ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні досягнення

УДК 519.172.3 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.4**

Катерина АНТОШИНА, аспірант
ORCID: 0009-0005-9221-1351
e-mail: kantoshyna@imath.kiev.ua
Інститут математики НАН України, Київська школа економіки, Київ, Україна

Софія КОВАЛЕВСЬКА, учениця 10 класу
e-mail: sofia.s.kovalevska@gmail.com
Криворізький ліцей №95 Криворізької міської ради, Кривий Ріг, Україна

КОНКАТЕНАЦІЯ ТА МУЛЬТИПЛІКАЦІЯ ОРІЄНТОВАНИХ ГРАФІВ СПЕЦІАЛЬНОГО КЛАСУ

Анотація. *На множині орієнтованих графів із рівно одним стоком та рівно одним джерелом розглядаються дві бінарні операції. Конкатенація ототожнює стік першого орграфа з джерелом другого, а мультиплікація замінює всі дуги першого орграфа на другий орграф, ототожнюючи джерело з початком дуги, а стік – із кінцем. Множина досліджуваних графів замкнена відносно цих двох операцій, а сукупність орієнтованих ланцюгів із операціями конкатенації та мультиплікації утворює напівкільце, ізоморфне напівкільцю натуральних чисел. У роботі проаналізовані попередні роботи в галузі орієнтованих графів, і зокрема, результатів, пов'язаних із прикладним застосуванням досліджуваного класу графів як моделей транспортних мереж. Отримані теоретичні результати про властивості нових операцій та описи королів отриманих орграфів дають можливість працювати з цими операціями для подальших досліджень, побудови узагальнень та моделювання більш складних систем для прикладних задач.*

Ключові слова: *орієнтовані графи; бінарні операції; королі; транспортні мережі; мережеві потоки.*
Класифікація відповідно до AMS 2020: 05C76, 05C90, 68R10, 94C15.

1. Вступ

Теорія графів бере свій початок ще з 18-го століття, коли Леонард Ойлер винайшов графи як спрощену модель взаємозв'язків між об'єктами. У 1736 році він опублікував розв'язок знаменитої задачі про мости Кенігсберга (Euler, 1736), чим поклав початок теорії графів і орієнтованих графів зокрема. Самі орієнтовані графи слугують дуже наочними й зручними моделями для математичного опису й дослідження різних процесів, що нас оточують. У більшості книг із класичної теорії графів (таких, як (Bondy & Murty, 2009), (Harary, 1969), (West, 2002)) завжди є розділ про орієнтовані графи, де наведено основні теоретичні результати, необхідні для подальшого розвитку цього наукового напряму. Мотивацією розгляду орієнтованих графів із одним джерелом і одним стоком слугували транспортні мережі – напрямлені структури із заданим потоком. Моделювання мереж орграфами з подальшим дослідженням (зокрема, оптимізаційні задачі) почалося зі статті (Harris & Ross, 1956). Основні теоретичні відомості та результати в темі мережевих потоків описані в класичній книзі (Ford & Fulkerson, 1962).

Статтю структуровано наступним чином. У пункті другому наведено базові означення теорії орієнтованих графів і попередні відомі результати, опрацьовані для отримання нових тверджень, узагальнень і занурень абстракцій у прикладний контекст. Строго введено нові бінарні операції на орієнтованих графах із рівно одним джерелом і рівно одним стоком – це конкатенація (Означення 1) та мультиплікація (Означення 2). Конкатенація орієнтованих графів є частковим випадком поняття послідовного з'єднання графів із виділеними вершинами (див. (Büsing, Koster & Schmitz, 2022) , (Valdes, Tarjan & Lawler, 1982)), а мультиплікація є новою концепцією, що виникла внаслідок бажання узагальнити операції додавання і множення натуральних чисел на складніші об'єкти.

У третьому і четвертому пунктах висвітлено результати проробленого дослідження у трьох різних перерізах, описано властивості введених бінарних операцій та їхній зв'язок. У п'ятому пункті сформульовано й доведено критерії існування королів для конкатенації (Теорема 1) та мультиплікації (Теорема 2).

У шостому пункті введено операції конкатенації та мультиплікації на транспортних мережах із потоками, встановлено умови для допустимого потоку на результуючих мережах.

Актуальність даної роботи полягає у тому, що нові операції конкатенації та мультиплікації орієнтованих графів розширюють операції додавання та множення натуральних чисел. Отримана алгебраїчна структура (множина орієнтованих графів із цими двома операціями) має нетривіальні властивості (наприклад, жодна з операцій не є комутативною, і тут виконується лише один із двох дистрибутивних законів), які потребують ґрунтовного дослідження. Результати, отримані в роботі, є першим кроком до подальших досліджень у цій області. Вони можуть бути застосовані до дослідження транспортних мереж, а саме: "розбиття" мережі на менші мережі через конкатенацію та мультиплікацію, і навпаки.

Основною задачею і метою роботи є дослідити введені нами бінарні операції, їх властивості, властивості орграфів при дії цих операцій, вивчення графових параметрів та прикладного застосування отриманих результатів.

Об'єктом дослідження є слабко зв'язні, прості орієнтовані графи з рівно одним джерелом і рівно одним стоком.

Предметом дослідження є дві нові бінарні операції: конкатенація і мультиплікація.

2. Основні означення

Орієнтованим графом (або коротко *орграфом*) називається впорядкована пара $D = (V, A)$, де V – множина довільної природи, елементи якої називаються *вершинами*, а $A \subset V \times V$ – множина впорядкованих пар вершин, що називаються *дугами* або *стрілками*. На письмі позначатимемо коротко uv або $u \to v$. Для дуги $e = (u, v)$ будемо казати, що u є її *початком*, а v – *кінцем*. Записувати це коротко будемо так: $u = t(e)$, $v = h(e)$ від англійських слів *tail* і *head*, що є загальноприйнятим для позначення цих вершин. *Дезорієнтацією* орграфа D називається неорієнтований граф $[D]$, який отриманий із D "забуванням" стрілок.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Степенем входу $d^-(u)$ вершини u називається кількість дуг, для яких u є кінцем. *Степенем виходу* $d^+(u)$ вершини u називається кількість дуг, для яких u є початком.

Джерелом в орграфі називається вершина, степінь входу якої дорівнює нулю. *Стоком* в орграфі називається вершина, степінь виходу якої дорівнює нулю.

Усі орграфи в роботі є скінченними та *слабко зв'язними*, що означає, що дезорієнтація такого орграфа є зв'язним неорієнтованим графом.

Знак "=" між орграфами означає *ізоморфізм*, тобто взаємно однозначну відповідність між вершинами, що зберігає дуги в обидва боки.

Об'єктами нашого дослідження є слабко зв'язні орієнтовані графи, що мають рівно одне джерело і рівно один стік. Множину таких орграфів позначимо $\mathcal{A}$. Оскільки кожен $D \in \mathcal{A}$ має рівно одне джерело і рівно один стік, введемо позначення s_D – джерело, а t_D – стік у D.

Однією з ключових задач даної роботи було сформулювати та дослідити аналоги операцій додавання та множення натуральних чисел для орієнтованих графів. У роботі (Valdes, Tarjan & Lawler, 1982) було введено операцію послідовного з'єднання (series composition) орієнтованих графів, які можуть мати більше одного джерела та стоку. Взявши за основу це поняття та провівши різні експериментальні побудови, було прийнято рішення оперувати орграфами із рівно одним джерелом і одним стоком. Зокрема, і тому, що орграф, отриманий шляхом такого з'єднання, також матиме рівно одне джерело і рівно один стік. Тому, введемо наступне означення.

Означення 1. *Конкатенацією (series composition) двох орграфів* $D, G \in \mathcal{A}$ *називається орграф* $D \boxplus G$, *у якого:*

$$V(D \boxplus G) = V(D - t_D) \sqcup V(G - s_G) \sqcup \{b_{(t_D, s_G)}\},$$

$$A(D \boxplus G) = A(D - t_D) \sqcup A(G - s_G) \sqcup$$

$$\sqcup \{(x, b_{(t_D, s_G)}) \mid x \in N^-(t_D)\} \sqcup \{(b_{(t_D, s_G)}, x) \mid x \in N^+(s_G)\}.$$

Тобто $D \boxplus G$ утворений шляхом ототожнення стоку t_D із джерелом s_G. Відповідну вершину в новоутвореному графі називатимемо *точкою з'єднання* і позначатимемо $b_{(t_D, s_G)}$.

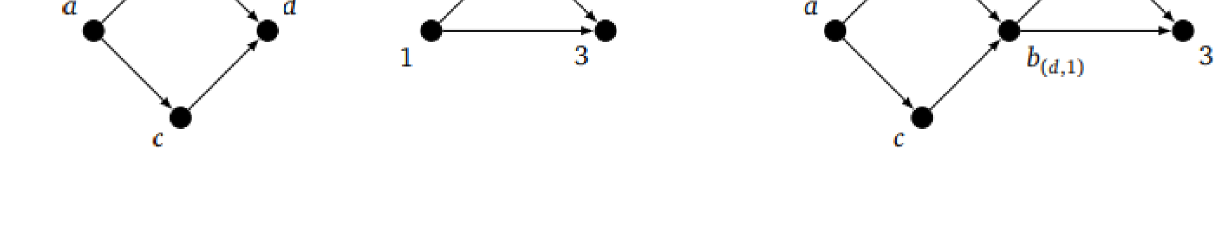

Рис. 1. Орграфи D, G та $D \boxplus G$

Приклад 1. *Нехай орграфи D і G такі:*

$$V(D) = \{a, b, c, d\}, \qquad A(D) = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d)\}$$

$$V(G) = \{1, 2, 3\}, \qquad A(G) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}.$$

Тоді (рис. 1):

$$V(D \boxplus G) = \{a, b, c, b_{(d,1)}, 2, 3\},$$

$$A(D \boxplus G) = \{(a, b), (a, c), (b, b_{(d,1)}), (c, b_{(d,1)}), (b_{(d,1)}, 2), (b_{(d,1)}, 3), (2, 3)\}.$$

Наступний результат є очевидним із означення конкатенації.

Спостереження 1. *Якщо ототожнити орієнтований ланцюг P_n із числом $n - 1$ (яке відповідає кількості дуг у ланцюгу), то операція $\boxplus$ буде в точності відповідати операції $+$ на множині $\mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Дійсно,

$$k + m - 2 = (k - 1) + (m - 1) \equiv P_k \boxplus P_m = P_{k+m-1} \equiv k + m - 2.$$

Означення 2. *Мультиплікацією двох орграфів $D, G \in \mathcal{A}$ називається орграф $D \boxdot G$ у якого:*

$$V(D \boxdot G) = \{v' \mid v \in V(D)\} \sqcup \{u'_e \mid u \in V(G) \setminus \{s_G, t_G\}, e \in A(D)\},$$

$$A(D \boxdot G) = \{u'_e v'_e \mid uv \in A(G), e \in A(D)\} \sqcup$$

$$\sqcup \{v' u'_e \mid u \in N^+(s_G), v = t(e), e \in A(D)\} \sqcup$$

$$\sqcup \{u'_e\, v' \mid u \in N^-(t_G), v = h(e), e \in A(D)\}.$$

Приклад 2. *Нехай в орграфі D: $V(D) = \{a, b, c\}$, $A(D) = \{e_1 = ab\,, e_2 = bd\,, e_3 = ad\}$, а в орграфі G: $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $A(G) = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$.*

Тоді (рис. 2):

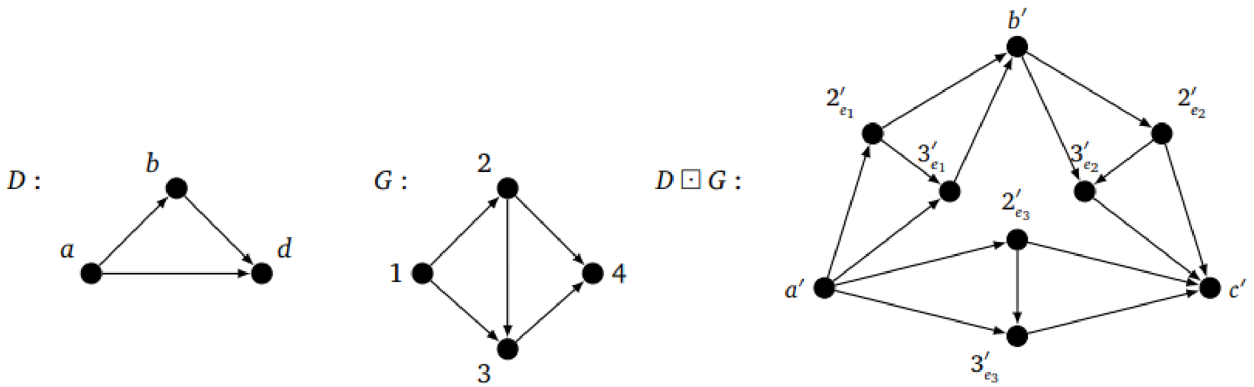

Рис. 2. Орграфи D, G та $D \boxdot G$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$V(D \boxdot G) = \{a', b', c'\} \sqcup \{2'_{e_1}, 3'_{e_1}\} \sqcup \{2'_{e_2}, 3'_{e_2}\} \sqcup \{2'_{e_3}, 3'_{e_3}\},$$

$$A(D \boxdot G) = \{(2'_{e_1}, 3'_{e_1}), (2'_{e_2}, 3'_2), (2'_{e_3}, 3'_{e_3})\} \sqcup \{(a', 2'_{e_1}), (a', 3'_{e_1})\} \sqcup$$

$$\sqcup \{(b', 2'_{e_2}), (b', 3'_{e_2})\} \sqcup \{(a', 2'_{e_3}), (a', 3'_{e_3})\} \sqcup \{(2'_{e_1}, b'), (3'_{e_1}, b')\} \sqcup$$

$$\sqcup \{(2'_{e_2}, c'), (3'_{e_2}, c')\} \sqcup \{(2'_{e_3}, c'), (3'_{e_3}, c')\}.$$

Наступний результат є простим, і слідує з означення мультиплікації.

Твердження 1. *Якщо в орграфі $D \in \mathcal{A}$ кількість вершин дорівнює n_D, а дуг – e_D, а в орграфі $G \in \mathcal{A}$ – n_G вершин і e_G дуг, то в орграфі $D \boxdot G$ буде $n_D + (n_G - 2) \cdot e_D$ вершин і $e_D \cdot e_G$ дуг.*

3. Властивості конкатенації

Для введеної операції конкатенації на орієнтованих графах у пошуках аналогії з додаванням натуральних чисел досліджено її властивості, зокрема наявність нейтрального та одиничного елементів.

Твердження 2. *Конкатенація має такі властивості:*

1. Орграф-вершина P_1 є нейтральним елементом;

2. Для довільних ланцюгів P_k, P_m справедливо $P_k \boxplus P_m = P_m \boxplus P_k$;

3. Асоціативність: для всіх орграфів D_1, D_2, D_3 із $\mathcal{A}$ справедливо, що

$$(D_1 \boxplus D_2) \boxplus D_3 = D_1 \boxplus (D_2 \boxplus D_3).$$

Доведення. Дійсно, за означенням конкатенації, орграф-вершина P_1 буде просто ототожнюватися з джерелом або зі стоком орграфа D, тож $\forall D \in \mathcal{A}$:

$$D \boxplus P_1 = P_1 \boxplus D = D.$$

2. Справді, згідно зі Спостереженням 1, для довільних ланцюгів P_k, P_m справедливо $P_k \boxplus P_m = P_{k+m} = P_{m+k} = P_m \boxplus P_k$. Тобто, дійсно, ланцюги поводять себе, як натуральні числа, комутуючи відносно додавання.

3. За означенням конкатенації результатом операції $D_1 \boxplus D_2$ буде копія орграфа D_1, з'єднана через точку з'єднання з D_2 . Після конкатенації з D_3 буде отримано орграф, у якому по черзі йтимуть D_1, D_2, D_3 із ототожненими стоком D_1 із джерелом D_2 та стоком D_2 із джерелом D_3. Якщо ж спочатку сконкатенувати D_2 і D_3, то вийде копія орграфа D_2, з'єднана через точку з'єднання з D_3. Після конкатенації з D_1 зліва буде отримано орграф, у якому по черзі йтимуть D_1, D_2, D_3 із ототожненими стоком D_1 із джерелом D_2 та стоком D_2 із джерелом D_3.

■

Зауваження 2. *Таким чином, можна коректно ввести позначення nD для натуральних чисел n та $D \in \mathcal{A}$, і казати, що орграф $G \in \mathcal{A}$ є кратним деякому іншому орграфу D, якщо $G = nD$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.*

4. Властивості мультиплікації

Оскільки ми ввели узагальнене додавання, мультиплікація відіграє роль узагальненого множення, задовольняючи деякі природні властивості, включно з існуванням нейтрального та нульового елементів:

Твердження 3. *Мультиплікація має такі властивості:*

1. Орграф-дуга P_2 є нейтральним елементом;

2. Орграф-вершина P_1 є нульовим елементом;

3. Асоціативність: для всіх орграфів D_1, D_2, D_3 із $\mathcal{A}$ справедливо, що

$$(D_1 \boxdot D_2) \boxdot D_3 = D_1 \boxdot (D_2 \boxdot D_3).$$

4. Дистрибутивність справа відносно конкатенації.

Доведення. 1. Дійсно, за означенням при мультиплікації справа кожна дуга довільного орграфа D замінюватиметься на дугу, таким чином D не зміниться. При мультиплікації зліва P_2 замінятиметься на орграф D, тобто також D не зміниться: $\forall D \in \mathcal{A}: D \boxdot P_2 = P_2 \boxdot D = D$.

2. Дійсно, за означенням при мультиплікації справа кожна дуга довільного орграфа D замінюватиметься на вершину, таким чином, у D не залишиться дуг, тобто, він сам перетвориться на вершину P_1. При мультиплікації зліва, кожна дуга P_1 має замінятися на орграф D, проте у P_1 немає дуг. Таким чином, $\forall D \in \mathcal{A}: D \boxdot P_1 = P_1 \boxdot D = P_1$.

3. Розглянемо $(D_1 \boxdot D_2) \boxdot D_3$. Першою дією усі дуги орграфа D_1 замінюються на копії орграфа D_2. Другою дією усі дуги отриманого орграфа (по суті, це всі дуги всіх копій D_2) замінюються на орграф D_3.

Тепер розглянемо $D_1 \boxdot (D_2 \boxdot D_3)$. Першою дією усі дуги орграфа D_2 замінюються на копії орграфа D_3. Другою дією усі дуги орграфа D_1 замінюються на копії отриманого в першій дії орграфа. Бачимо, що в обох випадках вийшли орграфи з ідентичною структурою: кожна дуга орграфа D_1 замінена на орграф D_2, кожна дуга якого замінена на D_3.

4. Розглянемо $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$. За означенням, у результаті першої операції отримаємо такий орграф: копія орграфа D_1, з'єднана через точку з'єднання з D_2. При мультиплікації з D_3 справа усі дуги $D_1 \boxplus D_2$ замінюватимуться на копії орграфа D_3.

Якщо ж спочатку виконати операції $D_1 \boxdot D_3$, то отримаємо D_1, усі дуги якого замінені на копії орграфа D_3. У результаті операції $D_2 \boxdot D_3$ аналогічно отримаємо D_2, усі дуги якого замінені на копії орграфа D_3. Сконкатенувавши два отримані орграфи, отримаємо те саме, що і в $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$. Отже,

$$(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3 = (D_1 \boxdot D_3) \boxplus (D_2 \boxdot D_3).$$

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Проілюструємо асоціативність операції мультиплікації.

Приклад 3. *Нехай D_1, D_2 і D_3 такі, як зображені на рисунку 3.*

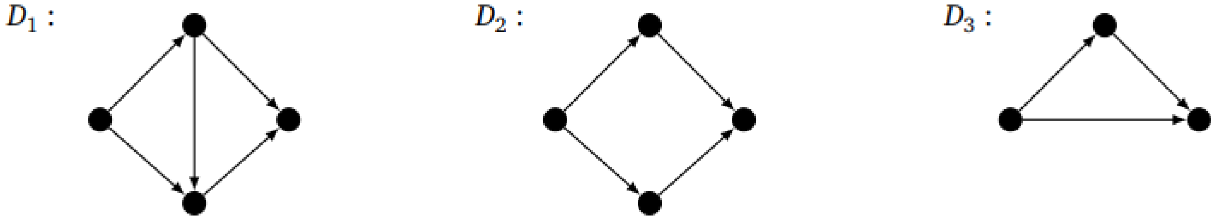

Рис. 3. Орграфи D_1, D_2 і D_3

Тоді результат $(D_1 \boxdot D_2) \boxdot D_3$ і $D_1 \boxdot (D_2 \boxdot D_3)$ буде таким як на рисунку 4.

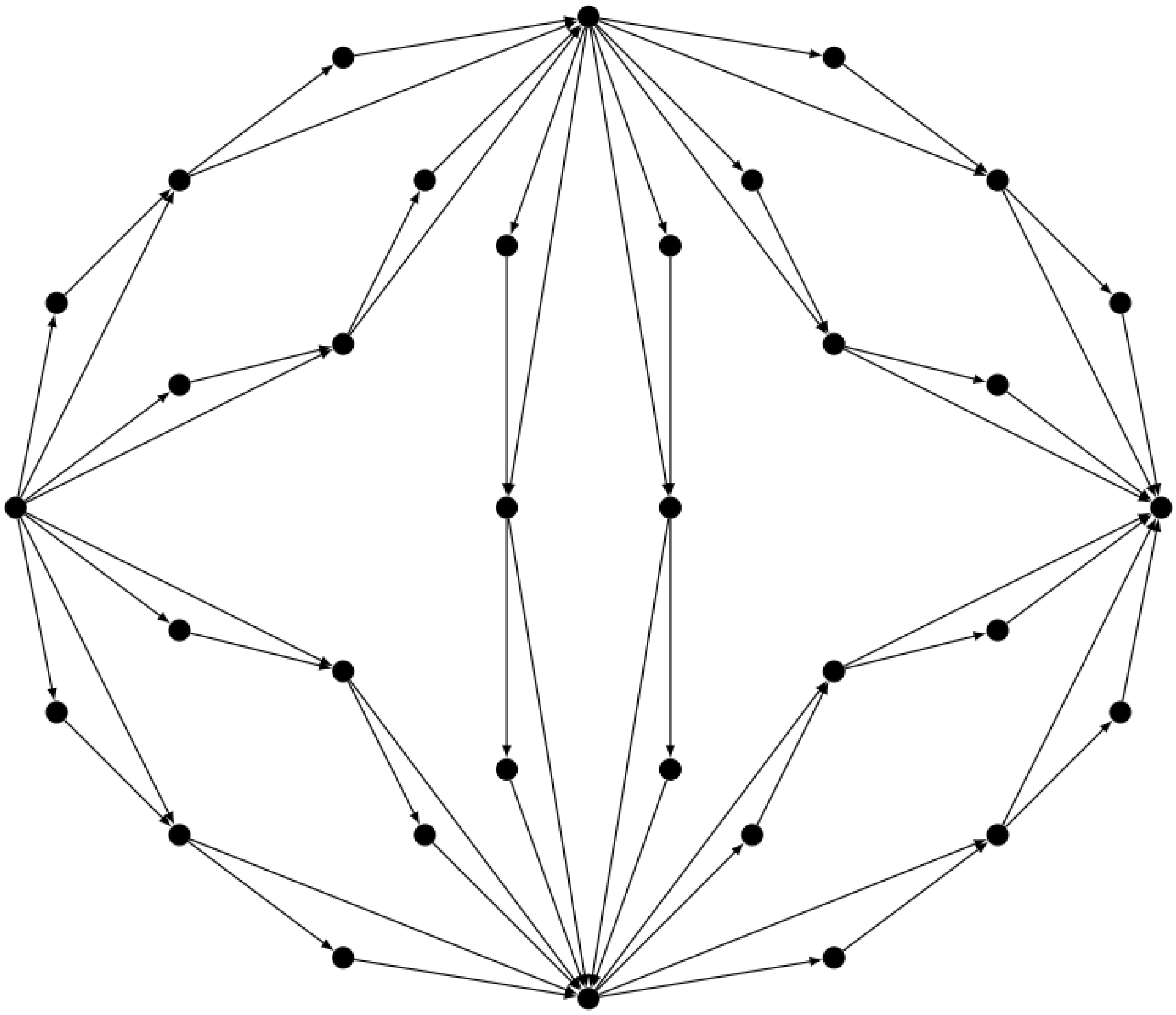

Рис. 4. : Результат мультиплікації $D_1 \boxdot D_2 \boxdot D_3$

Наступний приклад ілюструє дистрибутивність справа мультиплікації відносно конкатенації.

Приклад 4. *Нехай D_1, D_2 і D_3 такі, як зображені на рисунку 5.*

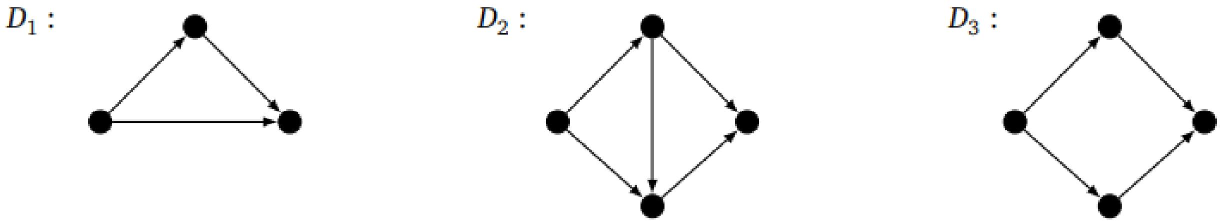

Рис. 5. Орграфи D_1, D_2 і D_3

Тоді результати $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$ і $(D_1 \boxdot D_3) \boxplus (D_2 \boxdot D_3)$ будуть такими як на рисунках 6 та 7 відповідно.

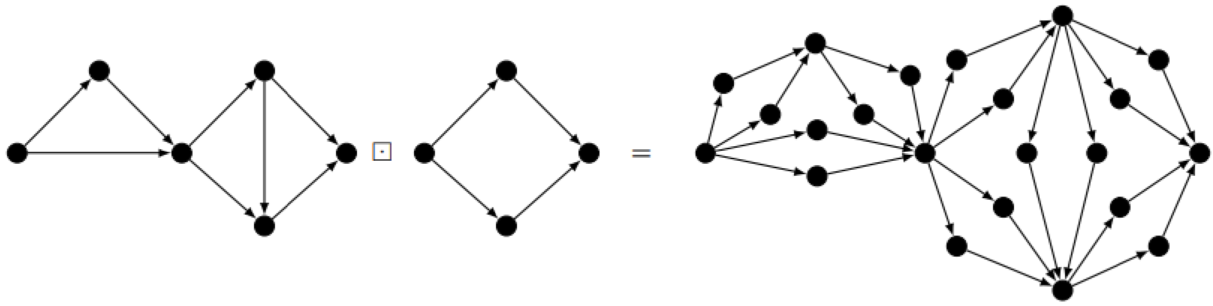

Рис. 6. : Результат мультиплікації $(D_1 \boxplus D_2) \boxdot D_3$

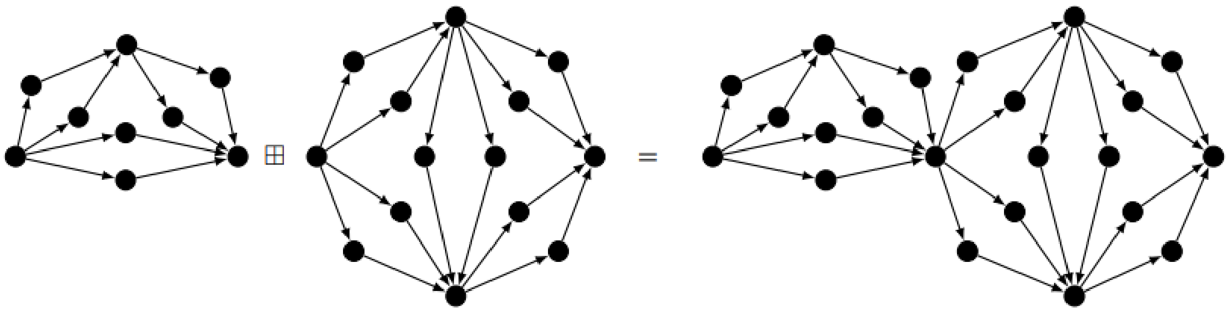

Рис. 7. Результат операцій $(D_1 \boxdot D_3) \boxplus (D_2 \boxdot D_3)$

Приклад 5. *Розглянемо орграф D – трикутник, і побудуємо $D \boxdot (D \boxplus D)$ (рис. 8) та $(D \boxdot D) \boxplus (D \boxdot D)$ (рис. 9). Бачимо, що в результаті вийшли два зовсім різні орграфи.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

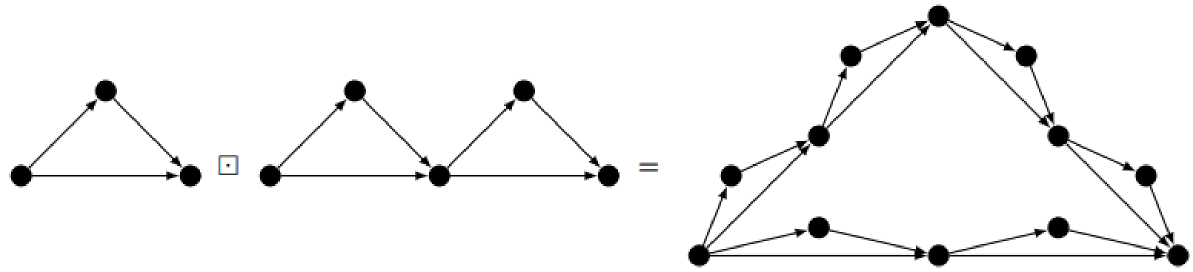

Рис. 8. Результат мультиплікації $D \boxdot (D \boxplus D)$

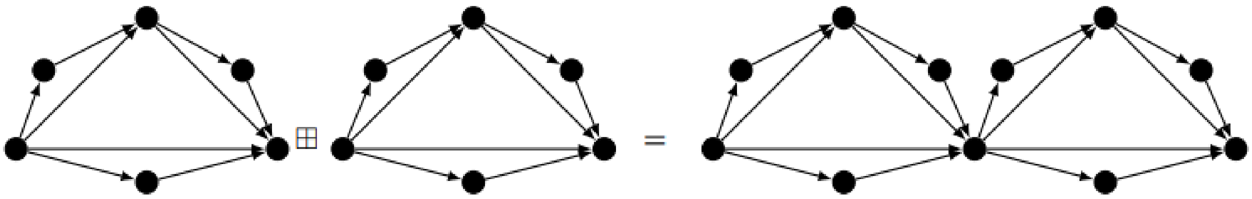

Рис. 9. Результат операцій $(D \boxdot D) \boxplus (D \boxdot D)$

У загальному випадку ми отримали наступне спостереження.

Спостереження 2. *Якщо орграф $D_3 \in \mathcal{A}$ такий, що його дезорієнтація є двозв'язним графом (тобто щоб отримати з нього незв'язний граф, необхідно видалити принаймні дві вершини), то дезорієнтація $[\,D_3 \boxdot (D_1 \boxplus D_2)]$ не матиме точок з'єднання, а $[(D_3 \boxdot D_1) \boxplus (D_3 \boxdot D_2)]$ матиме рівно одну.*

Наслідок 1. *Операції мультиплікації та конкатенації узгоджені в наступному сенсі: $nD = P_{n+1} \boxdot D$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, $D \in \mathcal{A}$.*

Доведення. Доведемо методом математичної індукції.

База: $n = 1$. Справді, бо $D = P_2 \boxdot D$.

Крок: нехай $n > 2$. Тоді за означенням nD (Зауваження 2): $nD = D \boxplus (n-1)D$. За припущенням індукції $(n-1)D = P_n \boxdot D$. Тоді $nD = D \boxplus (P_n \boxdot D)$. Скориставшись ще раз рівністю $D = P_2 \boxdot D$ та дистрибутивністю справа мультиплікації відносно конкатенації (Твердження 3, властивість 4), отримаємо наступне:

$$nD = (P_2 \boxdot D) \boxplus (P_{\mathrm{n}} \boxdot D) = (P_2 \boxplus P_n) \boxdot D = P_{n+1} \boxdot D.$$

■

Це є аналогом очевидної властивості додавання та множення натуральних чисел: $nd = d + \cdots + d$ (сума береться n раз).

5. Теореми про королів

Розглянемо тепер задачу існування королів для орграфів, отриманих внаслідок застосування операцій конкатенації та мультиплікації орграфів із класу $\mathcal{A}$. Нагадаємо, що *королем* в орграфі називається вершина, із якої існують орієнтовані шляхи до кожної іншої вершини, і довжини найкоротших таких шляхів не перевищують 2. Це поняття виникло через дослідження Ландау (Landau, 1953) явища домінування в зграях тварин. У цій же роботі він довів, що у будь-якому повному орієнтованому графі K_n (які ще називаються *турнірами*) обов'язково буде король. Задача існування короля в орграфі виникає при дослідженні поведінки тварин, задіюючи також і теорію ймовірностей. Наприклад, у статті (Maurer, 1980) розглядаються курячі зграї та ймовірність того, що серед n курок знайдеться k "курячих королів". Також мають місце обернені задачі.

Розглядаючи операції конкатенації та мультиплікації, одержимо питання дослідження і таких різних тем, пов'язаних із орграфами. Тому ми дослідили й повністю описали орграфи, отримані внаслідок застосування операцій конкатенації та мультиплікації, що мають королів. З означення елементів $\mathcal{A}$ відразу випливає наступний простий результат.

Лема 1. *Якщо орграф $D \in \mathcal{A}$ має короля, то ним є s_D, і цей король єдиний.*

Доведення. Справді, із жодної вершини $v \neq s_D$ немає орієнтованого шляху в s_D.

■

Наступна теорема характеризує пари орграфів із $\mathcal{A}$, конкатенація яких має короля.

Теорема 1. *Нехай $D \in \mathcal{A}$ і $x \in V(D)$ – король в D. Тоді для $G \in \mathcal{A}$ орграф $D \boxplus G$ матиме короля тоді й лише тоді, коли*

1. $G = K_1$, або

2. $N^+(s_G) = V(G) \backslash \{s_G\}$ і $(x, t_D) \in A(D)$.

Умова 2 означає, що джерело в G суміжне з усіма вершинами G, і в D є дуга з джерела в стік.

Доведення. Достатність. Якщо $G = K_1$, то $D \boxplus G = D$ має короля. Якщо $G \neq K_1$, позначимо точку з'єднання $b_{(t_D, s_G)}$ через s.

Оскільки $N^+(s_G) = V(G) \backslash \{s_G\}$, то $\forall y \in V(G\ -\ s)$: $d(s, y) = 1$. Зауважимо, що s лежить на всіх шляхах із x в G. Оскільки $d(x, s) = 1$, то $\forall y \in V(G - s)$: $d(x, y) = 2$. Таким чином, x – король в $D \boxplus G$.

Необхідність. По-перше, оскільки $x \in V(D)$ – король, то x – джерело. Розглянемо відстань від x до s (тобто, $b_{(t_D, s_G)}$).

- Якщо $d(x, s) = 2$, то $d(x, G - s) > 2$. Тоді в $D \boxplus G$ є король тоді й лише тоді, коли $V(G) = \{s\}$, тобто $G = K_1$.
- Якщо $d(x, s) = 1$, то x є королем в $D \boxplus G$ тоді й лише тоді, коли
  1. існують шляхи із s до будь-якої вершини $y \in V(G)$,
  2. $d(s, y) \leq 1$, $\forall y \in V(G)$.

Дійсно, якщо $d(x, s) = 1$ і x є королем в $D \boxplus G$, то пункти 1 і 2 виконуються за означенням короля. З іншого боку, якщо $d(x, s) = 1$ і виконуються пункти 1 і 2, то $d(x, y) \leq 2$, $\forall y \in V(G)$.

■

Лема 2. *Нехай $D \in \mathcal{A}$ має короля, причому $D \neq P_2$. Тоді в D існує ланцюг P_3, що починається з s_D.*

Доведення. Позаяк $D \neq P_2$ і D слабко зв'язний, то існує вершина $w \in V(D) \backslash \{s_D, t_D\}$ така, що $s_D \to w$ або $w \to t_D$. Якщо $s_D \to w$, то, оскільки $w \neq t_D$, існує такий x, що $w \to x$. Маємо ланцюг P_3, що починається в s_D: $s_D \to w \to x$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Нехай тепер $w \to t_D$. Оскільки s_D – король в D, то відстань $d_D(s_D, w) \leq 2$. Якщо $d_D(s_D, w) = 1$, то $s_D \to w$, і $s_D \to w \to t_D$ – ланцюг P_3, що починається в s_D. Якщо ж $d_D(s_D, w) = 2$, то будь-який найкоротший ланцюг від s_D до w матиме довжину 2, тобто, в D буде P_3.

■

Для операції мультиплікації орграфів маємо наступний результат.

Теорема 2. *Нехай $D, G \in \mathcal{A}$. Тоді орграф $D \boxdot G$ має короля тоді й лише тоді, коли D має короля і*

1. якщо в D існує $u \in V(D) \backslash \{t_D\}$ із $d_D(s_D, u) = 2$, то $G = P_2$;

2. якщо в D є ланцюг P_3, що починається з s_D, то $N^+(s_G) = V(G) \backslash \{s_G\}$;

3. якщо $D = P_2$, то G має короля.

Доведення. Достатність. Покажемо, що за виконання умов 1–3, $s_{D \boxdot G}$ є королем у $D \boxdot G$. Із третьої умови відразу випливає, що якщо $D = P_2$, то $D \boxdot G = G$ має короля. Припустимо, $D \neq P_2$. Тоді, за лемою 2, у D є ланцюг P_3, що починається з s_D. Розглянемо довільну вершину $x \in V(D \boxdot G)$. За означенням мультиплікації, маємо наступні випадки.

Випадок 1: $x = u'$ для деякого $u \in V(D)$. Тоді, оскільки D має короля, то цим королем є s_D (Лема 1). Отже, в D є шлях із s_D до u довжини ≤ 2. Враховуючи те, що у D є ланцюг P_3, що починається з s_D, за умовою 2 у G є дуга $s_G \to t_G$, а отже, $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = d_D(s_D, u) \leq 2$.

Випадок 2: $x = u'_e$ для деяких $u \in V(G)$ і $e \in A(D)$. Нехай e – це дуга $v \to w$. Тоді за побудовою $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, v') + d_G(s_G, u)$. Оскільки s_D – король у D, то $d_D(s_D, v) \leq 2$.

- Якщо $d_D(s_D, v) = 2$, то за умовою 1, $G = P_2$, тому $D \boxdot G = D$ має короля.
- Якщо $d_D(s_D, v) = 1$, тоді, оскільки s_G є універсальною вершиною в G, $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, v') + d_G(s_G, u) = 1 + 1 = 2$.
- Якщо $d_D(s_D, v) = 0$, то $s_D = v$ і вершина x належить копії G, що розташовується на дузі $s_D \to w$. Оскільки s_G є універсальною вершиною в G, то $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) = 1$.

Бачимо, що в обох випадках відстань від $s_{D \boxdot G}$ до x не перевищує 2. Отже, $s_{D \boxdot G}$ є королем в $D \boxdot G$.

Необхідність. Нехай в $D \boxdot G$ є король.

Покажемо, що в D є король. Точка з'єднання $b\left(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\right)$ двох копій орграфа G, розміщених на дугах e_1 і e_2 орграфа D відповідає вершині $h(e_1)$ в D. Тобто вершини, по яких "склеюються" копії G в $D \boxdot G$, відповідають нетривіальним вершинам (не стоку й не джерелу) в D. Оскільки в $D \boxdot G$ є король – це джерело $s_{D \boxdot G}$ (див. Лему 1), то $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) \leq 2$, де x – точка з'єднання копій G вигляду $b\left(t_{G(e_i)}, s_{G(e_j)}\right)$. А отже, і в орграфі D справедливо, що $d_D(s_D, y) \leq 2$ для будь-якої вершини $y \in V(D)$.

- Якщо в D є вершина u на відстані 2 від джерела, і яка при цьому не є стоком, то вона є початком якоїсь наступної дуги (з означення стоку) uv. Якщо в G є нетривіальні вершини, то в $G(uv)$ є вершина x така, що $d_{D \boxdot G}(s_{D \boxdot G}, x) > 2$.

Дійсно, $d_{D\boxdot G}(s_{D\boxdot G}, x) = 2$. Ця відстань не може дорівнювати 1, адже в орграфі D вершині $s_{G(uv)}$ відповідає вершина u на відстані 2 від джерела. Таким чином, у G немає нетривіальних вершин. Тобто, $G = P_2$.

- Якщо в D є ланцюг P_3, що починається з джерела, покажемо, що s_G є універсальною вершиною в G. Зафіксуємо такий P_3 і позначимо його дуги за e_1, e_2. Припустимо, що в G є вершина y, у яку не йде дуга з s_G. Тоді $d_G(s_G, y) \geq 2$. Розглянемо відповідний їй y' в копії $G(e_2)$:

$$d_{D\boxdot G}(s_{D\boxdot G}, y') = d_{D\boxdot G}\left(s_{D\boxdot G}, b\big(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\big)\right) + d_{D\boxdot G}\big(b\big(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\big), y'\big) =$$

$$= d_{D\boxdot G}\left(s_{D\boxdot G}, b\big(t_{G(e_1)}, s_{G(e_1)}\big)\right) + d_G(s_G, y) \geq 3.$$

Суперечність. Король не може бути так далеко. Тому всі нетривіальні вершини з’єднані з джерелом. А отже, s_G – універсальна вершина в G.

Зрештою, якщо $D = P_2$, то $G = D \boxdot G$ має короля.

■

6. Мережеві потоки

Розглянемо мережу труб, де клапани пропускають потоки лише в одному напрямку. Кожна труба має пропускну здатність на одиницю часу. Ми моделюємо це за допомогою вершин для кожного з’єднання та зваженої дуги для кожної труби. Ми також припускаємо, що потік не може затримуватися й накопичуватися у вершині. Маючи джерело s та стік t у мережі, питання пошуку допустимого та максимального потоку виникає в багатьох контекстах.

Мережа може представляти дороги з інтенсивністю руху, або зв’язки в комп’ютерній мережі з можливостями передачі даних, або струми в електричній мережі. Також знаходяться застосування в промислових умовах і комбінаторних теоремах мінімального та максимального значення. Моделювання транспортних мереж орграфами та перші задачі вперше зустрічаються 1955 року в секретному науковому документі (Harris & Ross, 1956). Пізніше, уже в 1962 році, було сформовано теорію і написано класичну книгу про мережеві потоки Л. Фордом і Д. Фалкерсоном (Ford & Fulkerson, 1962).

Означення 3. *Мережею називається орієнтований граф із виділеними єдиними джерелом s та стоком t, кожна дуга якого має невід’ємну вагу, що називається ємністю або пропускною здатністю і позначається $c(e)$.*

Означення 4. *Потоком на мережі називається функція $f(e)$, яка ставить у відповідність кожній дузі невід’ємне число (тобто це кількість “речовини”, що “тече” по дузі). Позначатимемо (D, f) – мережа з потоком.*

Для кожної вершини v орграфа мережі позначимо $f^+(v)$ – загальна сума вихідного потоку, та $f^-(v)$ – сума потоків на дугах, що входять у v.

Потік є *допустимим*, якщо він задовольняє дві умови:

1. $0 \leq f(e) \leq c(e)$ для всіх дуг e – закон обмеження ємності;

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

2. $f^+(v) = f^-(v)$ для всіх вершин, окрім джерела і стоку – закон збереження потоку. Бачимо, що мережі моделюються саме орграфами з досліджуваної множини $\mathcal{A}$. Тому в нас виникло запитання: що можна сказати про потоки на конкатенаціях чи мультиплікаціях мереж?

Введемо ще означення для того, щоб можна було порівнювати потоки.

Означення 5. *Значенням допустимого потоку f називається число $val(f) = f^+(s)$ або, що те саме, $f^-(t)$. Потік називається максимальним, якщо його значення є найбільшим із-поміж усіх допустимих.*

Введемо позначення $f \boxplus g$ – потік на конкатенації мереж (D, f) і (G, g). Він задається так, що $f \boxplus g = f$ на дугах копії D і $f \boxplus g = g$ на дугах копії G.

Для конкатенації очевидним є наступний результат.

Твердження 4. *Нехай на мережах D і G потоки f і g допустимі. Тоді на $D \boxplus G$ потік $f \boxplus g$ буде допустимий тоді й лише тоді, коли $val(f) = val(g)$.*

Доведення. Справді, для конкатенації мереж із допустимими потоками необхідно і достатньо виконання умови збереження потоку.

■

Якщо ж ми маємо дві мережі з різними значеннями потоків, то можна з'єднати їх конкатенацією як орграфи, але допустимий потік буде обмежуватися меншим із них.

Наслідок 2. *Нехай на мережах D і G потоки f і g допустимі. Тоді на $D \boxplus G$ існує допустимий потік зі значенням $\min\big(val(f), val(g)\big)$.*

Зауважимо, що це можливо, оскільки, маючи допустимий потік, завжди можна знайти менший за значенням допустимий потік. Доведення цього факту ми наводити не будемо, воно спирається на теорему про мінімальний розріз Форда–Фалкерсона, (Ford & Fulkerson, 1962, Theorem 5.1).

Для мультиплікації ситуація цікавіша. Треба формально означити, як ми множимо мережі. У загальному випадку, оскільки наші орграфи мають рівно одне джерело і рівно один стік, і ми, відповідно, можемо заміняти дуги одного орграфа на копії іншого орграфа, то аналогічним чином можна "насаджувати" на один орграф цілу транспортну мережу з допустимим потоком. Тому постає питання, як, маючи потоки на D і G, задати потік на $D \boxdot G$. Розглянемо конструкцію, за допомогою якої можна ввести допустимий потік на мультиплікації двох мереж із допустимими потоками.

Означення 6. *Нехай (D, f) і (G, g) – мережі з заданими потоками, c_D і c_G – функції пропускної здатності відповідно. Мультиплікацією цих двох мереж буде орграф $D \boxdot G$, на якому потік визначений таким чином: якщо на дузі $e \in A(D)$ потік f набуває значення $f(e)$, то на копії $G(e)$ орграфа G всі значення потоків на дугах будуть множитися на $f(e)$.*

Позначати цей потік будемо $f \boxdot g$. Пропускна здатність для кожної дуги отриманої мережі буде обчислюватися за формулою

$$c_{D \boxdot G}(e) = c_D(e') \cdot c_D(e''),$$

де e' – відповідна дуга в мережі D, а e'' – дуга в мережі G, копією якої є e.

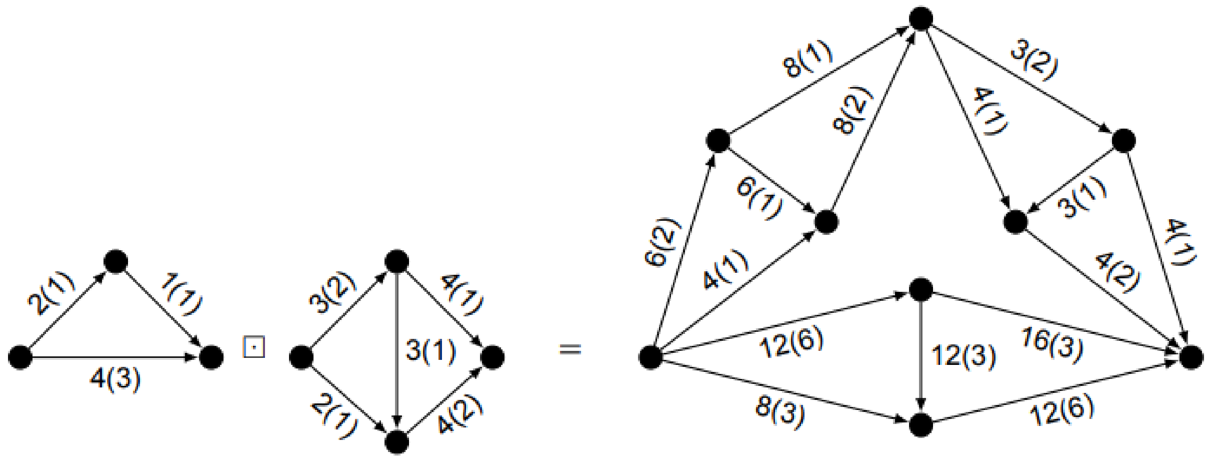

Рис. 10. Результат мультиплікації $D \boxdot G$

Приклад 6. *Проілюструємо на прикладі, як відбувається мультиплікація мереж (рис. 10). Графічно прийнято зображувати транспортні мережі як орграфи, дуги яких помічені* $c(f)$, *де* $c = c(e)$, $f\ = f(e)$.

Маючи таке означення мультиплікації, отримуємо наступний результат.

Твердження 5. *Для мультиплікації* $D \boxdot G$ *двох мереж потік* $f \boxdot g$ *буде допустимим тоді лише тоді, коли допустимими є і* f, *і* g.

7. Висновки

У роботі проведено ґрунтовне дослідження двох бінарних операцій на множині $\mathcal{A}$ орієнтованих графів із рівно одним джерелом і рівно одним стоком. Операції конкатенації та мультиплікації (Означення 1 та 2) є узагальненням операцій додавання і множення натуральних чисел. Отримана структура $(\mathcal{A}, \boxplus, \boxdot)$ має безліч алгебраїчних властивостей. Окрім опису алгебраїчної структури, отримано описи орграфів, для яких конкатенація або мультиплікація матиме короля (Теореми 1 та 2). Орієнтовані графи із розглядуваного класу $\mathcal{A}$ слугують моделями транспортних мереж. Тому введено операції конкатенації та мультиплікації мереж із заданими потоками та надано умови для допустимості потоків на отриманих мережах.

Введені в роботі бінарні операції на орграфах відкривають нові ідеї для подальших досліджень. Дистрибутивність конкатенації відносно мультиплікації справа, при недистрибутивності зліва, заслуговує на детальніший розгляд, як і підклас орієнтованих ланцюгів. Оскільки для ланцюгів справедлива комутативність розглядуваних операцій, то для них справедлива і дистрибутивність мультиплікації відносно конкатенації зліва. Цікавою темою для подальшого дослідження є опис трійок орграфів із $\mathcal{A}$, для яких виконується дистрибутивність зліва. Також варто дослідити потоки на турнірах та роль ациклічності орграфів у контексті застосування до транспортних мереж.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Список використаних джерел

Bondy A., Murty U. S. R. (2009). Graph Theory. Springer London. 655 p.

Büsing, C., Koster, A, M. C. A., Schmitz, S. (2022). Robust minimum cost flow problem under consistent flow constraints. Ann. Oper. Res., 312(2), 691–722.

Euler L. (1736). Solutio problematis ad geometriarn situs pertinentis. Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 8, 128–140.

Ford, L. R., Jr., Fulkerson, D. R. (1962). Flows in networks. Princeton University Press, Princeton, NJ, xii+194 p.

Harary F. (1969). Graph Theory. Addison–Wesley Publishing, 274 p.

Harary F., Norman R. Z., Cartwright D. (1965). Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs. Wiley, 415 p.

Harris, T. E., Ross, F. S. (1956). "Fundamentals of a Method for Evaluating Rail Net Capacities" (U) The RAND Corporation, Research Memorandum RM-1573, October 24, (Secret).

Landau, H. G. (1953). On dominance relations and the structure of animal societies. III. The condition for a score structure. Bull. Math. Biophys. 15, 143–148.

Maurer S. B. (1980). The King Chicken Theorems, Mathematics Magazine, 53(2), 67–80.

Valdes, J., Tarjan, R. E., Lawler, E. L. (1982). The recognition of series parallel digraphs. SIAM J. Comput., 11(2), 298–313.

West D. B. (2002). Introduction to Graph Theory. Pearson Education, 589 p.

Отримано редакцією журналу: 26.02.2025
Прорецензовано: 28.03.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Kateryna ANTOSHYNA, PhD student
ORCID ID: 0009-0005-9221-1351
e-mail: kantoshyna@imath.kiev.ua
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv School of Economics, Kyiv, Ukraine

Sofiia KOVALEVSKA, 10-th grade student
e-mail: sofia.s.kovalevska@gmail.com
Kryvyi Rih Gymnasium №95, Kryvyi Rih, Ukraine

CONCATENATION AND MULTIPLICATION OF DIRECTED GRAPHS OF A SPECIAL CLASS

Abstract. *On the set of oriented graphs with exactly one sink and exactly one source, two binary operations are considered. Concatenation identifies the sink of the first digraph with the source of the second, while multiplication replaces all arcs of the first digraph with the second digraph, identifying the source with the start of an arc and the sink with the end. The set of studied graphs is closed under these two operations, and the collection of oriented paths with concatenation and multiplication operations forms a semiring isomorphic to the semiring of natural numbers. The paper analyzes previous works in the field of oriented graphs, particularly results related to the applied use of the studied class of graphs as models of transport networks. .The obtained theoretical results on the properties of the new operations and the descriptions of the kings of the resulting digraphs provide a foundation for further research, the development of generalizations, and the modeling of more complex systems for applied problems.*

Keywords: *directed graphs; binary operations; kings; transport networks; network flows.*