не залежною від θ . Підсумовуючи вище сказане, отримаємо другу збіжність в (3.50), рівномірно по φ . Цим завершується доведення регулярності. Формула для інформації Фішера випливає з рівності

$$\int_{R^{\varphi}} \dots = \frac{1}{4} \int_{R^{\varphi}} \dots = \frac{1}{4} E_{\varphi} \dots$$

марківської властивості і того, що

$$F_{\varphi}(\varphi, \theta, \varphi_i) = 0$$

при кожному $\varphi \in R, \theta \in \Theta, \varphi > 0$, що випливає з (3.62) при $\varphi \equiv 1$. \square

Зауваження 3.3. Для статистичного експерименту (3.44) $X = R^{\varphi}$, тому природньо φ це міра Лебега. Тоді за Теоремою 3.1

$$\varphi(\varphi; \mathbf{x}) = \prod_{\varphi_i=1}^{\varphi} \varphi_{\varphi_i-1}(\varphi; \varphi_{\varphi_i-1}, \varphi_{\varphi_i}), \quad \mathbf{x} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{\varphi}), \quad \varphi_i := \varphi_i; \quad (3.51)$$

крім того, в кожній точці існує похідна φ

$$\partial_{\varphi} \varphi(\varphi; \mathbf{x}) = \varphi(\varphi; \mathbf{x}) \varphi'(\varphi; \mathbf{x}), \quad \varphi'(\varphi; \mathbf{x}) := \sum_{\varphi_i=1}^{\varphi} \varphi_{\varphi_i-1}(\varphi; \varphi_{\varphi_i-1}, \varphi_{\varphi_i}).$$

Зокрема, співвідношення (3.34) і (3.37) можна розглядати як інтегральні представлення логарифмічної функції вірогідності і похідної функції вірогідності в моделі, що складається з одного спостереження.

Поєднавши Теорему 3.2 з Теоремою 1.5, одержимо наступну версію нерівності Крамера – Рао.

Наслідок 3.1. Нехай виконано умови твердження II Теорема 3.1 і $\varphi \in R, \varphi \in \mathbb{N}, 0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{\varphi}$ – фіксовані. Припустимо, що

$$\varphi(\vartheta) > 0$$

і $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – Борелівська функція така, що функція

$$\vartheta \mapsto E_{\vartheta}^{\varphi}(\varphi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_d))^2$$

– локально обмежена.

Тоді зміщення

$$\varphi(\vartheta) = E_{\vartheta}^{\varphi}(\varphi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_d)) - \vartheta$$

є диференційовним і

$$E_{\vartheta}^{\varphi}(\varphi(\vartheta_1, \dots, \vartheta_d) | \vartheta) - \vartheta \geq (1 + \partial_{\vartheta} \varphi(\vartheta))^2 + \varphi'(\vartheta) \cdot \vartheta$$

3.6. Формули для складників інтегрального представлення другої похідної по параметру від густини перехідної імовірності

В цьому підрозділі наведено лему, яка дає формулу для старшої стохастичної похідної φ_{ϑ} , а також виписані формули для інтегрального представлення другої похідної по параметру перехідної густини φ і складників цього представлення. Ці формули будуть використані в наступному підрозділі і оскільки є доволі громіздкими винесені в окремо.

Лема 3.3. За умов Теорема 3.3 φ_{ϑ} – тричі стохастично диференційовний і

$$D^{\varphi} \varphi_{\vartheta} = \sum_{k=0}^{\varphi-1} \frac{(\varphi+1)^{\varphi-k+1}}{k!} D^{k, \varphi-1} (E_{\vartheta} E^{-1}) \int_{\mathbb{R}} \varphi(\vartheta) \varphi'(\vartheta) \varphi(d\vartheta, d\vartheta), \quad \varphi = 1, 3; \quad (3.53)$$

де $E_{\vartheta} := \exp \left\{ \int_0^{\vartheta} \partial_{\vartheta} \varphi(\vartheta) d\vartheta \right\}$,

$$\varphi-1 \quad \varphi-1$$

3.7. Інтегральне представлення для другої похідної по параметру від густини перехідної імовірності.

Зауважимо насамперед, що результат цього підрозділа використовується не тільки при доведенні ЛАН, він є дуже корисним зокрема при побудові асимптотично ефективних оцінок. Так, за методом Ньютона – Рафсона можна стартуючи з будь-якої слушної оцінки побудувати ”квазі-ОМВ” ($\hat{\theta}_n$), що збігається до ОМВ ($\hat{\theta}_{\text{ОМВ}}$), за наступною рекурентною схемою:

- спершу беремі довільну слушну оцінку $\hat{\theta}_0$ параметра θ ;
- обчислюємо рекурентно

$$\hat{\theta}_{n+1} = \hat{\theta}_n - \frac{\sum_{i=1}^n \ell_{\theta}(\theta, \hat{\theta}_{(n-1)\theta}, \hat{\theta}_{i\theta})}{\sum_{i=1}^n \partial_{\theta} \ell_{\theta}(\theta, \hat{\theta}_{(n-1)\theta}, \hat{\theta}_{i\theta})} \quad , \quad n \geq 1.$$

Тоді $\hat{\theta}_n \rightarrow \hat{\theta}_{\text{ОМВ}}, n \rightarrow +\infty$.

Наступний результат встановлює справедливість і формули для складових таких співвідношень:

$$\partial_{\theta}^2 \ell_{\theta}(\theta, \theta, \theta) = \partial_{\theta}(\theta, \theta, \theta) \partial_{\theta}(\theta, \theta, \theta), \tag{3.59}$$

де

$$\partial_{\theta}(\theta, \theta, \theta) = \begin{cases} \partial_{\theta}^2 \log \ell_{\theta}(\theta, \theta, \theta) + \partial_{\theta}(\theta, \theta, \theta)^2 = E_{\theta, \theta} \Xi_{\theta}^2, & \partial_{\theta}(\theta, \theta, \theta) > 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{3.60}$$

Теорема 3.3. Нехай $\theta \in \mathcal{O}^{3,2}(\mathbb{R} \times \Theta)$, має обмежені похідні $\partial_{\theta} \ell_{\theta}, \partial_{\theta}^2 \ell_{\theta}, \partial_{\theta}^3 \ell_{\theta}, \partial_{\theta}^4 \ell_{\theta}, \partial_{\theta}^5 \ell_{\theta}$ і для всіх $\theta \in \Theta, \theta \in \mathbb{R}$

$$|\partial_{\theta}(\theta)| + |\partial_{\theta} \ell_{\theta}(\theta)| + |\partial_{\theta}^2 \ell_{\theta}(\theta)| \leq \theta(1 + |\theta|). \tag{3.61}$$

Тоді густина перехідної імовірності має другу похідну $\partial_{\theta, \theta}^2 \varphi(\theta, \theta, \theta)$, яка є неперервною по $(\theta, \theta, \theta) \in (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$ і справджується (3.59).

Доведення. Доведення теореми дослівно повторює доведення Теореми 3.3, тому зупинимось лише на його окремих моментах.

Функціонали Ξ_1^1 і $\partial \Xi^1$ неперервно залежать (в \mathcal{D}_2) від $\varphi, \varphi, \varphi$. Тому можемо взяти похідну в правій частині (3.36), що дасть

$$\partial_{\theta, \theta}^2 \varphi(\theta, \theta, \theta) = \varphi(\theta, \theta, \theta) E_{\theta, \theta} \partial_{\theta} \Xi_1^1 + \varphi(\theta, \theta, \theta) \varphi(\theta, \theta, \theta)^2.$$

Ця функція є неперервною по (θ, θ, θ) оскільки φ, φ і $\partial \Xi^1$ неперервно залежать (в \mathcal{D}_2) від $\varphi, \varphi, \varphi$ і справджується співвідношення (3.40).

Використавши моментні оцінки для $\partial \varphi, \partial^2 \varphi, D(\partial \varphi), D(\partial^2 \varphi), D^2(\partial \varphi), D \varphi, D^2 \varphi$ і $D^3 \varphi$ одержимо, що

лежать в $\text{dom}(\varphi)$ і справджується співвідношення (3.58).

Для довільної тестової функції $\psi \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R})$, що має обмежені похідні запишемо

$$\varphi(\varphi) \Xi_{\varphi} = E_{\varphi} \varphi(\varphi) \varphi(\theta, \theta, \theta); \quad (3.62)$$

див. (3.60) щодо означення $\varphi(\theta, \theta, \theta)$. Оскільки тестова функція ψ довільна, то інтегральна рівність (3.62) доводить (3.59). \square

Зауваження 3.6. З твердження останньої теореми випливає, що логарифм густини перехідної імовірності має неперервну другу похідну по параметру на відкритій підмножині множини $(0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Theta$ визначеній нерівністю (3.31) і на цій підмножині допускає інтегральне представлення

$$\partial_{\theta, \theta}^2 \log \varphi(\theta, \theta, \theta) = E_{\theta, \theta} \Xi_{\varphi} - \left(E_{\theta, \theta} \Xi_{\varphi} \right)^2. \quad (3.63)$$

Зауваження 3.7.3 (3.62) при $\theta \equiv 1$ впливає, що для довільного $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \in \Theta$, $\theta > 0$

$$E_{\theta} \psi_{\theta}(\theta, \theta, \theta) = 0.$$

Зауваження 3.8. Для довільного $\theta < 1 + \theta/2$ існує стала θ залежна тільки від θ і така, що

Доведення. З моментних оцінок і формули (3.58) впливає (3.48) для будь-якого $\theta \in [1, 2 + \theta]$ з константами θ залежними тільки від θ . Комбінуючи співвідношення (3.36), (3.37), (3.59) і (3.60) одержимо

$$\partial_{\theta} \psi_{\theta}(\theta, \theta, \theta) = E_{\theta} \Xi_{\theta}^2 - \psi_{\theta}(\theta, \theta, \theta)^2,$$

Крім того, нерівність (3.64) прямо впливає з (3.48), моментної оцінки для θ і нерівності Йєнсена. □

3.8. Висновки

В цьому розділі побудовано версію числення Малявена для функціоналів від процесів Леві. Зокрема побудовано стохастичну похідну процесу Леві θ , встановлено стохастичну двічі диференційовність θ , розв'язку СДР керованого процесом θ , і знайдено відповідні дві стохастичні похідні $D\theta$ і $D^2\theta$. Крім того, знайдені моментні оцінки для θ , $D\theta$, $D^2\theta(D\theta)^{-1}$. Також було доведено диференційовність θ по параметру, встановлено стохастичну диференційовність $\partial_{\theta} \theta$ і знайдено $D\partial_{\theta} \theta$. За допомогою такої версії числення Малявена встановлено існування густини перехідної імовірності θ для θ . Встановлено двічі диференційовність по параметру функції θ і знайдено інтегральні представлення відповідних похідних. Доведено теорему про достатні умови регулярності статистичного експерименту породженого дискретними спостереженнями процесу θ , і встановлено нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.

РОЗДІЛ 4

ВЛАСТИВІСТЬ ЛАН ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ЗІ СТАЛИМ КРОКОМ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Мета цього розділу встановити достатні умови, за яких справджується властивість ЛАН для статистичних моделей породжених спостереженнями зі сталим кроком δ розв'язку СДР (1.1). З цією метою в першому підрозділі цього розділу сформульовано і доведено загальну теорему, що встановлює ЛАН за умов марковості процесу, що спостерігається.

4.1. Властивість ЛАН моделей, породжених дискретними спостереженнями процесу Маркова

Нехай X – процес Маркова зі значеннями в локально компактному метричному просторі X . Припустимо, що розподіл P^θ залежить від дійсного параметра θ ; щодо параметричної множини Θ припускаємо, що вона є інтервалом $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}$. Як і в попередньому розділі позначимо через P^θ розподіл X з початковим значенням $X_0 = \theta$, який відповідає значенню параметра θ ; сподівання відносно P^θ позначимо через E^θ . Для заданого $\delta > 0$, позначимо через $P_{\delta, \theta}^\theta$ розподіл P^θ вектора $X^\delta = \{X_{i\delta}, i = 1, \dots, n\}$, який є дискретними спостереженнями процесу X з кроком δ . Позначимо ще E_δ – статистичний експеримент, породжений вибіркою X^δ з $X_0 = \theta$, інакше кажучи

$$E_\delta = \left(X^\delta, V(X^\delta), P_{\delta, \theta}^\theta, \theta \in \Theta \right). \quad (4.1)$$

Мета цього параграфу встановити властивість ЛАН для послідовності експериментів $\{E_n\}$.

Припускаємо, що θ допускає густину перехідної імовірності $\theta_\theta(\theta; \theta, \theta)$ відносно деякої θ -скінченної міри ν . Крім того, припускаємо, що експеримент E_1 – регулярний.

Нагадаємо, що в цьому випадку визначені функції

$$\theta_\theta(\theta; \theta, \theta) = \partial_\theta \sqrt{\theta_\theta(\theta; \theta, \theta)}, \quad \theta_\theta(\theta; \theta, \theta) = 2 \theta_\theta(\theta; \theta, \theta) \sqrt{\theta_\theta(\theta; \theta, \theta)} \quad (4.2)$$

справджується рівність

$$F_{\theta_\theta}(\theta; \theta, \theta) = 0 \quad (4.3)$$

для кожних $\theta \in R, \theta \in \Theta$. Позначимо ще

$$\theta_\theta(\theta) = \sum_{\theta=1}^{\theta} E_{\theta_\theta} \left(\theta_\theta(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}) \right)^2 = 4 E_{\theta_\theta} \sum_{\theta=1}^{\theta} \left(\theta_\theta(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta) \right)^2 \nu(d\theta). \quad (4.4)$$

Якщо припустити, що статистичний експеримент E_θ – регулярний, то інтеграл вище скінченний і визначає інформацію Фішера для E_θ .

Зафіксуємо $\theta \in \Theta$ і припустимо, що для достатньо великих θ справедлива нерівність $\theta_\theta(\theta) > 0$.

Теорема 4.1. Припускаємо наступне:

1. Статистичний експеримент (3.44) – регулярний для кожних $\theta \in X$ і $\theta = 1$; для достатньо великих θ $\theta_\theta(\theta) > 0$.
2. Для деякої послідовності не випадкових симетричних додатньо визначених матриць $\{\theta(\theta) = \theta(\theta, \theta), \theta \in N\}$ послідовність

$$\left\{ \theta_\theta := \theta(\theta) \sum_{\theta=1}^{\theta} \theta_\theta \left(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta} \right), \theta_0 = \theta, \theta \geq N \right\}$$

є асимптотично нормальною з нульовим середнім і матрицею коваріацій $\Sigma(\theta)$.

$$3. \lim_{\theta \rightarrow \infty} E_{\theta} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \theta(\theta) \theta(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}) \right|_{\otimes 2} - \Sigma(\theta) = 0.$$

$$4. \lim_{\theta \rightarrow \infty} E_{\theta} \sum_{j=1}^{\theta} \theta(\theta) \theta(\theta; -1, \theta_{\theta\theta}) = 0.$$

$$5. \lim_{\theta \rightarrow \infty} \sup_{|\theta| < \theta} E_{\theta} \sum_{j=1}^{\theta} \left| \theta(\theta) \left(\theta_{\theta} \left(\theta + \theta(\theta) \theta; -1, \theta_{\theta} \right) - \theta_{\theta}(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta) \right) \right|^2 \theta(d\theta) = 0.$$

Тоді статистична модель має властивість ЛАН в точці θ .

Розділимо доведення на декілька лем; у всіх лемах вважаємо виконаними умови Теорема 4.1. Величини θ, θ, i фіксовані; припускаємо, що θ достатньо велике так, що $\theta + \theta(\theta) \theta \in \Theta$.

Позначимо

$$\theta_{\theta}(\theta) = \left(\theta + \theta(\theta)^T \theta; \theta_{\theta} \right)_{\theta(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})}^{-1/2} \left(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta} \right) = 0.$$

Лема 4.1. Мають місце наступні співвідношення

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\theta} E_{\theta} \theta_{\theta}(\theta)^2 \leq \frac{1}{4} \theta^T \Sigma(\theta) \theta \tag{4.5}$$

і

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\theta} E_{\theta} \left(\theta_{\theta}(\theta) - \frac{1}{2} \theta^T \theta(\theta) \theta(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}) \right)^2 = 0. \tag{4.6}$$

З огляду на довільність $\epsilon > 0$ цим завершується доведення леми.

Лема 4.2. Має місце збіжність

$$\sum_{i=1}^n (x_i(\epsilon))^2 \rightarrow \frac{\tau \sum(\epsilon)}{4}, \quad \epsilon \rightarrow \infty \tag{4.8}$$

за імовірністю.

Доведення. За нерівністю Чебишева

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \sum_{i=1}^n (x_i(\epsilon))^2 - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \tau \right| > \epsilon \right\} & < \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) - \frac{1}{4} \tau \right)^2 \\ & \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) - \frac{1}{4} \tau \right)^2 \\ & = \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) - \frac{1}{4} \tau \right)^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) + \frac{1}{4} \tau \right)^2, \end{aligned}$$

що за (4.7) при заданому $\epsilon > 0$ не перевищує

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\epsilon^2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) - \frac{1}{4} \tau \right)^2 & + \frac{1}{2\epsilon^2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) + \frac{1}{4} \tau \right)^2. \end{aligned}$$

За (4.6) перший доданок цього виразу прямує до нуля при $\epsilon \rightarrow \infty$. До того ж нерівність Коші разом з (4.5) і умовою 5 Теорема доводять, що верхня границя другого доданку не перевищує

$$\limsup \left(\sum_{i=1}^n E (x_i(\epsilon))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E \left(x_i(\epsilon) + \frac{1}{4} \tau \right)^2 \right)$$

Доведення. Позначимо

$$\sigma_{i,i} = (\sigma_{i,i}(\theta))^2 - E_{\theta, \theta-1} (\sigma_{i,i}(\theta))^2, \quad \sigma_{i,i} = \sum_{i=1}^{\theta} \sigma_{i,i},$$

тоді згідно з (4.8) достатньо показати, що $\sigma_{i,i} \rightarrow 0$ за імовірністю. Зафіксуємо $\epsilon > 0$ і покладемо

$$\sigma_{i,i}^{\epsilon} = (\sigma_{i,i}(\theta)) \cdot 1_{|\sigma_{i,i}(\theta)| \leq \epsilon} - E_{\theta, \theta-1} (\sigma_{i,i}(\theta)) \cdot 1_{|\sigma_{i,i}(\theta)| \leq \epsilon}, \quad \sigma_{i,i}^{\epsilon} = \sum_{i=1}^{\theta} \sigma_{i,i}^{\epsilon}.$$

За побудовою $\{\sigma_{i,i}^{\epsilon}, i=1, \dots, \theta\}$ є мартингал-різницею, тому

$$E_{\theta} \sigma_{i,i}^{\epsilon} = \sum_{i=1}^{\theta} E_{\theta} (\sigma_{i,i}^{\epsilon}) \leq \sum_{i=1}^{\theta} E_{\theta} (\sigma_{i,i}(\theta)) \cdot 1_{|\sigma_{i,i}(\theta)| \leq \epsilon} \leq \sum_{i=1}^{\theta} E_{\theta} (\sigma_{i,i}(\theta)) \cdot \epsilon.$$

Звідси за (4.5) і нерівністю Коші

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty} E_{\theta} \sigma_{i,i}^{\epsilon} / \theta \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{\sum (\sigma_{i,i}(\theta))}{\theta} \quad (4.12)$$

Далі оцінюємо різницю $\sigma_{i,i} - \sigma_{i,i}^{\epsilon}$. Зазначимо, що використовуючи перше твердження Лема 4.1, можна узагальнити Лему 4.2 і показати, що збіжність (4.8) має місце в смислі $\theta_1(P_{\theta}^{\epsilon})$ (Теорема 1.11). Зокрема це означає, що послідовність

$$\sum_{i=1}^{\theta} (\sigma_{i,i}(\theta))^2, \quad \theta \geq 1$$

є рівномірно інтегрованою. Звідси, оскільки за Лемою 4.3 імовірності подій

$$\Omega_{\theta}^{\epsilon} = \left\{ \max_{i \leq \theta} |\sigma_{i,i}(\theta)| > \epsilon \right\} \quad (4.13)$$

прямують до нуля при $\theta \rightarrow \infty$, маємо

$$E_{\theta} \sigma_{i,i}^{\epsilon} \cdot 1_{\Omega_{\theta}^{\epsilon}} = \sum_{i=1}^{\theta} (\sigma_{i,i}(\theta))^2 \cdot 1_{\Omega_{\theta}^{\epsilon}}$$

тому

Разом з (4.12) це дає $\limsup_{\theta \rightarrow \infty} E_{\theta} \sigma_{i,i}^{\epsilon} / \theta \leq \epsilon$

$$\frac{\sqrt{\sigma^T \Sigma(\theta) \sigma}}{2} -$$

що завершує доведення оскільки $\sigma > 0$ довільне. □

Завершальний підготовчий результат полягає в наступному.

Лема 4.5. Справджується

$$2 \sum_{\theta=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma) - \sigma^T \theta(\theta) \sum_{\theta=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}) \right) \rightarrow - \frac{\sigma^T \Sigma(\theta) \sigma}{4}, \quad \theta \rightarrow \infty \quad (4.14)$$

за імовірністю.

Доведення. Зазначимо, що наступна рівність

$$\left(\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma) \right)^2 = \frac{\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma + \theta(\theta)^T \sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})}{\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})} - 1 - 2 \mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma)$$

справедлива \mathbb{P}_{θ} -майже напевне. Крім того за марківською властивістю маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta, \theta-1} \frac{\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma + \theta(\theta)^T \sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})}{\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})} \\ = \frac{\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma + \theta(\theta)^T \sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta)}{\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta)} \mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta) \theta(\theta\theta) = 1; \end{aligned}$$

тому з Лема 4.4 випливає, що

$$\sum_{\theta=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\theta, \theta-1} \mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma) \rightarrow - \frac{\sigma^T \Sigma \sigma}{8}$$

за імовірністю. Тож залишається довести, що

$$\mathbb{E}_{\theta, \theta} := 2 \sum_{\theta=1}^{\infty} \left(\mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma) - \mathbb{E}_{\theta, \theta-1} \mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma) \right) - \sigma^T \theta(\theta) \sum_{\theta=1}^{\infty} \mathbb{E}_{\theta, \theta}(\sigma; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}) \rightarrow 0$$

за імовірністю. За (4.3) послідовність

$$D_n(\theta) - E_{\theta, \theta-1} D_n(\theta) - \theta^{-\tau} \psi(\theta; \theta_{(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}), \quad \theta = 1, \dots, \theta$$

є мартингал-різницею, тож

$$E_{\theta} \sum_{i=1}^{\theta} (D_i(\theta) - E_{\theta, \theta-1} D_i(\theta) - \theta^{-\tau} \psi(\theta; \theta_{(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}))^2 \leq 4 E_{\theta} \sum_{i=1}^{\theta} \theta^{-2\tau} \psi^2(\theta; \theta_{(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}),$$

що прямує до нуля при $\theta \rightarrow \infty$ за (4.6). □

Тепер можемо завершити доведення Теорема 4.1. Зафіксуємо $\square \in (0, 1)$ і розглянемо множини Ω_{\square} визначені (4.13). За Лемою 4.3 маємо $P_{\theta}^{\square}(\Omega_{\square}) \rightarrow 0$.

Використовуючи розклад Тейлора функції $\log(1 + \theta)$, отримаємо, що існує стала θ_{\square} і випадкові величини $\theta_{\theta\theta}$ такі, що $|\theta_{\theta\theta}| < \theta_{\square}$, для яких поза множини Ω_{\square} справджується рівність:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\theta} \log \frac{\theta_i(\theta + \psi(\theta)^{\tau} \theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})}{\theta_i(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})} &= 2^{-\theta} \sum_{i=1}^{\theta} (\theta_i(\theta) - \theta_i(\theta_{\theta\theta}))^2 + \sum_{i=1}^{\theta} \theta_{\theta\theta} / \theta_i(\theta)^{\beta}. \end{aligned}$$

Тоді за Лемою 4.2, Лемою 4.5, і Наслідком 4.1 маємо

$$\begin{aligned} \log \theta_{\theta, \theta}(\theta) &= \sum_{i=1}^{\theta} \log \frac{\theta_i(\theta + \psi(\theta)^{\tau} \theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})}{\theta_i(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta})} \\ &= \theta^{\tau} \psi(\theta) \sum_{i=1}^{\theta} \theta_i(\theta; \theta_{\theta(\theta-1)}, \theta_{\theta\theta}) - \frac{\theta^{\tau} \Sigma(\theta) \theta}{4} - \frac{\theta^{\tau} \Sigma(\theta) \theta}{4} + \Psi_{\theta}, \end{aligned}$$

де $\Psi_{\theta} \rightarrow 0$ за імовірністю. З асимптотичної нормальності (умова 2 Теорема 4.1) остаточно виводимо твердження Теорема 4.1.

Зауважимо на три можливих узагальнення Теорема 4.1, які можуть бути одержані без особливих змін в доведенні. Ми не будемо представляти їх детально оскільки вони не будуть використовуватись в цій роботі.

Зауваження 4.1. Твердження Теорема 4.1 залишається справедливим якщо φ має залежність від θ (з очевидними змінами умов 1 – 5).

Зауваження 4.2. Твердження Теорема 4.1 залишається справедливим, якщо замість φ підставити послідовність $\varphi_n \rightarrow \varphi$. Крім того, якщо в цьому випадку замість фіксованого φ підставити послідовність $\varphi_n \rightarrow \varphi$ співвідношення (1.4), (1.5) залишатимуться справедливими і при рівномірних версіях умов 2 – 5 Теорема 4.1 стверджуватиме, що модель має властивість рівномірної асимптотичної нормальності.

Зауваження 4.3. Якщо в означенні ЛАН матриця Σ – випадкова, то відповідна властивість називається умовною ЛАН. Тож якщо в першій умові Теорема 4.1 вимагати збіжність до умовного нормального закону з відповідними параметрами, теорема буде стверджувати умовну ЛАН моделі.

4.2. Властивість ЛАН для моделей породжених спостереженнями процесу, заданого СДР з шумом Леві

Розглядаємо процес φ , заданий рівнянням (1.1), в якому φ має вигляд (3.16) і задовольняє умові Н. Про коефіцієнт $\varphi_i(\vartheta)$ рівняння (1.1) припускаємо наступне.

А. (i) $\varphi \in \mathcal{D}^{3,2}(\mathbb{R} \times \Theta)$ має обмежені похідні $\partial_{\vartheta} \varphi, \partial_{\vartheta}^2 \varphi, \partial_{\vartheta}^3 \varphi, \partial_{\vartheta}^4 \varphi, \partial_{\vartheta}^5 \varphi, \partial_{\vartheta}^6 \varphi, \partial_{\vartheta}^7 \varphi, \partial_{\vartheta}^8 \varphi, \partial_{\vartheta}^9 \varphi, \partial_{\vartheta}^{10} \varphi$ і виконується умова (3.61).

(ii) Для заданого $\vartheta \in \Theta$, існує його окіл $(\vartheta_-, \vartheta_+) \subset \Theta$ такий, що

$$\limsup_{|\vartheta| \rightarrow \infty} \frac{\varphi}{\vartheta} < 0 \quad \text{рівномірно по } \vartheta \in (\vartheta_-, \vartheta_+).$$

Всі необхідні передумови для Теорема 4.1, наведеної в попередньому параграфі 4.1., доступні для $\varphi(\vartheta\vartheta) = \vartheta\vartheta$ (міри Лебега).

До того ж, за умов А і Н, при заданому ν відповідний процес Маркова ν є ергодичним, тобто для ν існує єдина імовірнісна інваріантна міра $\kappa_{\nu}^{\#}$. Цей факт легко перевіряється використовуючи достатні умови ергодичності розв'язку СДР керованого процесом Леві, наведеними в Теоремі 1.9. Позначимо $\{\nu_{\epsilon}^{\#}, \epsilon \in \mathbb{R}\}$ відповідну стаціонарну версію процесу ν ; тобто, процес Маркова, визначений на всьому \mathbb{R} , який має однакові з ν перехідні імовірності, а одновимірні розподіли рівні $\kappa_{\nu}^{\#}$. Існування такого процесу на відповідному імовірнісному просторі гарантується теоремою існування Колмогорова. Позначимо

$$\nu^2(\nu) = E \left(\nu_{\epsilon}^{\#}(\nu; \nu_0^{\#}, \nu_{\epsilon}^{\#}) \right)^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left(\nu_{\epsilon}^{\#}(\nu; \nu, \nu) \right)^2 \nu_{\epsilon}^{\#}(\nu; \nu, \nu) \nu_{\epsilon}^{\#}(\nu) \kappa_{\nu}^{\#}(\nu) d\nu. \tag{4.15}$$

Теорема 4.2. Нехай виконано умови А, Н з $\nu > 2$. Тоді, якщо $\nu^2(\nu) > 0$, статистична модель має властивість ЛАН з $\lambda(\nu) = 1/\sqrt{\nu}$ і $\Sigma(\nu) = \nu^2(\nu)$.

Щоб довести Теорему 4.2, перевіримо умови Теорема 4.1.

Зазначимо, що одним із стандартних шляхів побудови інваріантної міри $\kappa_{\nu}^{\#}$ взяти слабку границю (при $\nu \rightarrow \infty$) сім'ї середніх Хасмінського

$$\kappa_{\nu}^{\#}(\nu\nu) = \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} P_{\nu}^{\#}(\nu_{\epsilon} \in \nu\nu) d\nu_{\epsilon}$$

Тоді за лемою Фату, друге співвідношення в (3.46) дасть таку моментну оцінку для $\kappa_{\nu}^{\#}$:

Наслідок 4.2. Для кожного $\nu \in (2, 2 + \nu)$,

$$\int_{\mathbb{R}} |\nu|^{\nu} \kappa_{\nu}^{\#}(\nu\nu) < \infty.$$

Всюди нижче припускається, що умови Теорема 4.2 виконані.

Лема 4.6. Послідовність

$$\frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \sum_{i=1}^{\vartheta} \left(\vartheta_i, \vartheta_{\vartheta(i-1)}, \vartheta_{i,i} \right), \quad \vartheta \geq 1$$

є асимптотично нормальною відносно ϑ_{ϑ} з параметрами $(0, \vartheta^2(\vartheta))$, де $\vartheta^2(\vartheta)$ визначена в (4.15).

Доведення. Ідея доведення така ж як і в доведенні Теорема 3.3 [51]. Позначимо

$$\vartheta_{\vartheta}(\vartheta, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{\vartheta}} \sum_{i=1}^{\vartheta} \left(\vartheta_i, \vartheta_{\vartheta(i-1)}, \vartheta_{i,i} \right).$$

За Теоремою 1.8 (див. також Теорему 2.2 [59]), коефіцієнт ϑ -перемішування $\vartheta(\vartheta)$ для стаціонарної версії процесу ϑ не перевищує $\vartheta_1 \vartheta^{-\vartheta_2}$, де ϑ_1, ϑ_2 - деякі додатні сталі. Тоді, оскільки коефіцієнт перемішування $\vartheta(\vartheta) \leq \vartheta(\vartheta)$, то за центральною граничною теоремою для стаціонарних послідовностей (Теорема 1.7) і (3.46) маємо

$$\vartheta_{\vartheta}(\vartheta, \vartheta_{\vartheta}) \Rightarrow N(0, \vartheta^2(\vartheta)), \quad \vartheta \rightarrow \infty$$

де

$$\vartheta^2(\vartheta) = \sum_{\vartheta=-\infty}^{+\infty} E \left(\left(\vartheta_i, \vartheta_0, \vartheta_{i,i} \right) \left(\vartheta_i, \vartheta_{\vartheta(i-1)}, \vartheta_{i,i} \right) \right).$$

До того ж, умови Теорема 3.2 забезпечують існування експоненційного каплінгу для процесу ϑ (Теорема 1.10); тобто такого двокомпонентного процесу $\vartheta = (\vartheta^1, \vartheta^2)$, визначеного можливо на іншому імовірнісному просторі, і такого, що ϑ^1 має розподіл P_{ϑ}^1 , а ϑ^2 має такий самий розподіл як ϑ_{ϑ} , і для всіх $\vartheta > 0$

$$P_{\vartheta} \left(\vartheta^1 = \vartheta^2 \right) \leq \vartheta_1 \vartheta^{-\vartheta_2} \tag{4.16}$$

з деякими сталими ϑ_1, ϑ_2 . Тоді для будь-якої ліпшицевої неперервної

функції $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{\mathbb{E} \varphi(\varphi(\vartheta, \vartheta)) - \mathbb{E} \varphi(\varphi(\vartheta, \vartheta^{\vartheta}))} = \sqrt{\mathbb{E} \varphi(\varphi(\vartheta, \vartheta^1)) - \mathbb{E} \varphi(\varphi(\vartheta, \vartheta^2))} / \\
 & \leq \frac{\text{Lip}(\varphi)}{\sqrt{\vartheta}} \sum_{i=1}^{\vartheta} \mathbb{E} \left| \varphi(\vartheta; \vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1) - \varphi(\vartheta; \vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2) \right| \cdot 1_{(\vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1) = (\vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2)} \\
 & \leq \frac{2\text{Lip}(\varphi)}{\sqrt{\vartheta}} \sum_{i=1}^{\vartheta} \left(\mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1 \right| + \mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2 \right| \right) \cdot 1_{(\vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1) = (\vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2)} \\
 & \leq \frac{2\text{Lip}(\varphi)}{\sqrt{\vartheta}} \left(\mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1 \right| + \mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2 \right| \right) \cdot 1_{(\vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1) = (\vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2)}, \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

де $\vartheta, \vartheta > 1$ і такі, що $1/\vartheta + 1/\vartheta = 1$. Оскільки ϑ^1 має розподіл $P_{\vartheta}^{\vartheta}$, за (3.46)

одержимо при $\vartheta \in (2, 2 + \vartheta)$

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1 \right| = \mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^1, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^1 \right| \\
 & \leq \mathbb{E} \left(1 + \frac{1}{\vartheta_{(\vartheta-1)}^1} \right) \leq \vartheta + \vartheta^2 (1 + 1/\vartheta^{\vartheta}). \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2 \right| = \mathbb{E} \left| \vartheta_{(\vartheta-1)}^2, \vartheta_{\vartheta\vartheta}^2 \right| \\
 & \leq \mathbb{E} \left(1 + \frac{1}{\vartheta_{(\vartheta-1)}^2} \right) = \vartheta + \vartheta \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\vartheta^{\vartheta}} K^{\vartheta}(\vartheta), \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

а стала в правій частині є скінченною за Наслідком 4.2. Звідси, (4.16) і (4.17) дають

$$\sqrt{\mathbb{E} \varphi(\varphi(\vartheta, \vartheta))} \rightarrow \mathbb{E} \varphi(\vartheta), \quad \vartheta \rightarrow \infty, \quad \vartheta \sim N(0, \vartheta)$$

E'

φ^2

для кожної неперервної ліпшицевої функції $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Останнє дово-

дить, що послідовність $\{\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi), \varphi \geq 1\}$ є асимптотично нормальною відносно φ^2 з параметрами $(0, \varphi^2(\varphi))$.

Щоб завершити доведення, залишається показати, що

Це прямо випливає з (4.3) оскільки за марківською властивістю для φ'' ,

$$\begin{aligned} \varphi^2(\varphi) &= \varphi^2(\varphi) + 2 \sum_{\varphi=1}^{\infty} E \left(\varphi_{\varphi}(\varphi; \varphi_0, \varphi_{\varphi}(\varphi; \varphi_{\varphi(\varphi-1)}, \varphi_{\varphi\varphi})) \right) \\ &= \varphi^2(\varphi) + 2 \sum_{\varphi=1}^{\infty} E \left(\varphi_{\varphi}(\varphi; \varphi_0, \varphi_{\varphi}(\varphi; \varphi_{\varphi(\varphi-1)}, \varphi_{\varphi\varphi})) \right) E' \left(\varphi_{\varphi}(\varphi; \varphi, \varphi_{\varphi}) \right) \\ &= \varphi^2(\varphi) + 2 \sum_{\varphi=1}^{\infty} \dots \end{aligned}$$

□

Аналогічно можна довести, що

$$\frac{1}{\varphi} \sum_{\varphi=1}^{\infty} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi; \varphi_{\varphi(\varphi-1)}, \varphi_{\varphi\varphi}) \right)^2 \rightarrow \varphi^2(\varphi), \quad \varphi \rightarrow \infty$$

в $\mathcal{P}_1(\mathbb{P}_{\varphi}^{\varphi})$; міркування повністю ті самі, тільки треба замінити посилання на Центральну граничну теорему для стаціонарних послідовностей посиланням на ергодичну теорему Біркгофа – Хінчіна. Звідси,

$$\varphi_{\varphi}(\varphi) \sim \varphi^2(\varphi), \quad \varphi(\varphi) \sim \frac{1}{\sqrt{\varphi^2(\varphi)}}, \quad \varphi \rightarrow \infty. \tag{4.20}$$

Тому умови 2 – 4 Теорема 4.1 виконано. Умова 1 Теорема 4.1 також виконана: регулярність експерименту доведена в Теоремі 3.2, адодатність $\varphi_{\varphi}(\varphi)$ випливає з (4.20).

Перейдемо до перевірки останньої умови Теорема 4.1. За Теоремою 3.2 функція $\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi, \varphi)$ - φ_2 -диференційовна по φ , і

$$\partial_{\varphi} \varphi_{\varphi} = \frac{1}{2} (\partial_{\varphi} \varphi_{\varphi}) \sqrt{\frac{1}{\varphi_{\varphi} + \frac{1}{4} (\varphi_{\varphi})^2}} \sqrt{\frac{1}{\varphi_{\varphi}}}$$

Тоді

$$E'_{\varphi} \int_{\mathbb{R}} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi + \varphi(\varphi)\varphi, \varphi_{\varphi(\varphi-1)}, \varphi_{\varphi\varphi}) - \varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi_{\varphi(\varphi-1)}, \varphi_{\varphi\varphi}) \right)^2 d\varphi$$

остання нерівність випливає з (3.64) і (3.46). Скориставшись (3.49), одержимо оцінку

$$\sup_{|\theta| < \delta} |\theta|^{-2} E_{\theta} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \theta_{\ell} \left(\theta + |\theta| \theta_{\ell}, \theta_{\ell(\ell-1)}, \theta \right) - \theta_{\ell}(\theta, \theta_{\ell(\ell-1)}, \theta) \right|^2 d\theta \leq C \delta^2 |\theta(\delta)|^4,$$

в якій стала C залежить лише від δ . Це співвідношення разом з (4.20) завершує доведення останньої умови Теорема 4.1, а отже і доведення Теорема 4.2.

4.3. Висновки

Доведено загальну теорему про достатні умови, за яких статистична модель, породжена дискретними спостереженнями процесу Маркова, має властивість ЛАН. Доведено ЛАН у випадку дискретних спостережень зі сталим кроком моделей заданих СДР керованих шумом Леві.

РОЗДІЛ 5

ПЕРЕВІРКА ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДУ ОЦІНЮВАННЯ

В цьому розділі для статистичної моделі досліджуваної в попередньому розділі пропонується алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання. Згідно з результатами попередніх розділів, модель має властивість ЛАН, тому за мінімаксною теоремою Гаєка існує нижня границя ризиків. Однак ця границя виражається в термінах інформації Фішера, що не може бути явно обчислена. В цьому розділі будується перше наближення інформації Фішера, оцінюється похибка такого наближення і проводиться порівняння ефективності методу найменших квадратів з оптимальною.

5.1. Попередні пояснення і обговорення

За мінімаксною теоремою Гаєка [30], якщо статистична модель має властивість ЛАН, існує нижня границя ризиків пов'язаних із вибором того чи іншого метода оцінювання. Згідно з цією теоремою для квадратичної функції втрат

$$l_{\theta}(\hat{\theta}, \theta) = \left(\sqrt{\theta}(\hat{\theta} - \theta) \right)^2,$$

довільної оцінки $\hat{\theta}$ і будь-якого $\epsilon > 0$

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} \sup_{|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon} E^{\theta} \left(\sqrt{\theta}(\hat{\theta} - \theta) \right)^2 \geq \theta^{-1}(\theta_0), \quad (5.1)$$

де $I(\theta_0)$ - границя нормованих інформацій Фішера, тобто

$$I(\theta_0) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{1}{\theta} I(\theta).$$

Оскільки за результатами попереднього розділу справджується властивість ЛАН, то справедливим є і співвідношення (5.1). Зокрема при виконанні умов А і Н процес X_n є ергодичним та

$$I(\theta_0) = E_{\theta_0} \left(\frac{dP_{\theta_0}}{dP_{\theta_0}} \right)^2,$$

де dP_{θ_0} - стаціонарний розв'язок рівняння (1.1). Проте в умовах досліджуваної моделі точне знаходження величини $I(\theta_0)$ унеможлиблюється з наступних причин:

- інваріантна міра процесу X_n не відома,
- для функції $I(\theta)$ відоме лише інтегральне зображення (див. формулу (3.37)),
- усереднення відносно розподілу моста, що відповідає процесу X_n , є занадто складним для реалізації.

Для вирішення цієї проблеми пропонується наступна схема. Спочатку для заданої точності $\Delta > 0$ вибираємо номер $n_0 = n_0(\Delta)$ такий, що

$$E_{\theta_0} \left(\frac{dP_{\theta_0}}{dP_{\theta_0}} \right)^2 < \Delta, \tag{5.2}$$

потім за формулою (3.37) та нерівністю Йенсена для умовного математичного сподівання записуємо оцінку

$$E_{\theta_0} \left(\frac{dP_{\theta_0}}{dP_{\theta_0}} \right)^2 \leq E_{\theta_0} \Xi^1(\theta_0)^2, \tag{5.3}$$

де $\Xi^1(\theta_0)$ визначається формулою (3.33). Остаточно одержуємо верхню оцінку для інформації по Фішеру:

$$I(\theta_0) \leq E_{\theta_0} \Xi^1(\theta_0)^2 + \Delta =: I(\theta_0, \theta_0) + \Delta.$$

Припустимо, що вибрано метод оцінювання і $\hat{\theta}_n$ - оцінка параметра θ_0 за цим методом. Асимптотичною якістю оцінки може слугувати величина $\rho(\hat{\theta}_n) = E \rho(\hat{\theta}_n, \theta_0)$, яка інтерпретується як відносна ефективність оцінки відносно теоретичної границі Гаєка. Оскільки $\rho(\theta_0)$ неможливо обчислити, замінюємо її верхньою оцінкою $\rho(\hat{\theta}_n, \theta_0)$. Останнім кроком замінюємо математичні сподівання на вибіркові середні. Зауважимо, що запропонований підхід дозволяє одержати як оцінку ефективності методу оцінювання, так і оцінку долі випадковості (величина $\rho(\hat{\theta}_n, \theta_0) / \rho(\hat{\theta}_n)$) втраченої при заміні умовного математичного сподівання на безумовне (нерівність (5.3)).

Запропонований в цьому розділі алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання полягає в наступному:

- вибираємо метод оцінювання і будуємо оцінку $\hat{\theta}_n$ невідомого параметра θ_0 ;
- генеруємо n траєкторій процесу заданого рівнянням (1.1) з $\theta = \hat{\theta}_n$ і по кожній з них будуємо вибірку розміру m ;
- обчислюємо оцінки $\hat{\theta}_i^m, i = 1, \dots, n$ і знаходимо вибіркову дисперсію
$$\hat{\rho}^2(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{\theta}_i^m - \hat{\theta}_n}{\sqrt{\rho(\hat{\theta}_n)}} \right)^2$$
;
- обчислюємо θ_0 і генеруємо ще n траєкторій з $\theta = \theta_0$, по кожній з них обчислюємо $\Xi^{1,m}(\theta_0), i = 1, \dots, n$;
- знаходимо вибіркове середнє $\rho_n(\hat{\theta}_n, \theta_0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Xi^{1,m}(\theta_0)^2$;
- за значенням $\rho_n(\hat{\theta}_n, \theta_0) / \hat{\rho}^2(\hat{\theta}_n)$ робимо висновок про ефективність методу.

Запропонований алгоритм ілюструється на конкретному прикладі.

5.2. Перше наближення теоретичної інформації Фішера

В цьому підрозділі дається спосіб перевірки співвідношення (5.2).

Нехай $\theta_0 > 0$ - фіксоване. Розглянемо рівняння (1.1) зі стартовою точкою $\theta_0 = \theta_0$. Позначимо $\theta_1^1 = \partial_{\theta} \theta$, $\theta_1^2 = D \theta_1^1$, $\theta_1^3 = D \partial_{\theta} \theta$, $\theta_1^4 = D \theta_1^3$. Тоді (див. параграф 3.6.) $\bar{\theta} := (\theta_1^1, \dots, \theta_1^4)$ є розв'язком системи

$$\left\{ \begin{aligned} \theta_1^1 &= \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta^1 + \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta, \\ \theta_1^2 &= \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta^2 + D \theta; \\ \theta_1^3 &= \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta^3 + \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta^2 + \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta^1 \theta^2; \\ \theta_1^4 &= \partial_{\theta} \theta(\theta) \theta^4 + \partial_{\theta} \theta(\theta) (\theta^2)^2 + D^2 \theta; \\ &= 0, \theta = 1, \dots, 4. \end{aligned} \right. \quad (5.4)$$

Вподальшому $\bar{\theta}$ будемо шукати чисельно методом Ейлера. Координати $\bar{\theta}$ з складовими формули для Ξ^1 , див. (3.33).

Позначимо θ -інваріантна міра процесу θ ,

$$\Xi_{\theta} = \frac{(\partial_{\theta} \theta) \theta(1)}{D \theta} + \frac{(\partial_{\theta} \theta) D^2 \theta}{(D \theta)^2} - \frac{D(\partial_{\theta} \theta)}{D \theta}.$$

Лема 5.1. Нехай для кожного $\theta_0 > 0$ та $\theta \in \mathbb{R}$ існують додатні сталі θ_P^1 , θ_P^2 , $\theta_{\pm}(\theta, \theta)$ та $\theta_{\pm\theta\theta}(\theta)$ такі, що для всіх $\theta \in \Theta$

$$\begin{aligned} P_{\theta, \theta_0}^1 - \theta / \theta &\leq \theta_P^1(\theta) - \theta_P^2 \theta_0, \\ E_{\theta}^1 / E_{\theta}(\theta_0) &\leq \theta_{\pm}(\theta, \theta), \quad E_{\theta}^4 / E_{\theta} &\leq \theta_{\pm\theta\theta}(\theta). \end{aligned}$$

Тоді

$$\theta(\theta) - E_{\theta}^1 \left(\theta(\theta, \theta_{\theta_0}, \theta_{\theta_0+\theta}) \right)^2 \leq \theta_P^1 - \theta_P^2 \theta_0,$$

де

$$\varphi_1 = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln (\varphi_{\Xi}(\varphi, \varphi) + \varphi_{\Xi^{\circ\circ}}(\varphi)) + \frac{1}{2} \varphi_P(\varphi), \quad \varphi_2 = \frac{1}{2} \varphi_P(\varphi)$$

Зауваження 5.1. Вирази для констант φ_P^1 та φ_P^2 будуть отримані в Теоремі 5.1, для констант φ_{Ξ} та $\varphi_{\Xi^{\circ\circ}}$ в Лемах 5.2 – 5.5.

Доведення. Доведення аналогічне доведенню Лемми 4.6, однак нам потрібні явні вирази φ_1 та φ_2 , тож розглянемо його схематично.

Оскільки умови A та H є достатніми для існування експоненційного каплінгу для процесу φ , тобто, такого процесу $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2)$, що φ^1 має розподіл P^{φ} , φ^2 має розподіл φ^{φ} і для всіх $\varphi > 0$

$$\varphi(\varphi^1 = \varphi^2) \leq \varphi_P^1(\varphi) - \varphi_P^2.$$

враховуючи останню нерівність запишемо

$$\begin{aligned} & \varphi(\varphi) - E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi_{\varphi_0}, \varphi_{\varphi_0+\varphi}) \right)^2 \\ &= E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^1, \varphi^1) \right)^2 - E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^2, \varphi^2) \right)^2 \\ &\leq E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^1, \varphi^1) \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^2, \varphi^2) \right)^2 \mathbf{1}_{\{\varphi_{\varphi_0+\varphi}(\varphi_{\varphi_0}, \varphi_{\varphi_0+\varphi})\}} \\ &\leq \left(E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^1, \varphi^1) \right)^2 - \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^2, \varphi^2) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\varphi(\varphi^1 = \varphi^2) + \varphi_{\varphi_0+\varphi}(\varphi^1 = \varphi^2) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \left(E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^1, \varphi^1) \right)^4 + E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^1, \varphi^1) \right)^4 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\varphi_P^1(\varphi) - \varphi_P^2). \end{aligned}$$

Далі за нерівністю Йенсена для умовного математичного сподівання

$$\begin{aligned} E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi^1, \varphi^1) \right)^4 &= E_{\varphi} \left(\varphi_{\varphi}(\varphi, \varphi_{\varphi_0}, \varphi_{\varphi_0+\varphi}) \right)^4 = E_{\varphi} \left(E_{\varphi_{\varphi_0}, \varphi_{\varphi_0+\varphi}} \varphi_{\varphi}(\varphi) \right)^4 \\ &\leq E_{\varphi} E_{\varphi_{\varphi_0}, \varphi_{\varphi_0+\varphi}} \varphi_{\varphi}(\varphi) \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$f_0 = f_0 + \epsilon \quad 0 \leq \epsilon$$

Комбінуючи останні три співвідношення виводимо твердження лема. \square

5.2.1. Константи $\rho^1(\epsilon)$ та ρ^2

Для пошуку констант $\rho^1(\epsilon)$ і ρ^2 скористаємось Теоремою 4.2 [12]. Для цього введемо наступні позначення:

$$\rho_1 = \sup_{\epsilon \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{Q}} |\rho_{\delta}(\epsilon)|, \quad \rho_2 = \sup_{\epsilon \in \mathbb{R}, \delta \in \mathbb{Q}} |\rho_{\delta}^2(\epsilon)|,$$

для деяких $\epsilon, \delta, \epsilon_0, \delta_0 > 0, \epsilon, \delta \in (0, 1)$ і множини $\Gamma \in \mathbb{R}$ такої, що $\rho(\Gamma) < +\infty$

$$L = (\epsilon \delta \rho_1 + 2\epsilon \delta + 4\delta) \rho_1^{\delta_0 \epsilon_0} + \left(\epsilon(\epsilon + \delta) + \frac{\rho_2 \delta^2}{2} \right),$$

$$\rho_1 = \inf_{\delta} \left(\epsilon \in \Gamma : |\rho_{\delta}(\epsilon + \delta) - \rho_{\delta}(\epsilon)| > \frac{\epsilon}{\delta} \leq \delta \right),$$

$$P_1 = \frac{1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\epsilon} \rho_1^{\delta_0 \epsilon_0}\right)}{\delta} \left(\frac{5\delta}{2\delta^2} \rho_1^{\delta_0 \epsilon_0} \right) \left(\frac{\rho_2 \delta^2}{\epsilon(\epsilon + \delta)} \right)$$

$([\epsilon]) = \max\{\delta \in \mathbb{Z} : \delta \leq \epsilon\}$ – ціла частина числа ϵ ;

$$P_2 = \sup_{|\delta_0| \leq \delta_0} \left(\sup_{|\delta| \leq \delta} |\rho_{\delta}(\delta)| > \delta - \frac{\epsilon \rho_1^{\delta_0 \epsilon_0}}{\delta} \right).$$

Нехай M – множина тих $\delta \in \mathbb{Q}^2(\mathbb{R})$, для яких функція

$$\delta \rightarrow \left| \frac{\rho_{\delta}(\delta + \delta)}{\delta} \right|$$

є локально обмеженою. Покладемо для $\delta \in M$

$$A\delta(\epsilon) = \delta'(\epsilon) \rho_{\delta}(\epsilon) + \left(\rho_{\delta}(\delta + \delta) - \rho_{\delta}(\delta) - \delta'(\delta) \rho_1^{\delta_0 \epsilon_0} \right) \rho_{\delta}(\delta), \quad \delta \in \mathbb{R}.$$

Теорема 5.1. [12, Теорема 4.2] Припускаємо наступне:

1) існує невід’ємна функція $\square \in M$ і сталі $\delta, \delta_0 > 0$ такі, що

$$A \square \leq -\delta \square + \delta, \quad \square(\delta) \rightarrow +\infty, \quad |\delta| \rightarrow +\infty,$$

2) $L \leq \delta \delta_0^{-2\delta_0}, \quad K \delta^{\delta_0} \leq \frac{1}{2} \square(1 - \delta)(1 - \delta) \delta,$

3) існують $\delta_1, \delta_1 > 0$ і $\delta \in (0, 1)$ такі, що

$$\delta := \inf_{|\delta| \leq \delta_1, |\delta| \leq \delta_1} \sup_{\substack{\delta \in \delta(\delta, \delta_1) \\ \delta \in \delta(\delta, \delta_1)}} \delta(|\delta| - \delta) < K, \quad |\delta| \leq \delta_0 > 0,$$

$$\square(\delta) + \square(\delta) \geq \max \left(\frac{2\delta}{\delta_1}, 1 \right), \quad \max\{|\delta|, |\delta|\} \geq \delta_1.$$

Тоді процес δ має єдину інваріантну міру δ і справедлива оцінка

$$\|P_{\delta, \delta} - \delta\|_{\delta} \leq \delta P(\delta)^{1-\delta} P_{\delta}^{\delta}, \quad \delta \geq 0,$$

де

$$P_{\delta}^{\delta} = \ln(1 + \square(\delta)) + \frac{(1 - \delta) \delta \delta}{2} + \max \left(\ln \left(\frac{\delta}{\delta} \right), 0 \right) + \ln \left(\frac{4}{1 - (1 - \square)^{1/2}} \right),$$

$$C^{\delta} = \frac{(1 - \delta) \delta}{4 \max(\delta, 1)},$$

$$\delta = \delta + \delta_1, \quad \square = \delta \delta \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right)^2 (P_1 - P_2),$$

$$\delta = \frac{1}{\ln(1/\square)} - \frac{(1 - \delta) \delta}{2} \delta + \ln \left(1 + \frac{4\delta}{\delta} + 4 \sup_{|\delta| \leq \delta_1} \delta(\delta) \right),$$

Зазначимо, що в нашому випадку умова 1) теореми (умови Ляпунова) виконується внаслідок [49] або [59], а умови 2) та 3) внаслідок [12].

5.2.2. Константи α_{\pm} та β_{\pm}

Для того щоб знайти сталі α_{\pm} і β_{\pm} необхідно оцінити моменти всіх складових, що фігурують в формулі (3.33).

Лема 5.2. Нехай умова 1) теореми 5.1 виконується для функцій $\varphi(x) = |x|^p$, $p \geq 2$ зі сталими α та β . Нехай існують сталі $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, $\beta = 1, 2$

такі, що для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $\theta \in \Theta$

$$\alpha_1 \alpha(x) \leq \alpha^1 (1 + |x|), \quad \beta \alpha(x) \leq \alpha^2. \tag{5.5}$$

Тоді

1) для будь-яких $\theta \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}$

$$E^{|\theta|} \alpha(x) \leq \alpha^1 + \frac{\alpha^2}{\theta}. \tag{5.6}$$

2) для будь-яких $\theta > 0$ та $x \in \mathbb{R}$

$$E^{\theta} \beta |x|_{\theta_0 + \theta} \leq \beta \alpha(\theta, \theta, \theta),$$

де

$$\beta \alpha(\theta, \theta, \theta) = 2^{\theta-1} (\alpha^1 \theta)^{\theta} \left(1 + |x| + \frac{2 \alpha^2}{\theta} \right)^{\theta}$$

Доведення. Співвідношення (5.6) є наслідком Лемми 3.3 [49].

Записавши перше рівняння системи (5.4) в інтегральній формі, одержимо

$$\partial_{\theta} \beta |x|_{\theta_0 + \theta} = \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \theta} \left(\partial_{\theta} \alpha(x) \partial_{\theta} \theta + \partial_{\theta} \alpha(x) \right) \theta^{\theta}.$$

Звідси, з урахуванням (5.5) маємо

$$\int_2^{\theta_0 + \theta} \dots \int_1^{\theta_0 + \theta} \dots$$

$$\begin{aligned} \theta_{i, \theta_0 + \theta} / \leq \theta_{i, \theta_0} & \quad \theta_{\theta \theta \theta} / \theta_{\theta \theta} + \theta_{\theta \theta} & \quad 1 + / \theta_{\theta} / \theta_{\theta} \\ = 2^{i-1} & \quad \theta_{\theta \theta \theta} / \theta_{\theta \theta} + \theta_{\theta \theta} & \quad \theta_{\theta \theta} / \theta_{\theta \theta} \end{aligned}$$

що разом з лемою Гронуола – Белмана дає

$$\theta_{i, \theta_0 + \theta} / \leq \left(\theta_{\theta \theta}^1 + \theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \theta_{\theta \theta} / \theta_{\theta \theta} \theta_{\theta \theta}^2$$

Тому

$$\begin{aligned} \theta_{i, \theta_0 + \theta} / \leq 2^{i-1} & \quad \left(\theta_{\theta \theta}^1 + \theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \theta_{\theta \theta} / \theta_{\theta \theta} \theta_{\theta \theta}^2 \\ \leq 2^{i-1} & \quad \left(\theta_{\theta \theta}^1 + \theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \theta_{\theta \theta} / \theta_{\theta \theta} \theta_{\theta \theta}^2 \end{aligned}$$

Взявши до уваги (5.6), одержимо після усереднення останньої нерівності

$$\begin{aligned} E_{\theta_0} \theta_{i, \theta_0 + \theta} / \leq 2^{i-1} & \quad \left(\theta_{\theta \theta}^1 + \theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \theta_{\theta \theta} / \theta_{\theta \theta} \theta_{\theta \theta}^2 \\ = 2^{i-1} & \quad \left(\theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \left(1 + / \theta_{\theta_0} / \theta_{\theta} + \frac{\theta_{\theta \theta}}{\theta_{\theta \theta}} \right) \theta_{\theta \theta}^2 \end{aligned}$$

Остаточно, скориставшись співвідношенням (5.6) ще раз, виводимо

$$\begin{aligned} E_{\theta_0} \theta_{i, \theta_0 + \theta} / & = E_{\theta_0} E_{\theta_0} \theta_{i, \theta_0 + \theta} / \leq E_{\theta_0} 2^{i-1} \left(\theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \left(1 + / \theta_{\theta_0} / \theta_{\theta} + \frac{\theta_{\theta \theta}}{\theta_{\theta \theta}} \right) \theta_{\theta \theta}^2 \\ = 2^{i-1} & \quad \left(\theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \left(1 + E_{\theta_0} / \theta_{\theta_0} / \theta_{\theta} + \frac{\theta_{\theta \theta}}{\theta_{\theta \theta}} \right) \theta_{\theta \theta}^2 \leq 2^{i-1} \left(\theta_{\theta \theta}^1 \right)^{i-1} \left(1 + / \theta_{\theta} / \theta_{\theta} + \frac{2 \theta_{\theta \theta}}{\theta_{\theta \theta}} \right) \theta_{\theta \theta}^2 \end{aligned}$$

що завершує доведення лема. □

Наступна лема доводиться аналогічно.

Лема 5.3. Нехай виконано умови Лема 5.2. Припускаємо наступне:

- існують сталі $\theta_{\theta}^{\theta} > 0$, $\theta = 3, 4$ такі, що для будь-яких $\theta \in \mathbb{R}$ і $\theta \in \Theta$

$$\theta_{\theta \theta \theta}(\theta) / \leq \theta^3, \quad \theta_{\theta \theta \theta}(\theta) / \leq \theta^4.$$

- для кожного $\delta > 0$, $\delta \geq 2$ існують додатні сталі $\mathcal{E}_{D\delta}(\delta, \delta)$ та $\mathcal{E}_{D^2\delta}(\delta, \delta)$ такі, що

$$\mathcal{E}/D\delta/\delta \leq \mathcal{E}_{D\delta}(\delta, \delta), \quad \mathcal{E}/D^2\delta/\delta \leq \mathcal{E}_{D^2\delta}(\delta, \delta).$$

Тоді для будь-якого $\delta \in \mathbb{R}$
 $\leq \mathcal{E}_{D\delta}(\delta, \delta),$

$$\mathcal{E}/D\delta/\delta_{\delta_0+\delta}/\delta \leq \mathcal{E}_{D\delta}(\delta, \delta, \delta),$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{D\delta}(\delta, \delta) &= \mathcal{E}_{D\delta}(\delta, \delta) \delta^{2\delta}, \\ \mathcal{E}_{D^2\delta}(\delta, \delta) &= 2^{\delta-1} (\delta^4 \delta)^\delta \mathcal{E}_{D\delta}(2\delta, \delta) + \mathcal{E}_{D^2\delta}(\delta, \delta) 2^{\delta\delta\delta}, \end{aligned}$$

Лема 5.4. Нехай виконано умову (5.5) Лемми 5.2. Нехай послідовність $\{\delta_n, \delta_n \geq 1\}$ додатна, строго монотонна та ряд $\sum_{\delta=1}^{+\infty} \delta_n, \delta_n \geq 2$ збігається.

Тоді для будь-якого $\delta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}^\delta / D\delta_{\delta_0+\delta} / \delta^{-\delta} \leq \mathcal{E}_{D\delta}^-(\delta, \delta), \tag{5.7}$$

де

$$\mathcal{E}_{D\delta}^-(\delta, \delta) = \sum_{\delta=1}^{\infty} \delta_{\delta+1}^{-\delta\delta} + \frac{1}{\delta_1}, \quad \delta_{\delta} = \delta : \delta^2 \sqrt{\delta_{\delta} \leq \delta / \delta_1}.$$

Доведення. Скористаємось формулою (3.20) для $D\delta$. Зауважимо, що для будь-якого $\delta_0 \leq \delta \leq \delta_0 + \delta$ за умовою (5.5), $\mathcal{E}_{\delta_0+\delta} \mathcal{E}^{-1} \geq \delta^{-2\delta^2}$. Тому

$$D \varphi_{\theta_0 + \theta} \geq \theta^-$$

Запишемо

$$E(\varphi_\theta)^{-\theta} = \sum_{\theta=1}^{\infty} E(\varphi_\theta)^{-\theta} \mathbf{1}$$

Оскільки

$$= \exp \left\{ -\theta \varphi_\theta : \sqrt{\varphi_\theta} \leq \theta / \leq \theta_1 \right\},$$

то

$$\theta=1$$

Залишається зауважити, що за умовою H(iv) останній ряд є збіжним. \square

Підсумовуючи, з Лем 5.2 – 5.4 виводимо:

Лема 5.5. Нехай виконано умови Лем 5.2 – 5.4. Припустимо, що існує стала

θ_θ така, що

$$E \theta(1)^8 \leq \theta_\theta.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \theta_\pm(\theta, \theta) = & 27 \sqrt[4]{\theta_\theta \theta(\theta, 16, \theta) \theta_D^-(16, \theta) \theta_\theta} \\ & + \sqrt[4]{\theta_\theta \theta(\theta, 16, \theta) \theta_D^-(32, \theta) \theta_{D^2} \theta(8, \theta) + \sqrt[4]{\theta_{D\theta} \theta(\theta, 8, \theta) \theta_D^-(8, \theta)}}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\theta_{\pm\theta\theta}(\theta) = \theta_\pm(0, \theta).$$

Доведення. З (3.33) маємо

$$\begin{aligned} E \theta_\pm^1(\theta_0)^4 = & E \theta_\pm \left(\frac{(\partial_\theta \theta_\theta + \theta) \theta(1)}{D \theta_{\theta_0 + \theta}} + \frac{(\partial_\theta \theta_\theta + \theta) D^2 \theta_\theta}{(D \theta_{\theta_0 + \theta})^2} - \frac{D(\partial_\theta \theta_\theta + \theta)}{D \theta_{\theta_0 + \theta}} \right)^4 \\ \leq & 3 E \theta_\pm \left(\frac{(\partial_\theta \theta_\theta + \theta) \theta(1)}{D \theta_{\theta_0 + \theta}} + E \theta_\pm \frac{(\partial_\theta \theta_\theta + \theta) D^2 \theta_\theta}{(D \theta_{\theta_0 + \theta})^2} + E \theta_\pm \frac{D(\partial_\theta \theta_\theta + \theta)}{D \theta_{\theta_0 + \theta}} \right)^4 \end{aligned}$$

$$\leq 3^3 \left(\left| E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} + \theta / 16 \right|_4 \left| E / \theta(1) / \theta \right|_2 \left| E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} + \theta / 16 \right|_4 \right. \\
+ \left. \left| E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} + \theta / 16 \right|_4 \left| E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} + \theta / 8 \right|_2 \left| E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} + \theta / 8 \right|_2 \left| E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} + \theta / 8 \right|_2 \right) \\
+ (\partial_{\theta} \theta(16, \theta))^4 (\partial_{D^2} \theta(8, \theta))^2 \partial_{\theta} (32, \theta)^4$$

(8, θ)

Далі за Наслідком 3.4 [49] $E' / \partial_{\theta} \theta_{\theta} \leq \frac{\theta}{4}$, тому $\partial_{\theta} \theta(\theta) = \partial_{\theta}(0, \theta)$. □

5.3. Приклад

Розглянемо СДР виду (1.1) з $\theta_0 = 1$,

$$\theta_{\theta}(\theta) = -2\theta + \sin(\theta + \theta), \quad \theta \in (0, 2\theta),$$

$$\theta(\theta\theta) = \frac{1/\theta \leq 1}{\theta/4} \theta\theta.$$

Припустимо, що спостереження відбуваються з кроком $\theta = 1$. Будемо перевіряти ефективність оцінювання методом найменших квадратів, тобто

$$\hat{\theta}_{\theta} = \operatorname{argmin}_{\theta \in \Theta} \sum_{\theta=1}^{\theta} \left(\theta_{\theta\theta} - \theta_{\theta(\theta-1)} - \theta_{\theta}(\theta_{\theta(\theta-1)}) \right)^2.$$

Згенеруємо вибірку для $\theta_0 = 1$ об'єму $\theta = 2000$. Оцінка $\hat{\theta}_{\theta} = 1.04$.

Згенеруємо ще $\theta = 1000$ вибірок з $\theta = 1.04$, об'єму $\theta = 2000$ кожна. Для кожної вибірки будемо оцінку найменших квадратів $\hat{\theta}_{200}$, $\theta = 1, \dots, 1000$ та знаходимо

$$\hat{\theta}_{1000}(\hat{\theta}_{\theta}) = \frac{1}{1000} \sum_{\theta=1}^{2000} \left(\sqrt{\hat{\theta}_{200} - 1.02} \right)^2 = 2.98.$$

Знайдемо значення сталих θ_1 та θ_2 з Лема 5.1. Для цього визначимо сталі $\theta_P^1(1)$ і θ_P^2 за допомогою Теорема 5.1. Для перевірки умови 1) цієї теорема покладемо $\square(\theta) = \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$. Тоді

$$A^2 = 2(-2 + \sin(\theta + \theta)) + ((\theta + \theta)^2 - \theta^2 - 2\theta\theta)$$

Оскільки міра ν зосереджена на $[-1;1]$, то

$$\begin{aligned} A^2 &= -4\theta^2 + 2\theta \sin(\theta + \theta) + \\ &= -3\theta^2 - (\theta^2 - 2\theta \sin(\theta + \theta) + \sin^2(\theta + \theta)) + \sin^2(\theta + \theta) + \\ &= -3\theta^2 - (\theta - \sin(\theta + \theta))^2 + \sin^2(\theta + \theta) + \\ &|/\theta^2 \nu(\theta\theta) = -3\theta^2 + 9, \end{aligned}$$

тобто, при $\theta = 3, \nu = 9$ умову 1) виконано.

Для виконання умови 2) достатньо, щоб $\Pi > 0$ (див. [12, Зауваження 2.3]). Оскільки $\partial_\theta \nu(\theta) = -2 + \cos(\theta + \theta)$, то за формулою Тейлора

$$\nu(\theta + \theta) - \nu(\theta) = (-2 + \cos(\theta + \theta))\theta, \quad \theta \in (\theta, \theta + \theta).$$

Тому $|\nu(\theta + \theta) - \nu(\theta)| \geq |\theta|$, тобто $\Pi \geq \theta$

В останній нерівності покладемо $\theta = \frac{1}{3}, \square = 1, \Gamma = \left\{ \theta : |\theta| > \frac{1}{3} \right\}$. Тоді

$\Pi \geq 6.6726$. Далі, з (1.1) одержимо

$$\theta_1 = 3, \quad \theta_2 = 1.$$

Тоді співвідношення 2) будуть виконуватись, якщо покласти

$$\square = 6 \cdot 10^{-6}, \quad \nu = 9, \quad \theta = 0.01, \quad \theta = 0.05, \quad \theta = 0.8, \quad \kappa = 2 \cdot 10^{-8}, \quad \theta = 0.8.$$

Для перевірки умови 3) та отримання сталих $\nu_P^1(1)$ і ν_P^2 використаємо оцінки для P_2 та ν , отримані в [12] (формули (39) та (40) відповідно).

Оберемо

$$\theta_0 = 3, \quad \theta_1 = 3, \quad \theta_1 = 20, \quad \theta = 0.67.$$

Тоді умова 3) виконана та

$$\nu \geq 0.6667, \quad P_2 \leq 0.0217.$$

Зазначимо, що для обраних констант справедлива оцінка

$$P_1 \geq 0.2837.$$

Тому

$$\nu_P^1(1) = 23.0499, \quad \nu_P^2 = 0.1852.$$

Знайдемо тепер $\varphi_{\pm}(1, 1)$ та $\varphi_{\pm}^{\circ\circ}(1)$. В нашому випадку

$$\varphi_{\pm}^1 = \varphi_{\pm}^3 = \varphi_{\pm}^4 = 1, \quad \varphi_{\pm}^2 = 3.$$

Покладемо $\varphi_0 = 1, \varphi_1 = \frac{1}{2}$. Довизначимо функцію \square на множині $\{\frac{1}{2} < |\varphi| < 1\}$ наступним чином

$$\square(\varphi) = \begin{cases} 2 - \varphi, & |\varphi| \leq \frac{1}{2}, \\ \varphi(\varphi), & \frac{1}{2} < |\varphi| < 1, \\ 0, & |\varphi| \geq 1, \end{cases}$$

де $\varphi(\varphi) = -104/\varphi^5 + 396/\varphi^4 - 582/\varphi^3 + 410/\varphi^2 - 138/\varphi + 18$. Тоді $\square \in \varphi^2, \square(\varphi) \leq \varphi^2, \square'(\varphi) \leq \frac{3}{2}$.

Спочатку знайдемо сталі $\varphi_{D^2} \varphi(8, 1), \varphi_{D^2} \varphi(16, 1), \varphi_{D^2} \varphi(8, 1)$ та оцінимо величину $E \varphi(1)^8$. Позначимо $\int_0^1 \int_{|\varphi| \leq 1} \square(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi) = \square * \varphi$. За формулою Іто [84, с. 198], для будь-якого натурального φ

$$\begin{aligned} (\square * \varphi)^\varphi &= \int_0^1 \int_{|\varphi| \leq 1} ((\square * \varphi)_{-} + \square(\varphi))^\varphi - ((\square * \varphi)_{-})^\varphi \varphi(\varphi, \varphi) \\ &= \int_0^1 \int_{|\varphi| \leq 1} \sum_{\varphi=1}^{\varphi} \varphi^\varphi \square(\varphi) (\square * \varphi)_{-}^{\varphi-\varphi} \varphi(\varphi, \varphi). \end{aligned}$$

Зауважимо, що оскільки $\square(\varphi) \leq \varphi^2$, то

$$\int_0^1 \int_{|\varphi| \leq 1} \varphi^\varphi \square(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi) \leq 2 \int_0^1 \int_{|\varphi| \leq 1} \varphi^{(8\varphi-11)/4} \varphi \varphi = \frac{8\varphi}{8\varphi-7}.$$

Тому

$$\begin{aligned} E(\square * \varphi)^\varphi &= \sum_{\varphi=1}^{\varphi} \int_0^1 \int_{|\varphi| \leq 1} \varphi^\varphi \square(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi) \int_0^1 E(\square * \varphi)_{-}^{\varphi-\varphi} \varphi \varphi \\ &\leq 8 \sum_{\varphi=1}^{\varphi} \frac{\varphi^\varphi}{8\varphi-7} \int_0^1 E(\square * \varphi)_{-}^{\varphi-\varphi} \varphi \varphi. \end{aligned}$$

Для $n = 1$ та $k = 2^n$ одержимо

$$\begin{aligned}
 E(\square * \mathbb{1})^{2^n} &\leq \frac{\sum_{i=0}^{2^n-1} 8^{2^i}}{8(2^n - 2^i) - 7} E(\square * \mathbb{1})^{2^i} \leq 8^{2^n} \sum_{i=0}^{2^n-1} E(\square * \mathbb{1})^{2^i} \\
 &\leq 8^{2^n} \prod_{i=1}^{2^n-1} (8^{2^{[i/2]}} + 1) \leq 8 \cdot 9^{2^n-1} \prod_{i=1}^{2^n} 2^{2^{i-1}} = 8 \cdot 9^{2^n-1} \prod_{i=1}^{2^n} 2^{2^{i-1}} \\
 &= 4 \cdot 9^{2^n-1} \prod_{i=1}^{2^n} \frac{(2^{2^i})!}{(2^i)!}
 \end{aligned}$$

Використовуючи формулу Стірлінга отримаємо

$$E(\square * \mathbb{1})^{2^n} \leq \frac{9^{2^n-1} 4^{2^n+1}}{(2^n)!}$$

Тому

$$E/D \mathbb{1}^{1/8} \leq \frac{2^{34} 3^{14}}{4} =: D_{D \mathbb{1}}(8, 1), \quad E/D \mathbb{1}^{1/16} \leq \frac{2^{122} 3^{30}}{8} =: D_{D \mathbb{1}}(16, 1).$$

Оскільки $\frac{2^{34} 3^{14}}{4} < \frac{2^{122} 3^{30}}{8}$

$$E/D^2 \mathbb{1}^{1/8} \leq \frac{3}{2} E/D \mathbb{1}^{1/8}$$

то

$$D_{D^2 \mathbb{1}}(8, 1) = \frac{3^8}{2^8} D_{D \mathbb{1}}(8, 1) \frac{2^{26} 3^{22}}{2^4}$$

За нерівністю Буркхольдера (див. напр. [90, с. 678]) маємо

$$E \mathbb{1}^{1/8} \leq \frac{(18 \cdot 8^{3/2})^8}{7^{1/2}} E \sum_{i=0}^{\lfloor 1/8 \rfloor} \frac{((\mathbb{1}(i) \square(\mathbb{1}))^{2^i})^2}{\mathbb{1}(i)}$$

За побудовою функції \square маємо, що $\frac{((\mathbb{1}(i) \square(\mathbb{1}))^{2^i})^2}{\mathbb{1}(i)} \leq \frac{19}{4} \mathbb{1}^{1/8}$. Тому

$$\frac{36 \cdot 16 \cdot 4 \cdot (\lfloor 1/8 \rfloor)^4}{48 \cdot 22 \cdot 4 \cdot 2}$$

Далі

Для знаходження $\varphi_{\partial \varphi}(1, 16, 1)$ перевіримо умову Ляпунова для функції $\square(\varphi) = \varphi^{16}$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Маємо

$$A \varphi^{16} = 16 \varphi^{15} (-2\varphi + \sin(\varphi + \varphi)) + \int_{|\varphi| \leq 1} ((\varphi + \varphi)^{16} - \varphi^{16} - 16 \varphi^{15} \varphi \varphi / \varphi) \varphi(\varphi \varphi).$$

Зазначимо, що міра φ зосереджена на $[-1, 1]$ та симетрична, а також для всіх $\varphi \geq 2$

$$\int_{|\varphi| \leq 1} \varphi^{2\varphi} \varphi(\varphi \varphi) \leq 1.$$

Тому

$$\begin{aligned} A \varphi^{16} &\leq -32 \varphi^{16} + 16 \varphi^{15} \sin(\varphi + \varphi) + \sum_{\varphi=0}^6 \varphi^{2\varphi} \varphi^{2\varphi} + 960 \varphi^{14} \\ &= -31 \varphi^{16} - \varphi^{14} (\varphi - 8 \sin(\varphi + \varphi))^2 + 64 \varphi^{14} \sin^2(\varphi + \varphi) + \sum_{\varphi=0}^6 \varphi^{2\varphi} \varphi^{2\varphi} + 960 \varphi^{14}. \end{aligned}$$

Для кожного $\varphi = 0, \dots, 7$ та $\varphi_{\varphi} > 0$ можна знайти таке $\varphi_{\varphi} > 0$, що

$$-\varphi^{16} + \varphi_{\varphi} \varphi^{2\varphi} \leq \varphi_{\varphi} \quad \text{для всіх } \varphi.$$

Тому

$$A \varphi^{16} \leq -24 \varphi^{16} + 2^{57} 7^7,$$

$$\text{тобто, } \varphi_{16} = 24, \varphi_{16} = 2^{57} 7^7.$$

Тоді

$$\varphi_{\partial \varphi}(1, 16, 1) = \frac{1 + 1 + \frac{2^{58} 7^7}{24} \varphi^8}{2^{15}} \leq \frac{2^{71} 7^7 \varphi^8}{3},$$

$$\varphi_{\partial \varphi}(1, 8, 1) \leq \frac{2^{105} 3^{15} 7^4 \varphi^6}{}$$

Далі знаходимо $\varphi_{\partial \varphi}^-(8, 1)$, $\varphi_{\partial \varphi}^-(16, 1)$, $\varphi_{\partial \varphi}^-(32, 1)$. Для послідовності

$\square_{\varphi} = \frac{1}{\varphi^{27}} \varphi \geq 1$ маємо

$$\varphi_{\varphi} = \frac{8 \left(\varphi - \frac{7}{4} \right)}{7 \varphi^{1/4}} - 2.$$

Далі

$$D_{\theta}^{-}(8, 1) = \sum_{\theta=1}^{+\infty} (8 + 1)^{8\theta/7} \exp\left(-\frac{8\theta}{7\theta^{1/4}} - 2^{7/4} + 1\right) \leq \sum_{\theta=2}^{+\infty} (8 + 1)^{8\theta/7} \exp\left(-\frac{8\theta}{7\theta^{1/4}}\right).$$

Неважко показати, що для всіх $\theta \geq 1$

$$\exp\left(-\frac{8\theta}{7\theta^{1/4}}\right) \leq \frac{(4\theta + 7)^{\frac{8\theta+14}{7}}}{4^{14} (4\theta+7)^{\frac{17}{2}}}$$

Тому

$$D_{\theta}^{-}(8, 1) \leq \frac{(4\theta + 7)^{\frac{8\theta+14}{7}}}{4^{14} (4\theta+7)^{\frac{17}{2}}}.$$

Отже

$$D_{\theta}^{-}(8, 1) \leq \frac{39^{12} \cdot 5^2}{2^{22}}, \quad D_{\theta}^{-}(16, 1) \leq 2^{\frac{21}{3}} \cdot 3^{\frac{42}{3}} \cdot 91, \quad D_{\theta}^{-}(32, 1) \leq 34^{\frac{39}{4}} \cdot 168.$$

Остаточно

$$\leq \frac{2^{93} 3^{19} 7^2 17^{10} \cdot 9^4}{2^4},$$

звідки

$$\theta_1 \leq 86.1, \quad \theta_2 = 0.0926.$$

Припустимо, що нам необхідно досягти точності $\Delta = 0.01$. Розв'язавши рівняння

$$\exp\{\theta_1 - \theta_2 \theta_0\} = 0.01,$$

пересвідчуємось, що для такої точності достатньо взяти $\theta_0 = 980$. Генеруємо ще 1000 траєкторій з $\theta = 1.04$ до моменту часу $\theta = 981$ і по відрізках цих траєкторій між 980 і 981 секундами обчислюємо $\Xi_{\theta}^1(980)$, $\theta = 1, \dots, 1000$. Для цього використовуємо формулу (3.33), складники якої шукаємо з системи (5.4) (останню розв'язуємо методом Ейлера). Далі знаходимо

Остаточно обчислюємо

$$\frac{\varphi_{1000}(1.04, 980)}{\varphi_{100}(1.04)} = 16.81.$$

Це означає, що в нашому випадку ефективність оцінки найменших квадратів не більше ніж в 17 разів гірша від теоретичної нижньої границі ефективності. Крім того, сукупна втрата випадковості при заміні умовного математичного сподівання на безумовне також не більше ніж 17.

5.4. Висновки

Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу, заданого СДР з шумом Леві, побудовано алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання, оцінено втрату випадковості при умовному усередненні і наведено конкретний приклад.

РОЗДІЛ 6

ВЛАСТИВІСТЬ ЛАН ДЛЯ МОДЕЛЕЙ В ЯКИХ З ВИСОКОЮ ЧАСТОТОЮ СПОСТЕРІГАЄТЬСЯ ПРОЦЕС ЛЕВІ

Розділ присвячено дослідженню достатніх умов за яких справджується ЛАН у випадку, коли спостерігається процес Леві φ , заданий у формі (1.2), де φ_1 і φ_2 – незалежні процеси Леві, визначені на імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, а $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ – невідомий параметр, який є об'єктом статистичного оцінювання. З цією метою в першому підрозділі формулюються достатні умови ЛАН для серій незалежних випадкових величин і доводяться граничні властивості процесу φ_θ . В другому підрозділі будується інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру функції вірогідності із використанням результатів Розділу 3.

Будемо припускати, що множина можливих значень невідомого параметра $\varphi - \Theta \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$, тобто параметр φ набуває тільки додатних значень.

Статистична модель цього розділу полягає в наступному:

- процес φ є дискретно спостережуваним, тобто маємо φ спостережень в перших φ точках $\{\varphi_{\theta, \varphi} = \varphi_{\theta, \varphi}, \varphi = 1, \dots, \varphi\}$ частини часового інтервалу з кроком φ_{φ} ;
- $\varphi_{\varphi} \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$, тобто дискретні спостереження φ відбуваються з високою частотою.

Зазначимо, що асимптотична поведінка довжини часового проміжку спостережень τ_n не має значення, коли $\tau_n^{-1/2} \tau_n^{1/\alpha-1}$ прямує до 0 при $\tau_n \rightarrow \infty$ (див. (6.30)): вона може бути необмеженою, обмеженою, або навіть прямуючою до нуля.

Припустимо, що представлення Леві – Хінчіна процеса X_t має вид

$$E e^{i\lambda X_t} = e^{-\psi(\lambda)},$$

в якому характеристична функція ψ така:

$$\psi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x \mathbb{1}_{|x| \leq 1} \right) \nu(dx). \quad (6.1)$$

Це означає зокрема, що ψ не містить дифузійної складової і поки компенсатор стрибкової компоненти береться рівним $\mathbb{1}_{|x| \leq 1}$, жодного додаткового зносу немає. Щодо міри Леві ν припускаємо наступне:

H1. $\psi(\lambda) = \psi(\lambda) \lambda^\alpha$ і для деякого $\alpha \in (0, 2)$

$$\psi(\lambda) \sim \begin{cases} \lambda_+ / |\lambda|^{2-\alpha}, & \lambda \rightarrow 0+, \\ \lambda_- / |\lambda|^{2-\alpha}, & \lambda \rightarrow 0-, \end{cases} \quad \nu_- + \nu_+ > 0.$$

H2. $\psi \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, існує $\lambda_0 > 0$ таке, що функція

$$\phi(\lambda) = \frac{|\psi'(\lambda)|}{\psi(\lambda)}$$

є обмеженою на множині $\{\lambda \mid |\lambda| \leq \lambda_0\}$ і при деякому $\alpha > 0$ справджується співвідношення

$$\int_{|\lambda| > \lambda_0} \lambda^{2+\alpha}(\lambda) \psi(\lambda) < \infty.$$

Нагадаємо, що міра Леві ν -стійкого процесу має густину

$$\nu_{\nu, \nu_{\pm}}(\lambda) = \begin{cases} \lambda_+ / |\lambda|^{2-\alpha}, & \lambda > 0, \\ \lambda_- / |\lambda|^{2-\alpha}, & \lambda < 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Тож Н1 вимагає, щоб міра Леві для ν локально в околі нуля була такою ж як і для ν -стійкого процесу; ось чому ми називаємо ν локально ν -стійким.

Через ν_{\pm}, ν_{\pm} позначаємо ν -стійкий процес, чия характеристична функція має вид (6.1) з мірою Леві (6.2), де ν_{+}, ν_{-} задані умовою Н1. Позначимо також ν_{\pm} густину розподілу ν_{\pm} (ця густина існує, див. [81] або Твердження 6.1 нижче).

Як і в попередньому розділі, позначаємо $\nu(\nu, \nu)$ і $\nu(\nu, \nu) = \nu(\nu, \nu) - \nu(\nu, \nu)$ - відповідні пуассонова точкова випадкова міра і компенсована міра з представлення Леві - Іто процесу ν :

$$\nu_{\pm} = \int_0^{\infty} \nu_{\pm}(\nu, \nu) + \int_0^{\infty} \nu(\nu, \nu).$$

6.1. Підготовчі результати.

Як і в попередніх розділах через $\nu_{\pm}(\nu, \nu, \nu)$ позначаємо густину перехідної імовірності процесу ν , розглядуваного як марковський процес; в подальшому існування такої густини буде доведено. Позначимо також

$$\nu_{\pm}(\nu, \nu, \nu) = \frac{\nu_{\pm}(\nu, \nu, \nu)}{\nu(\nu, \nu, \nu)} = \int \log \nu_{\pm}(\nu, \nu, \nu),$$

$$\nu_{\pm}(\nu, \nu, \nu)$$

$$\nu(\nu, \nu, \nu)$$

$$\vartheta_i(\vartheta; \vartheta, \vartheta) = \frac{\square_{\vartheta, \vartheta}}{\square_{\vartheta, \vartheta}} \quad **$$

припускаємо, що відповідні похідні існують для $\vartheta_i(\vartheta, \cdot)$ -майже всіх ϑ і кожних фіксованих ϑ, ϑ . Оскільки ϑ має незалежні прирости, можемо записати

$$\vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) = \vartheta_i(\vartheta, \vartheta - \vartheta), \quad \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) = \vartheta_i(\vartheta, \vartheta - \vartheta), \quad \vartheta_i(\vartheta, \vartheta, \vartheta) = \vartheta_i(\vartheta, \vartheta - \vartheta).$$

Тоді після спрощення, відношення вірогідностей для розглядуваної в цьому розділі моделі матиме вигляд

$$\vartheta_i(\vartheta_0, \vartheta_0 + \vartheta(\vartheta)\vartheta) = \prod_{\vartheta=1}^{\vartheta} \frac{\vartheta_{\vartheta, \vartheta}(\vartheta_0 + \vartheta(\vartheta)\vartheta; \vartheta_{\vartheta, \vartheta} - \vartheta_{\vartheta-1, \vartheta})}{\vartheta_{\vartheta, \vartheta}(\vartheta_0; \vartheta_{\vartheta, \vartheta} - \vartheta_{\vartheta-1, \vartheta})}.$$

Позначимо

$$\vartheta_{\vartheta, \vartheta} = \vartheta_{\vartheta, \vartheta} - \vartheta_{\vartheta-1, \vartheta}, \quad 1 \leq \vartheta \leq \vartheta$$

і зауважимо, що $\vartheta_{\vartheta}(\vartheta, \cdot)$ - густина розподілу для $\vartheta_{\vartheta, \vartheta}$. Тому статистична модель описана вище, після перевибору

$$(\vartheta_{\vartheta, \vartheta})_{\vartheta=1}^{\vartheta} \mapsto (\vartheta_{\vartheta, \vartheta})_{\vartheta=1}^{\vartheta},$$

спрощується до трикутного масиву незалежних спостережень. Тому для доведення властивості ЛАН будемо використовувати Теорему 1.6 замість Теорему 4.1. Зокрема, щоб довести необхідну властивість ЛАН в точці $\vartheta_0 \in \Theta$ нам буде достатньо наступних тверджень.

A1 Для кожного ϑ , функція

$$\Theta \ni \vartheta \rightarrow \sqrt{\vartheta_{\vartheta, \vartheta}(\vartheta, \cdot)} \in \vartheta_2(\mathbb{R})$$

є неперервно диференційовною; що означає, що статистичний експеримент є регулярним.

A2 Для деякої невивірженої матриці $\vartheta(\vartheta)$

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} E \sum_{\vartheta=1}^{\vartheta} \left(\vartheta(\vartheta)^T \vartheta_{\vartheta, \vartheta} \left(\vartheta_0; \vartheta_{\vartheta, \vartheta} - \vartheta_{(\vartheta-1), \vartheta} \right) \right) \vartheta_2^{-\Sigma(\vartheta_0)} = 0.$$

A3 Для деякого $\square > 0$,

$$(\theta_0; \theta) \theta \theta = 0.$$

A4 Для кожного $\theta > 0$,

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty / \theta < \theta} \int_{\mathbb{R}} (\theta \theta)^T (\theta \theta, (\theta_0 + \theta(\theta) \theta; \theta) - \theta \theta \theta (\theta_0; \theta)) \theta^2 = 0.$$

Перед тим як перейти до доведення A1 – A4, введемо деякі позначення, сформулюємо допоміжні твердження і зробимо попередні розрахунки.

Позначимо $\theta(\theta) = \theta^{1/2} \theta(\theta)$,

$$\theta \theta = \theta \int_{\theta^{1/2} \theta < \theta / \theta \leq 1} \theta \theta(\theta \theta). \tag{6.3}$$

Через $\tilde{\Theta}$ позначимо довільну (але фіксовану) підмножину множини Θ таку, що

$$\inf \{ \theta : (\theta, \theta) \in \tilde{\Theta} \} > 0. \tag{6.4}$$

Розглянемо випадкові величини

$$\theta_{\theta, \theta} = \theta^{-1/\theta} (\theta_{\theta} + \theta_{\theta}).$$

Твердження 6.1. Нехай θ – процес Леві, що задовольняє умови n_1 , n_2 , а θ незалежний від θ процес Леві і такий, що

$$\theta^{-1/\theta} \theta_{\theta} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 \tag{6.5}$$

за імовірністю. Тоді

1. $\theta_{\theta, \theta} \Rightarrow \theta_{\theta, \theta}^{\pm}, \theta \rightarrow 0 + .$
2. Величини $\theta_{\theta, \theta}, \theta > 0, \theta_{\theta, \theta}^{\pm}$ мають густини розподілу $\theta_{\theta, \theta}, \theta > 0, \theta_{\theta, \theta}^{\pm}$.

Ці густини нескінченно разів диференційовні, обмежені разом з їх похідними, і для кожного $\theta > 0$

$$\sup_{\theta \leq \theta} |\theta_{\theta, \theta}(\theta) - \theta_{\theta, \theta}^{\pm}(\theta)| \rightarrow 0, \quad \sup_{\theta \leq \theta} |\theta_{\theta, \theta}(\theta) - \theta_{\theta, \theta}^{\pm}(\theta)| \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0 + . \tag{6.6}$$

Доведення. (1). Оскільки $\varphi \in \mathcal{H}$ нехтуваним (в смислі (6.5)), можемо обмежитись розглядом величин

$$\varphi_{\varphi, \varphi} = \varphi^{-1/\varphi} (\varphi_{\varphi} + \varphi_{\varphi}).$$

Їх характеристичні функції мають вигляд

$$\begin{aligned} E \varphi_{\varphi, \varphi} &= \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi), \\ \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi^{-1} - \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi_{1/|\varphi| \leq 1} \right) \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) + \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi); \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi^{-1} - \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi_{1/|\varphi| \leq 1} \right) \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi); \end{aligned}$$

в останній рівності було використано формулу (6.3) для φ . Зробивши заміну $\varphi = \varphi \varphi^{-1/\varphi}$, одержимо

$$\varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi^{-1} - \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi_{1/|\varphi| \leq 1} \right) \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi),$$

де $\varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi)$ має густину

$$\varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) = \varphi^{1+1/\varphi} \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi).$$

За Н1, для кожного $\square > 0$ існує $\varphi_{\square} > 0$ таке, що

$$(1 - \square) \varphi_{\varphi, \varphi_{\pm}}(\varphi) \leq \varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) \leq (1 + \square) \varphi_{\varphi, \varphi_{\pm}}(\varphi), \quad |\varphi| \leq \varphi^{-1/\varphi} \varphi_{\square}.$$

З іншого боку, доданок $\left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi^{-1} - \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi_{1/|\varphi| \leq 1} \right)$ обмежений, а

$$\varphi_{\varphi} \left\{ \varphi : |\varphi| > \varphi^{-1/\varphi} \varphi_{\square} \right\} = \varphi_{\varphi} \left\{ \varphi : |\varphi| > \varphi_{\square} \right\} \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow \infty.$$

Звідси легко вивести наступне

$$\varphi_{\varphi, \varphi}(\varphi) \rightarrow \varphi_{\varphi, \varphi_{\pm}}(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi^{-1} - \varphi_{\varphi, \varphi}^{-1/\varphi} \varphi_{1/|\varphi| \leq 1} \right) \varphi_{\varphi, \varphi_{\pm}}(\varphi) \varphi_{\varphi}, \quad \varphi \rightarrow 0.$$

Оскільки характеристична функція $\varphi_{\theta, \theta^\pm}$ дорівнює $\varphi_{\theta, \theta}(\theta)$, це завершує

$$1 \quad \pm$$

доведення.

(2). Спершу розглянемо випадок $\theta = 0$; тепер $\varphi_{\theta, \theta}$ не залежить від θ і ми опускаємо θ з позначень. Спробуємо застосувати обернене перетворення Фур'є для $\varphi_{\theta, \theta}$ і її похідних:

$$(\partial_\theta)^\alpha \varphi_{\theta, \theta}(\theta) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (-i\theta)^\alpha \varphi^{-i\theta\theta + \theta_\theta, \theta}(\theta) \varphi_\theta,$$

Щоб це зробити перевіримо, що підінтегральні функції є абсолютно інтегровними. Маємо

$$\begin{aligned} |\varphi^{-i\theta\theta + \theta_\theta, \theta}(\theta)| &\leq \text{Re } \varphi_{\theta, \theta}(\theta), \\ \text{Re } \varphi_{\theta, \theta}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} (\cos(\theta^{-1/\theta} \theta\theta) - 1) \varphi(\theta\theta) \\ &\leq \int_{\theta^{-1/\theta} \theta\theta < 1} (\cos(\theta^{-1/\theta} \theta\theta) - 1) \varphi(\theta\theta). \end{aligned}$$

Тоді за умовою H1 існують сталі $\theta_1, \theta_2 > 0$ такі, що

$$|\varphi^{-i\theta\theta + \theta_\theta, \theta}(\theta)| \leq \theta_1 \theta^{-\theta_2/\theta}, \quad \theta, \theta \in \mathbb{R}, \quad \theta \in (0, 1],$$

що доводить існування $\varphi_{\theta, \theta}(\theta)$ і всіх її похідних. Крім того, маємо

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 1]} |\varphi'_{\theta, \theta}(\theta)| < \infty, \quad \sup_{\theta \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 1]} |\varphi''_{\theta, \theta}(\theta)| < \infty.$$

Тепер повернемося до випадку ненульового θ . Оскільки розподіл $\varphi_{\theta, \theta}$ є згорткою розподілів $\varphi_{\theta, \theta}$ і $\theta^{-1} \varphi_\theta$, одержана вище оцінка може бути узагальнена:

$$\sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sup_{\theta \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 1]} |\varphi'_{\theta, \theta}(\theta, \theta)| < \infty, \quad \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \sup_{\theta \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 1]} |\varphi''_{\theta, \theta}(\theta, \theta)| < \infty. \quad (6.7)$$

До того ж, $\varphi_{\theta, \theta} \Rightarrow \varphi_{\theta_1, \theta_2}$ рівномірно по $\theta \in \tilde{\Theta}, \theta \in \mathbb{U}$: це впливає з

пункту (1) і того, що $\varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} \varphi_i$ є рівномірно нехтуваною. Така збіжність і перша (відповідно друга) оцінка в (6.7) доводить першу (відповідно другу) збіжність в (6.6).

□

Позначимо

$$\varphi_i = \varphi_i - \varphi_i = \varphi^{1/\varphi} \varphi_{i,\varphi} + \varphi_i - \varphi_i,$$

тоді густина розподілу для φ_i дорівнює

$$\varphi_i(\varphi, \varphi) = \varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} \varphi_{i,\varphi} \left(\varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} (\varphi - \varphi_i + \varphi_i) \right) \quad (6.8)$$

і тому

$$\begin{aligned} \partial_{\varphi_i} \varphi_i(\varphi, \varphi) &= -\varphi^{-2} \varphi^{-2/\varphi} \varphi_{i,\varphi} \left(\varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} (\varphi - \varphi_i + \varphi_i) \right), \\ \partial_{\varphi} \varphi_i(\varphi, \varphi) &= -\varphi^{-2} \varphi^{-1/\varphi} \left[\varphi_{i,\varphi} \left(\varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} (\varphi - \varphi_i + \varphi_i) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi - \varphi_i}{\varphi^{1/\varphi}} \varphi_{i,\varphi} \left(\varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} (\varphi - \varphi_i + \varphi_i) \right) \right] = -\varphi^{-2} \varphi^{-1/\varphi} \\ &\quad \times \left[\varphi_{i,\varphi}(\varphi) + \varphi_{i,\varphi}'(\varphi) - \varphi_i \varphi^{-1/\varphi} \varphi_{i,\varphi}'(\varphi) \right]_{\varphi = \varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} (\varphi - \varphi_i + \varphi_i)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Оскільки $\varphi_i = \varphi_i + \varphi_i$ і φ, φ - незалежні, маємо

$$\varphi_i(\varphi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_i(\varphi, \varphi - \varphi^{-1/\varphi} \varphi) \varphi_i(\varphi\varphi), \quad (6.10)$$

де φ_i означає розподіл $\varphi^{-1/\varphi} \varphi_i$.

Взявши до уваги (6.8), можемо переписати формулу згортки для $\varphi_i(\varphi, \varphi)$ в наступний спосіб:

$$\varphi_i(\varphi, \varphi) = \varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} \varphi_i \left(\varphi, \varphi^{-1} \varphi^{-1/\varphi} (\varphi - \varphi_i + \varphi_i) \right), \quad (6.11)$$

де

$$\varphi_i(\varphi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{i,\varphi}(\varphi - \varphi^{-1} \varphi) \varphi_i(\varphi\varphi).$$

Зазначимо, що (6.5) дає $\vartheta_\delta \Rightarrow \vartheta_0$, $\delta \rightarrow 0$ і ϑ - відділене від 0 коли $\vartheta = (\vartheta, \vartheta) \in \tilde{\Theta}$. Тоді за першим співвідношенням (6.6), для кожного $\vartheta > 0$

$$\sup_{\vartheta \in \tilde{\Theta}} \sup_{|\vartheta| \leq \vartheta} |\vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) - \vartheta_{\vartheta, \vartheta_\pm}(\vartheta)| \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0+ . \quad (6.12)$$

З (6.10) випливає, що

$$\begin{aligned} \partial_{\vartheta\vartheta} \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) &= \\ \partial_{\vartheta\vartheta} \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_{\vartheta\vartheta} \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta - \delta^{1/\vartheta} \vartheta) \vartheta_\delta(\vartheta\vartheta) \end{aligned}$$

Тоді, за аналогією до попередніх міркувань, маємо

$$\begin{aligned} \partial_{\vartheta\vartheta} \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) &= -\vartheta^{-2} \delta^{-2/\vartheta} \vartheta^{(1)} \left(\vartheta, \vartheta^{-1} \delta^{-1/\vartheta} (\vartheta - \delta\delta + \vartheta\vartheta) \right), \\ \left[\partial_{\vartheta\vartheta} \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) &= -\vartheta^{-2} \delta^{-1/\vartheta} \right. \\ \times \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) + \vartheta_\delta^{(2)} &(\vartheta, \vartheta) - \vartheta_\delta \delta^{-1/\vartheta} \vartheta_\delta^{(1)}(\vartheta, \vartheta) \Big]_{\vartheta = \vartheta^{-1} \delta^{-1/\vartheta} (\vartheta - \delta\delta + \vartheta\vartheta)} \end{aligned} \quad (6.13)$$

де

$$\begin{aligned} \vartheta_\delta(\vartheta, \vartheta) &= \int_{\mathbb{R}} \vartheta_\delta'(\vartheta - \delta^{-1} \vartheta) \vartheta_\delta(\vartheta\vartheta), \\ \vartheta_\delta^{(2)}(\vartheta, \vartheta) &= \int_{\mathbb{R}} (\vartheta - \delta^{-1} \vartheta) \vartheta_\delta'(\vartheta - \delta^{-1} \vartheta) \vartheta_\delta(\vartheta\vartheta) \end{aligned}$$

і для кожного $\vartheta > 0$ при $\delta \rightarrow 0+$

$$\sup_{\vartheta \in \tilde{\Theta}} \sup_{|\vartheta| \leq \vartheta} |\vartheta_\delta^{(1)}(\vartheta, \vartheta) - \vartheta_{\vartheta, \vartheta_\pm}'(\vartheta)| \rightarrow 0, \quad \sup_{\vartheta \in \tilde{\Theta}} \sup_{|\vartheta| \leq \vartheta} \left| \vartheta_\delta^{(2)}(\vartheta, \vartheta) - \vartheta_{\vartheta, \vartheta_\pm}^{(2)}(\vartheta) \right| \rightarrow 0. \quad (6.14)$$

Нижче використовуються формули (6.11) – (6.14) для контролю “локального” відхилення функцій $\vartheta_\delta, \vartheta_\delta'$ введених в А1-А4. Щоб контролювати “глобальне” відхилення використовується результат наступного підрозділа.

6.2. Інтегральне представлення похідної логарифмічної функції вірогідності

Позначимо

$$D_\theta \varphi_\theta = \theta D_\theta \varphi_\theta = \varphi_\theta$$

природа позначень буде пояснена пізніше. Щоб строго визначити стоха- стичні інтеграли по мірі φ , розділимо їх на дві частини (що є звичайним

прийомом). Частина, що відповідає “малим стрибкам” (стосується величин $\varphi \in [-1, 1]$), добре визначена, оскільки функції φ^2 , φ^3 інтегровні на $[-1, 1]$ відносно φ ; відповідні інтеграли по φ розуміються в смислі φ_1 . Частина інтегралів по φ , що відповідає “великим стрибкам” розуміється в потраєкторному смислі, тобто як сума по скінченній множині стрибків. Позначимо далі

$$\varphi(\varphi) = -\varphi^2 \frac{\varphi'(\varphi)}{\varphi(\varphi)} - 2\varphi$$

і покладемо

$$\varphi_\theta(1) = \int_0^{|\varphi|} \varphi(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi, \varphi) + \int_0^{|\varphi|} \varphi(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi, \varphi) + \varphi \varphi_0^2 \varphi(\varphi_0) - \varphi(-\varphi_0),$$

де φ_0 береться з умови H2. За умовою H2, $|\varphi(\varphi)| \leq \varphi/\varphi$ при $|\varphi| \leq \varphi_0$, звідки інтеграл “малих стрибків” добре визначений в смислі φ_2 ; інтеграл “великих стрибків” розуміється в потраєкторному смислі.

Визначимо модифіковану вагу Малявена як вектор $\Xi'_\theta = (\Xi'_\theta, \Xi''_\theta)^\top$ з

$$\Xi'_\theta = \frac{\varphi_\theta(1)}{D^2 \varphi_\theta} + \frac{\varphi_\theta \varphi_\theta(1) + \varphi_\theta D^2 \varphi_\theta}{(D \varphi_\theta)^2} - \frac{1}{\varphi_\theta} \quad \Xi''_\theta = \frac{\varphi_\theta \varphi_\theta(1) + \varphi_\theta D^2 \varphi_\theta}{D \varphi_\theta} - \frac{1}{(D \varphi_\theta)^2} \varphi_\theta. \quad (6.15)$$

Основний результат цього підрозділу полягає в наступному.

Теорема 6.1. 1. Нехай φ така як в H2. Тоді для кожного $\varphi_1 \in (0, \varphi)$ і кожної $\tilde{\Theta}$,

$$\sup_E \sup_{\varphi(\varphi)^\top \Xi'_\theta} < 2 + \varphi_1. \quad (6.16)$$

2. Справджується наступна формула інтегрального представлення: ^{**}

$$\begin{cases} E^{\beta, \beta} \Xi^{\beta}, & \beta(\beta, \beta) > 0, \\ 0, & \text{інакше,} \end{cases} \quad (6.17)$$

Пояснимо основну ідею, на якій базується Теорема 6.1. За аналогією з результатами Гобе для дифузійного випадку ([25], [26]), природньо сподіватись, що можна отримати інтегральне представлення у формі (6.17) за допомогою класичної версії числення Малявена для процесів Леві. Використовуючи результати Розділу 3 можна одержати аналог (6.17) з заміною Ξ^{β} на деяке $\Xi^{\beta, \beta}$, яке є повністю аналогічним до того, що одержав Гобе, маючи на увазі вагу Малявена (формула (6.26)). Однак, в цьому випадку виникають труднощі пов'язані з моментною обмеженістю відповідних складових.

- Для того, щоб забезпечити квадратичну інтегровність $\Xi^{\beta, \beta}$ (яка є необхідною, щоб $\Xi^{\beta, \beta}$ була представленням (6.26) з інтегралом Скорохода в правій частині), потрібна додаткова моментна обмеженість β : для деякого $\beta' > 0$,

$$\int_{|\beta| \geq 1} |\beta|^{2+\beta'} \beta(\beta, \beta) < \infty \quad (6.18)$$

Це виключає з розгляду процеси Леві з “важкими хвостами”, зокрема такий клас як β -стійкі процеси.

- Навіть якщо обмежитись класом процесів Леві з “легкими хвостами”, що задовольняють (6.18), немає можливості одержати аналог моментної обмеженості (6.16) для $\Xi^{\beta, \beta}$, іншими словами, відповідна верхня оцінка для $\beta_{2+\beta_1}$ -норми $\Xi^{\beta, \beta}$ може взриватись при $\beta \rightarrow 0+$, див. Зауваження 6.1 нижче.

Обидві ці “моментні” проблеми розв'язуються якщо формально підставити $\beta(\beta) = \beta^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ в формулу для $\Xi^{\beta, \beta}$; див. Підрозділ 6.2.1. ниж-

че, і особливо Зауваження 6.1, яке пояснює евристичні лаштунки специфічного вибору $\varphi(\varphi) = \varphi$. Цим пояснюється назва “модифікована вага Малявена”, використана для об’єкта визначеного (6.15) і природа позначень $D_{\varphi}, \varphi_{\varphi}$. Зокрема відповідні вирази утворюються з точних формул для малявенівської похідної $D_{\varphi, \varphi}$ і відповідного інтеграла Скорохода $\varphi_{\varphi, \varphi}$ після підстановки в них $\varphi(\varphi) = \varphi$. Зазначимо, що оскільки $\varphi(\varphi) = \varphi$ не має компактного носія, $D_{\varphi, \varphi}$ може не бути квадратично інтегровним, а значить тепер $D_{\varphi, \varphi}$ не може інтерпретуватись як похідна Малявена. Як наслідок, тепер ми не можемо використовувати прямо засоби числення Малявена для доведення (6.17). Тож ми використовуємо тришагову процедуру доведення (6.17): спершу, застосовуємо засоби числення Малявена для доведення аналога (6.17) для $\Xi'_{\varphi, \varphi}$ з функцією φ , що має компактний носій за додаткової моментної умови (6.18). Другим кроком, апроксимуємо $\varphi(\varphi) = \varphi$ послідовністю функцій φ з компактними носіями. Нарешті, апроксимуємо загальний φ послідовністю процесів Леві, що мають “легкі хвости” $\varphi^{\varphi}, \varphi \geq 1$, кожен з яких задовольняє (6.18); див. Підрозділ 6.2.2. нижче.

6.2.1. Рівномірна φ^{φ} обмеженість модифікованої ваги Малявена. Метою цього підрозділу є доведення співвідношення (6.16).

Спершу наведемо точний вираз для $\varphi(\varphi)^{\tau \Xi'}$, Позначимо

$$\tilde{\varphi}_{\varphi} = \varphi_{\varphi} + \varphi_{\varphi} = \int_0^{\varphi} \varphi(\varphi, \varphi) + \int_0^{\varphi} \varphi(\varphi, \varphi),$$

тоді

$$\varphi(\varphi)^{\tau \Xi'} = \frac{\varphi^{\varphi}(\varphi(1))}{D_{\varphi, \varphi}} + \frac{\varphi^{\varphi} D_{\varphi, \varphi} \tilde{\varphi}_{\varphi}(\varphi(1))}{(D_{\varphi, \varphi})^2} + \frac{\tilde{\varphi}_{\varphi} D_{\varphi, \varphi}^2 \varphi_{\varphi} - 1}{(D_{\varphi, \varphi})^2} \tau. \quad (6.19)$$

Будемо виводити необхідну оцінку (6.16) з послідовності допоміжних оцінок для складових формули (6.19).

Позначимо

$$D_{\nu}^2(\theta, \theta, \theta).$$

Лема 6.1. Для кожного $\nu \geq 1$ існує $\theta_{\nu} < \infty$ таке, що

$$E(\nu^{-2/\nu} \theta_{\nu})^{-\nu} \leq \theta_{\nu}, \quad \nu \in (0, 1].$$

Доведення. Для довільного $\square < 1$ маємо

$$\begin{aligned} P(\theta_{\nu} < \square^2 \nu^{2/\nu}) &\leq P(\nu^{1/\nu} \times \nu^{1/\nu} \in [\square \nu^{1/\nu}, \nu^{1/\nu}]) = 0 \\ &= \exp \left\{ -\nu^{1/\nu} (\nu^{1/\nu} \in [\square \nu^{1/\nu}, \nu^{1/\nu}]) \right\}. \end{aligned}$$

Умова H1 показує, що існує додатна стала θ така, що

$$\nu^{1/\nu} (\nu^{1/\nu} \in [\square \nu^{1/\nu}, \nu^{1/\nu}]) \geq \nu^{1/\nu} \int_{\square \nu^{1/\nu}}^{\nu^{1/\nu}} \theta/\theta^{-\nu-1} d\theta = \theta(\square^{-\nu} - 1), \quad \nu \in (0, 1].$$

Тоді для сім'ї випадкових величин $\nu^{-2/\nu} \theta_{\nu}$, $\nu \in (0, 1]$ справедлива рівномірна оцінка

$$P(\nu^{-2/\nu} \theta_{\nu} < \square^2) \leq \theta^{-\nu} (\square^{-\nu} - 1)^{-\nu}, \quad \square < 1, \quad \nu \leq 1,$$

що доводить твердження леми. □

Оскільки

$$D_{\nu}^2 = \int_0^{\nu} P^2(\theta, \theta, \theta) \geq \theta_{\nu},$$

з Леми 6.1 безпосередньо випливає, що для кожного $\nu \geq 1$,

$$\sup_{\nu \in \mathbb{N}, \nu \in (0, 1]} E \left(\frac{\nu^{1/\nu}}{D_{\nu}^2} \right)^{\nu} < \infty. \tag{6.20}$$

Зазначимо, що D_{ν}^2 і D_{ν}^2 представляються сумами по множині стрибків процесу θ . Оскільки

$$\left(\sum_{\nu} \theta_{\nu} \right)^{3/2} \geq \sum_{\nu} \theta_{\nu}^{3/2}, \quad \{\theta_{\nu}\} \subset [0, \infty),$$

маємо

$$\frac{D_{\theta}^2 \varphi_{\theta}}{(D_{\theta} \varphi_{\theta})^{3/2}} \leq \frac{2}{\sqrt{\theta}} \tag{6.21}$$

Лема 6.2. Для кожного $\theta \geq 1$,

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\theta} &= \\ \varphi_{\theta}(\varphi_{\theta}, \varphi_{\theta}) &=: \varphi_{\theta} + \varphi_{\theta}, \\ D \varphi_{\theta} &= \int_0^{\infty} \varphi^2(\varphi_{\theta}, \varphi_{\theta}) = \varphi(\varphi_{\theta} + \varphi_{\theta}), \quad \varphi_{\theta} = \int_0^{\infty} \varphi^2(\varphi_{\theta}, \varphi_{\theta}) \end{aligned}$$

(φ_{θ} - вже визначений вище). Тоді

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\theta} &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right) = \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right) \\ \leq \frac{\sqrt{\theta}}{D \varphi_{\theta}} &= \sqrt{\frac{1}{\theta + \theta}} + \sqrt{\frac{1}{\theta + \theta}} \leq \sqrt{\frac{1}{\theta}} + \sqrt{\frac{1}{\theta}} \end{aligned} \tag{6.23}$$

За Лемою 6.1 сім'я

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right\}_{\theta \in (0, 1]}$$

має обмежені φ_{θ} -норми для довільного $\theta \geq 1$. До того ж, сім'я

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta}} \right\}_{\theta \in [0, 1]}$$

також має обмежені φ_{θ} -норми при будь-якому $\theta \geq 1$. Дійсно, достатньо помітити, що $\varphi_{\theta} \in$ інтегралом від детермінованої функції по компенсованій пуассоновій точковій мірі, а тому відповідні експоненційні моменти можуть бути обчислені явно:

$$\mathbb{E} \exp(\varphi_{\theta}) = \exp \left(\int_0^{\infty} (\varphi_{\theta} - 1 - \varphi_{\theta}) \varphi(\varphi_{\theta}) \right)$$

Взявши $\vartheta = \pm \vartheta^{-1/\vartheta}$ і використавши Н1, одержимо $(\vartheta^{-1/\vartheta} \vartheta)^2 \vartheta(\vartheta\vartheta) \leq \vartheta_2$, що дає необхідну $\vartheta\vartheta$ -обмеженість. Застосувавши нерівність Коші, остаточно одержимо, що сім'я

$$\left\{ \frac{|\vartheta\vartheta|}{\sqrt{\vartheta\vartheta}} \right\}$$

має обмежені $\vartheta\vartheta$ -норми.

Для другої суми в правій частині (6.23), запишемо нерівність Коші:

$$\frac{|\vartheta\vartheta|}{\sqrt{\vartheta\vartheta}} \leq \vartheta, \quad \vartheta = \vartheta([0, \vartheta] \times \{\vartheta/\vartheta > \vartheta^{1/\vartheta}\}).$$

Зазначимо, що $\vartheta\vartheta$ розподілена за законом Пуассона з інтенсивністю

$$\vartheta\vartheta(\vartheta/\vartheta > \vartheta^{1/\vartheta}), \quad \vartheta \in (0, 1],$$

яка є обмеженою внаслідок Н1. Звідси сім'я

$$\left\{ \frac{|\vartheta\vartheta|}{\sqrt{\vartheta\vartheta}} \right\}_{\vartheta \in [0, 1]}$$

також має обмежені $\vartheta\vartheta$ -норми, що завершує доведення (6.22). □

Лема 6.3. Нехай ϑ така як в Н2. Тоді

$$\sup_{\vartheta \in \bar{\mathbb{D}}, \vartheta \in (0, 1]} E \frac{\vartheta\vartheta(1)^{2+\vartheta}}{\sqrt{D\vartheta\vartheta}} < \infty. \tag{6.24}$$

Доведення. Доведення аналогічне доведенню попередньої лема, з деякими технічними деталями які виникають оскільки тепер треба підставляти $\vartheta(\vartheta)$ замість ϑ під інтегралами в чисельнику. Маємо

$$\begin{aligned} \vartheta\vartheta(1) &= \int_0^{|\vartheta|} \vartheta(\vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta, \vartheta\vartheta) + \int_0^{|\vartheta|} \vartheta(\vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta, \vartheta\vartheta) \\ &+ \vartheta^{1+2/\vartheta} \vartheta(\vartheta^{1/\vartheta}) - \vartheta(-\vartheta^{1/\vartheta}) =: \vartheta\vartheta_1 + \vartheta\vartheta_2 + \square\vartheta. \end{aligned}$$

Позначимо $\vartheta_0 = (\vartheta_0)^\vartheta$, тоді відношення

$$\vartheta(\vartheta) = \frac{\vartheta(\vartheta)}{\vartheta} = -\frac{\vartheta\vartheta'(\vartheta)}{\vartheta(\vartheta)} - 2$$

є обмеженим на множині $\{|\varphi| \leq \varphi^{1/\vartheta}\} \subset \{|\varphi| \leq \vartheta_0\}$. Далі ті самі міркування, що ми використали перед цим приводять до того, що сім'я має обмежені ϑ_ϑ -норми при кожному $\vartheta \geq 1$.

Тепер маємо за Н1

$$\square_\vartheta \sim (\vartheta_+ - \vartheta_-) \vartheta^{-1/\vartheta}, \quad \vartheta \rightarrow 0+,$$

а отже

$$|\square_\vartheta| \leq \vartheta \vartheta^{1/\vartheta}, \quad \vartheta \in (0, 1].$$

Тоді за Лемою 6.1 сім'я

$$\left\{ \frac{\square_\vartheta}{\sqrt{\vartheta}} \right\}_{\vartheta \in (0, \vartheta_0]}$$

має обмежені ϑ_ϑ -норми для кожного $\vartheta \geq 1$.

Остаточно, при $\vartheta \leq \vartheta_0$ за нерівністю Коші маємо

$$|\square_\vartheta| \leq \sqrt{\vartheta} \sqrt{\vartheta_0}$$

де

$$\begin{aligned} \vartheta_\vartheta &= \int_0^{|\varphi|} |\varphi| \\ &= \int_0^{|\varphi|} |\varphi| \\ &= \int_0^{|\varphi|} |\varphi| \\ &= \int_0^{|\varphi|} |\varphi| \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \vartheta^{1/\vartheta} < \vartheta \leq \vartheta_0 \\ & \vartheta^{1/\vartheta} > \vartheta_0 \\ & \vartheta^{1/\vartheta} > \vartheta_0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \vartheta^2(\vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta, \vartheta\vartheta) \\ & \vartheta^2(\vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta, \vartheta\vartheta) + \\ & \vartheta^2(\vartheta) \vartheta(\vartheta\vartheta, \vartheta\vartheta) =: \vartheta^1 + \vartheta^2. \end{aligned}$$

Функція $\varphi(\theta)$ - обмежена при $\{|\theta| \leq \theta_0\}$, звідси

$$\varphi^\theta \leq \varphi \varphi^\theta, \quad \theta \in (0, \theta_0],$$

де φ^θ та сама, що і в доведенні Лема 6.2. Тому $\varphi^\theta, \theta \leq \theta_0$ має обмежені φ^θ -норми для кожного $\theta \geq 1$. Випадкова величина φ^2 має складний розподіл Пуассона з інтенсивністю, що є пуассонівською випадковою величиною, рівною $\varphi \varphi(\varphi > \theta_0)$ і законом розподілу одного стрибка, рівним образу при φ міри φ за умови $\{|\varphi| > \theta_0\}$. З Н2 випливає, що такий розподіл має скінченний момент порядку $2 + \theta$, тож величини $\varphi^2, \theta \leq \theta_0$ мають обмежені $\varphi_{2+\theta}$ -норми. Підсумовуючи сказане вище, одержимо $< \infty$.

Така ж обмеженість при $\theta \in [\theta_0, 1]$ доводиться аналогічно і простішим шляхом; в цьому випадку інтеграли по $\{|\varphi| \leq \theta^{1/\theta}\}, \{|\varphi| > \theta^{1/\theta}\}$ в чисельнику і знаменнику замінюються на інтеграли по $\{|\varphi| \leq \theta_0\}, \{|\varphi| > \theta_0\}$. □

Тепер виводимо (6.16) з (6.20) – (6.22), а (6.24) просто використовуємо нерівність Гельдера.

Зауваження 6.1. Тепер можна пояснити основну ідею, яка привела до вибору функції інтенсивності $\varphi(\theta) = \varphi^2$. Якщо φ має компактний носій, “великі стрибки” виключаються з формули для $D_{\theta, \theta} \varphi$. З іншого боку, “великі стрибки” включаються так само в $\tilde{\varphi}$, який з’являється в чисельнику одного з доданків в (6.26). Маємо $\varphi(\theta) = 0, |\theta| > \theta_*$ для деякого $\theta_* > 0$, тож інтеграли

$$\int_0^{|\theta|} \varphi \varphi(\varphi, \varphi), \quad \int_0^{|\theta|} \varphi(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi)$$

$0 \quad |\theta| > \theta_* \qquad \qquad \qquad 0 \quad \mathbb{R}$

незалежні. Крім того, відомо, що

$$E \left(\int_0^{|\theta|} \varphi \varphi(\varphi, \varphi) \right)^2 = \int_0^{|\theta|} \varphi^2 \varphi(\varphi) + \int_0^{|\theta|} \varphi^2 \varphi(\varphi) \quad ,$$

$0 \quad |\theta| > \theta_* \qquad \qquad \qquad 0 \quad \mathbb{R}$

$$\int_0^{|\theta|} \varphi^{-2/\theta} \varphi(\varphi) \varphi(\varphi, \varphi) \Rightarrow \varphi, \quad \theta \rightarrow 0,$$

$0 \quad \mathbb{R}$

де φ – додатна $(\varphi/2)$ -стійка величина. Скориставшись цим, легко оцінити знизу

$$\left(\int_0^{|\theta|} \varphi \varphi(\varphi, \varphi) \right)^2$$

$\sqrt{\epsilon} \frac{0}{\epsilon} > \epsilon_0$
 що є необмеженим для малих ϵ оскільки $\epsilon < 2$. Це вказує на те, що марно сподіватись одержати рівномірну моментну оцінку типу (6.16) для ваги Малявена яка відповідає ϵ з компактним носієм.

В модифікованій конструкції ми “розширили носій” ϵ ; це привело до того, що частина “великих стрибків” в знаменнику добре збалансувалась з відповідними частинами чисельника, в цьому і є відповідь, чому модифікована вага задовольняє необхідну рівномірну моментну обмеженість. Зауваження 6.2. Інша природна модифікація малявенівської схеми полягає в наступному. Зауважимо на локальну шкалу для процесу ϵ і зробимо функцію ϵ залежною від ϵ в наступний спосіб:

$$\epsilon(\epsilon) = \epsilon_i(\epsilon) = \epsilon \chi(\epsilon^{1/\epsilon})$$

де $\chi \in \epsilon^1$ така, що $\chi(\epsilon) = 1, \epsilon \leq 1$ і $\chi(\epsilon) = 0, \epsilon \geq 2$. Фактично, вибір “перешкальованої” $\epsilon = \epsilon_i$, розмір носія якої $\approx \epsilon^{1/\epsilon}$ істотно використовується в конструкції числення Малявена, дослідженої в [15]. Просто помітити, що при такому виборі аналог (6.24) буде виконуватись; справа в тому, що зараз ϵ_i містить тільки “частину з малими стрибками”, які добре збалансовані з $\sqrt{\epsilon_i}$. В загальних рисах такий метод можна побачити в доведенні Лема 6.2. Це дає рівномірну моментну оцінку для першої компоненти відповідної ваги Малявена, а тому вибір “перешкальованої” $\epsilon = \epsilon_i$ є слушним коли невідомий параметр присутній тільки в зносі. Однак, для моделей з параметром в стрибковій частині такий вибір здається не виправданим. Чому це так пояснено в Зауваженні 6.1: “частина з великими стрибками” $\tilde{\epsilon}_i$ не є добре збалансованою “частиною

з малими стрибками” $\sqrt{\vartheta} i \sqrt{D\vartheta}$.

6.2.2. Справедливість формули для інтегрального представлення логарифмічної похідної густини перехідної імовірності. В цьому підрозділі доводиться співвідношення (6.17). Доведення складається з трьох кроків. Перший крок стосується версії числення Малявена.

Нехай міра Леві ϑ процесу ϑ задовольняє H_1, H_2 , додатково припускаємо, що ϑ має “легкі хвости” в тому сенсі, що (6.18) виконується для деякого $\vartheta' > 0$. Зафіксуємо деяку функцію $\vartheta \in \vartheta^2$ таку, що $\vartheta(\vartheta) = \vartheta^2$ в околі точки $\vartheta = 0$.

Для фіксованих ϑ і ϑ в Розділі 3 були побудовані оператори D, ϑ . Однак, тут ϑ і ϑ будуть змінюватись, тому, щоб підкреслити залежність D, ϑ від вибору тих чи інших ϑ і ϑ будемо використовувати позначення $D_{\vartheta, \vartheta}, \vartheta_{\vartheta, \vartheta}$ замість D, ϑ . В трохи більшій загальності, буквально та сама конструкція може бути побудована на просторі $\vartheta_0(\Omega, \vartheta(\vartheta, \vartheta), \mathcal{P})$ функціоналів від пари процесів ϑ і ϑ , з траєкторіями ϑ , які не збурюються перетворенням ϑ . Тоді аналогічно до обчислень зроблених в Розділі 3 одержимо

$$D_{\vartheta, \vartheta} \vartheta_{\vartheta, \vartheta} = \int_0^{\vartheta} \vartheta(\vartheta) \vartheta(\vartheta, \vartheta), \quad D_{\vartheta, \vartheta} \vartheta_{\vartheta, \vartheta} = 0,$$

$$\vartheta_{\vartheta, \vartheta}(1) = \int_0^{\vartheta} \vartheta(\vartheta) \vartheta(\vartheta, \vartheta), \quad \vartheta_{\vartheta, \vartheta}(\vartheta) = -\vartheta(\vartheta) \frac{\vartheta'(\vartheta)}{\vartheta(\vartheta)} - \vartheta'(\vartheta).$$

Відповідно,

$$D_{\vartheta, \vartheta} \vartheta_{\vartheta, \vartheta} = \vartheta D_{\vartheta, \vartheta} \vartheta_{\vartheta, \vartheta} = \vartheta \int_0^{\vartheta} \vartheta(\vartheta) \vartheta(\vartheta, \vartheta).$$

До того ж стохастична похідна другого порядку від $\vartheta_{\vartheta, \vartheta}$ добре визначена:

$$D^2_{\vartheta, \vartheta} \vartheta_{\vartheta, \vartheta} = \vartheta \int_0^{\vartheta} \vartheta(\vartheta) \vartheta'(\vartheta) \vartheta(\vartheta, \vartheta).$$

За Твердженням 6.1 і формулою (6.11) величина $\vartheta_{\vartheta, \vartheta}$ має густину роз-

поділу $\varphi(\varphi, \varphi)$, яка є φ^2 -функцією відносно φ, φ . З іншого боку, числення Малявена розроблене в Розділі 3 дозволяє одержати інтегральне представлення для відношення

$$\frac{\varphi(\varphi, \varphi)}{\varphi} = \frac{\varphi(\varphi, \varphi, \varphi)}{\varphi(\varphi, \varphi, \varphi)}.$$

тобто, повторивши буквально доведення третього пункту Теорема 3.1, одержимо наступне представлення:

$$\varphi(\varphi, \varphi) = \begin{cases} E_{0, \varphi}^{\varphi, \varphi} \Xi_{\varphi, \varphi}^{\varphi} & \varphi(\varphi, \varphi) > 0, \\ 0, & \text{інак} \\ \text{ше,} & \frac{(\varphi_{\varphi, \varphi}(1))(\varphi_{\varphi, \varphi}) (D^2 \varphi_{\varphi, \varphi})(\varphi_{\varphi, \varphi}) D (\varphi_{\varphi, \varphi})}{\varphi_{\varphi, \varphi}} \end{cases} \quad (6.25)$$

де

$$\Xi_{\varphi, \varphi}^{\varphi} := \varphi_{\varphi, \varphi} \frac{(\varphi_{\varphi, \varphi})}{D_{\varphi, \varphi} \varphi_{\varphi, \varphi}} = D_{\varphi, \varphi} \varphi_{\varphi, \varphi} + \frac{\varphi_{\varphi, \varphi}}{(D_{\varphi, \varphi} \varphi_{\varphi, \varphi})^2} - D_{\varphi, \varphi} \varphi_{\varphi, \varphi}^{\varphi}.$$

**
(6.26)

Зазначимо, що формально ми не можемо застосувати прямо Теорему 3.1, оскільки тепер ми маємо додатковий процес φ , від якого цілком залежить наш процес ψ . Не дивлячись на це, оскільки ψ незбурюється під дією перетворень Q^{φ} які дають змогу побудувати числення Малявена, легко перевірити, що буквально ті самі міркування використані в доведенні Теорему 3.1 можуть бути застосовані в цьому (трохи узагальненому) випадку.

Нагадаємо, що нами вже встановлено існування $\varphi(\varphi; \varphi, \varphi)$, а також її гладкість відносно $\varphi, \varphi, \varphi$. Маємо

$$\begin{aligned} & \int \varphi(\varphi) \square_{\varphi} \varphi(\varphi; \varphi, \varphi) \varphi \varphi = \square_{\varphi} E^{\varphi} \varphi(\varphi) = E^{\varphi} \varphi'(\varphi) (\square_{\varphi} \varphi) \\ & = {}^R E^{\varphi} D_{\varphi, \varphi} \varphi(\varphi) \\ &) = E^{\varphi} \varphi(\varphi) \Xi^1 \\ & = E_{\varphi}^{\varphi} \varphi(\varphi) \varphi(\varphi; \varphi, \varphi) = \end{aligned}$$

Звідки формула (6.25) еквівалентна наступній: для кожної $\varphi \in \varphi^1(\mathbb{R})$, що має компактний носій

$$\square_{\varphi} E \varphi(\varphi) = E \varphi(\varphi) \Xi^{\varphi}, \quad (6.27) \quad \varphi, \varphi$$

і щоб довести (6.17) достатньо перевірити (6.27) з модифікованою вагою Малявена Ξ^{φ} заміненою на $\Xi^{\varphi, \varphi}$. Щоб зробити це випишемо явно апроксимативну процедуру, потім перепишемо (6.27) в інтегральній формі, яка є зручною для апроксимативних цілей:

$$E \varphi(\varphi^{\varphi+\varphi}) - E \varphi(\varphi) = \int \varphi E \varphi(\varphi^{\varphi+\varphi}) (\Xi^{\varphi+\varphi, \varphi}) \varphi \varphi \quad (6.28)$$

Оскільки

0

$$\partial_{\theta} \varphi_{\theta} = \varphi, \quad \partial_{\theta} \varphi_{\theta} = \varphi_{\theta}$$

маємо

$$D_{\theta, \theta}(\partial_{\theta} \varphi_{\theta}) = 0, \quad D_{\theta, \theta}(\partial_{\theta} \varphi_{\theta}) = D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta} = \frac{1}{\theta} D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta}$$

отже

$$\Xi_{\theta, \theta}^{\theta} = \frac{\varphi_{\theta, \theta}(1)}{D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta}} + \frac{\varphi_{\theta, \theta}^2}{(D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta})^2} \frac{\varphi_{\theta, \theta}(1)}{D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta}} + \frac{\varphi_{\theta, \theta} D^2}{(D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta})^2} - \frac{1}{\theta}$$

Продовжимо реалізацію першого кроку наступним чином. Зафіксуємо деяке $\varphi_1 \in \varphi^2(\mathbb{R})$, $\varphi_1(\varphi) \geq 0$ таке, що

$$\varphi_1(\varphi) = \begin{cases} \varphi^2, & |\varphi| \leq 1; \\ 0, & |\varphi| \geq 2 \end{cases}$$

і позначимо

$$\varphi_{\theta}(\varphi) = \varphi^2 \varphi_1(\varphi/\theta).$$

Зазначимо, що при фіксованому θ і достатньо великому φ $\varphi_{\theta}(\varphi) = \varphi^2$ при $|\varphi| \leq \theta^{1/\theta}$, тому

$$D_{\theta, \theta} \varphi_{\theta} \geq \varphi_{\theta}$$

Далі, існує стала φ така, що

$$\varphi_{\theta}(\varphi) \leq \varphi^{\varphi}, \quad |\varphi'_{\theta}(\varphi)| \leq \varphi/\theta,$$

отже

$$\frac{\varphi_{\theta}(\varphi)}{\varphi} \leq \varphi(\varphi(\varphi) + 1).$$

Тоді, буквально повторивши обчислення з Підрозділа 3.3., одержуємо оцінку, аналогічну до (6.16) при фіксованому θ , в яку підставляється сім'я вагів $\Xi_{\theta, \theta}^{\theta}$, $\theta \geq 1$:

$$\sup_{\theta \geq 1, \theta \in \tilde{\Theta}} E \Xi_{\theta, \theta}^{\theta} \leq 2 + \varphi_1, \quad \varphi < \varphi < \varphi \quad (6.29)$$

$$< \infty \quad 1 \quad \wedge$$

(тут φ береться з H2, а φ з (6.18)). Тож, сім'я $\{\Xi_{\theta, \theta}^{\theta}, \theta \geq 1, \theta \in \tilde{\Theta}\}$ є

рівномірно інтегрованою. До того ж

$$\Xi_{\theta, \theta}^{\theta} \rightarrow \Xi_{\theta}^{\theta}, \quad \theta \rightarrow \infty,$$

з імовірністю 1 для довільної послідовності $\theta_{\theta} \rightarrow \theta \in \Theta$, що разом із рівномірною інтегровністю встановленою вище дає

$$\Xi_{\theta, \theta}^{\theta} \rightarrow \Xi_{\theta}^{\theta}, \quad \theta \rightarrow \infty,$$

в $\mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{P})$ рівномірно по $\theta \in \tilde{\Theta}$. Тому можемо перейти до границі в (6.28) при $\theta \rightarrow \infty$ і отримати необхідну рівність (6.27) з модифікованою вагою Малявена Ξ_{θ}^{θ} . Таким чином доводиться представлення (6.17) при додатковій моментній умові (6.18).

Другий апроксимативний крок полягає в знятті обмеження (6.18) і є аналогічним до попереднього. Розглянемо сім'ю процесів $\mathcal{M}_{\theta}^{\theta}$, $\theta \geq 1$ з мірами Леві

$$\mathcal{M}_{\theta}(\mathcal{M}_{\theta}) = \mathcal{M}_{\theta}(\mathcal{M}) \mathcal{M}_{\theta}, \quad \mathcal{M}_{\theta}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}(\mathcal{M}) \theta^{-\theta/2}.$$

Оскільки $\theta^{-\theta/2} \theta^{-\theta/2} \leq \theta$, кожна \mathcal{M}_{θ} задовольняє (6.18). Крім того, легко показати, що умови Н1, Н2 справедливі для \mathcal{M}_{θ} рівномірно по $\theta \geq 1$. Тому

- при кожному $\theta \geq 1$, (6.28) виконується, якщо $\mathcal{M}_{\theta}, \Xi_{\theta}^{\theta}$ замінити відповідно на $\mathcal{M}_{\theta}^{\theta}, \Xi_{\theta}^{\theta, \theta}$;
- при кожному $\theta \in (0, 1]$, сім'я $\Xi_{\theta}^{\theta, \theta}, \theta \in \tilde{\Theta}, \theta \geq 1$ задовольняє аналог (6.29) рівномірно по $\theta \geq 1$ (щоб довести це треба буквально повторити міркування Підрозділа 6.2.1.).

Пара $(\mathcal{M}_{\theta}^{\theta}, \Xi_{\theta}^{\theta, \theta})$ слабо збігається до $(\mathcal{M}_{\theta}, \Xi_{\theta}^{\theta})$ при $\theta \rightarrow \infty$. Оскільки сім'я $\{\Xi_{\theta}^{\theta, \theta}\}$ є рівномірно інтегрованою (див. другий пункт вище), можемо в співвідношенні (6.28) перейти до границі для $\mathcal{M}_{\theta}^{\theta}, \Xi_{\theta}^{\theta, \theta}$ і остаточно одержати (6.28) для $\mathcal{M}_{\theta}, \Xi_{\theta}^{\theta}$. Цим доводиться (6.17) і завершується доведення Теорема 6.1.

6.3. Властивість ЛАН

Теорема 6.2. Нехай φ – процес Леві, що задовольняє умови n_1, n_2 , а ψ незалежний від φ процес Леві, що задовольняє (6.5). Нагадаємо, що за наших припущень $\varphi \rightarrow 0$; у випадку $\varphi \in (1, 2)$, додатково припускаємо

$$\varphi^{-1/2} \psi^{1/\varphi-1} \rightarrow 0.$$

Тоді справджується властивість ЛАН в кожній точці $\theta_0 \in \Theta$ з де

$$(\varphi) \psi \psi,$$

Зауваження 6.3. Нагадаємо означення індекса активності процесу Леві φ , що має міру Леві ψ . Цей індекс називається індексом Блументаля – Гетора:

$$|\varphi| \psi (\psi) < \infty.$$

Тоді для забезпечення виконання умови (6.5) достатньо, щоб $\varphi < \psi$ (тут $\varphi = \psi$).

Процес φ інтерпретується як “заважаючий шум”, тож відповідно до попереднього зауваження, природньо вимагати від “заважаючої” частини шуму “меншої активності” відносно “основної” частини ψ . Як було показано в [1], для семіпараметричного статистичного (адаптивного) оцінювання, тобто асимптотично ефективного оцінювання φ коли не визначено розподіл заважаючого шуму, важливо узагальнити Теорему 6.2 так, щоб властивість ЛАН справджувалась не тільки для кожного окремого φ , а рівномірно на деякому “класі завод” \mathcal{U} процесів φ . Метод доведення Теорема 6.2 добре застосований для забезпечення рівномірної, у вище вказаному смислі, властивості ЛАН.

Теорема 6.3. Нехай \mathcal{U} – клас процесів Леві такий, що умова (6.5) справ-

джується рівномірно по $\theta \in U$. Якщо додатково θ і θ_0 задовольняє умовам Теорема 6.2, тоді для кожного $\theta \in U$ і $\theta_0 \in \Theta$, відношення вірогідності для дискретно спостережуваного процесу (1.2) допускає представлення (1.3) з $\psi(\theta), \Sigma(\theta_0)$ визначеними формулами (6.30), а співвідношення (1.4), (1.5) справджуються рівномірно по $\theta \in U$.

Теорема 6.3 висвітлює те, що є цілий клас U , що є строго відокремленим від θ в смислі (6.5), а довільна регулярна оцінка $\tilde{\theta}_\theta = (\tilde{\theta}_\theta, \tilde{\psi}_\theta)$ така, що

$$\psi(\theta)^{-1}(\tilde{\theta}_\theta - \theta_0) \Rightarrow N(0, \Sigma(\theta_0)^{-1})$$

є асимптотично ефективною на кожному класі завод U . Зокрема, рівномірна по θ обмеженість зверху асимптотичної концентрації призводить до ефекту:

$$\psi(\theta; 0, \Sigma(\theta_0)^{-1/2}) \theta \theta$$

для кожної симетричної довкола нуля замкненої множини $\theta \subset \mathbb{R}^2$, де $\psi(\theta; 0, \Sigma(\theta_0)^{-1/2})$ називається $N(0, \Sigma(\theta_0)^{-1/2})$ -густиною, див. [6, Підрозділ 2.3] і [87, Підрозділ II.11].

Зауваження 6.4. Ми припускаємо, що індекс активності θ – відомий. Оскільки, як це було з'ясовано в [58] і [2], якщо спробувати оцінити методом максимальної вірогідності θ і параметр масштабу θ , то можливе виродження асимптотичної інформаційної матриці Фішера.

6.3.1. Доведення теореми про достатні умови ЛАН. Доведемо Теорему 6.2. Для цього зауважимо, що з (6.17) випливає, що

$$\psi(\theta)^T \psi(\theta; \theta_0, \theta_0) = \left| \begin{array}{c} \psi(\theta)^T \Xi' \\ \vdots \\ \psi(\theta) \end{array} \right|$$

Зазначимо, що точна формула для ваги Ξ'_θ зовсім не містить “заважаю-

чого шуму” φ , а залежність $\varphi_\theta(\varphi; \varphi_{\theta_0})$ від φ міститься тільки в операції умовного усереднення. Тоді за нерівністю Йенсена

$$E \varphi(\varphi)^\tau \varphi_\theta(\varphi; \varphi_{\theta_0}) \leq E \varphi(\varphi)^\tau \varphi_{\theta_0}^{2+\varphi_1},$$

де φ не входить в праву частину нерівності. Звідси, за Теоремою 6.1 безпосередньо впливає моментна оцінка

$$\sup_{\theta \geq 1, \theta \in \tilde{\Theta}} E \varphi_\theta(\varphi; \varphi_{\theta_0})^{2+\varphi_1} < \infty \tag{6.31}$$

разом із

Твердження 6.2. За умов Теореми 6.2, для кожної $\tilde{\Theta}$ і кожного $\varphi_1 \in (0, \varphi)$ (тут φ прийшло з умови H2),

$$\sup_{\theta \geq 1, \theta \in \tilde{\Theta}} E \varphi(\varphi)^\tau \varphi_\theta(\varphi; \varphi_{\theta_0})^{\varphi_1^{2+}} < \infty.$$

Доведення Теореми 6.2 полягає в перевірці умов A1 – A4.

Щоб довести A1 достатньо показати, що для фіксованого $\varphi = \varphi_{\theta_0}$, відображення

$$\Theta \ni \varphi \mapsto \varphi_\theta(\varphi; \cdot) \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \tag{6.32}$$

є неперервним і для довільного φ_1, φ_2 такого, що відрізок $[\varphi_1, \varphi_2]$ вкладається в Θ ,

$$\sqrt{\varphi_\theta(\varphi_1; \cdot)} - \sqrt{\varphi_\theta(\varphi_2; \cdot)} = \int_0^1 \varphi_\theta((1-\varphi)\varphi_1 + \varphi\varphi_2; \cdot) \varphi_\theta(\varphi_1 - \varphi_2)^\tau, \tag{6.33}$$

де інтеграл розуміється в смислі збіжності в $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ Ріманових сум. Міркування тут аналогічні хоч і простіші за ті, що використовуються в доведенні Теорема 3.2, тож тут ми тільки схематично наведемо основні моменти.

Означимо

$$\Psi_{\square}(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \vartheta < \square/2, \\ \frac{(\vartheta - \square/2)^2}{\sqrt{\square}}, & \vartheta \in [\square/2, \square], \\ \vartheta - \frac{7\square}{8}, & \vartheta \geq \square. \end{cases}$$

Тоді за побудовою, для $\vartheta > 0$

$$\Psi_{\square}(\vartheta) \rightarrow \Psi_0(\vartheta) := \sqrt{\vartheta}, \quad \Psi'_{\square}(\vartheta) \rightarrow \Psi'_0(\vartheta) = \frac{1}{2\sqrt{\vartheta}} \quad \square \rightarrow 0.$$

Оскільки $\Psi_{\square} \in \mathcal{D}^1$, $\square > 0$, то з Твердження 6.1 і співвідношень (6.11), (6.13) випливає, що $\Psi_{\square}(\vartheta_i(\vartheta, \vartheta))$ гладко залежить від ϑ, ϑ_i і

$$\vartheta_{i,\square}(\vartheta, \vartheta) := \left(\Psi_{\square}(\vartheta_i(\vartheta, \vartheta)) \right)_{\square} = \Psi'_{\square}(\vartheta_i(\vartheta, \vartheta)) \square_{\vartheta} \vartheta_i(\vartheta, \vartheta).$$

Тоді

$$\Psi_{\square}(\vartheta_i(\vartheta_1; \cdot)) - \Psi_{\square}(\vartheta_i(\vartheta_2; \cdot)) = \int_0^1 \vartheta_{i,\square}((1-\vartheta)\vartheta_1 + \vartheta\vartheta_2; \cdot) d\vartheta \quad (\vartheta_1 - \vartheta_2) \quad (6.34)$$

і щоб довести (6.33) достатньо показати, що

$$\Psi_{\square}(\vartheta_i(\vartheta, \cdot)) \rightarrow \Psi_0(\vartheta_i(\vartheta, \cdot)) = \sqrt{\vartheta_i(\vartheta, \cdot)}, \quad \square \rightarrow 0,$$

в $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, для кожного $\vartheta \in \Theta$ і, що

$$\vartheta_{i,\square}(\vartheta, \cdot) \rightarrow \vartheta_i(\vartheta, \cdot), \quad \square \rightarrow 0,$$

в $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, рівномірно по $\vartheta \in [\vartheta_1, \vartheta_2]$. Далі треба показати, що функція (6.32) є рівномірно неперервною як рівномірна границя неперервних функцій.

Доведемо другу збіжність, оскільки доведення першої аналогічне і простіше. За побудовою маємо $0 \leq \Psi'_{\square}(\vartheta) \leq \Psi'_0(\vartheta) = (2\sqrt{\vartheta})^{-1}$, звідки

$$\vartheta_{i,\square}(\vartheta, \vartheta) = \Psi'_{\square}(\vartheta_i(\vartheta, \vartheta)) \square_{\vartheta} \vartheta_i(\vartheta, \vartheta) = Y_{\square}(\vartheta_i(\vartheta, \vartheta)) \vartheta_i(\vartheta, \vartheta),$$

де

$$Y_{\square}(\vartheta) = \Psi'(\vartheta) \vartheta \leq (1/2) \frac{\sqrt{\vartheta}}{\sqrt{\vartheta}}, \quad \vartheta > 0;$$

Отже

Нагадаємо, що $\varphi = \varphi_\theta$. Покладемо в Твердженні 6.2 $\tilde{\Theta}$ рівну відрізку $[\theta_1, \theta_2]$, тоді

$$\sup_{\theta \in \tilde{\Theta}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\theta(\varphi) \varphi_1^{2+} \varphi_\theta(\varphi) \varphi \varphi = \sup_{\theta \in \tilde{\Theta}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\theta(\varphi) \varphi \varphi^{2+\theta_1} < \infty.$$

Звідси за нерівністю Гельдера

$$\int_{\mathbb{R}} (\varphi_{\theta_1}(\varphi) - \varphi_\theta(\varphi))^2 \varphi \varphi \leq \int_{\{\theta: \theta_\theta(\varphi) \leq \theta_1\}} \varphi_\theta(\varphi) \varphi \varphi \varphi^{2+\theta_1}.$$

Густина $\varphi_\theta(\varphi)$ знаходиться явно з (6.11). Використовуючи це представлення, після заміни змінних $\varphi = \varphi^{-1} \varphi^{-1/\theta} (\varphi - \varphi\theta + \varphi\theta\theta)$, одержимо

$$\int_{\{\theta: \theta_\theta(\varphi) \leq \theta_1\}} \varphi_\theta(\varphi) \varphi \varphi = \int_{\{\theta: \varphi(\varphi; \theta) \leq \theta_1^{-1/\theta} \varphi\}} \varphi(\varphi; \theta) \varphi \varphi.$$

Маємо $\varphi_\theta, \varphi \in \varphi_1(\mathbb{R})$, тому відображення

$$[\theta_1, \theta_2] \ni \theta = (\varphi, \varphi) \mapsto \varphi_{\theta, \theta}(\cdot - \varphi^{-1} \varphi) \in \varphi_1(\mathbb{R})$$

є неперервним. Тому відображення

$$[\theta_1, \theta_2] \ni \theta \mapsto \varphi(\varphi; \cdot) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\theta, \theta}(\cdot - \varphi^{-1} \varphi) \varphi_\theta(\varphi \varphi)$$

також є неперервним. Остаточно одержуємо

$$\int_{\{\theta: \theta_\theta(\varphi) \leq \theta_1\}} \varphi_\theta(\varphi) \varphi \varphi = \int_{\{\theta: \varphi(\varphi; \theta) \leq \theta_1^{-1/\theta} \varphi\}} \varphi(\varphi; \theta) \varphi \varphi \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow 0$$

рівномірно по $\varphi \in [\theta_1, \theta_2]$, що завершує доведення необхідної збіжності і приводить до A1.

Перейдемо до доведення A2. Позначимо

$$\Gamma_{\ell, \ell}^{\ell} = \gamma(\ell)^T \left(\ell; \ell_{\ell, \ell} - \ell_{(\ell-1)\ell} \right), \quad \ell = 1, \dots, \ell,$$

тоді

$$\sum_{\ell=1}^{\ell} \left(\ell(\ell)^T \left(\ell; \ell_{\ell, \ell} - \ell_{(\ell-1)\ell} \right) \right)^{\otimes 2} = \frac{1}{\ell} \sum_{\ell=1}^{\ell} \left(\Gamma_{\ell, \ell}^{\ell} \right)^{\otimes 2}.$$

Оскільки ℓ - процес Леві, то $\{\Gamma_{\ell, \ell}^{\ell}, 1 \leq \ell \leq \ell\}$ - трикутний масив випадкових векторів, рядки якого незалежні і однаково розподілені. Проаналізуємо спільний розподіл $\Gamma_{\ell, \ell}^{\ell}$ в ℓ -му рядку.

Введемо позначення для величин

$$\ell_{\ell, \ell} = \ell^{-1} \ell^{-1/\ell} \left(\ell_{\ell, \ell} - \ell_{(\ell-1)\ell} - \ell_{\ell} + \ell_{\ell} \right), \quad \ell = 1, \dots, \ell,$$

які є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з

$$\ell_{1, \ell} = \ell_{\ell, \ell} + \ell^{-1} \ell^{-1/\ell}$$

За першим пунктом Твердження 6.1 і умовою (6.5)

$$\ell_{1, \ell} \Rightarrow \ell_{1, \ell}^{\pm} \tag{6.35}$$

Далі за (6.11) і (6.13) компоненти $\ell_{\ell, \ell}^{\ell} \left(\ell; \ell_{\ell, \ell} - \ell_{(\ell-1)\ell} \right)$ задаються формулами

$$\begin{aligned} \ell_{\ell, \ell}^1 \left(\ell; \ell_{\ell, \ell} - \ell_{(\ell-1)\ell} \right) &= -\ell^{-1} \ell^{-1/\ell} \frac{\ell^{(1)}(\ell; \ell_{\ell, \ell})}{\ell_{\ell, \ell}(\ell; \ell_{\ell, \ell})}, \\ \ell_{\ell, \ell}^2 \left(\ell; \ell_{\ell, \ell} - \ell_{(\ell-1)\ell} \right) &= -\ell^{-1} \left[1 + \frac{\ell^{(2)}(\ell; \ell_{\ell, \ell})}{\ell_{\ell, \ell}(\ell; \ell_{\ell, \ell})} + \ell^{-1} \ell_{\ell, \ell}^{-1/\ell} \frac{\ell^{(1)}(\ell; \ell_{\ell, \ell})}{\ell_{\ell, \ell}(\ell; \ell_{\ell, \ell})} \right]. \end{aligned}$$

Нагадаємо, що

$$\gamma(\ell)^T = \ell^{-1/2} \begin{pmatrix} \ell^{1/\ell-1} & 0 \\ \ell_{\ell, \ell}^{-1} & 1 \end{pmatrix},$$

звідси можемо остаточно записати

де вектор-значні

функції $\varphi_{\theta, \theta, \theta}$ мають такі компоненти:

$$\varphi_{\theta, \theta, \theta}^{(1)}(\theta; \theta) = \frac{\varphi_{\theta, \theta}^{(1)}(\theta; \theta)}{2}, \quad \varphi_{\theta, \theta, \theta}^{(2)}(\theta; \theta) = -1 - \frac{\varphi_{\theta, \theta}^{(2)}(\theta; \theta)}{\varphi_{\theta, \theta}(\theta; \theta)}.$$

Позначимо через $\varphi_{\theta, \theta}$ вектор-значну функцію з компонентами

$$\varphi_{\theta, \theta}^{(1)}(\theta) = -\frac{\varphi_{\theta, \theta}(\theta)}{2}, \quad \varphi_{\theta, \theta}^{(2)}(\theta) = -1 - \frac{\varphi_{\theta, \theta}^{\prime}(\theta)}{\varphi_{\theta, \theta}(\theta)},$$

а для $\square > 0, \theta > 0$ позначимо

$$\varphi_{\square, \theta} = \{\theta : |\theta| \leq \theta, \varphi_{\theta, \theta}(\theta) \geq \square\},$$

що є компактною множиною в \mathbb{R} . Останнє випливає з (6.12), (6.14) так, що для кожного фіксованого $\theta \in \Theta, \square > 0, \theta > 0$,

$$\varphi_{\theta, \theta}(\theta; \theta) \rightarrow \varphi_{\theta, \theta}(\theta), \quad \theta \rightarrow 0+,$$

рівномірно відносно $\theta \in \varphi_{\square, \theta}$. Зазначимо, що за (6.35)

$$\liminf_{\theta \rightarrow \infty} P(\varphi_{\theta, \theta}^{(1)} \in \varphi_{\square, \theta}) \leq P(\varphi_{\theta, \theta}^{(2)} \in \varphi_{\square, \theta})$$

і

$$P(\varphi_{\theta, \theta}^{(2)} \in \varphi_{\square, \theta}) \rightarrow 0, \quad \square \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow \infty.$$

Підсумуємо: випадкові вектори $\Gamma_{\theta, \theta}^{\theta}$ представляються образами незалежних однаково розподілених випадкових величин $\varphi_{\theta, \theta}^{\theta}$ при дії на них функціями $\varphi_{\theta, \theta, \theta}(\theta; \cdot)$ і

- спільний розподіл $\varphi_{\theta, \theta}^{\theta}$ слабо збігається до розподілу $\varphi_{\theta, \theta}^{\theta}$;
- на кожному компактi $\varphi_{\square, \theta}$ функції $\varphi_{\theta, \theta, \theta}(\theta; \cdot)$ рівномірно збігаються до функції $\varphi_{\theta, \theta}$, яка є неперервною на цьому компактi;

залишаємо позначення, введені при доведенні А2. Візьмемо $\theta_1 = \theta_0$ і довільну послідовність $\theta_n \rightarrow \theta_0$. З співвідношень (6.12), (6.14) випливає,

що для кожних фіксованих $\square > 0, \delta > 0$

$$\sup_{\theta \in \theta_{\square, \delta}} \frac{1}{\theta} \left(\frac{\Gamma_{1, \theta}(\theta; \theta)}{\Gamma_{1, \theta}(\theta_0; \theta)} - \frac{1}{\theta} \Gamma_{1, \theta}(\theta_0, \theta) \right) \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow \infty.$$

Тоді за нерівністю Коші $(\theta + \theta)^2 \leq 2\theta^2 + 2\theta^2$,

$$\begin{aligned} \limsup_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (\Gamma_{1, \theta}(\theta; \theta) - \Gamma_{1, \theta}(\theta_0; \theta))^2 d\theta \\ \leq \limsup_{\theta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\theta^2} E_{\theta, \theta}(\theta, \theta_0) + \frac{1}{2\theta^2} E_{\theta, \theta}(\theta_0, \theta_0) \right) \\ = \limsup_{\theta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\theta^2} E_{\theta, \theta}(\theta, \theta_0) + \frac{1}{2\theta^2} E_{\theta, \theta}(\theta_0, \theta_0) \right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\Gamma_{1, \theta}(\theta, \theta) = \Gamma_{1, \theta} = \int_{\mathbb{R}} (\theta; \theta) - \theta^{(\theta-1)} d\theta,$$

виводимо з Твердження 6.2 і нерівності Гельдера, що

$$\limsup_{\theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (\Gamma_{1, \theta}(\theta; \theta) - \Gamma_{1, \theta}(\theta_0; \theta))^2 d\theta \leq \limsup_{\theta \rightarrow \infty} (P(\theta_{1, \theta} \in \theta_{\square, \delta}) + P(\theta_{1, \theta}^0 \in \theta_{\square, \delta}))$$

з деякою сталою δ . Отже

$$\theta_{1, \theta} \rightarrow \theta_{1, \theta_0} \quad \theta_{1, \theta}^0 \rightarrow \theta_{1, \theta_0}^0$$

Звідси одержимо $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_1 \in \square, \eta \in \square) = 0$.

Нагадаємо, що $\square > 0, \eta > 0$ тут довільні. Спрямувавши в нерівності вище $\square \rightarrow 0, \eta \rightarrow \infty$ остаточно отримаємо

$$\limsup_{\eta \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\eta} (\eta^\eta (\eta; \eta) - \eta^\eta (\eta; \eta)) / \eta^\eta = 0,$$

$$\eta^\eta = 0,$$

що завершує доведення А4.

6.3.2. Доведення теореми про достатні умови рівномірної ЛАН. Метою цього підрозділу є доведення Теорема 6.3. Щоб отримати необхідну властивість ЛАН, рівномірну по $\eta \in U$, достатньо зафіксувати послідовність η_n процесів Леві таку, що

$$\eta_n^{-1/\eta_n} \rightarrow 0$$

за імовірністю і повторити попередні міркування для модифікованої статистичної моделі, де процес η в η -му випробуванні замінюється на

$$\eta_n = \eta_n + \eta_n + \eta_n.$$

Моментна обмеженість в Твердженні 6.2 у великій мірі не є чутливою до процесу η (див. зокрема (6.31)). Розподіл процесу η вводиться в означенні функцій $\eta, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, однак, як легко побачити, співвідношення (6.12), (6.14) справджуються рівномірно відносно $\eta \in U$. Остаточно, випадкові величини

$$\eta_n = \eta_n^{-1} (\eta_n - \eta_n) = \eta_n + \eta_n$$

слабко збігаються до φ_1^{\pm} . Тож, повторивши з очевидними змінами в позначеннях обрахунки попередніх підрозділів, одержимо властивості A1 – A4 для модифікованої моделі, що доводить необхідну властивість ЛАН, рівномірну по $\varphi \in \mathcal{U}$. \square

6.4. Висновки

Побудовано інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності процесу Леві з важкими хвостами. Доведено властивість ЛАН для моделей в яких із прямуючим до нуля інтервалом спостерігається процес Леві. Спостереження відбуваються на фоні заважаючого шуму меншої інтенсивності ніж процес, що спостерігається, а відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів. Крім того, запропоновано підхід який дозволяє позбавитись від умов на хвості спостережуваного процесу.

ВИСНОВКИ

У даній роботі було розроблено апарат для вивчення локальних і асимптотичних властивостей статистичних моделей, породжених дискретними спостереженнями процесів Леві, та процесів які є розв'язками СДР з шумом Леві без дифузійної компоненти. За допомогою числення Малева доведено властивість ЛАН статистичних моделей нелінійних з "легкими хвостами" в шумах і лінійних з "важкими хвостами". Для статистичного експерименту зі сталим кроком спостереження знайдено нижню границю ефективності оцінок і побудовано алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання.

У дисертаційній роботі наведено наступні результати:

- Встановлено існування густини перехідної імовірності розв'язку СДР з шумом Леві, і для неї знайдено інтегральні представлення перших двох логарифмічних похідних по параметру, також побудовано інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності процесу Леві з важкими хвостами.
- Досліджено достатні умови регулярності статистичного експерименту, породженого дискретними спостереженнями розв'язку СДР з шумом Леві і встановлено нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.
- Знайдено достатні умови, за яких статистична модель, породжена дискретними спостереженнями процесу Маркова, має властивість ЛАН та доведено властивість ЛАН у випадку дискретних спостережень зі сталим кроком моделей, заданих СДР з шумом Леві.
- Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу,

заданого СДР з шумом Леві, побудовано алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання і оцінено втрати інформації при умовному усередненні.

- Доведено властивість ЛАН для моделей, в яких із прямуючим до нуля кроком спостерігається процес Леві на фоні заважаючого шуму і доведено, що відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів.

Одержані результати є актуальними як з теоретичної, так і з практичної точки зору. З одного боку в роботі були одержані результати для моделей з досить загальними умовами на шум.

З іншого боку, одержані результати можна використати на практиці при дослідженні статистичних моделей, які описують фізичні, біологічні, хімічні явища, процеси у фінансовій сфері та фондовому ринку, а також при встановленні асимптотичних меж ефективності для оцінок параметрів у відповідних моделях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Aït-Sahalia Y. Volatility estimators for discretely sampled Lévy processes/ Y. Aït-Sahalia, J. Jacod // *Ann. Stat.*— 2007.— Vol. 35— P. 355–392.
2. Aït-Sahalia Y. Fisher's information for discretely sampled Lévy processes/ Y. Aït-Sahalia, J. Jacod // *Econometrica*— 2008.— Vol. 76— P. 727–761.
3. Akritas M.G. Asymptotic inference in Lévy processes of the discontinuous type / M.G. Akritas, R.A. Johnson // *Ann. Stat.*— 1981.— Vol. 9— P. 604–614.
4. Applebaum D. Levy processes: from probability to finance and quantum groups/ D. Applebaum // *AMS*— 2004.— Vol. 51, № 11— P. 1337–1347.
5. Bally V. Integration by parts formula and applications to equations with jumps/ V. Bally, E. Clément // *Prob. Th. Relat. Fields*— 2011.— Vol. 151, № 3-4— P. 613–657.
6. Basawa I.V. Asymptotic optimal inference for nonergodic models. *Lecture Notes in Statistics* / I.V. Basawa, D.J. Scott // Springer-Verlag, New York-Berlin.— 1983. Vol. 17.
7. Bass R.F. Stochastic differential equations with jumps. *Lecture Notes in Statistics* / R.F. Bass // *Prob. Surv.*— 2004. Vol. 1— P. 1–19.
8. Bianchi M. L. Tempered stable distributions and processes in finance: numerical analysis / M. L. Bianchi, S. T. Rachev, Y. S. Kim, F. J.

- Fabozzi // Math. and stat. meth. for actuarial sc. and fin., Springer Italia, Milan – 2010. P. 33–42.
9. Bichteler K. Malliavin calculus for processes with jumps / K. Bichteler, J.-B. Gravereaux, J. Jacod // Gordon and Breach sc. pub., N.Y., London, Paris, Tokyo – 1987.
 10. Bismut J.-M. Calcul des variations stochastique et processus de sauts / J.-M. Bismut // Z. Warw. theor. verw. Geb.— 1981. — Vol. 56, № 4 — P. 469–505.
 11. Bouleau N. Application of the lent particle method to Poisson-driven SDE's / N. Bouleau, L. Denis // Prob. Theory Relat. Fields— 2011. — Vol. 151, № 3-4 — P. 403 – 433.
 12. Bodnarchuk S. V. Stochastic control based on time-change transformations for stochastic processes with Lévy noise / S. V. Bodnarchuk, A. M. Kulik // Prob. Th. and Math. Stat. — 2012. — Vol. 86, № — P. 11 – 27.
 13. Carr P. The fine structure of asset returns: An empirical investigation / P. Carr, H. Geman, D.B. Madan, M. Yor // J. Business— 2002. — Vol. 75 — P. 303-325.
 14. Carr P. Stochastic volatility for Lévy processes / P. Carr, H. Geman, D.B. Madan, M. Yor // Math. Finance— 2003. — Vol. 13 — P. 345-382.
 15. Clément E. Local Asymptotic Mixed Normality property for discretely observed stochastic differential equations driven by stable Lévy processes / E. Clément, A. Gloter // Stoch. Proc. Appl. — 2015. — Vol. 125 — P. 2316–2352.

16. Chaumont L. Markovian bridges: Weak continuity and pathwise constructions / L. Chaumont, G. Uribe Bravo // *Ann. Prob.* — 2011. — Vol. 39, № 2 — P. 609-647.
17. Cont R. Financial modelling with jump processes / R. Cont, P. Tankov // Chapman and Hall, CRC Press, London — 2004.
18. Corcuera J.M. Statistical inference and Malliavin calculus / J.M. Corcuera, A. Kohatsu-Higa // *Seminar on Stoch. An., Random Fields and Appl. VI, Progress in Probability*, Springer Basel — 2011. — Vol. 63 — P. 59–82.
19. Fabian V. Local asymptotic behavior of densities / V. Fabian, J. Hannan // *Stat. Decisions* — 1987. — Vol. 5 — P. 105–138.
20. Fournié E. Some applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance / E. Fournié, J.M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, N. Touzi // *Fin. and Stoch.* — 1999. — Vol. 3 — P. 391–412.
21. Fisher R. On an absolute criterion on fitting frequency curves // *Messenger of Math.* — 1912. — Vol. 41 — P. 155–160.
22. Frisch U. Levy flight and related topics in physics / U. Frisch, M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky // Springer, Berlin — 1994.
23. Genon-Catalot V. On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes / V. Genon-Catalot, J. Jacod // *Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Stat.* — 1993. — Vol. 29 — P. 119–151.
24. Genon-Catalot V. Estimation of the diffusion coefficient for diffusion processes: random sampling / V. Genon-Catalot, J. Jacod // *Scand. J. Stat.* — 1994. — Vol. 21 — P. 193–221.

25. Gobet E. Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: a Malliavin calculus approach / E. Gobet // Bernoulli — 2001. — Vol. 7, № 6 — P. 899-912.
26. Gobet E. LAN property for ergodic diffusions with discrete observations / E. Gobet // Ann. I. H. Poincaré - PR — 2001. — Vol. 38, № 5 — P. 711 — 737.
27. Gouriéroux, C., Monfort, A. and Trognon A. Pseudo Maximum Likelihood Methods: Theory / C. Gouriéroux, A. Monfort, A. Trognon // Econometrica — 1984. — Vol. 52 — P. 681-700.
28. Greenwood P.E. Contiguity and the statistical invariance principle / P.E. Greenwood, A.N. Shiriyayev // London, Th. and Appl. of Stoch. Proc.— 1985.
29. Greenwood P.E. Efficient estimation for semiparametric semi-Markov processes / P.E. Greenwood, U.U. Müller, W. Wefelmeyer // Communication in Stat.-Th. and Meth. — 2013. Vol. 33, № 3 — P. 1-15.
30. Hajek J. Local asymptotic minimax admissibility in estimation, in: Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability / J. Hajek // Berkeley and Los Angeles, Univ. of California Press — 1971. — P.175–194.
31. Hodges J. Some problems in minimax estimation / J. Hodges, E. Lehman // Ann. Math. Statist. — 1950. — Vol. 21, № 2 — P. 182–197.
32. Höpfner R. Two comments on parameter estimation in stable processes / R. Höpfner // Math. Meth. of Stat. — 1997. — Vol. 6 — P. 125 - 134.

33. Höpfner R. On statistics of Markov step processes: representation of log-likelihood ratio processes in filtered local models / R. Höpfner // *Prob. Th. Relat. Fields* — 1993. — Vol. 94 — P. 375 – 398.
34. Ivanenko D.O. Second derivative of the log-likelihood in the model given by Lévy driven SDE's / D.O. Ivanenko // *Visn. Kyiv Nat. Univ.* — 2014. — Vol. 2 — P. 18 – 22.
35. Ivanenko D.O. Malliavin-type representation for the sensitivity of the likelihood function of discretely observed Lévy driven SDE's / D.O. Ivanenko // *Abstracts of International conference "Modern stochastic: theory and applications III Kyiv — September 10–14, 2012.* — P. 50.
36. Ivanenko D.O. Asymptotic properties of MLE for discretely observed solution to a Lévy driven SDE's / D.O. Ivanenko // *Abstracts of International conference "11-th international Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics Vilnius, Lithuania — June 30 – July 4, 2014.* — P. 116.
37. Ivanenko D.O. LA(M)N property of Lévy process observed at high frequency / D.O. Ivanenko // *Abstracts of International conference "Probability, reliability and stochastic optimization Kyiv — April 1–5, 2015.* — P. 38–39.
38. Ivanenko D.O. Uniform LAN of locally stable Lévy process observed at high frequency / D.O. Ivanenko // *Abstracts of International conference "Stochastic processes in abstract spaces Kyiv — October 14 – 16, 2015.* — P. 21.
39. Ivanenko D.O. Malliavin calculus approach to statistical inference for Lévy driven SDE's / D.O. Ivanenko, A.M. Kulik // *Meth. and Comp. in Appl. Prob.* — 2015. — Vol. 17 — P. 107–123.

40. Ivanenko D.O. LAN property for families of distributions of solutions to Lévy driven SDE's / D.O. Ivanenko, A.M. Kulik // *Modern Stoch.: Th. and Appl.*— 2014.— Vol. 1— P. 33–47.
41. Ivanenko D.O. Uniform LAN property of locally stable location-scale Lévy process observed at high frequency / D.O. Ivanenko, A.M. Kulik, H. Masuda // *Latin American Journal of Prob. and Math. Stat.*— 2015.— Vol. 12, № 2— P. 797 – 824.
42. Jeganathan P. On the asymptotic theory of estimation when the limit of the log-likelihood ratios is mixed normal / P. Jeganathan // *Sankhya Ser.*— 1982.— Vol. 44, № A— P. 173–212.
43. Jennrich R. I. Newton-Raphson and related algorithms for maximum likelihood variance component estimation / R. I. Jennrich, P. F. Sampson // *Technometrics* — 1976. — Vol. 18 — P. 11-17.
44. Kawai R. Local asymptotic normality for normal inverse Gaussian Lévy processes with high-frequency sampling / R. Kawai, H. Masuda // *ESAIM: Prob. and Stat.*— 2013.— Vol. 17— P. 13–32.
45. Kessler M. Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations / M. Kessler // *Scand. J. Stat.* — 1997. — Vol. 24 — P. 211–229.
46. Kim Y.S. The modified tempered stable distribution, GARCH models and option pricing. / Y.S. Kim, S.T. Rachev, D.M. Chung, M.L. Bianchi // *Prob. and Math. Stat.* — 2009. — Vol. 29, № 1 — P. 91–117.
47. Kohatsu-Higa A. LAN property for a linear model with jumps / A. Kohatsu-Higa, E. Nualart, N.K. Tran // *C. R. Acad. Sci. Paris* — 2014— Vol. 352 — P. 859–864.

48. Koponen I. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process / I. Koponen // *Phys. Rev. E* — 1995 — Vol. 52 — P. 1197–1199.
49. Kulik A.M. Exponential ergodicity of the solutions to SDE's with a jump noise / A.M. Kulik // *Stoch. Proc. and their Appl.* — 2009. — Vol. 119 — P. 602-632.
50. Kulik A.M. Asymptotic and spectral properties of exponentially ϕ -ergodic Markov processes / A.M. Kulik // *Stoch. Proc. and their Appl.* — 2011. — Vol. 121 — P. 1044-1075.
51. Kulik A.M. Ergodicity and mixing bounds for the Fisher-Snedecor diffusion / A.M. Kulik, N.N. Leonenko // *Bernulli* — 2013 — Vol. 19, № 5 — P. 2294–2329.
52. Kutoyants Yu.A. Statistical inference for ergodic diffusion processes / Yu.A. Kutoyants // Springer-Verlag, New-York — 2004.
53. Le Cam L. Limits of experiments, in: *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* / L. Le Cam // Berkeley and Los Angeles, Univ. of California Press — 1971. — P. 245–261.
54. Le Cam L. *Asymptotics in Statistics* / L. Le Cam, G.L. Yang // Springer — 1990.
55. Malliavin P. Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators / P. Malliavin // *Proc. Intern. Symp. on Stoch. Diff. Eq.* — 1978. — P. 195 –263.

- Mantegna R.N. Stochastic process with ultraslow convergence to a Gaussian: The truncated Lévy flight / R.N. Mantegna, H.E. Stanley // Phys. Rev. Lett. — 1994 — Vol. 73 — P. 2946–2949.
56. Masuda H. Parametric estimation of Lévy processes / H. Masuda // Lévy Matters IV, Est. for Disc. Observ. Lévy Proc. Lect. Not. in Math., Springer — 2015. — Vol. 2126 — P. 179–286.
57. Masuda H. Convergence of gaussian quasi-likelihood random fields RANDOM for ergodic Lévy driven SDE observed at high frequency / H. Masuda // The Ann. of Stat. — 2013. — Vol. 41, № 2 — P. 1593–1641.
58. Masuda H. Joint estimation of discretely observed stable Lévy processes with symmetric Lévy density / H. Masuda // J. Japan Statist. Soc. — 2009. — Vol. 39 — P. 49–75.
59. Masuda H. Ergodicity and exponential α -mixing bounds for multidimensional diffusions with jumps / H. Masuda // Stoch. Proc. Appl. — 2007. — Vol. 117 — P. 35–56.
60. Merton R. C. Option pricing with discontinuous returns / R.C. Merton // Bell J. Financ. Econ. — 1976. — Vol. 3 — P. 145–166.
61. Nocturne D. J.-M. Asymptotic efficiency of the maximum likelihood estimators for the parameters of certain stochastic processes / D. J.-M. Nocturne // Dep. of operations res. college of eng., Cornell univ., Ithaca, New York — 1970. — Tech. Rep. Vol. 105.
62. Nolan J. P. Modeling financial data with stable distributions / J. P. Nolan // Working Paper, Am. Univ. — 2005.
63. Novikov E.A. Infinitely divisible distributions in turbulence / E.A. Novikov // Phys. Rev. — 1994. — Vol. 50 — P. R3303–R3305.

64. Nualart D. Analysis in Wiener space and anticipating stochastic calculus / D. Nualart // Springer Berlin / Heidelberg, Lecture Notes in Math.— 1998. — Vol. 1690 — P. 123-220.
65. Osborne M.R. Fisher's method of scoring / M.R. Osborne // Int. Stat. Rev. — 1992. — Vol. 60 — P. 99-117.
66. Penev S. Efficient estimation of the stationary distribution for exponentially ergodic Markov chains / S. Penev // J. Statist. Plann. Inference — 1991. — Vol. 27 — P. 105-123.
67. Rogers G. Multiple path analysis of reflectance from turbid media / G. Rogers // J. Opt. Soc. Am. — 2008. — Vol. A, 25 № 11 — P. 2879-2883.
68. Rosiński J. Tempering stable processes / J. Rosiński // Stoch. Proc. and their Appl. — 2007. — Vol. 117, № 6 — P. 3677-707.
69. Roussas G.G. Asymptotic inference in Markov processes / G.G. Roussas // Ann. Math. Stat. — 1965. — Vol. 36 — P. 978-992.
70. Roussas G.G. Contiguity of Probability Measures: Some Applications in Statistics / G.G. Roussas // Cambridge Tracts in Mathematics and Math Phys. 63, Cambridge Univ. Press, London — 1972. — Vol. 63.
71. Schoutens W. Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives / W. Schoutens // Wiley — 2003.
72. Schick A. Sample splitting with Markov chains / A. Schick // Bernoulli — 2001. — Vol. 7 — P. 33-61.
73. Simon B. Methods of Modern Mathematical Physics / B. Simon, M. Read // Functional Analysis, Academic Press, San Diego. — 1972.

74. Simon T. Support theorem for jump processes / T. Simon // *Stoch. Proc. and Appl.*— 2000.— Vol. 89— P. 1-30.
75. Skorokhod A.V. On differentiability of the measures which correspond to stochastic processes / A.V. Skorokhod // *Th. of Prob. and Appl. I. Processes with independent increments.*— 1957. — Vol. 2, № 4 — P. 407-432.
76. Stanley H. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics / H. Stanley, V. Afanasyev, L.A.N. Amaral, S.V. Buldyrev, A.L. Goldberger, S. Havlin, H. Leschhorn, P. Maass, R.N. Mantegna, C.-K. Peng, P.A. Prince, M.A. Salinger, M.H.R. Stanley, G.M. Viswanathan // *Physica A* — 1996.— Vol. 224, № 1 — P. 302—321.
77. Van der Vaart A.W. Asimptotic statistics / A.W. Van der Vaart // Cambridge univ. press.— 1998.
78. Van der Vaart A.W. The statistical work of Lucien Le Cam / A.W. Van der Vaart // *Ann. of Stat.*— 2002.— Vol. 30, № 1 — P. 631—682.
79. Vinogradov D. Cumulant approach of arbitrary truncated Levy flight / D. Vinogradov // *Physica* — 2010. — Vol. A, № 389 — P. 5794-5800.
80. Xiangqin Zhao Engineering application of time-changed Levy process to capture jumps in stock market / Zhao Xiangqin, Zhanhaia Wang // *Systems Engineering Procedia* — 2011. — Vol. 2 — P. 243-251.
81. Zolotarev V.M. One-dimensional stable distributions / V.M. Zolotarev // *Transl. Math. Monographs, AMS, Providence.*— 1986. — Vol. 65.
82. White H. Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models / H. White // *Econometrica*— 1982. — Vol. 50 — P. 1-25.

83. Боднарчук С.В. Оцінка ефективності методу оцінювання в статистичних моделях, керованих шумом Леві / С.В. Боднарчук, Д.О. Іваненко // *Th. of Prob. and Math. Stat.* — 2015. — Vol. 92, № — P. 9 – 22.
84. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В. Скороход // *Наукова думка, Київ* — 1982.
85. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов и их приложения / А.Я. Дороговцев // *Вища школа, Київ* — 1982.
86. Ибрагимов, И.А., Линник, Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник // *М. Наука.* — 1965.
87. Ибрагимов И.А. Асимптотическая теория оценивания / И.А. Ибрагимов, Р.З. Хасьминский // *М. Наука.* — 1979.
88. Іваненко Д.О. Асимптотичні властивості ОМВ для дискретних спостережень розв'язку СДР, керованого процесом Леві / Д.О. Іваненко // Тези доповідей всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу Ворохта — 24 Лютого – 2 Березня, 2014. — P.18–19.
89. Линьков Ю.Н. Об оценках параметров считающих процессов / Ю.Н. Линьков // *Пробл. передачи информ.* — 1982. — Vol. 18, № 1 — P. 78 – 93.
90. Ширяев А.Н. Вероятность / А.Н. Ширяев // *Москва, МЦНМО* — 2004.