

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА  
ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему:

**Деформації антикомутаційних співвідношень**

**за спеціальністю 113 Прикладна математика**

студента 4-го курсу

Шишацького Андрія Вікторовича

Науковий керівник:

доцент, доктор фізико-математичних наук

Проскурін Д.П.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № ..... від ..... 2020 р.

Завідувач кафедри ДО

проф. Іксанов О.М.

**Київ - 2020**

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1</b> <b>Поняття векторного простору та алгебр. Основні властивості.</b>	<b>5</b>
1.1    Означення векторного простору та його властивості . . . . .	5
1.2    Лінійно незалежні вектори, множини . . . . .	6
1.3    Базис. Вимірність просторів за базисом . . . . .	7
1.4    Відображення в векторних просторах. Лінійні оператори . . . . .	8
1.5    Алгебра, її основні властивості . . . . .	9
1.6    Центр алгебри. Ідеал алгебри. . . . .	10
1.7    Відображення в алгебрах. . . . .	12
<b>2</b> <b><math>C^*</math>-алгебри</b>	<b>13</b>
2.1 $C^*$ -алгебра. Основні властивості . . . . .	13
2.2    Спектр елемента $C^*$ -алгебри . . . . .	14
2.3    Скінченновимірні $C^*$ -алгебри . . . . .	15
2.4    Зображення груп . . . . .	18
<b>3</b> <b>Дослідницька частина</b>	<b>19</b>
3.1    Універсальні трійки операторів, що задовольняють умовам кому- тації, заданим графом . . . . .	19
3.2 $C^*$ алгебри, що відповідають графу без ребер . . . . .	19
3.3 $C^*$ алгебри, що відповідають графу з одним ребром . . . . .	21
3.4 $C^*$ алгебри, що відповідають графу з двома ребрами . . . . .	24
3.5 $C^*$ алгебри, що відповідають повному графу . . . . .	27

Висновки	30
Список використаної літератури	31

# Вступ

Незважаючи на те, що на перший погляд теорія зображень є може здаватися доволі віддаленою від реальності, без значного практичного застосування, переоцінити її вплив на науку в цілому дуже складно. Теорія зображень досліджує алгебраїчні структури і за допомогою розкладу їх абстрактних елементів як лінійних перетворень векторних просторів робить їх менш абстрактними, зрозумілишими для дослідження шляхом звичних нам матриць, алгебр та операцій з ними. Тобто, застосування теорії зображень дозволяє звести проблеми в абстрактній алгебрі до більш зрозумілих проблем алгебри лінійної, які зазвичай розв'язати легше за рахунок звичних операцій.

В особливості, теорія  $*$ -зображень на скінченновимірних алгебрах є дуже важливою, адже застосовна в вивченні підпросторів Гільбертового простору, між якими задано кути. Крім того вона надзвичайно важлива в зображеннях графів, сімействах операторів, що задані лінійними співвідношеннями, в різних моделях квантової фізики, некомутативних ймовірнісних просторах, математичній фізиці, тощо.

Метою роботи є дослідження трійок самоспряжених операторів, що задовольняють комутаційним співвідношенням, заданими за допомогою графу на трьох вершинах

Робота складається з 3 розділів: В першому розділі коротко описуються основні поняття векторного простору та операції на таких просторах, а також поняття алгебри та основні властивості алгебр та відображень на них, які є необхідними для розуміння подальших викладок, в тому числі практичної ча-

стини роботи.

В другому розділі детально розглядаються  $C^*$  алгебри, в головному скінченновимірні  $C^*$  алгебри, які будуть досліджуватися в практичній частині та наведена основна інформація про зображення груп, та наведена Лема Шура, що є фундаментальною для опису незвідних зображень.

В третьому розділі містяться основні практичні результати, а саме: Теореми 3.2.1, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.2, 3.4.1, 3.4.2, 3.5.1, 3.5.2, що містять опис незвідних зображень та  $C^*$  алгебр, які задані трійками самоспряжених векторів, що пов'язані певними комутаційними співвідношеннями.

# 1 Поняття векторного простору та алгебр.

## Основні властивості.

### 1.1 Означення векторного простору та його властивості

**Означення 1.1.1** Векторним(лінійним) простором називається така непуста множина  $V$ , в якій визначені операції додавання і множення на елементи поля комплексних чисел.

Елементи такого поля  $V$  називаються векторами (взагалі, векторні простори можуть визначатися над довільною областю скалярів, в наступному будемо говорити про область комплексних чисел, як найбільш часто уживану).

$$+ : V * V \rightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{C} * V \rightarrow V$$

При цьому мають місце наступні аксіоми: для довільних  $x, y, z \in V$

$$x + y = y + x$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

Існує елемент  $0 \in V$ (що називається нулем простору  $V$ )

$$x + 0 = x$$

Для будь-якого елемента  $x \in V$  існує  $-x \in V$  (називається протилежним елементу  $x$ ) що виконується рівність :

$$x + (-x) = 0$$

Також виконуються наступні властивості для множення на скаляр для довільних  $x \in V$ , та  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$" * " : (\lambda, x) \rightarrow \lambda * x$$

$$\alpha * (\beta * x) = (\alpha * \beta) * x$$

та мають місце наступні два закони дистрибутивності:

$$(\alpha + \beta) * x = \alpha * x + \beta * x$$

$$\alpha * (x + y) = \alpha * x + \alpha * y$$

Зазначимо, що у довільному векторному просторі не визначені операції множення на скаляр чи вектор, так само, як і не визначена метрика та норма. Попри це вони можуть визначатися як додаткові структури.

**Означення 1.1.2** Множину  $M \subseteq V$  називають підпростором векторного простору  $V$ , якщо  $M$  є векторним простором відносно визначених в  $V$  операцій додавання та множення.

Одними з тривіальних прикладів підпростору для довільного векторного простору  $V$  можна назвати нульовий підпростір  $\{0\}$ , або весь простір  $V$ .

**Означення 1.1.3** Фактор-простором векторного простору  $V$  по модулю  $M$  називається такий векторний простір  $V/M$ , що отримується "стисненням" в нуль простору  $M$ , де  $M$  – підпростір векторного простору  $V$ .

## 1.2 Лінійно незалежні вектори, множини

**Означення 1.2.1** Лінійно незалежними називаються вектори  $x_1, \dots, x_m \in V$ , якщо довільна нетривіальна лінійна комбінація цих векторів не є рівною нулеві. Лінійно залежними називаються вектори за умови існування нетривіальної лінійної комбінації, яка є рівною нулеві.

**Означення 1.2.2** Лінійно незалежною множиною  $M \subset V$  називається, якщо довільна нетривіальна лінійна комбінація скінченного набору попарно різних векторів  $x_1, \dots, x_m \in M$  відмінна від нуля. Якщо ж існує така нетривіальна лінійна комбінація попарно різних векторів, рівна нулю, тоді множина  $M$  називається лінійно залежною.

**Означення 1.2.3** Візьмемо  $M \subset V$ . Лінійною оболонкою множини  $M$  назвемо векторний простір

$$\text{Lin}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : x_k \in M, \lambda_k \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N} \right\} = \mathbb{C}\langle M \rangle$$

### 1.3 Базис. Вимірність просторів за базисом

**Означення 1.3.1** Множина  $B \subset V$  називається базисом простору  $V$ , якщо ця множина є лінійно незалежною і лінійна оболонка  $\text{Lin}(B) = V$ .

Система лінійно незалежних векторів  $\{e_1, \dots, e_n\} \subset V$  називається базисом скінченновимірного векторного простору  $V$ , лише в тому випадку, коли довільний вектор  $x \in V$  можна розкласти в наступну суму

$$x = \psi_1 e_1 + \dots + \psi_n e_n = \sum_{k=1}^n \psi_k e_k$$

де  $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathbb{C}$ , при чому всі коефіцієнти  $\psi_k$  визначаються однозначно для базиса  $B = e_1, \dots, e_n$ . Крім того всі базиси одного скінченновимірного векторного простору  $V$  складаються з однакового числа елементів.

**Означення 1.3.2** Векторний простір називається скінченновимірним, якщо він містить базис, що складається зі скінченної кількості елементів. Інакше простір називається нескінченновимірним. Якщо не озвучено протилежне, в подальшому розглядаються скінченновимірні векторні простори.

**Означення 1.3.3** Розмірністю скінченновимірному векторного простору  $V$  будемо називати число елементів базису цього простору і позначати  $\dim V$   $n$ -вимірним називатимемо такий векторний простір  $V$ , для якого розмірність  $\dim V = n$ .

## 1.4 Відображення в векторних просторах. Лінійні оператори

**Означення 1.4.1** Ізоморфними над полем комплексних чисел назвемо два простори  $(V, +, *)$   $(W, \oplus, \times)$  якщо існує взаємно однозначне відображення  $\psi : V \rightarrow W$ , для якого виконуються:

$$\psi(x + y) = \psi(x) \oplus \psi(y),$$

$$\psi(\alpha * x) = \alpha \times \psi(x),$$

для довільних  $x, y \in V$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$

**Означення 1.4.2** Векторний простір  $V^*$  називаємо спряженим до векторного простору  $V$ , якщо

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad f, g \in V^*, x \in V$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \alpha \in \mathbb{C} f \in V^*, x \in V$$

Також, в подальшому нам необхідне буде поняття оператора в скінченновимірному векторному просторі, як одного з основних інструментів для роботи з векторними просторами, а отже й алгебрами.

**Означення 1.4.3** Відображення множини  $A$

$$A : V \rightarrow V$$

називається лінійним оператором, якщо:

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay,$$

для довільних  $x, y \in V$ , та  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Для наглядності нижче наведемо найпростіші приклади лінійних операторів. Тривіальні:

- одиничний оператор:  $Ix = x \quad \forall x \in V$ ;
- нульовий оператор  $0x = 0 \quad \forall x \in V$ ;

$$Ax = f(x)x_0 \quad x \in V, x_0 \in V, f \in V^*,$$

де  $x_0 = \text{const}$  та  $f = \text{const}$ .

.

## 1.5 Алгебра, її основні властивості

**Означення 1.5.1** Множина  $A$  називається алгеброю, якщо:

- $A$  – векторний простір над полем  $\mathbb{C}$ ;
- в просторі  $A$  визначений добуток

$$(a, b) \in A \times A \rightarrow ab \in A \tag{1}$$

з наступними властивостями

- $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b), \quad a, b \in A, \alpha \in \mathbb{C}$ ;
- $(ab)c = a(bc), \quad a, b, c \in A$ ;
- $(a + b)c = ac + bc, \quad a, b, c \in A$ ;
- $a(b + c) = ab + ac, \quad a, b, c \in A$ .

Більшість властивостей з розділу 1 зберігається для алгебри, як для звуження поняття векторного простору над полем  $\mathbb{C}$  додатковою вимогою (1).

**Означення 1.5.2** Множина  $B$ , що є підпростором алгебри  $A$  називається її підалгеброю, якщо для неї виконується (1).

Для алгебри зберігається відношення "транзитивності": якщо  $B$  – підалгебра  $A$ ;  $C$  – підалгебра  $B$ , то, як наслідок,  $C$  – підалгебра  $A$ .

Зокрема для алгебри зберігаються наступні властивості:

- розмірністю алгебри  $A$  називається її векторна розмірність і позначається  $\dim A$ ;
- комутативність (алгебра  $A$  комутативна, якщо  $\forall a, b \in A \ ab = ba$  інакше  $A$  – некомутативна алгебра);
- в алгебрах також означена одиниця, як такий елемент  $e$ , що  $\forall a \in A$

$$ae = ea = a$$

і називається алгеброю з одиницею  $e$ , або ж унарною алгеброю.

## 1.6 Центр алгебри. Ідеал алгебри.

**Означення 1.6.1.** Центром алгебри  $A$  називається множина

$$Z(A) = \{a : ab = ba \quad \forall b \in A\}$$

**Означення 1.6.2.**

Підпростір  $L$  простору  $A$  для якого  $a \in L \wedge b \in A \Rightarrow ab \in L$  називається правим ідеалом алгебри  $A$

Підпростір  $L$  простору  $A$  для якого  $a \in L \wedge b \in A \Rightarrow ba \in L$  називається лівим ідеалом алгебри  $A$ .

Якщо  $L$  ідеал алгебри  $A$  одночасно є лівим і правим ідеалом, він називається двостороннім ідеалом алгебри  $A$

З означення зрозуміло, що кожен ідеал є підалгеброю, що не обов'язково означає обернене твердження (взагалі, не кожна підалгебра є ідеалом). В комутативній ( $ab = ba \forall a, b \in A$ ) алгебрі правий і лівий ідеал є рівнозначними, звідки випливає й їх рівність двосторонньому ідеалу.

## 1.7 Відображення в алгебрах.

**Означення 1.7.1** Гомоморфізмом називається таке відображення

$$\psi : A \rightarrow B$$

алгебри  $A$  в алгебру  $B$ , для якого виконуються наступні рівності

$$\psi(a + b) = \psi(a) + \psi(b), \quad a, b \in A;$$

$$\psi(\alpha a) = \alpha \psi(a), \quad a \in A, \quad \alpha \in \mathbb{C};$$

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b), \quad a, b \in A$$

**Означення 1.7.2** Гомоморфізм  $\psi : A \rightarrow B$ , що відображає алгебру  $A$  на всю алгебру  $B$ , називається епіморфізмом.

**Означення 1.7.3** Якщо гомоморфізм  $\psi : A \rightarrow B$  відображає алгебру  $A$  в алгебру  $B$  взаємно однозначно, то він називається мономорфізмом.

**Означення 1.7.4** У випадку, коли виконуються обидві попередні властивості, тобто гомоморфізм відображає алгебру  $A$  на всю алгебру  $B$  взаємно однозначно, гомоморфізм називається ізоморфізмом, а алгебри  $A$  та  $B$  називаються ізоморфними.

**Означення 1.7.5** Ізоморфізм  $\psi : A \rightarrow A$  алгебри  $A$  саму на себе називається автоморфізмом.

## 2 $C^*$ -алгебри

### 2.1 $C^*$ -алгебра. Основні властивості

**Означення 2.1.1**  $C^*$  алгебра це підмножина  $A$  алгебри  $L(H)$  всіх зв'язаних операторів Гільбертового простору  $H$ , яка замкнена відносно наступних алгебраїчних операцій:

- додавання(що є комутативним та асоціативним);
- множення(яке зберігає асоціативність);
- множення на комплексний скаляр;
- інволюція  $a \mapsto a^* (a^*)^* = a \forall a \in A$ .

Обидва типи множення залишаються дистрибутивними щодо додавання.

Властивості інволюції:

- $(ab)^* = b^*a^* \quad \forall a, b \in A$
- $(\lambda a + b)^* = \bar{\lambda}a^* + b^* \quad \forall a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$
- $(\lambda ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad \forall a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}$
- $(\lambda \nu)a = \lambda(\nu a) \quad \forall a \in A, \lambda, \nu \in \mathbb{C}$

Крім того, на  $C^*$ -алгебрі визначена норма(Банахової алгебри) :

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\|$$

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$$

$\forall a, b \in A, \quad \lambda \in \mathbb{C};$

визначена метрика

$$d(a, b) = \|a - b\|,$$

та виконується властивість  $\|a^*a\| = \|a\|^2$ . Відповідно до норми, дуже просто помітити, що алгебра  $A$  має топологічну структуру. Вимога Гільбертового простору для алгебри вказує на можливість порівняння топологічних та алгебраїчних структур. Остання властивість може виглядати дещо незвичною, але вона виступає дуже потужним зв'язком між алгебраїчними та топологічними структурами. Її можна зустріти під назвою  $C^*$ -condition.

Також варто зауважити, що не у всіх алгебрах присутнє множення на одиницю (як було згадано в підрозділі 2.1, алгебри, що задовольняють цій умові називаються унарними).

### Теорема 2.1.2

Якщо елемент  $a$   $C^*$ -алгебри  $A$ , то  $\|a\| = \|a^*\|$ . Доведення: Тза властивістю Банахової алгебри  $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|$  і  $\|a\| \leq \|a^*\|$  замінивши  $a$  на  $a^*$  отримали результат.

Пояснимо певну термінологію для елементів  $C^*$ -алгебри. Для заданого елемента  $a \in A$  елемент  $a^*$  називається спряженим.

**Означення 2.1.3** Нехай  $A$  –  $C^*$ -алгебра.

- елемент  $a$  називається самоспряженим, якщо  $a^* = a, \quad a \in A$ ;
- нормальним називаємо елемент, якщо  $a^*a = aa^*, \quad a \in A$ ;

## 2.2 Спектр елемента $C^*$ -алгебри

### Лема 2.2.1

Якщо  $a$  елемент унітарної Банахової алгебри  $A$  і  $\|a - 1\| < 1$ ,  $a$  зворотний; множина зворотніх елементів з  $A$  відкрита доведення: дослідимо наступну послідовність з  $A$

$$b = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n$$

З нашої гіпотези випливає, що це послідовність часткових сум Коші, внаслідок чого вони сходяться до якогось елемента  $b \in A$ , з чого слідує

$$ab = (1 - (1 - a)) \left( \lim_N \sum_{n=0}^{\infty} (1 - a)^n \right) = \lim_N 1 - (1 - a)^{N+1} = 1$$

Аналогічними кроками можемо отримати  $ba = 1$  звідки означенням випливає зворотність  $a$ . Так як  $a$  зворотне, відображення  $b \rightarrow ab$  гомеоморфізм  $A$ , що зберігає множину зворотніх елементів. Відображення також спрямовує одиницю в  $a$  тож висновок випливає з першої частини формулювання леми.

Тепер ми підійшли до поняття спектру. Коротко позначимо  $C^*$ -алгебру  $C(X)$ , де  $X$  компактний Хаусдорфів простір. Нехай  $f$  елемент цієї алгебри, а  $\lambda \in \mathbb{C}$ , тоді функція  $\lambda - f$  точно зворотна, коли  $\lambda$  за межами  $f$ . Це дає нам поняття межі функції, яке може бути узагальнене.

**Означення 2.2.2** Нехай  $A$  унітарна алгебра з елементом  $a \in A$ . Спектром  $a$  (позначаємо  $\text{spec}(a)$ ) є  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda 1 - a) \text{ не є зворотні}\}$ .

Спектральним радіусом  $a$  позначають  $r(a)$  і називають  $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{spec}(a)\}$ , що, за умови не нульового спектру припускає можливість факту нескінченності спектрального радіусу.

## 2.3 Скінченновимірні $C^*$ -алгебри

### Теорема 2.3.1

Нехай  $A$  унітарна та скінченновимірна  $C^*$ -алгебра. Тоді існують такі  $k, N_1, \dots, N_k \in$

$\mathbb{N}$ , що

$$A \cong \bigoplus_{k=1}^K M_{N_k}(\mathbb{C})$$

при чому  $k$  єдине, послідовність  $N_1, \dots, N_k$  також єдина з точністю до перестановки.

Доведення теореми побудоване на певних нескладних обчисленнях однорангових операторів Гільбертового простору та на існуванні проєкцій скінченновимірних  $C^*$ -алгебр. Загалом такі алгебри не обов'язково мають нетривіальні проєкції. Незважаючи на це, доведення теореми корисне в плані глибшого розуміння структур проєкцій скінченновимірних  $C^*$ -алгебр.

**Означення 2.3.2** Якщо  $H$  Гільбертів простір,  $\xi, \nu \in H$  вектори, означимо  $\xi \otimes \nu^* : H \rightarrow H$  як

$$\xi \otimes \nu^*(\zeta) = \langle \zeta, \nu \rangle \xi, \quad \xi, \zeta \in H.$$

### Лема 2.3.3

Нехай вектори  $\xi, \nu, \zeta, \omega \in H$  – Гільбертовому просторі і  $a, b \in B(H)$  тоді

- $\xi \otimes \nu^*$  зв'язний лінійний оператор над  $H$  і  $\|\xi \otimes \nu^*\| = \|\xi\| \|\nu\|$ ;
- $(\xi \otimes \nu^*)H = \text{span}\{\xi\}$  якщо  $\nu \neq 0$ ;
- $(\xi \otimes \nu^*)^* = \nu \otimes \xi^*$ ;
- $(\xi \otimes \nu^*)(\zeta \otimes \omega^*) = \langle \zeta, \nu \rangle \xi \otimes \omega^*$ ;
- $a(\xi \otimes \nu^*) = (a\xi) \otimes \nu^*$ ;
- $(\xi \otimes \nu^*)a = \xi \otimes (a^*\nu)^*$ .

### Лема 2.3.4

Нехай  $A$  унітарна скінченновимірна  $C^*$ -алгебра. Тоді

- кожен нормальний елемент з  $A$  має скінченний спектр;
- кожен нормальний елемент з  $A$  є лінійною комбінацією розбиття.

### Лема 2.3.5

Нехай  $A$   $C^*$ -алгебра. Тоді відношення визначене на проєкціях  $p \geq q$  якщо  $pq = q$  (а тоді після взяття спряження  $qp = q$ ) частково впорядковане.

### Лема 2.3.6

Нехай  $A$   $C^*$ -алгебра.

- для проєкцій  $p, q \in A$ ,  $p \geq q$  тоді й тільки тоді, коли  $pAp \subset qAq$ , зокрема, якщо  $pAp = qAq$  то  $p = q$ ;
- якщо  $pAp$  має скінченну розмірність більшу, ніж одиниця, тоді існує  $q \neq 0$ , що  $p \geq q$ ;
- якщо  $A$  унітарна та скінченновимірна, вона має найменшу ненульову проєкцію порядку  $\geq$ .

### Лема 2.3.7

Нехай  $p_1, \dots, p_k$  найменші ненульові проєкції в  $A$  з  $p_i A p_j = 0$ ,  $i \neq j$ . Тоді  $p_1, \dots, p_k$  лінійно незалежні. Скінченна множина мінімальних проєкцій, що задовольняє гіпотезі буде називатися незалежним.

Лема 2.3.6 гарантує існування мінімальних незалежних проєкцій в унітарній скінченновимірній  $C^*$ -алгебрі  $A$ , а лема 2.3.7 показує, що незалежна множина не може містити більше, ніж  $\dim(A)$  елементів і ця максимальна множина мінімальних ненульових проєкцій є скінченною.

### Теорема 2.3.8

Нехай  $A$  скінченновимірна  $C^*$ -алгебра і  $p_1, \dots, p_k$  найбільша множина мінімальних ненульових проєкцій в  $A$ , тоді

- для кожного  $1 \leq k \leq K$ ,  $A_{p_k}$  скінченновимірний Гільбертів простір і  $\langle a, b \rangle_{p_k} = b^* a \forall a, b \in A_{p_k}$ ;
- для кожного  $1 \leq k \leq K$ ,  $A_{p_k} A$  унітарна  $C^*$ -підалгебра  $A$ ;
- $\bigoplus_{k=1}^K A_{p_k} A = A$ ;
- для кожного  $1 \leq k \leq K$  визначається відношення  $\pi_k : A \rightarrow B(A_{p_k})$  визначене як  $\pi_k(a)b = ab$ , де  $a \in A$ ,  $b \in A_{p_k}$  тоді  $\pi_k$  це  $*$ -гомоморфізм, обмежений нулем для  $A_{p_l} A$  де  $l \neq k$  та ізоморфізм для  $l = k$ .

### Теорема 2.3.9

Якщо  $N$  натуральне число, тоді центр  $M_N(\mathbb{C})$  тотожний скалярний добуток. Якщо  $N_1, \dots, N_k$  натуральні числа, тоді центр  $\bigoplus_{k=1}^K M_{N_k}(\mathbb{C})$  ізоморфний до  $\mathbb{C}^K$ .

## 2.4 Зображення груп

**Означення 2.4.1** Зображенням групи  $P$  над полем  $z$  називається гомоморфізм  $k$  такий, що  $k : P \rightarrow PL(V)$  де  $PL(V)$  – група автоморфізмів простору  $V$ .

**Означення 2.4.2** Зображення  $k$  називається незвідним за умови ненульового простору  $V$  та існуванні лише двох інваріантних підпросторів простору  $V$  – самого простору  $V$  та нульового підпростору.

### Лема 2.4.3 (Лема Шура)

Нехай дано незвідне зображення  $k : P \rightarrow PL(V)$  і  $m : P \rightarrow PL(W)$  тоді будь-який гомоморфізм є або ізоморфізмом, або нульовий гомоморфізмом. Крім того, якщо  $k$  є скінченновимірним незвідним зображенням та поле  $z$  є алгебраїчно замкненим, тоді кожен ендоморфізм зображення  $p$  буде скалярним.

## 3 Дослідницька частина

### 3.1 Універсальні трійки операторів, що задовольняють умовам комутації, заданим графом

В даному розділі основною задачею буде опис універсальних  $C^*$  алгебр, пов'язаних з наборами операторів, які задовольняють комутаційним співвідношенням, що описуються графами на трьох вершинах, що відповідають трьом операторам  $A_1, A_2, A_3$ , а саме:

- граф без ребер – всі оператори комутують;
- граф з одним ребром – два оператори з трьох антикомутують між собою;
- граф з двома ребрами – два оператори з трьох комутують між собою;
- повний граф – всі оператори антикомутують один з одним.

Конкретно, мета полягає в описі незвідних зображень для кожного з співвідношень із заданими властивостями та опису обгортуючої  $C^*$  алгебри на основі описаних незвідних зображень.

### 3.2 $C^*$ алгебри, що відповідають графу без ребер

#### Теорема 3.2.1

Нехай маємо незвідний набір операторів  $A_1, A_2, A_3$ . Якщо:

- 1) Простір незвідного зображення є одновимірним  $\dim H = 1$ ;
- 2) всі оператори є самоспряженими

$$A_i^* = A_i; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (2)$$

3) квадрат кожного з операторів є одиничною матрицею  $E$

$$A_i^2 = E; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (3)$$

4) Всі оператори комутують між собою (що відповідає графу без ребер (рис. 1)), тобто

$$A_i \cdot A_j = A_j * A_i$$

, де  $i, j \in N; i, j = \overline{1, 3}$ .

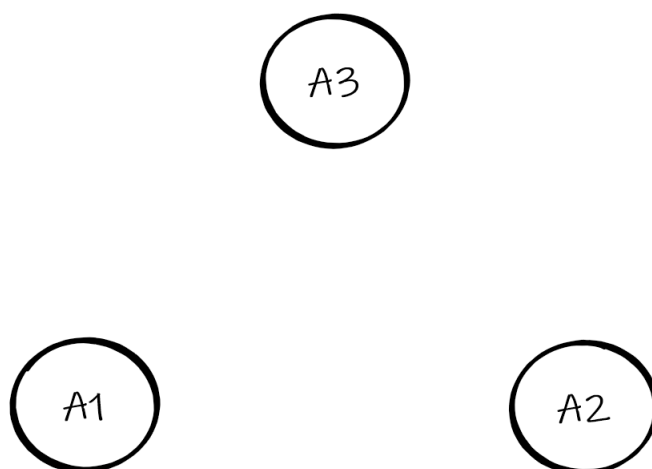


Рис. 1: граф без ребер

5) Відповідна універсальна  $C^*$  алгебра породжується трьома операторнозначними функціями вигляду  $\Omega(A_i) = f(i)$ , де

$$f(1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Тоді образи незвідних операторів можна розглядати як операцію домноження на  $\pm 1$

### Доведення

В даному випадку простір незвідного зображення є одновимірним, відповідно алгебра буде комутативною, з функціями на скінченній множині з 3 точок:

$$C(\{1, 2, 3\} \rightarrow M_3)$$

де  $M_3$  (матриці розмірності  $3 \times 3$ ), образи яких лежать в діагональних матрицях. Функції  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$  діагональні матриці. Тоді, за лемою Шура, в незвідному одновимірному зображенні, образами операторів будуть рівні  $\pm 1$ .

### **Теорема 3.2.2**

Універсальна обгортуюча  $C^*$  алгебра, для набору операторів з теореми 3.2.1 ізоморфна алгебрі матриць розмірності  $2 \times 2$  над полем комплексних чисел  $M_2(C)$ .

## **3.3 $C^*$ алгебри, що відповідають графу з одним ребром**

### **Теорема 3.3.1**

Нехай маємо незвідний набір операторів  $A_1, A_2, A_3$ . Якщо:

- 1) Простір незвідного зображення є одновимірним  $\dim H = 1$ ;

2) всі оператори є самоспряженими

$$A_i^* = A_i; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (4)$$

3) квадрат кожного з операторів є одиничною матрицею  $E$

$$A_i^2 = E; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (5)$$

, де  $E$  – одинична матриця.

4) Два оператори  $A_1$  і  $A_2$  не комутують між собою (що відповідає графу з одним ребром (рис. 2)), тобто отримаємо наступні умови

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_2 &= -A_2 \cdot A_1 \\ A_1 \cdot A_3 &= A_3 \cdot A_1 \\ A_2 \cdot A_3 &= A_3 \cdot A_2 \end{aligned} \quad (6)$$

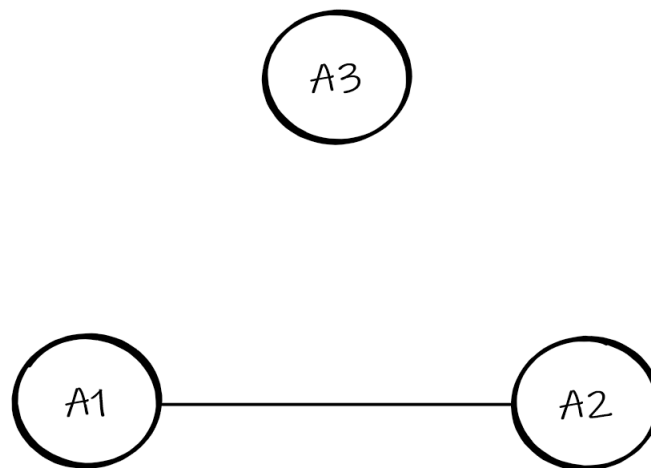


Рис. 2: граф з 1 ребром

Тоді оператори  $A_i$  мають наступний вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Доведення

Оператор  $A_3$  є комутативним з операторами  $A_1, A_2$  тому, аналогічно міркувань в теоремі 3.2.1

$$A_3 = \lambda \cdot E, \quad A_3^2 = E \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow A_3 = \pm 1 \quad (7)$$

Розглянемо тепер оператори  $A_1$  та  $A_2$ . З (5) можна сказати, що спектр операторів  $\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \{1; -1\}$  звідси випливає, що кожне число в спектрі для таких операторів є власним числом. Покладемо вектори  $k_1$  та  $k_2$  так, що

$$A_1 \cdot k_1 = 1 \cdot k_1$$

$$k_2 = A_2 \cdot k_1$$

Знайдемо  $A_1 \cdot k_2 = A_1 \cdot A_2 \cdot k_1 = -A_2 \cdot A_1 \cdot k_1 = -A_2 \cdot k_1 = -k_2$ .

Оператори  $A_1$  та  $A_2$  є унітарними ( $A_i^{-1} = A_i = A_i^*$ ,  $i \in 1, 2$ ), з чого випливає, що  $\|k_1\| = \|k_2\| = 1$ , а їх скалярний добуток  $(k_1, k_2) = 0$  як власні вектори самоспряжених операторів, які відповідають різним власним числам. Розглянемо простір  $H$ , породжений векторами  $k_1$  та  $k_2$

$$\begin{aligned} A_1 \cdot k_1 &= 1 \cdot k_1 & A_1 \cdot k_2 &= -1 \cdot k_2 \\ A_2 \cdot k_1 &= k_2 & A_2 \cdot k_2 &= A_2^2 \cdot k_1 = k_1 \end{aligned} \quad (8)$$

В ортонормованому базисі  $k_1$  та  $k_2$  матриці  $A_i$  мають наступний вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Теорема 3.3.2

Універсальна обгортуюча  $C^*$  алгебра, для набору операторів з теореми 3.3.1 ізоморфна алгебрі матриць розмірності  $2 \times 2$  над полем комплексних чисел  $M_2(C)$ .

## 3.4 $C^*$ алгебри, що відповідають графу з двома ребрами

### Теорема 3.4.1

Нехай маємо незвідний набір операторів  $A_1, A_2, A_3$ . Якщо:

- 1) Простір незвідного зображення є одновимірним  $\dim H = 1$ ;
- 2) всі оператори є самоспряженими

$$A_i^* = A_i; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (9)$$

- 3) квадрат кожного з операторів є одиничною матрицею  $E$

$$A_i^2 = E; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (10)$$

, де  $E$  – одинична матриця;

- 4) Лише два оператори  $A_2$  і  $A_3$  комутують між собою (що відповідає графу з двома ребрами (рис. 3)), тобто отримуємо наступні умови:

$$A_1 \cdot A_2 = -A_2 \cdot A_1$$

$$A_1 \cdot A_3 = -A_3 \cdot A_1 \quad (11)$$

$$A_2 \cdot A_3 = A_3 \cdot A_2$$

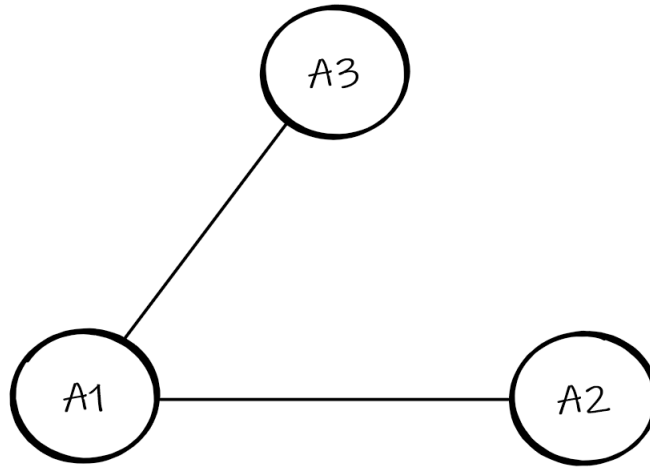


Рис. 3: граф з 2 ребрами

Тоді оператори  $A_i$  мають наступний вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Доведення

Аналогічно міркуванням з доведення теореми 3.3.1 оператори  $A_1$  та  $A_2$  мають наступний вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а оператор  $A_3$  має вигляд

$$A_3 = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

Знайдемо значення  $B_{ij}$  виходячи з умови комутативності  $A_1$  та  $A_3$  і антикомутативності  $A_2$  та  $A_3$

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_3 &= -A_3 \cdot A_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ -B_{21} & -B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12} \\ B_{21} & -B_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} B_{11} = -B_{11} \\ -B_{22} = B_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_{11} = 0 \\ -B_{22} = 0 \end{cases} \quad A_3 \end{aligned}$$

самопспряжена, тому  $B_{21} = B_{12}^*$ , з умови (10)  $B_{12} = B_{21}^* = 1$

$$\begin{aligned} A_3 * A_2 &= -A_2 * A_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} B_{21} & 0 \\ 0 & B_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{12} & 0 \\ 0 & B_{21} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Звідки  $B_{12} = B_{21}^*$ , при чому матриця  $A_3$  незвідна і розмірність простору  $\dim H = 1$ , тоді  $A_3 = \pm 1$

$$A_3 = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Теорема 3.4.2

Універсальна обгортуюча  $C^*$  алгебра, для набору операторів, що відповідають умові теореми 3.4.1 ізоморфна алгебрі матриць розмірності  $2 \times 2$  над полем комплексних чисел  $M_2(C)$ .

### 3.5 $C^*$ алгебри, що відповідають повному графу

#### Теорема 3.5.1

Нехай маємо незвідний набір операторів  $A_1, A_2, A_3$  Якщо:

- 1) Простір незвідного зображення є одновимірним  $\dim H = 1$ ;
- 2) всі оператори є самоспряженими

$$A_i^* = A_i; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (12)$$

- 3) квадрат кожного з операторів є одиничною матрицею  $E$

$$A_i^2 = E; \quad i \in N, \quad i = \overline{1, 3} \quad (13)$$

, де  $E$  – одинична матриця;

- 4) Всі оператори антикомутують між собою (що відповідає повному графу з трьома вершинами, (рис.4)), тобто отримаємо наступні умови

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_2 &= -A_2 \cdot A_1 \\ A_1 \cdot A_3 &= -A_3 \cdot A_1 \\ A_2 \cdot A_3 &= -A_3 \cdot A_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Тоді оператори  $A_i$  мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A_3 &= \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

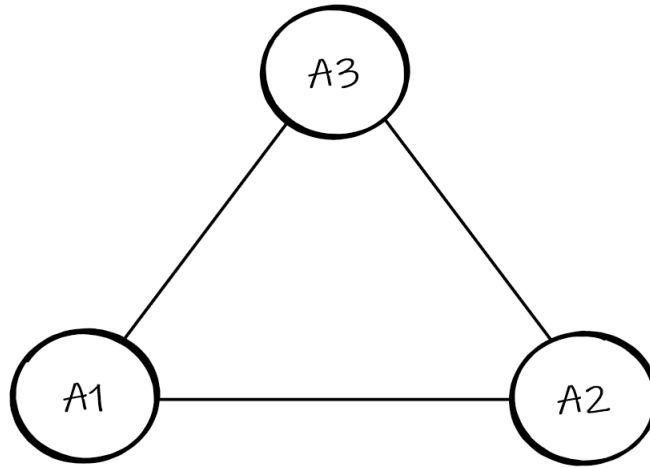


Рис. 4: повний граф з 3 вершинами

### Доведення

З аналогічних міркувань попереднім теоремам оператори  $A_1$  та  $A_2$  мають наступний вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

а оператор  $A_3$  має вигляд

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$$

З умови антикомутативності операторів  $A_1$  та  $A_3$ , причому  $B^*B = BB^* = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} B^* & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Маємо незвідний оператор на просторі  $H_1$  такий, що  $B^*B = BB^* = 1$  і  $B^* = -B$ . Тоді, за лемою Шура  $\dim H_1 = 1$ , де  $B = \lambda$ ,  $B^* = \bar{\lambda}$ , при чому  $\bar{\lambda} = -\lambda$ , де  $\lambda$  – деяке число, що  $\lambda = b \cdot i$ . Тоді  $\bar{b} \cdot b = 1 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$ . Та  $A_3$  має вигляд

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

### Теорема 3.5.2

Універсальна обгортуюча  $C^*$  алгебра, для набору операторів, що відповідають умові теореми 3.5.1 ізоморфна алгебрі матриць розмірності  $2 \times 2$  над полем комплексних чисел  $M_2(C)$ .

# Висновки

Основними результатами роботи є опис незвідних зображень та універсальних обгортуючих  $C^*$ -алгебр для трійок самоспряжених операторів, які пов'язані комутаційними співвідношеннями, заданими за допомогою графа на трьох вершинах. А саме, основними результатами виконаної роботи є Теореми **3.2.1**, **3.2.2**, **3.3.1**, **3.3.2**, **3.4.1**, **3.4.2**, **3.5.1**, **3.5.2** де проведено опис відповідних незвідних зображень та обгортуючих  $C^*$ -алгебр.

## Список використаної літератури

1. Arverson William. An invitation to  $C^*$ -Algebras. - 1976.
2. Putnam Ian F. Lecture Notes on  $C^*$ -Algebras.-2019.
3. Takesaki M. Theory of Operator Algebras 1. -2012.
4. Муратов М.А., Островский В.Л., Самойленко Ю.С. Конечномерный Линейный Анализ I. Линейные операторы в конечномерных векторных пространствах (L). - 2011.
5. N. I. Akhiezer and I. M. Glazman, The theory of linear operators in Hilbert space, Ungar, New York. -1961
6. C. A. Berger, L. A. Coburn, and A. Lebow, Representation and index theory for  $C^*$ -algebras generated by commuting isometries. -1978
7. P. Halmos, A Hilbert space problem book, Van Nostrand, Princeton. -1967
8. Винберг Э.Б. Линейные представления групп. -1985