Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

СЛАБКА ЗБІЖНІСТЬ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЗАГАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ ДРОБОВОГО ЕФЕКТУ

студента 4 курсу
Кравченка Артема Вікторовича

Науковий керівник:
професор
Іксанов. О.М.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ДЕК, протокол № від 2021 р.

Завідувач кафедри дослідження операцій

проф. Іксанов О.М.

Київ - 2021

Зміст

Вступ

Нехай $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$, - необов'язково монотонна послідовність невід'ємних випадкових величин. Визначимо лічильний процес $(N(t))_{t\geq 0}$ наступним чином

$$N(t) := \sum_{k\geq 0} \mathbf{1}_{\{S_k\leq t\}}\ , t\geq 0,$$

де $\mathbf{1}_A$ - індикатор події A. Надалі припускається, що $N(t) < \infty$ майже напевно (м.н.).

Нехай $D := D[0,\infty)$ - простір Скорохода неперервних справа дійснозначних функцій, що визначені на $[0,\infty)$ та мають скінченні границі зліва у кожній додатній точці. Для функції $h \in D$ визначимо випадковий процес $X := (X(t))_{t\geq 0}$ так

$$X(t) := \sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbf{1}_{\{S_k\leq t\}}\ = \int_{[0,t]} h(t-y)dN(y), \quad t\geq 0.$$

Дотримуючись термінології, введеної в статті [5], будемо називати X *загальним процесом дробового ефекту*, оскільки, окрім $N(t) <\ \infty$ м.н., не було зроблено жодних припущень стосовно послідовності $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

В залежності від вибору вхідної послідовності (S_k) загальні процеси дробового ефекту можуть бути застосовані для моделювання різних явищ. Наприклад, якщо вхідна послідовність є стандартним випадковим блуканням, то процес дробового ефекту дозволяє досліджувати асимптотику числа зайнятих каналів у системах масового обслуговування типу $G/G/\infty$. Також загальні процеси дробового ефекту використовують у моделюванні гіллястих та регенеративних процесів, процесах поширення прізвищ у генеалогічному дереві, поведінки нейтронів у ядерному реакторі, тощо. Більше прикладів можна знайти у монографії [3] та статтях [5] та [6].

Для подальшого викладення необхідно сформулювати основний результат статті [6]. Для цього потрібні додаткові позначення. які зараз будуть введені. Для $\lambda > 0$ позначимо через $W_\lambda := (W_\lambda(u))_{u\geq 0}$ випадковий процес, що м.н. не спадає, є м.н. локально неперервним за Гьольдером з показником λ та задовольняє рівність $W_\lambda(0) = 0$ м.н. Нагадаємо, що локальна неперервність за Гьольдером з показником λ функції f означає, що

$$\sup_{x,y\in K} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\lambda} < \infty$$

для кожного компакту $K \subset \mathbb{R}$. Зокрема, для кожного $T > 0$, всіх $0 \leq\ x, y \leq\ T$ і деякої м.н. скінченної випадкової величини M_T

$$|W_\lambda(x) - W_\lambda(y)| \leq M_T |x - y|^\lambda \tag{0.1}$$

Визначимо випадковий процес $Y_{\lambda,\gamma} := (Y_{\lambda,\gamma}(u))_{u\geq 0}$ для $\gamma > -\lambda$ так

$$Y_{\lambda,\gamma}(u) := \int_{[0,u]} (u-y)^\gamma dW_\lambda(y), \quad u \geq 0, \tag{0.2}$$

де інтеграл є потраєкторним інтегралом Лебега-Стілтьєса. Для $\gamma > -\lambda$, $\gamma \neq\ 0$, $Y_{\lambda,\gamma}$ задається інтегралом Лебега

$$Y_{\lambda,\gamma}(u) := \int_0^u (u-y)^{\gamma-1} W_\lambda(y) dy, \quad u > 0, \quad Y_{\lambda,\gamma}(0) := 0, \tag{0.3}$$

а для $-\lambda < \gamma < 0$

$$Y_{\lambda,\gamma}(u) := u^\gamma W_\lambda(u) + |\gamma| \int_0^u (W_\lambda(u) - W_\lambda(u-y)) y^{\gamma-1} dy, \quad u > 0,$$

$$Y_{\lambda,\gamma}(0) := \lim_{u\to+0} Y_{\lambda,\gamma}(u). \tag{0.4}$$

З (0.1) можна зробити висновок, що $Y_{\lambda,\gamma}(0) = 0$ м.н. для $\gamma \in (-\lambda, 0)$. Коли $\gamma \geq 0$, збіжність інтегралу з (0.2) і м.н. неперервність процесів $Y_{\lambda,\gamma}$ є тривіальними. Для $\gamma \in (-\lambda, 0)$ ці два факти випливають з леми 2.1 роботи [5].

Надалі вважатимемо що простори $D, D(0,\infty)$ наділені J_1-топологією. $D(0,\infty)$ - простір неперервних справа функцій, визначених на $(0,\infty)$ з скінченними границями зліва у додатніх точках. Позначимо слабку збіжність в них $\xrightarrow{J_1}$. Наведемо формулювання теореми 1 статті [6].

Теорема 1 *Нехай $\alpha, \lambda > 0$, а функція h є невід'ємною, монотонною та правильно змінюється на нескінченності з показником $\beta > -\min(\alpha,\lambda)$. Припустимо, що*

$$a(t)N(t\cdot) \xrightarrow{J_1} W_\lambda(\cdot), \quad t\to\infty \tag{0.5}$$

у просторі D, де функція $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не зростає та правильно змінюється на нескінченності з параметром $-\alpha$, а також що для довільних $q > 0$ та $0 < a < b < \infty$

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N(ut) - N(ut-1)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t\to\infty. \tag{0.6}$$

Якщо h не спадає, то

$$\frac{a(t)}{h(t)} X(t\cdot) \xrightarrow{J_1} Y_{\lambda,\beta}(\cdot), \quad t \to \infty \tag{0.7}$$

у просторі D.

Якщо h не зростає, то припустимо додатково, що для всіх $x > 0, t \geq 1$ та $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\} \leq f(x) \tag{0.8}$$

для невід'ємної функції f, що не зростає і задовольняє

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x2^{jc}) = 0, \forall c > 0. \tag{0.9}$$

Тоді граничне співвідношення (0.7) виконується у просторі $D(0, \infty)$.

Зауваження 2 *Оскільки для кожного $t > 0$ випадкова функція $u \to N(tu)$ не спадає майже напевно, а процес W_λ є неперервним м.н., то згідно з зауваженням 2.1 статті [7] функціональна збіжність у (0.5) еквівалентна слабкій збіжності скінченновимірних розподілів.*

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ є незалежними копіями невід'ємної випадкової величини ξ. Випадкова послідовність $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що називається стандартним випадковим блуканням з початком в нулі та стрибками ξ_k, що визначається так

$$S_0^* := 0, \quad S_k^* := \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

називається *стандартним випадковим блуканням*, що стартує в нулі. Першою (теоретичною) метою даної дипломної роботи є спеціалізація теореми 1 для конкретної вхідної послідовності $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що задається так: для $\theta \in (0, 1]$

$$S_k = (S_k^*)^{1/\theta}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \tag{0.10}$$

за умови, що або $\mathbb{E}\xi < \infty$, або функція $x \mapsto \mathbb{P}\{\xi > x\}$ правильно змінюється на ∞ з від'ємним показником, більшим за -1. Другою (практичною) метою даної роботи є перевірка отриманих теоретичних результатів за допомогою моделювання. Більш детально, за умови (0.10) ми змоделюємо дограничні процеси $(a(t)\frac{X(ut)}{h(t)})_{u\geq 0}$ для великих t та відповідний граничний процес $(Y_{\lambda,\beta}(u))_{u\geq 0}$ та порівняємо їх траєкторії.

1 Основні результати

Теореми 3 та 4 є основними теоретичними результатами даної роботи.

Теорема 3 *Нехай $\theta \in (0,1]$, $\beta > -\theta$, а невід'ємна функція $h \in D$ є монотонною та правильно змінюється на нескінченності з показником β. Нехай послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє (0.10) та $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$.*

Тоді

$$\frac{1}{t^\theta h(t)} X(t\cdot) \xrightarrow{J_1} \mu^{-1}\theta B(\theta, \beta+1)(\cdot)^{\theta+\beta}, \quad t \to \infty,$$

де $B(\cdot,\cdot)$ є бета-функцією, у просторі D, якщо h не спадає, та у просторі $D(0,\infty)$, якщо h не зростає.

Теорема 4 *Нехай $\theta \in (0,1], \rho \in (0,1)$, $\beta > -\rho\theta$ та l – функція, що повільно змінюється на ∞, а невід'ємна функція $h \in D$ є монотонною та правильно змінюється на нескінченності з показником β. Нехай послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовольняє (0.10) та*

$$\mathbb{P}(S_1^* > x) \sim x^{-\rho} l(x), x \to \infty.$$

Тоді

$$\frac{\mathbb{P}(S_1^* > t^\theta)}{h(t)} X(t\cdot) \xrightarrow{J_1} \int_{[0,\cdot]} (\cdot - y)^\beta dW_\rho((\cdot y)^\theta), t \to \infty,$$

де $(W_\rho(y))_{y\geq 0}$ - обернений ρ-стійкий субординатор. Додаткова інформація про обернений субординатор наводиться в розділі 3.

2 Доведення основних результатів

2.1 Доведення теореми 3

За умов теореми $N(t) = (N^*(t^\theta))_{t\geq 0}$, де $(N^*(t))$ - лічильний процес для стандартного випадкового блукання $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що стартує в нулі та має стрибки ξ_k.

За посиленим законом великих чисел для процесів відновлення та лемою Діні
$$\lim_{t\to\infty} \sup_{u\in[0,T]} |t^{-\theta}N(ut) - \mu^{-1}u^\theta| = 0 \text{ м.н.}$$

для всіх $T > 0$. Отже, співвідношення (0.5) виконується з $a(t) = t^{-\theta}$ та $W_\theta(u) = \mu^{-1}u^\theta$, $u \geq 0$. Гранична функція $u \mapsto W_\theta(u)$ є локально неперервною за Гьольдером з показником θ внаслідок субадитивності функції $x \to x^\theta$ на $[0,\infty)$. Зокрема, нерівність (0.1) виконується для $M_T = \mu^{-1}$.

Для довільних $q > 0, 0 < a < b < \infty$ та великих t запишемо

$$\begin{aligned} &t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N(ut) - N(ut-1)) \\ &= t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\alpha) - N^*((ut-1)^\alpha)) \\ &\leq t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\alpha) - N^*((ut)^\alpha - 1)). \end{aligned}$$

Згідно з лемою А.1 статті [2]

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\alpha) - N^*((ut)^\alpha - 1)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t\to\infty.$$

Тому співвідношення (0.6) виконується для заданого процесу $(N(t))_{t\geq 0}$.

Використовуючи субадитивність за розподілом N^* та субадитивність функції $x \to x^\theta$ на $[0,\infty)$, запишемо для всіх $x > 0, t \geq 0$ та $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{a(t)(N((k+1)t) - N(kt)) > x\} &= \mathbb{P}\{a(t)(N^*(((k+1)t)^\theta) - N^*((kt)^\theta)) > x\} \\ &\leq \mathbb{P}\{a(t)(N^*(t^\theta((k+1)^\theta - k^\theta)) > x\} \\ &\leq \mathbb{P}\{a(t)N^*(t^\theta) > x\}. \end{aligned}$$

Субадитивність за розподілом N^* гарантує, що $\forall n \in \mathbb{N}$ та $y > 0$

$$\mathbb{P}\{N^*(n) > y\} \le \mathbb{P}\{N_1^*(1) + ... + N_n^*(1) > y\},$$

де $N_1^*(1), N_2^*(1), ...$ - незалежні копії $N^*(1)$. Внаслідок цього $\forall s \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi_1 = 0\})$ ($-\log(0)$ інтерпретується як $+\infty$)

$$\mathbb{E}e^{sN^*(n)/n} \le \mathbb{E}e^{s(N_1^*(1)+...+N_n^*(1))/n} = \mathbb{E}e^{sN^*(1)} < \infty,$$

де скінченність забезпечується теоремою 2.1(c) роботи [4]. $\forall r > 1$ існує таке $n \in \mathbb{N}$, що $r \in (n-1, n]$. Оскільки процес N^* не спадає м.н., то

$$N^*(r)/r \le N^*(n)/(n-1) \le 2N^*(n)/n \text{ м.н.},$$

і, отже, $\mathbb{E}e^{vN^*(r)/r} \le \mathbb{E}e^{2vN^*(1)} < \infty$ для $v \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi = 0\}/2)$. За нерівністю Маркова при $t \ge 1$ та $x > 0$

$$\mathbb{P}\{a(t)N^*(t^\theta) > x\} \le \mathbb{E}e^{2vN^*(1)}e^{-vx} =: f(x).$$

Таким чином, для $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\ge1} 2^j f(x2^{jc}) = \mathbb{E}e^{2vN^*(1)} \lim_{x\to\infty} \sum_{j\ge1} 2^j e^{-vx2^{jc}} = 0,$$

оскільки ряд збігається рівномірно по $x \ge 1$. Отже, умова (0.8) виконується, і твердження теореми 3 випливає з теореми 1.

2.2 Доведення теореми 4

За умов теореми $N(t) = (N^*(t^\theta))_{t\ge0}$, де $(N^*(t))$ - лічильний процес для стандартного випадкового блукання $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}_0}$, що стартує в нулі та має стрибки ξ_k.

Умова (0.5) в цьому випадку означає збіжність

$$\mathbb{P}(S_1^* > t^\theta)N^*((tu)^\theta) \xrightarrow{J_1} W_\rho(u^\theta), t \to \infty,$$

що розглядається протягом всього 3 розділу роботи, і доведена у твердженні 3.4.1.

Для довільних $q > 0, 0 < a < b < \infty$ та великих t запишемо

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N(ut) - N(ut-1))$$

$$= t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\theta) - N^*((ut-1)^\theta))$$

$$\leq t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\theta) - N^*((ut)^\theta - 1)).$$

Згідно з лемою A.1 статті [2]

$$t^{-q} \sup_{u\in[a,b]} (N^*((ut)^\theta) - N^*((ut)^\theta - 1)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty.$$

Тому співвідношення (0.6) виконується для заданого процесу $(N(t))_{t\geq 0}$.

Нехай $a(t) := \mathbb{P}\{S_1^* > t^\theta\}, \phi(s) := \mathbb{E}e^{sN^*(1)} < \infty$ для $s \in (0, -\log \mathbb{P}\{\xi = 0\})$. Оскільки $\log\phi(s) \sim \phi(s) - 1 \sim \mathbb{E}N^*(1)s$ при $s \to 0^+$, $\forall \varepsilon > 0$ існує таке значення $s_0 > 0$, що $\log\phi(s) \leq (\mathbb{E}N^*(1) + \varepsilon)s$ для кожного $s \in (0, s_0]$. Оберемо довільне $b > 0$, таке, що $ba(1) \leq s_0$. Тепер доведемо, що $C := sup_{t\geq 1}\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(t^\theta)} < \infty$.

Використовуючи субадитивність за розподілом N^* для $t \geq 1$ запишемо:

$$\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(t^\theta)} \leq \mathbb{E}e^{ba(t)(N_1^*(1)+\ldots+N_{[t^\theta]}^*(1))} = e^{\log\phi(ba(t))[t^\theta]},$$

де $[x]$ - ціла частина від x. Отже для визначеного раніше $\varepsilon > 0$ та довільного $t \geq 0$

$$\mathbb{E}e^{ba(t)N^*(t^\theta)} \leq e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(t)[t^\theta]}.$$

Оскільки

$$\sup_{t\geq 1} \mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(t)[t^\theta]}\mathbf{1}_{\{a(t)[t^\theta]>1\}}$$

$$\leq \mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)ba(1)} \sup_{t\geq 1} \mathbb{E}e^{(\mathbb{E}N^*(1)+\varepsilon)b\mathbb{P}\{S_1^*>t^\theta\}t^\theta} < \infty,$$

згідно леми A.4 статті [8], доведено, що $C^* < \infty$.

Тепер, за виконання усіх попередніх припущень, вважатимемо θ рівним 1. Скористаємося субадитивністю за розподілом N^*, субадитивністю функції $x \to x^\theta$ на $[0, \infty)$ і тим, що $N^*(t)$ не спадає. Тоді для $x > 0, t \geq 1, k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{a(t)(N^*(((k+1)t)^\theta) - N^*((kt)^\theta)) > x\}$$

$$\leq \mathbb{P}\{a(t)N^*(((k+1)t)^\theta - (kt)^\theta) > x\}$$

$$\leq \mathbb{P}\{a(t)N^*(((k+1)t - kt)^\theta) > x\}$$

За нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{a(t)(N^*(((k+1)t)^\theta) - N^*((kt)^\theta)) > x\}$$
$$\leq \mathbb{P}\{a(t)N^*(((k+1)t - kt)^\theta) > x\}$$
$$= \mathbb{E}\mathbb{P}\{a(t)N^*(((k+1)t - kt)^\theta) > x|(N^*(s))_{s\geq 0}\}$$
$$\leq \mathbb{P}\{a(t)N^*(t^\theta) > x\} \leq C^* e^{-bx} =: f(x).$$

Для $c > 0$
$$\lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j f(x 2^{jc}) = C^* \lim_{x\to\infty} \sum_{j\geq 1} 2^j e^{-bx2^{jc}} = 0,$$

оскільки останній ряд збігається рівномірно по $x \geq 1$. В результаті довели, що лічильний процес $(N(t))_{t\geq 0}$ задовольняє умові (0.8).

3 Додаткові теоретичні відомості

3.1 Збіжність стандартного випадкового блукання до θ_ρ

Нехай $\xi_1, \xi_2, ...$ - додатні незалежні однаково розподілені випадкові величини(н.о.р.в.в.), що задовольняють $\mathbb{P}(\xi_1 > x) \sim x^{-\rho} l(x)$ при $x \to \infty$, для l, що повільно змінюється на нескінченності, $\rho \in (0,1)$. Надалі $f(x) \sim g(x)$ означає, що $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ - стандартне випадкове блукання з додатніми стрибками: $S_0 := 0, S_n := \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n, n \in \mathbb{N}$.

Нехай θ_ρ - випадкова величина з ρ-стійким розподілом та перетворенням Лапласа $\varphi(s) = \mathbb{E}e^{-s\theta_\rho} = e^{-c\Gamma(1-\rho)s^\rho}$. Нехай функція $a_t = a(t)$ - узагальнена обернена до $\frac{t^\alpha}{l(t)}$, тобто $\frac{(a(t))^\alpha}{l(a(t))} \sim t$.

Доведемо, що $\frac{S_n}{a_n}$ збігається за розподілом до θ_ρ.
Розглянемо перетворення Лапласа для ξ_1:

$$\mathbb{E}e^{-u\xi_1/a_n} = \varphi(u/a_n)$$

Для випадкового блукання $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, відповідно отримаємо:

$$\mathbb{E}e^{\frac{-u(\xi_1+\xi_2+...+\xi_n)}{a_n}} = \varphi^n(u/a_n)$$

$\ln(\varphi^n(u/a_n)) = n\ln(\varphi(u/a_n)) = n\ln(1-(1-\varphi(u/a_n))) \sim -n(1-\varphi(u/a_n))$
Отже, якщо $n(1-\varphi(\frac{u}{a_n})) \sim a$, то $\varphi^n(u/a_n) \sim e^{-a}$

Теорема 3.1.1. Для $0 \le \alpha \le 1, l \in \mathbb{R}_0$

$$1 - \hat{F}(s) \sim s^\alpha l(1/s), s \to 0^+ \Leftrightarrow 1 - F(x) \sim \frac{l(x)}{x^\alpha \Gamma(1-\alpha)}, x \to \infty,$$

де $l \in \mathbb{R}_0$ означає, що l повільно змінюється на нескінченності, тобто $\lim_{t\to\infty} \frac{l(at)}{l(t)} = 1, \forall a > 0$; $\hat{F}(s)$ - перетворення Лапласа, а $F(s)$ - функція розподілу.

За припущенням, хвіст функції розподілу

$$1 - F(x) = \mathbb{P}(\xi_1 > x) \sim x^{-\rho} l(x) = \frac{l(x)\Gamma(1-\rho)}{x^\rho \Gamma(1-\rho)}, x \to \infty.$$

За теоремою 3.1.1, це еквівалентно тому, що

$$1 - \hat{F}(s) = 1 - \mathbb{E}e^{-s\xi_1} \sim s^\rho l(1/s)\Gamma(1-\rho) \tag{3.1}$$

Покажемо, що $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
За припущенням, $(a_n)^\rho \sim nl(a_n)$ - правильно змінюється з показником 1 на нескінченності. Як відомо, функції, що правильно змінюються з показником α, розбігаються на нескінченності для всіх $\alpha > 0$, отже $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

$$n(1-\varphi(\frac{u}{a_n})) = \frac{1-\varphi(\frac{u}{a_n})}{1-\varphi(\frac{1}{a_n})} n(1-\varphi(\frac{1}{a_n})) \tag{3.2}$$

$$1-\varphi(\frac{1}{x}) \sim (\frac{1}{x})^\rho l(x)\Gamma(1-\rho), \tag{3.3}$$

як доведено в (3.1).

$$1-F(x) \sim x^{-\rho} l(x), \tag{3.4}$$

за припущенням.

З відношення (3.3) і (3.4), отримаємо:

$$\frac{1-\varphi(\frac{1}{x})}{1-F(x)} \to \Gamma(1-\rho), x\to\infty \Rightarrow n(1-\varphi(\frac{1}{a_n})) \to \Gamma(1-\rho), x\to\infty \tag{3.5}$$

$$\frac{1-\varphi(\frac{u}{a_n})}{1-\varphi(\frac{1}{a_n})} \sim \frac{(\frac{u}{a_n})^\rho l(a_n/u)\Gamma(1-\rho)}{(\frac{1}{a_n})^\rho l(a_n)\Gamma(1-\rho)} \to u^\rho, n\to\infty \tag{3.6}$$

Підставимо (3.5) і (3.6) у (3.2) і нарешті отримаємо, що

$$n(1-\varphi(\frac{u}{a_n})) \sim u^\rho \Gamma(1-\rho),$$

тобто $\mathbb{E}e^{-u\frac{S_n}{a_n}} = \varphi^n(u/a_n) \sim e^{-u^\rho\Gamma(1-\rho)}$

Покажемо, що розподіл θ_ρ - абсолютно неперервний. Розподіл невід'ємної випадкової величини називається саморозкладним, якщо функція $s \to \frac{\varphi(s)}{\varphi(cs)}$,
$s \geq 0$ є перетворенням Лапласа деякої випадкової величини для кожного $c \in (0,1)$. Саморозкладний розподіл є або абсолютно неперервним, або виродженим.

За припущенням, перетворення Лапласа для $\theta_\rho : \varphi(s) = \mathbb{E}e^{-s\theta_\rho} = e^{-c\Gamma(1-\rho)s^\rho}$. Тоді

$$\frac{\varphi(s)}{\varphi(as)} = \frac{e^{-c\Gamma(1-\rho)s^\rho}}{e^{-c\Gamma(1-\rho)(as)^\rho}} = e^{-c\Gamma(1-\rho)(s^\rho-(as)^\rho)} = e^{-c\Gamma(1-\rho)(1-a^\rho)s^\rho}$$

$$c\Gamma(1-\rho) > 0, a \in (0,1), \rho > 0 \Rightarrow 0 < a^{\rho} < 1 \Rightarrow c\Gamma(1-\rho)(1-a^{\rho}) > 0,$$

тому функція $s \to \frac{\varphi(s)}{\varphi(as)}, s \geq 0$, аналогічно до перетворення Лапласа для θ_ρ, є перетворенням Лапласа випадкової величини з додатнім ρ-стійким розподілом. Таким чином, розподіл θ_ρ - саморозкладний.

Нехай, існує таке k, що $\mathbb{P}(\theta_\rho = k) = 1$. Тоді випадкова величина $\theta_\rho = k$. Перетворення Лапласа для θ_ρ в такому разі має вигляд $\varphi(s) = e^{-sk}$, але за припущенням $\varphi(s) = \mathbb{E}e^{-s\theta_\rho} = e^{-c\Gamma(1-\rho)s^\rho}$. Отримали суперечність, отже розподіл θ_ρ - невироджений.

Оскільки розподіл θ_ρ є саморозкладним, але не є виродженим - він абсолютно неперервний, що й треба було довести.

3.2 Застосування узагальненої оберненої функції

Нехай функція $x \to \mathbb{P}(\xi > x)$ правильно змінюється на нескінченності з параметром $-\rho, \rho \in (0,1)$. Покладемо $f(x) := \frac{1}{\mathbb{P}(\xi > x)}, x > 0$. Функція f не спадає і правильно змінюється на нескінченності з параметром ρ. Визначимо узагальнену обернену функцію для f:

$$\overleftarrow{f}(x) := \inf\{y > 0 : f(y) > x\}.$$

За теоремою 1.5.12 з книги [1], $\overleftarrow{f}$ - правильно змінюється на нескінченності з показником $\frac{1}{\rho}$,

$$f(\overleftarrow{f}(x)) \sim \overleftarrow{f}(f(x)) \sim x, x \to \infty \tag{3.7}$$

Покладемо $a(x) := \overleftarrow{f}(x)$

Тепер доведемо, що $\mathbb{P}(\xi > t)\nu(t) \xrightarrow{d} \theta_\rho^{-\rho}$, при $t \to \infty$, де $\xrightarrow{d}$ позначає збіжність за розподілом.

$$\mathbb{P}(\theta_\rho^{-\rho} > x) = \mathbb{P}(\theta_\rho \leq x^{-1/\rho})$$

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}(\xi > t)\nu(t) > x) = \mathbb{P}(\nu(t) > \frac{x}{\mathbb{P}(\xi > t)})$$

$$= \mathbb{P}(\frac{S_{[\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}]}}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])} \leq \frac{t}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])}), \tag{3.8}$$

причому, як ми довели раніше, $\dfrac{S_{[\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}]}}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])} \to \theta_\rho, n \to \infty$.

Покажемо, що функція $t \to a([t])$ правильно змінюється на нескінченності з показником $\frac{1}{\rho}$:
Згадаємо, що $a([x]) := \inf\{y > 0 : f(y) > [x]\}$. Позначимо $\lim_{t\to\infty} \frac{a([ut])}{a([t])} := A$

$$1 = \lim_{t\to\infty} \frac{t-1}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{[t]}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{t}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{[t]}{t} = 1 \Rightarrow [t] \sim t$$

$$a(x-1) = \inf\{y > 0 : f(y) > x-1\}$$

$$\leq \inf\{y > 0 : f(y) > [x]\} \leq \inf\{y > 0 : f(y) > x\} = a(x)$$

Функція $a(x)$ правильно змінюється на нескінченності з показником $\frac{1}{\rho}$, тому $\lim_{t\to\infty} \dfrac{a(ut)}{a([t])} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{a(ut)}{a(t)} = u^{\frac{1}{\rho}}$. Аналогічно для $a(x-1)$: $\lim_{t\to\infty} \dfrac{a(ut-u)}{a([t])} = u^{\frac{1}{\rho}}$.

$$u^{\frac{1}{\rho}} = \lim_{t\to\infty} \frac{a(ut-u)}{a([t])} \leq A \leq \lim_{t\to\infty} \frac{a(ut)}{a([t])} = u^{\frac{1}{\rho}} \Rightarrow A = u^{\frac{1}{\rho}},$$

тобто $a([t])$ правильно змінюється на нескінченності з показником $\frac{1}{\rho}$.

З (3.7) нам відомо, що $a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi>t)}]) = \overleftarrow{f}([f(t)]) \sim [t]$. Оскільки ми вже довели, що $t \sim [t], t \to \infty$, звідси слідує

$$a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi > t)}]) \sim t, t \to \infty \tag{3.9}$$

Повернемось до (3.8):

$$\frac{t}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])} \sim \frac{a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi>t)}])}{a([\dfrac{x}{\mathbb{P}(\xi > t)}])} \to x^{-\dfrac{1}{\rho}}, t \to \infty \tag{3.10}$$

Оскільки функція розподілу θ_ρ - неперервна, за теоремою Пойа:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(\frac{S_n}{a(n)} \leq y) - \mathbb{P}(\theta_\rho \leq y)| = 0 \tag{3.11}$$

$$|\mathbb{P}(\mathbb{P}(\xi > t)\nu(t) > x) - \mathbb{P}(\theta_\rho \leq x^{-\frac{1}{\rho}})|$$

$$\leq |\mathbb{P}(\frac{S_{[\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}]}}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])} \leq \frac{t}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])}) - \mathbb{P}(\theta_\rho \leq \frac{t}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])})|$$
$$+|\mathbb{P}(\theta_\rho \leq \frac{t}{a([\frac{x}{\mathbb{P}(\xi>t)}])}) - \mathbb{P}(\theta_\rho \leq x^{-\frac{1}{\rho}})|,$$

причому перший доданок в останній нерівності збігається до нуля, згідно (3.11), а другий - згідно (3.10), враховуючи неперервність функції $x \to \mathbb{P}(\theta_\rho \leq \ x\ )$. Отже, $\mathbb{P}(\xi > t)\nu(t) \xrightarrow{d} \theta_\rho^{-\rho}$, при $t \to \infty$, що і треба було довести.

3.3 Стійкий субординатор

Для $\rho \in (0,1)$ введемо ρ-стійкий субординатор $(S_\rho(t))_{t\geq 0}$ - випадковий процес з незалежними і стаціонарними приростами, що має неспадні траєкторії та перетворення Лапласа:

$$\mathbb{E}e^{-zS_\rho(t)} = e^{-tc\Gamma(1-\rho)z^\rho}, z \geq 0, t \geq 0$$

Зокрема, $S_\rho(1)$ співпадає за розподілом з θ_ρ, до того ж ми вже довели, що

$$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow{d} \theta_\rho, n \to \infty$$

Поширимо цю одновимірну збіжність на скінченновимірну:

$$\frac{S_{[tu]}}{a(t)} \xrightarrow{f.d.d.} S_\rho(u), t \to \infty \tag{3.12}$$

В цій частині роботи оператор $[x]$ позначає найменше ціле число, що більше або рівне за x. (3.12) означає, що для довільного цілого n і довільних $0 \leq u_1 < u_2 < ... < u_n < \infty$

$$(\frac{S_{[tu_1]}}{a(t)}, \frac{S_{[tu_2]}}{a(t)}, ..., \frac{S_{[tu_n]}}{a(t)}) \xrightarrow{d} (S_\rho(u_1), S_\rho(u_2), ..., S_\rho(u_n)), n \to \infty \tag{3.13}$$

Оскільки $S_0 = 0, S(0) = 0$ майже напевно, надалі вважаємо $u_1 > 0$. Із збіжності за розподілом $(X_t^1, X_t^2, ..., X_t^n) \xrightarrow{d} (X^1, X^2, ..., X^n), t \to \infty$ випливає

$$(X_t^1, X_t^1 + X_t^2, ..., X_t^1 + ... + X_t^n) \xrightarrow{d} (X^1, X^1 + X^2, ..., X^1 + ... + X^n), t \to \infty,$$

тому покажемо збіжність

$$\left(\frac{S_{[tu_1]}}{a(t)}, \frac{S_{[tu_2]} - S_{[tu_1]}}{a(t)}, ..., \frac{S_{[tu_n]} - S_{[tu_{n-1}]}}{a(t)}\right) \xrightarrow{d}$$

$$\xrightarrow{d} (S_\rho(u_1), S_\rho(u_2) - S_\rho(u_1), ..., S_\rho(u_n) - S_\rho(u_{n-1})), t \to \infty,$$

звідки випливає (3.13), оскільки

$$\frac{S_{[tu_n]}}{a(t)} = \frac{S_{[tu_n]} - S_{[tu_{n-1}]}}{a(t)} + ... + \frac{S_{[tu_2]} - S_{[tu_1]}}{a(t)} + \frac{S_{[tu_1]}}{a(t)}.$$

Внаслідок незалежності $S_{[tu_1]}, S_{[tu_2]} - S_{[tu_1]}, S_{[tu_n]} - S_{[tu_{n-1}]}$, а також незалежності приростів субординатора $(S_\rho(t)), t \geq 0$, достатньо довести лише збіжність координат.

$a(t)$ - правильно змінюється на нескінченності з показником $\frac{1}{\rho}$, тому $\lim_{t\to\infty} \frac{a(ut)}{a(t)} = u^{\frac{1}{\rho}}$. Тоді

$$\frac{S_{[tu_1]}}{a(t)} = \frac{a(tu_1)}{a(t)} \frac{S_{[tu_1]}}{a(tu_1)} \xrightarrow{d} u_1^{\frac{1}{\rho}} \theta_\rho =^d u_1^{\frac{1}{\rho}} S_\rho(1) =^d S_\rho(u_1),$$

де $=^d$ позначає рівність розподілів. Останній перехід пояснюється так: перетворення Лапласа для $u_1^{\frac{1}{\rho}} S_\rho(1)$ матиме вигляд

$$e^{-c\Gamma(1-\rho)(zu_1^{\frac{1}{\rho}})^\rho} = e^{-u_1 c\Gamma(1-\rho)z^\rho},$$

що являється перетворенням Лапласа для $S_\rho(u_1)$.

$$\frac{S_{[tu_2]} - S_{[tu_1]}}{a(t)} = \frac{S_{[tu_2]} - S_{[tu_1]}}{a(t(u_2 - u_1))} \frac{a(t(u_2 - u_1))}{a(t)} \xrightarrow{d} (u_2 - u_1)^{\frac{1}{\rho}} \theta_\rho$$

$$=^d (u_2 - u_1)^{\frac{1}{\rho}} S_\rho(1) =^d S_\rho(u_2 - u_1),$$

що дорівнює за розподілом $S_\rho(u_2) - S_\rho(u_1)$, з стаціонарності приростів. Аналогічно покажемо збіжність інших координат

$$\frac{S_{[tu_3]} - S_{[tu_2]}}{a(t)} \xrightarrow{d} S_\rho(u_3 - u_2),$$

$$...$$

$$\frac{S_{[tu_n]} - S_{[tu_{n-1}]}}{a(t)} \xrightarrow{d} S_\rho(u_n - u_{n-1}),$$

що доводить (3.13).

3.4 Обернений стійкий субординатор

Визначимо обернений $\rho-$стійкий субординатор так:

$$\overleftarrow{S}_{\rho}(t) = \inf\{s \geq 0 : \overleftarrow{S}_{\rho}(s) > t\}, t \geq 0$$

Твердження 3.4.1

$$\mathbb{P}(\xi > t)\nu(tu) \xrightarrow{f.d.d.} \overleftarrow{S}_{\rho}(u), t \to \infty \tag{3.14}$$

(3.14) еквівалентно тому, що для довільного натурального n, довільних $0 \leq$
$\leq u_1 < u_2 < ... < u_n < \infty$ і довільних $x_1, ..., x_n \geq 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\mathbb{P}(\xi > t)\nu(tu_i) \leq x_i, i = 1..n) = \mathbb{P}(\overleftarrow{S}_{\rho}(u_i) \leq x_i, i = 1..n)$$

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}(\xi > t)\nu(tu_i) \leq x_i, i = 1..n) = \mathbb{P}\left(\frac{S_{[\frac{x_i}{\mathbb{P}(\xi > t)}]}}{a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi > t)}])} > \frac{tu_i}{a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi > t)}])}, i = 1..n\right)$$

$$\xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{P}(S_{\rho}(x_i) > u_i, i = 1..n) = \mathbb{P}(\overleftarrow{S}_{\rho}(u_i) \leq x_i, i = 1..n)$$

$$\frac{S_{[\frac{x_i}{\mathbb{P}(\xi > t)}]}}{a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi > t)}])} = \frac{S_{[\frac{x_i}{\mathbb{P}(\xi > t)}]}}{a([\frac{x_i}{\mathbb{P}(\xi > t)}])} \frac{a([\frac{x_i}{\mathbb{P}(\xi > t)}])}{a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi > t)}])} \xrightarrow{d} \theta_{\rho} x_i^{\frac{1}{\rho}} =^d x_i^{\frac{1}{\rho}} S_{\rho}(1) =^d S_{\rho}(x_i),$$

за (3.13).

$$\frac{tu_i}{a([\frac{1}{\mathbb{P}(\xi > t)}])} \xrightarrow[t\to\infty]{} u_i,$$

за (3.11). В результаті доведено збіжність у твердженні 3.4.1.

4 Моделювання конкретного процесу

4.1 Умови і попередня підготовка

Нехай $\theta = 1/2$, $\beta = 1$, а функція $h(t) := t$ є монотонною та тривіально правильно змінюється на нескінченності з показником β. Нехай $(\xi_n)_{n\geq 1}$ - послідовність незалежних, однаково розподілених випадкових величин, що задовольняють $\mathbb{P}(\xi_1 > t) = 1$ при $t \leq 1$ та $\mathbb{P}(\xi_1 > t) = t^{-1/2}$ при $t > 1$. Нехай послідовність $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\xi_1 + ... + \xi_n)^2 = (S_n^*)^{1/\theta}$, що задовольняє (0.10). Функція $a(t) := t^{-\theta}$ задовольняє умові (0.5) для $W_\theta(u) = \mu^{-1}u^\theta$, що доведено в розділі 3.1. Тоді, згідно теореми 3,

$$\frac{1}{t^\theta h(t)} X(t\cdot) \xrightarrow{J_1} \mu^{-1}\theta B(\theta, \beta+1)(\cdot)^{\theta+\beta}, \quad t \to \infty.$$

Для практичної перевірки цього факту, змоделюємо графічно дограничний і граничний процеси для великих t.

Спочатку необхідно отримати послідовність $(\xi_n)_{n\geq 1}$. Для цього скористаємось методом обернених функцій:

$$\mathbb{P}\{\xi \leq x\} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 - \alpha$$

$$\frac{1}{x} = (1-\alpha)^2$$

$$x = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$$

Тепер, якщо у якості α підставити випадкову величину з рівномірним розподілом на $[0, 1)$, x буде задовільняти розподілу ξ_1.

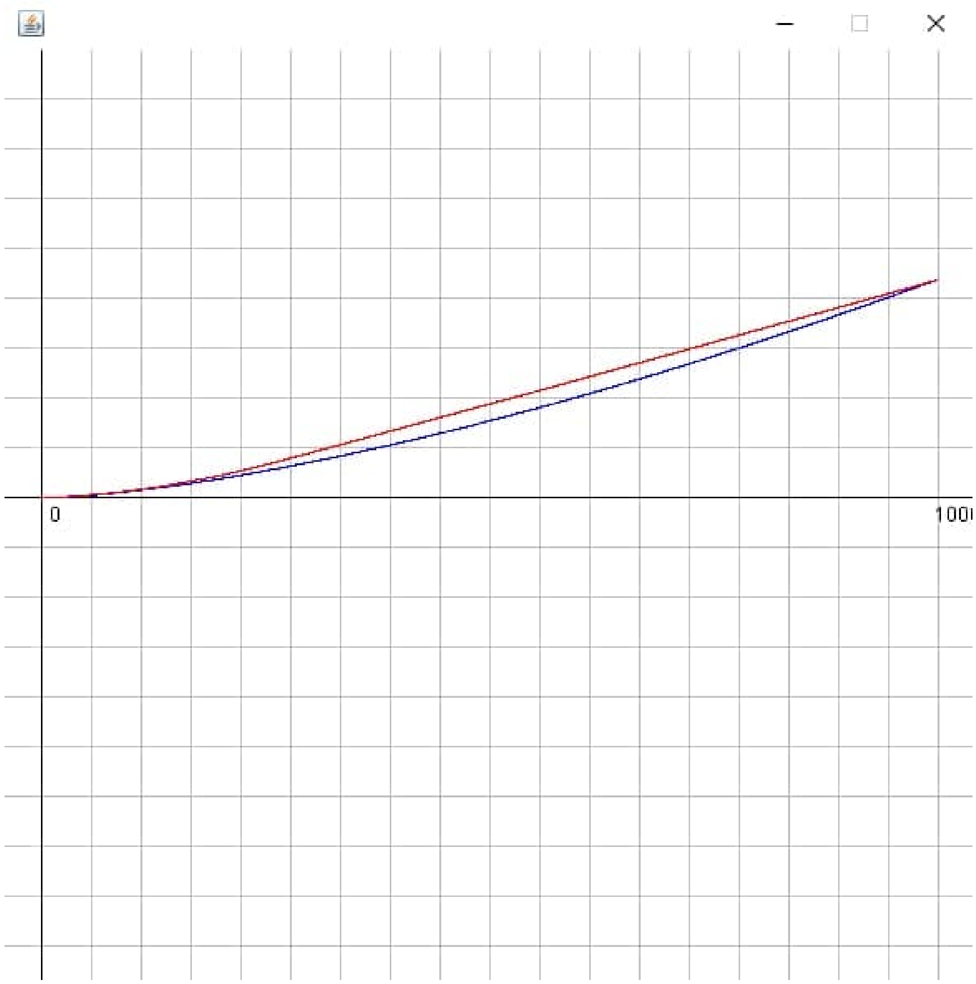
Зафіксуємо $t = 10000$, що є достатньо великим для перевірки збіжності процесів. Дограничний процес, як функцію від u, обчислюватимемо за його означенням

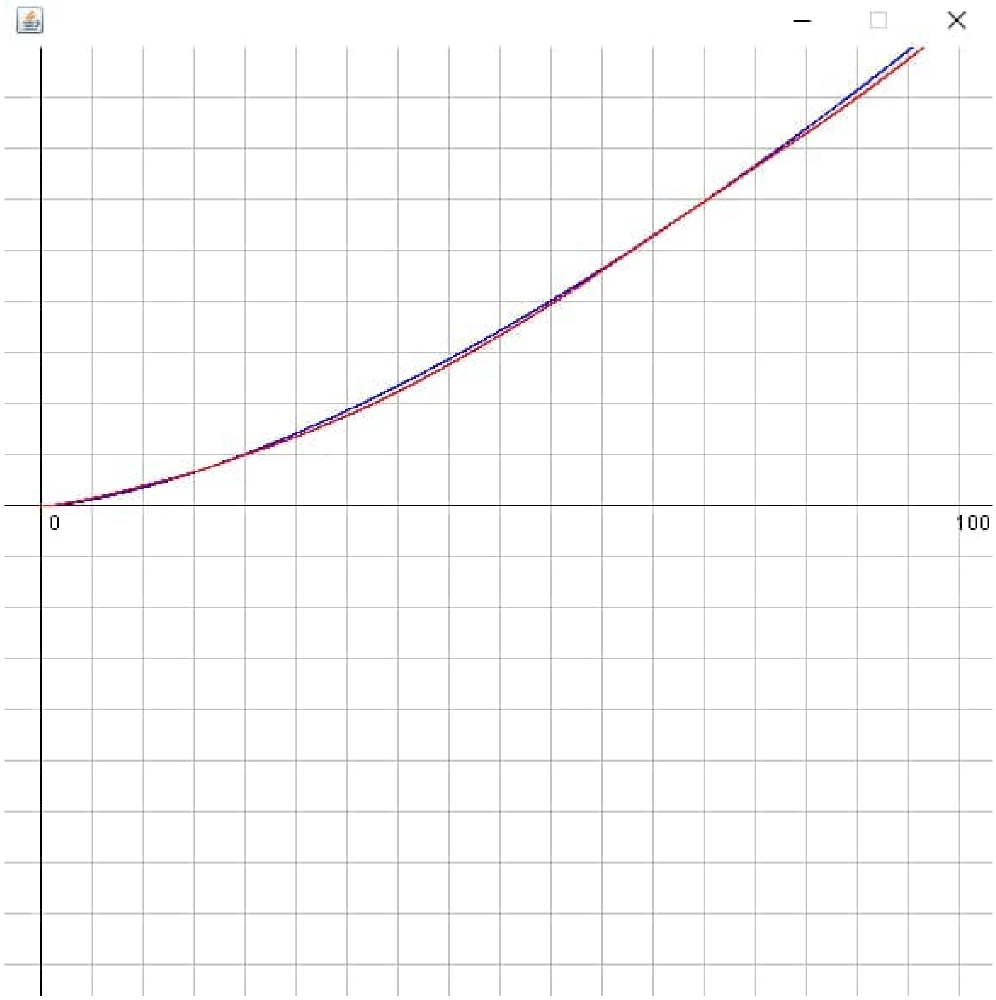
$$X(ut) := \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbf{1}_{\{S_k \leq ut\}} \; .$$

Граничний процес у нашому випадку - функція $u^{\theta+\beta}$, що домножена на дві константи і розділена на матсподівання $\mathbb{E}\xi_1 := \mu$.

4.2 Результати моделювання

На графіках червона ламана є дограничним процесом, а синя лінія - граничним. Перший графік зображений на відрізку $u \in [0, 100]$. На другому графіку $t = 100000$, відрізок моделювання - $u \in [0, 1000]$.




0
100

5 Опис програми

Код програми написаний мовою Java за допомогою середовища IntelliJ IDEA 2021.1.1. Програма складається з п'яти класів:

- **MainClass** - основний клас. Виконує моделювання процесу, за рахунок узгодження роботи функцій з інших класів.
- **RandomWalk** - клас, що генерує усі випадкові величини. Зокрема генерує рівномірно розподілені на $[0, 1)$ випадкові величини, використовуючи їх перетворення, генерує послідовність випадкових величин з заданим розподілом, а також утворює випадкове блукання і зберігає його значення у заданих вузлах.
- **PrelimitProcess** - клас, що моделює дограничний процес. Використовуючи випадкове блукання, згенероване класом RandomWalk, будує процес $X(ut)$, як функцію від u у рівновіддалених вузлах для заданого великого t, розраховує значення функцій $a(t)$ і $h(t)$.
- **BoundaryProcess** - клас, що моделює граничний процес. Для заданої граничної функції та параметрів β і θ підраховує і зберігає значення граничного процесу у рівновіддалених вузлах.
- **Graph** - клас, що візуалізує у вигляді графіку результати моделювання. Приймає значення дограничного і граничного процесів у рівновіддалених вузлах, і за ними будує графік.

5.1 Клас MainClass

MainClass узгоджує роботу усіх інших класів для отримання результату моделювання.

Клас використовує наступні змінні екземпляру:

- **private final double t** - достатньо велике значення, що використовується у дограничному процесі.
- **private final int count** - змінна, що відповідає за кількість вузлів, у яких підраховуються значення процесів, і таким чином задає точність моделювання.

Для моделювання процесу разів використовує метод **Modelling** задану кількість разів. **Modelling(double t, int count)** запускає конструктори усіх інших класів, і таким чином утворює випадкове блукання, за допомогою його значень підраховує значення процесів у вузлах, і виводить у окремому вікні графіки траєкторій процесів - дограничного - червоним і граничного - синім.

5.2 Клас RandomWalk

RandomWalk моделює рівномірно розподілені на $[0, 1)$ випадкові величини, і перетворюючи їх тим чи іншим чином - усі інші випадкові величини в програмі.

Клас використовує наступні змінні екземпляру:

- **private final double t** - велике значення, що визначає, до котрих пір продовжувати генерацію випадкового блукання.
- **private final double mu** - математичне сподівання випадкової величини ξ.
- **private final ArrayList Sk** - список, що зберігає значення випадкового блукання.

Конструктор класу **RandomWalk(double t)** ініціалізує змінні екземпляру та створює список значень випадкового блукання. В класі використовуються наступні методи:

- **double get_Sk(int k)** - повертає k-те значення випадкового блукання.
- **double get_k()** - повертає кількість елементів у списку, що зберігає значення випадкового блукання.
- **double get_mu()** - повертає матсподівання випадкової величини ξ.
- **private double uniform()** - повертає значення згенерованої випадкової величини, з рівномірним розподілом на $[0, 1)$.
- **private double xi()** - повертає значення згенерованої випадкової величини ξ з заданим розподілом.

5.3 Клас PrelimitProcess

PrelimitProcess моделює допграничний процес, використовуючи значення, згенеровані класом RandomWalk.

Клас використовує наступні змінні екземпляру:

- **private final RandomWalk var** - список, в якому зберігаються значення випадкового блукання.
- **private final double t** - достатньо велике значення, що використовується у допграничному процесі.
- **private final double [ ] prelimit** - список, що зберігає значення допграничного процесу у рівновіддалених вузлах.
- **privat final int count** - змінна, що відповідає за кількість вузлів, у яких підраховуються значення процесу, і таким чином задає точність моделювання.
- **private final int m** - змінна, що масштабує інтервал, на якому відбувається моделювання.

Конструктор класу **PrelimitProcess(RandomWalk var, double t, int count)** ініціалізує змінні екземпляру та, відповідно до змінної $count$, підраховує значення допграничного процесу в усіх вузлах. В класі використовуються наступні методи:

- **double[ ] get_process()** - повертає список значень допграничного процесу в усіх вузлах.
- **Prelimit(double u)** - повертає значення процесу у точці u.
- **private double X(RandomWalk var, double t, double u)** - повертає значення узагальненого процесу дробового ефекту $X(ut)$ у точці ut.
- **private double h(double t)** - повертає значення функції h, що правильно змінюється на нескінченності з показником β, у точці t.
- **private double a(double t)** - повертає значення функції a, що правильно змінюється на нескінченності з показником $-\theta$, у точці t.

5.4 Клас BoundaryProcess

BoundaryProcess моделює граничний процес, відповідно параметрів β і θ, а також граничної функції W_θ. Клас використовує наступні змінні екземпляру:

- **private final int count** - змінна, що відповідає за кількість вузлів, у яких підраховуються значення процесу, і таким чином задає точність моделювання.
- **private final double mu** - математичне сподівання випадкової величини ξ.
- **private double[ ] W** - список, що зберігає значення граничного процесу у рівновіддалених вузлах.
- **private final int m** - змінна, що масштабує інтервал, на якому відбувається моделювання.
- **private double theta** - показник(із знаком мінус), з яким функція $a(t)$ правильно змінюється на нескінченності.
- **private double beta** - показник, з яким функція $h(t)$ правильно змінюється на нескінченності.

Конструктор класу **BoundaryProcess(int count, double mu)** ініціалізує змінні екземпляру та, відповідно до змінної *count*, підраховує значення граничного процесу в усіх вузлах. В класі використовуються метод **Generation()**, що відповідає за моделювання граничного процесу W_θ у кількості вузлів, що задається змінною *count*.

5.5 Клас Graph

Graph виводить на екран траєкторії процесів для візуалізації моделювання. Клас використовує наступні змінні екземпляру:

- **int count** - змінна, що відповідає за кількість вузлів, у яких будуть відображені траєкторії процесів.
- **double[] prelimit** - список, в якому зберігаються значення допграничного процесу в усіх вузлах.

- **double[] W** - список, в якому зберігаються значення граничного процесу в усіх вузлах.

- **double m** - змінна, що стискає графік по осі y.

Конструктор класу **Graph(int count, double[] prelimit, double[] W)** ініціалізує змінні екземпляру, задає параметри вікна, та викликає метод **paint(Graphics gr)**, що виходячи з значень у списках *prelimit* і W будує графіки у вікні.

Висновки

У даній роботі основний результат статті [6] застосовано до конкретних вхідних послідовностей випадкових величин. Основні теоретичні результати роботи - теореми 3 та 4, демонструють збіжність випадкових процесів $\dfrac{a(t)}{h(t)}X(t\cdot)$ за двох різних припущень: 1) $\mathbb{E}S_1 < \infty$; 2) $\mathbb{E}S_1 = \infty$ та правий хвіст розподілу випадкової величини S_1 правильно змінюється на нескінченності.

Для процесу, що задовольняє умови теореми 3 з $\theta = 1/2, \beta = 1$, виконано моделювання для великих t. Результати, отримані під час моделювання, добре узгоджуються з теоретичними. Моделювання здійснювалось за допомогою програми, написаної мовою Java з використанням внутрішніх класів та структур даних.

Література

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular variation. Cambridge University Press, 1989.

[2] A. Iksanov, *Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions*. Stoch. Proc. Appl. **123** (2013), 1987–2010.

[3] A. Iksanov, *Renewal theory for perturbed random walks and similar processes*. Birkhäuser, 2016.

[4] A. Iksanov and M. Meiners, *Exponential rate of almost sure convergence of intrinsic martingales in supercritical branching random walks*. J. Appl. Prob. 47 (2010), 513-525.

[5] A. Iksanov and B. Rashytov, *A functional limit theorem for the general shot noise processes*. J. Appl. Probab. **57** (2020), 280–294.

[6] О. Ікcанов, Б. Рашитов, *Функціональна гранична теорема без центрування для загальних процесів дробового ефекту*. Український математичний журнал. **73** (2021) 160–178.

[7] M. Yamazato On a J_1-convergence theorem for stochastic processes on $D[0,\infty)$ having monotone sample paths and its applications. RIMS Kokyuroku 1620 (2009), 109-118.

[8] A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych and G. Shevchenko, Fractionally integrated inverse stable subordinators. Stoch. Proc. Appl. 127 (2016), 80-106.