

УДК 519.21

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2022/4.5>

О. В. Капустян¹ д.ф.-м.н., професор
Ю. В. Федоренко², асистент
І. М. Циганівська³, к.ф.-м.н., доцент

ω -граничні множини для
імпульсно-збуреного параболічного
рівняння в просторі неперервних
функцій

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: kapustyan@knu.ua

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: juliamfed@gmail.com

³Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 01601, Київ, вул. Володимирська, 64/13, e-mail: itsy8009@knu.ua

O.V. Kapustyan¹, Dr. of Sci., Full Professor
J.V. Fedorenko², Assistant
I.M. Tsygansvska³, Ph.D., Associate Professor

ω - limit sets for impulsive-perturbed
parabolic equation in the space of
continuous functions

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: kapustyan@knu.ua

²Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: juliamfed@gmail.com

³Taras Shevchenko National University of Kyiv, 01601, Kyiv, 64/13 Volodymyrska st., e-mail: itsy8009@knu.ua

В роботі розглядається імпульсно-збурена нескінченновимірна задача, яка складається з параболічного рівняння, розв'язки якого зазнають імпульсного збурення при досягненні інтегральним функціоналом певного порогового значення. Доведено, що при певних умовах на коефіцієнти така задача в фазовому просторі неперервних функцій породжує імпульсну динамічну систему, кожна траєкторія якої в $\sup$ -нормі притягується до компактної ω -граничної множини.

Ключові слова: параболічне рівняння, імпульсне збурення, притягуюча множина

We consider an important class of disturbed infinite-dimensional systems provided by evolutionary equations with impulsive effects. An impulsive dynamical system acting in the phase space H is a hybrid system described by an evolutionary equation together with impulsive disturbances which, in turn, are characterized by a closed set $M \subset H$ (impulsive set) and a mapping $I : M \mapsto H$ (impulsive mapping). A solution of such a system, by definition, is a left-continuous function y satisfying evolutionary equation for all times t for which $y(t) \notin M$ and jumping to a new state $I(y(t))$ at all times t for which $y(t)$ reaches M . The main problem in the study of qualitative behavior of impulsive dynamical systems by classical methods is that solutions usually do not depend continuously on initial data. A number of examples illustrate already in the finite-dimensional case that new complex scenarios of possible limit behaviors of impulsive trajectories can occur, which are fundamentally impossible in the non-impulsive case. Results concerning attracting sets for infinite-dimensional impulsive systems have appeared only a few years ago. But all those results concern the limit behavior of impulsive semiflows in Hilbert space and the presence of scalar product played crucial role in those construction. In this paper we want to investigate ω -limit attracting sets for impulsive-disturbed parabolic system in the $\sup$ -norm of Banach space of continuous functions.

Key Words: parabolic equation, impulsive perturbation, attracting set

1 Вступ

Якісному аналізу імпульсних динамічних систем в скінченновимірних просторах присвячено роботи [1]-[4]. Перші результати щодо дослідження притягуючих множин імпульсних динамічних систем в нескінченновимірних фазових просторах з'явилися порівняно недавно [5],[6] і на сьогодні мають застосування до широко-

го кола еволюційних задач в гільбертових просторах [7],[8]. Це пов'язано як з добре розвинутою теорією слабких розв'язків нелінійних задач, так і з можливістю задання імпульсних параметрів через скалярний добуток в фазовому просторі. Саме тому є лише окремі результати щодо якісної поведінки розв'язків параболічних імпульсно-збурених рівнянь в $\sup$ -

нормах [9], [10]. В даній роботі ми розглядаємо імпульсно-збурену нескінченновимірну задачу, яка складається з параболічного рівняння, розв'язки якого зазнають імпульсного збурення при досягненні інтегральним функціоналом певного порогового значення. Доведено, що при певних умовах на коефіцієнти така задача в фазовому просторі неперервних функцій породжує імпульсну динамічну систему, кожна траєкторія якої в $\sup$ -нормі притягується до компактної ω -граничної множини.

2 Постановка задачі:

Відносно невідомої функції $u = u(t, x)$, $t > 0$, $x \in (0, l)$ розглядаємо задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + q(x)u + h(x), \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

де $p \in C^1([0, l])$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q \in C([0, l])$, $q(x) \leq 0$, $h \in C([0, l])$ - задані функції, $u_0 \in X := \{u \in C([0, l]) \mid u(0) = u(l) = 0\}$ - фазовий простір з нормою $\|u\| = \sup_{x \in [0, l]} |u(x)|$.

Розглянемо функціонал

$$\psi(u) = \int_0^l u(x) dx. \quad (2)$$

Імпульсна задача формулюється наступним чином: якщо в деякий момент часу $t > 0$ на розв'язку (1) функціонал (2) досягає фіксованого значення $\psi_0 > 0$, система миттєво переходить у нове положення

$$u(t, x) + \alpha(x), \quad (3)$$

де $\alpha \in X$, $\alpha(x) \geq 0$ - задана функція, $\int_0^l \alpha(x) dx = \alpha_0 > 0$. В роботі доводиться, що задача (1)-(3) породжує в X імпульсну динамічну систему $\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ (див. Озн.1), для якої $\forall u_0 \in X$ ω -гранична множина $\tilde{\omega}(u_0)$ є непорожньою, компактною, і

$$\text{dist}_X(\tilde{V}(t, u_0), \tilde{\omega}(u_0)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

3 Основні результати

Спочатку опишемо загальну конструкцію імпульсної динамічної системи. Згідно [5], імпульсна динамічна система будується на основі неперервної напівгрупи $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ (породжується розв'язками автономного рівняння),

траєкторії якої при досягненні ними фіксованої підмножини $M \subset X$ (імпульсна множина) переводяться відображенням $I : M \rightarrow X$ (імпульсне відображення) в нове положення $u^+ = Iu$.

Для коректної постановки такої задачі мають бути виконаними умов:

$$V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X - \text{напівгрупа},$$

$$\text{тобто } \forall u \in X \quad \forall t, s \geq 0$$

$$V(0, u) = u, V(t + s, u) = V(t, V(s, u)) \quad (4)$$

відображення $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ - неперервне,
 $M \subset X$ - замкнена, $M \cap IM = \emptyset$

$$\forall u \in M \quad \exists \tau = \tau(u) > 0 \quad \forall t \in (0, \tau) \quad V(t, u) \notin M$$

За умов (4) відомо [5], що якщо для $u \in X$

$$M^+(u) := (\cup_{t>0} V(t, u)) \cap M \neq \emptyset,$$

то

$$\exists \tilde{s} = \tilde{s}(u) > 0 \quad \forall t \in (0, \tilde{s})$$

$$V(t, u) \notin M, \quad V(\tilde{s}, u) \in M. \quad (5)$$

Тоді для кожного $u_0 \in X$ імпульсна траєкторія $\tilde{V}(t, u_0)$ будується наступним чином:

якщо $M^+(u_0) = \emptyset$, то $\tilde{V}(t, u_0) = V(t, u_0)$, $t \geq 0$;

якщо $M^+(u_0) \neq \emptyset$, то для $s_0 := \tilde{s}(u_0)$, $u_1 := V(s_0, u_0)$

$$\tilde{V}(t, u_0) = \begin{cases} V(t, u_0), & t \in [0, s_0), \\ u_1^+, & t = s_0; \end{cases}$$

якщо $M^+(u_1^+) = \emptyset$, то $\tilde{V}(t, u_0) = V(t - s_0, u_1^+)$, $t \geq s_0$;

якщо $M^+(u_1^+) \neq \emptyset$, то для $s_1 = \tilde{s}(u_1^+)$, $u_2 := V(s_1, (u_1^+))$,

$$\tilde{V}(t, u_0) = \begin{cases} V(t - s_0, u_1^+), & t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ u_2^+, & t = s_0 + s_1; \end{cases}$$

і т.д. Продовжуючи цей процес, ми отримаємо скінченну або нескінченну кількість імпульсних точок $\{u_{n+1}^+ = IV(s_n, u_n^+), u_0^+ = u_0\}$ і відповідну послідовність моментів часу

$$T_{n+1} := \sum_{k=1}^n s_k, \quad T_0 := 0$$

При цьому $\tilde{V}$ задається формулою

$$\tilde{V}(t, u_0) = \begin{cases} V(t - T_n, u_n^+), & t \in [T_n, T_{n+1}), \\ u_{n+1}^+, & t = T_{n+1}. \end{cases} \quad (6)$$

Щоб уникнути ефекту "биття"[1], тобто руйнування імпульсної траєкторії за скінченний час, робимо припущення:

для $\forall u_0 \in X$ або імпульсних точок немає, або їх скінченна кількість , або

$$T_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Умова (7) гарантує, що $\forall u_0 \in X$ функція $t \rightarrow \tilde{V}(t, u_0)$ з (6), визначена на $[0, +\infty)$.

Означення 1. Відображення $\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ називається імпульсною динамічною системою.

Будемо казати, що $\{V, M, I\}$ породжують імпульсну динамічну систему, якщо виконуються умови (4), (7).

Відомо, що за виконання (4), (7) $\tilde{V} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ є напівгрупою, траєкторії якої є неперервними зправа.

Крім того, за побудовою $\forall u_0 \in X \forall t > 0$

$$\tilde{V}(t, u_0) \cap M = \emptyset.$$

Основним об'єктом вивчення є ω - гранична множина напівгрупи $\tilde{V}$

$$\tilde{\omega}(u_0) = \{\xi = \lim_{t_n \rightarrow \infty} \tilde{V}(t_n, u_0)\}. \quad (8)$$

Лема 1. Нехай $\{V, M, I\}$ породжують імпульсну динамічну систему $\tilde{V}$, і для $u_0 \in X$ виконуються умови:

$$\tilde{\gamma} := \bigcup_{t \geq 0} \tilde{V}(t, u_0) - \text{обмежена}; \quad (9)$$

$$\forall \tau > 0 \ V(\tau, \tilde{\gamma}) - \text{предкомпактна}; \quad (10)$$

$$I : M \rightarrow X - \text{переводить предкомпактну послідовність в предкомпактну}; \quad (11)$$

якщо $\tilde{\gamma}$ має нескінченну кількість імпульсних точок, то

$$\inf_{k \geq 1} s_k > 0. \quad (12)$$

Тоді $\tilde{\omega}(u_0) \neq \emptyset$, компакт, і $dist_x(\tilde{V}(t, u_0), \tilde{\omega}(u_0)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Доведення.

Відомо [5], що достатньо довести предкомпактність послідовності

$$\{\xi_m = \tilde{V}(t_m, u_0) | t_m \rightarrow \infty\}.$$

Розглянемо можливі випадки:

якщо $M^+(u_0) = \emptyset$, то $\tilde{V}(t_m, u_0) = V(t_m, u_0) = V(1, V(t_m - 1, u_0)) \subset V(1, \tilde{\gamma})$ - предкомпактна в силу (10);

якщо $M^+(u_0) \neq \emptyset$, і імпульсних точок скінченна кількість $\{u_1^+, \dots, u_p^+\}$, то для достатньо великих m маємо $t_m > T_p + 1$, отже

$$\begin{aligned} \xi_m &= \tilde{V}(t_m, u_0) = V(t_m - T_p, u_p^+) = \\ &= V(1, V(t_m - T_p - 1, u_p^+)) \subset V(1, \tilde{\gamma}) - \end{aligned}$$

предкомпактна в силу (10).

Тепер нехай $M^+(u_0) \neq \emptyset$, і імпульсних точок $\{u_n^+\}_{n \geq 0}$ нескінченна кількість, $\{T_n\}_{n \geq 1}, T_n \rightarrow \infty$ - відповідні моменти часу.

Тоді для $t_m \rightarrow \infty$ для кожного $m \geq 1$ існує

$$n(m) : t_m \in [T_{n(m)}, T_{n(m)+1}), n(m) \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty.$$

Отже, $\xi_m = \tilde{V}(t_m, u_0) = V(t_m - T_{n(m)}, u_{n(m)}^+)$, якщо $t_m - T_{n(m)} \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то для достатньо великих m маємо:

$$\xi_m = V(1, V(t_m - T_{n(m)} - 1, u_{n(m)}^+)) \subset V(1, \tilde{\gamma}) -$$

предкомпактна в силу (10).

Інакше по підпослідовності $t_m - T_{n(m)} \rightarrow \tau \geq 0$. Якщо $\tau > 0$, то для достатньо великих m маємо:

$$\xi_m = V(\frac{\tau}{2}, V(t_m - T_{n(m)} - \frac{\tau}{2}, u_{n(m)}^+)) \subset V(\frac{\tau}{2}, \tilde{\gamma}) -$$

предкомпактна в силу (10.)

Якщо $\tau = 0$, то

$$\xi_m = V(t_m - T_{n(m)}, u_{n(m)}^+),$$

$$u_{n(m)}^+ = IV(s_{n(m)-1}, u_{n(m)-1}^+),$$

$$V(s_{n(m)-1}, u_{n(m)-1}^+) =$$

$$= V(\frac{\bar{s}}{2}, V(s_{n(m)-1} - \frac{\bar{s}}{2}, u_{n(m)-1}^+)) \subset V(\frac{\bar{s}}{2}, \tilde{\gamma}),$$

де $\bar{s} := \inf_{k \geq 1} s_k > 0$ - з умови (12). Тоді $\{u_{n(m)}^+\}$ - предкомпактна в силу (11), і предкомпактність $\{\xi_m\}$ слідує із неперервності V . Лема доведена.

Зауваження 1. Умову (12) можна не накладати, якщо припускати, що множина імпульсних точок $\{u_n^+\}$ - предкомпактна. Це, зокрема, буде мати місце у випадку, коли $(\bigcup_{t \geq 0} V(t, \tilde{\gamma})) \cap M$ - предкомпакт.

Зауваження 2. Умова (9) виконується, якщо припускати виконання нерівностей:

$$\begin{aligned} \|V(t, u)\| &\leq \|u\|e^{-\delta t} + C_1, \\ \|Iu\| &\leq \|u\| + C_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Дійсно, в цьому випадку в силу (12), (13):

$$\|u_n^+\| \leq \|u_0\|e^{-\delta n\bar{s}} + (C_1 + C_2)(1 + e^{-\delta\bar{s}} + e^{-2\delta\bar{s}} + \dots + e^{-(n-1)\delta\bar{s}}) \leq \|u_0\| + \frac{C_1 + C_2}{1 - e^{-\delta\bar{s}}}. \quad (14)$$

Тоді з (6) і (14) маємо: для $\forall t \geq 0$

$$\|\tilde{V}(t, u_0)\| \leq \|u_0\| + \frac{C_1 + C_2}{1 - e^{-\delta\bar{s}}} + C_1. \quad (15)$$

Лема 2. Нехай $h(x) \leq 0, x \in [0, l]$, $\alpha(x) = O(x)$, $x \rightarrow 0$, $\alpha(x) = O(l-x)$, $x \rightarrow l$. Тоді задача (1)-(3) породжує імпульсну динамічну систему.

Доведення.

Відомо, що (1) породжує неперервну напівгрупу $V : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$

$$V(t, u_0) = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k^0 e^{-\lambda_k t} + \frac{h_k}{\lambda_k} (1 - e^{-\lambda_k t})) \psi_k(x), \quad (16)$$

де $\{\psi_k\}, \{\lambda_k\}$ - розв'язки спектральної задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(p(x) \frac{\partial \psi}{\partial x}) + q(x)\psi = -\lambda\psi \\ \psi|_{x=0} = \psi|_{x=l} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots, \lambda_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty,$$

$$u_k^0 = \int_0^l u_0(x) \psi_k(x) dx, \quad h_k = \int_0^l h(x) \psi_k(x) dx.$$

Покладемо

$$M = \{u \in X | u(x) \geq 0, \psi(u) = \psi_0\}, \quad (18)$$

$$I : M \rightarrow X,$$

$$(Iu)(x) = u(x) + \alpha(x). \quad (19)$$

Доведемо, що $\{V, M, I\}$ з (16), (18), (19) породжують імпульсну динамічну систему $\tilde{V}$, тобто виконуються умови (4), (7).

Множина M є замкненою в X , для $u \in M$

$$\psi(Iu) = \int_0^l (u(x) + \alpha(x)) dx = \psi_0 + \alpha_0 > \psi_0,$$

отже $M \cap IM = \emptyset$. Для доведення останньої властивості з (4) покажемо, що для $u_0 \in M$, $t > 0$

$$\psi(V(t, u_0)) < \psi_0. \quad (20)$$

Дійсно, в силу рівняння (1) для розв'язку $u = u(t, x)$ з $u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \neq 0$ маємо

$$u(t, x) = v(t, x) + \omega(t, x),$$

де v — розв'язок (1) з $h(x) \equiv 0$, ω — розв'язок (1) з $u_0(x) \equiv 0$

Для ω в силу принципу максимуму [11] маємо:

$$\omega(t, x) \leq 0,$$

а отже $\psi(\omega(t)) \leq 0, \forall t \geq 0$. Для v в силу принципу максимуму $v(t, x) > 0, \forall t > 0, \forall x \in (0, l)$. Крім того, для $t > 0$

$$\frac{d}{dt} \psi(v(t)) \leq p(l)v_x(t, l) - p(0)v_x(t, 0) \leq 0,$$

оскільки $v(t, 0) = v(t, l) = 0, v(t, x) > 0 \forall x \in (0, l)$. Отже, $\forall t_2 > t_1 > 0$

$$\psi(v(t_2)) \leq \psi(v(t_1)).$$

Доведемо, що ця нерівність строга. Припустимо, що для деяких $\forall t_2 > t_1 > 0$

$$\int_0^l v(t_2, x) dx = \int_0^l v(t_1, x) dx$$

Тоді з (1):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^l (v(t_2, x) - v(t_1, x)) dx \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} (p(l)v_x(t, l) - p(0)v_x(t, 0)) dt. \end{aligned}$$

Оскільки підінтегральний вираз правої частини недодатний $\forall t \in [t_1, t_2]$, то з останньої нерівності виводимо $\forall t \in [t_1, t_2] \quad v_x(t, l) = v_x(t, 0) = 0$. Це протирічить тому, що $u_0(x) \neq 0$

Отже, для $t > 0 \quad \int_0^l v(t, x) dx < \int_0^l v(0, x) dx = \psi(u_0)$, і тому $\psi(u(t)) = \psi(\omega(t)) + \psi(v(t)) < \psi(u_0)$. Зокрема, виконується остання властивість (4).

Доведемо (7). Нехай імпульсних точок буде нескінченно багато. Покажемо, що

$$T_{n+1} = \sum_{k=1}^n s_k \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

Отже, нехай для $u_0 \in X, u_1^+ = Iu(s_0)$ — перша імпульсна точка.

$$u_1^+(x) = u(s_0, x) + \alpha(x), \psi(u_1^+) = \psi_0 + \alpha_0$$

Нехай $s_1 = \tilde{s}(u_1^+)$.

Зауважимо, що в силу [11] без обмеження загальності можемо вважати, що власна функція $\psi(x) := \psi_1(x)$, що відповідає λ_1 , задовольняє властивості:

$$\psi \in C^1([0, l]), \psi(x) > 0 \forall x \in (0, l), \psi'(0) \neq 0, \psi'(l) \neq 0.$$

Тоді в силу умов на функцію $\alpha(x)$ можемо стверджувати, що

$$\exists C_1 > 0 : \alpha(x) \leq C_1 \psi(x), x \in [0, l].$$

Оскільки $\exists C_2 = C_2(u_0) > 0$ таке, що

$$V(s_0, x) \leq C_2 \psi(x),$$

то для u_1^+ маємо

$$u_1^+(x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x), \forall x \in [0, l].$$

Тоді з принципу максимуму для розв'язку задачі

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x) \frac{\partial v}{\partial x}) + q(x)v, \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = u_1^+(x), \end{cases} \quad (21)$$

враховуючи (17), одержуємо:

$$v(t, x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 t}. \quad (22)$$

Тоді

$$\begin{aligned} p(l)v_x(t, l) - p(0)v_x(t, 0) &\geq \\ &\geq (C_1 + C_2) e^{-\lambda_1 t} (p(l)\psi'(l) - p(0)\psi'(0)) \end{aligned}$$

Отже

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(v(t)) &\geq (C_1 + C_2) e^{-\lambda_1 t} (p(l)\psi'(l) - p(0)\psi'(0)) + \\ &+ \int_0^l q(x) \psi(x) dx = -\lambda_1 (C_1 + C_2) e^{-\lambda_1 t} \int_0^l \psi(x) dx. \end{aligned} \quad (23)$$

Звідси, якщо $u(s_1) = v(s_1) + \omega(s_1) \in M$, то з (23)

$$\begin{aligned} \psi_0 - \psi(\omega(s_1)) &\geq \psi_0 + \alpha_0 - \\ &- (C_1 + C_2) (1 - e^{-\lambda_1 s_1}) \int_0^l \psi(x) dx. \end{aligned}$$

Оскільки в силу (16)

$$\exists C_3 > 0 \quad \forall t \geq 0 \quad |\psi(\omega(t))| \leq C_3 t,$$

то маємо оцінку:

$$(C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x) dx (1 - e^{-\lambda_1 s_1}) + C_3 s_1 \geq \alpha_0 \quad (24)$$

З (24) виводимо, що

$$s_1 \geq \tau_1,$$

де $\tau_1 > 0$ — єдиний розв'язок рівняння

$$(C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x) dx (1 - e^{-\lambda \tau}) + C_3 \tau = \alpha_0 \quad (25)$$

Враховуючи оцінку $1 - e^{-\lambda_1 x} \leq \lambda_1 x$, $x \geq 0$, з (25) маємо:

$$s_1 \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_1 (C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x) dx} + C_3$$

Далі для $u_2^+(x) = IV(s_1, u_1^+) = v(s_1, x) + w(s_1, x) + \alpha(x)$

$$\begin{aligned} u_2^+(x) &\leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 s_1} + \\ &+ C_1 \psi(x) \leq (2C_1 + C_2) \psi(x). \end{aligned}$$

Тоді, повторюючи попередні міркування (21)-(24), для $s_2 = \tilde{s}(u_2^+)$ маємо оцінку:

$$s_2 \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_1 (2C_1 + C_2) \int_0^l \psi(x) dx + C_3}$$

Отже на n -тому кроці

$$s_n \geq \frac{\alpha_0}{\lambda_1 (nC_1 + C_2) \int_0^l \psi(x) dx + C_3}. \quad (26)$$

З (26) виводимо $\sum_{n=0}^{\infty} s_n = \infty$, що означає виконання (7). Лема доведена.

Тепер розглянемо для $R > 0$ множину

$$M_R := \{u \in X | u(x) \geq 0, \psi(u) = \psi_0,$$

$$\int_0^l u^2(x) dx \leq R^2\}.$$

Оскільки M_R — замкнена, $M_R \subset M$, то з леми 2 випливає, що $\{V, M_R, I\}$ також породжують імпульсну динамічну систему $\tilde{V}_R : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$.

Теорема. За умов леми 2 для $\forall u_0 \in X$ ω -гранична множина

$$\tilde{\omega}_R(u_0) = \bigcap_{T>0} \overline{\bigcup_{t \geq T} \tilde{V}_R(t, u_0)}$$

непорожня, компактна і

$$\text{dist}_X(\tilde{V}_R(t, u_0), \tilde{\omega}_R(u_0)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Доведення.

Встановимо оцінку на моменти імпульсно-го збурення, яка дозволить встановити властивість (12) леми 1. Отже, нехай $u_0 \in IM_R$ і $s > 0$ момент першого потрапляння $u(t) = V(t, u_0)$ на множину M_R . Без обмеження загальності вважаємо $s \leq 1$. Розглянемо (1) на $(0, s)$.

Візьмемо

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, x \in [\varepsilon, l - \varepsilon], \\ \frac{x}{\varepsilon}, x \in [0, \varepsilon], \\ -\frac{x}{\varepsilon} + \frac{l}{\varepsilon}, x \in [l - \varepsilon, l]. \end{cases}$$

Домножимо (1) на η_ε і проінтегруємо по $[0, l]$

$$\begin{aligned} \int_0^l u_t \eta_\varepsilon &= \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \eta_\varepsilon + \int_0^l q u \eta_\varepsilon + \int_0^l h \eta_\varepsilon \\ \frac{d}{dt} \psi(u(t)) - \int_0^\varepsilon u_t &- \int_{l-\varepsilon}^l u_t + \frac{d}{dt} \int_0^\varepsilon u \eta_\varepsilon + \\ + \frac{d}{dt} \int_{l-\varepsilon}^l u \eta_\varepsilon &= - \int_0^l p \frac{\partial u}{\partial x} \eta'_\varepsilon + \int_0^l q u \eta_\varepsilon + \int_0^l h \eta_\varepsilon \end{aligned}$$

Після інтегрування по $t \in [0, s]$ одержуємо:

$$\begin{aligned} -\alpha_0 - \int_0^s u(t, \varepsilon) dt - \int_0^s u(t, l - \varepsilon) dt + \\ + \int_0^\varepsilon u(s, x) \eta_\varepsilon - \int_0^\varepsilon u_0(x) \eta_\varepsilon + \\ + \int_{l-\varepsilon}^l u(s, x) \eta_\varepsilon - \int_{l-\varepsilon}^l u_0(x) \eta_\varepsilon = \\ = - \int_0^s \int_0^l p \frac{\partial u}{\partial x} \eta'_\varepsilon + \int_0^s \int_0^l q u \eta_\varepsilon + s \int_0^l h \eta_\varepsilon \\ \alpha_0 = - \int_0^s u(t, \varepsilon) dt - \int_0^s u(t, l - \varepsilon) dt + \\ + \int_0^\varepsilon u(s, x) \eta_\varepsilon + \int_{l-\varepsilon}^l u(s, x) \eta_\varepsilon - \int_0^\varepsilon u_0(x) \eta_\varepsilon - \\ - \int_{l-\varepsilon}^l u_0(x) \eta_\varepsilon + \int_0^s \int_0^l p \frac{\partial u}{\partial x} \eta'_\varepsilon - \\ - \int_0^s \int_0^l q u \eta_\varepsilon - s \int_0^l h \eta_\varepsilon \end{aligned} \quad (27)$$

Маємо $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$, (див. доведення леми 2), де $v(t, x) \geq 0$, $|\omega(t, x)| \leq C(h)$.

Крім того виконується оцінка:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2p_0 \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dt \leq \|u_0\|_{L^2}^2 + \\ + 2 \int_0^t \|h\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, для $t \in [0, 1]$, $x \in [0, l]$, враховуючи $u_0 \in IM_R$ та нерівність Пуанкаре, маємо:

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dt \leq C(R). \quad (29)$$

Тоді з (27) виводимо:

$$\begin{aligned} \alpha_0 \leq 2C(h)s + 2 \|u(s)\|_{L^2} \sqrt{\varepsilon} + \\ + \|p\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{s} \left(\int_0^s \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \end{aligned}$$

$$+ s \|q\| \sqrt{l} \|u(s)\|_{L^2} + s \|h\|_{L^2}. \quad (30)$$

Враховуючи (29), з (30) одержуємо:
 $\exists \varepsilon = \varepsilon(R) > 0 \exists C = C(\varepsilon, R) > 0$ такі що

$$\frac{\alpha_0}{2} \leq C \sqrt{s} \quad (31)$$

Таким чином, для будь-якої імпульсної траєкторії одержуємо (12). Перевіримо інші умови Леми 1. Оскільки $Iu = u + \alpha$, то виконується (11).

Умова (10) впливає з оцінки [12]: для $t > 0$

$$\|V(t, u_0)\|_{H^1} \leq K(r) \left(1 + t + \frac{1}{t}\right), \quad (32)$$

де $K(r)$ — додатна константа, що залежить від r , $\|u_0\|_{L^2} \leq r$.

Тоді якщо $\tilde{\gamma}$ обмежена в X , то $\tilde{\gamma}$ — обмежена в $L^2(0, l)$, і з компактності вкладення $H^1(0, l) \subset C([0, l])$ одержуємо (10).

Доведемо обмеженість $\tilde{\gamma} = \bigcup_{t \geq 0} \tilde{V}_R(t, u_0)$.

З оцінки

$$\forall t \geq 0, \|V(t, u_0)\| \leq M_1 \|u_0\| e^{-\lambda_1 t} + M_2 \quad (33)$$

одержуємо обмеженість $\tilde{\gamma}$ в X для траєкторій з не більш як скінченною кількістю імпульсних збурень.

Нехай імпульсних точок нескінченна кількість. З (12) маємо

$$\exists \bar{s} > 0 \forall n \geq 1 \quad s_n \geq \bar{s}.$$

Повторюючи міркування Леми 2, маємо:

$$0 \leq u_1^+(x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x)$$

$$0 \leq u(s_1, x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 \bar{s}}$$

$$0 \leq u_2^+(x) \leq (C_1 + C_2) \psi(x) e^{-\lambda_1 \bar{s}} + C_1 \psi(x)$$

Продовжуючи цей процес, на n -тому кроці одержуємо: $\forall x \in [0, l]$

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n^+(x) \leq C_2 \psi(x) e^{-(n-1)\lambda_1 \bar{s}} + \\ + C_1 \psi(x) (1 + e^{-\lambda_1 \bar{s}} + \dots + e^{-(n-1)\lambda_1 \bar{s}}) \leq \\ \leq C_2 \|\psi\| + \frac{C_1 \|\psi\|}{1 - e^{-\lambda_1 \bar{s}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Об'єднуючи (33) і (34), одержуємо шукану обмеженість $\tilde{\gamma}$. Тоді з Леми 1 маємо твердження теореми.

Теорема доведена.

Зауваження. Нехай $\tilde{\gamma}$ — обмежена траєкторія імпульсної динамічної системи $\tilde{V} = \{V, M, I\}$, що стартує з $u_0 \in X$. Тоді для деякого $R > 0 \forall t \geq 0 \| \tilde{V}(t, u_0) \|_{L^2} \leq R$.

Отже, $\tilde{V}$ співпадає з $\tilde{V}_R$ і за доведеною теоремою, $\tilde{\omega}(u_0) \neq \emptyset$, компакт, і $\text{dist}_X(\tilde{V}(t, u_0), \tilde{\omega}(u_0)) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$.

Список використаних джерел

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. / A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk // Singapore: World Scientific – 1995. doi: 10.1142/2892.
2. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems. / S. K. Kaul // J. Appl. Stochast. Anal. – 1994. – Vol. 7, no. 4. – P. 509–523. doi: 10.1155/S1048953394000390.
3. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems. / K. Ciesielski // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2004. – Vol. 52. – P. 81–91. doi: 10.4064/ba52-1-9.
4. *Akhmet M. U.* Perturbations and Hopf bifurcation of the planar discontinuous dynamical system. / M. U. Akhmet // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods – 2005. – Vol. 60, no. 1, pp. 163–178 doi: 10.1016/j.na.2004.08.029.
5. *Kapustian O. V., Perestyuk M. O.* Global attractors in impulsive infinite-dimensional systems. / O. V. Kapustian, M. O. Perestyuk // Ukr. Math. J. – 2016. – Vol. 68, no. 4. – P. 583–597. doi: 10.1007/s11253-016-1243-0.
6. *Bonotto E. M., Bortolan M. C., Carvalho A. N., Czaja R.* Global attractors for impulsive dynamical systems - a precompact approach. / E. M. Bonotto, M. C. Bortolan, A. N. Carvalho, and R. Czaja // J. Differ. Equations. – 2015. – Vol. 259, no. 7, – P. 2602–2625, doi: 10.1016/j.jde.2015.03.033.
7. *Dashkovskiy S., Feketa P., Kapustyan O., Romaniuk I.* Existence and invariance of global attractors for impulsive parabolic system without uniqueness. / S. Dashkovskiy, P. Feketa, O. Kapustyan, and I. Romaniuk // JMAA. – 2019. – Vol. 458, – P. 57–78. doi: 10.1007/978-3-319-96755-4-4.
8. *Dashkovskiy S., Kapustyan O., Romaniuk I.* Global attractors of impulsive parabolic inclusions. / S. Dashkovskiy, O. Kapustyan, I. Romaniuk // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B – 2017. – Vol. 22, no. 5. – P. 1875–1886. doi: 10.3934/dcdsb.2017111.
9. *Myshkis A. D.* Heat conductivity with self-regulated pulse maintenance. / A. D. Myshkis // J. Autom. Remote Control – 1995. – Vol. 56, no. 2. – P. 179–186.
10. *Kirilich V. M., Myshkis A. D., Prokhorenko M. V.* Oscillations of a diaphragm under the action of pulse forces / V. M. Kirilich, A. D. Myshkis, M. V. Prokhorenko // Ukr. Math. J. – 2009. – Vol. 61, no. 8. – P. 1357–1363. doi: 10.1007/s11253-010-0281-2.
11. *Evans L.C.* / Partial Differential Equations // AMS, 1997
12. *Haraux A., Kirane M.* Estimations C1 pour des problemes paraboliques semi-lineaires. / A. Haraux and M. Kirane // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math. – 1983. – Vol. 5. – P. 265–280.

Received: 14.12.2022