

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ РАДІОФІЗИКИ, ЕЛЕКТРОНІКИ ТА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

Кафедра медичної радіофізики

До захисту допущено:

«На правах рукопису»

Завідувач кафедри _____ Сергій РАДЧЕНКО

« __ » червня 2023 р.

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА

на тему:

« ПРОЦЕСИ, ЩО СУПРОВОДЖУЮТЬ ІНЖЕКЦІЮ ЕЛЕКТРОННОГО
ПУЧКА У ПЛАЗМУ »

Виконала:

студентка 4-го курсу

денної форми навчання

спеціальності 105 – Прикладна фізика та наноматеріали

ОП «Електроніка та інформаційні технології в медицині»

Мороховська Анастасія Миколаївна _____

Науковий керівник:

докт. фіз.-мат. наук, професор

Анісімов Ігор Олексійович _____

Рецензент:

канд. фіз.-мат. наук,

Юхименко Віталій Васильович _____

Засвідчую, що у цій бакалаврській роботі
немає запозичень з праць інших авторів без
відповідних посилань

Студент _____

Робота допущена до захисту в ЕК рішенням кафедри медичної радіофізики
від «__» червня 2023 р., протокол № __.

Завідувач кафедри медичної радіофізики,

канд. фіз.-мат. наук, доцент

Радченко Сергій Петрович _____

Київ – 2023

РЕФЕРАТ

Випускна кваліфікаційна робота бакалавра: 43 с., 3 рис., 8 джерел.

На основі аналізу теорії Міллера була розроблена покращена модель, що дозволяє більш точно висвітлити процес нейтралізації електронного згустку, що інжектуються у плазму. Ця модель може бути успішно застосована як у лабораторних дослідженнях, так і в іоносферних експериментах. Крім того, були враховані додаткові ефекти, які дозволяють отримати більш точний аналітичний розв'язок для процесів, що відбуваються під час нейтралізації електронного згустку. В результаті була отримана система рівнянь, яка строго описує процеси зарядової та струмової нейтралізації в заданих умовах. Під час її розв'язання було використано модель тонкого плоского згустку. Знайдений просторовий спектр електричного поля за допомогою Фур'є-перетворення, методу лишків та леми Жордана.

Ключові слова: ЕЛЕКТРОННИЙ ПУЧОК, ПЛАЗМА, ЕФЕКТ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО РОЗБУХАННЯ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ЕЛЕКТРОННИЙ ПУЧОК У ПЛАЗМІ, ТЕОРІЯ МІЛЛЕРА ПРО НЕЙТРАЛІЗАЦІЮ ЕЛЕКТРОННОГО ПУЧКА, ЗАРЯДОВА НЕЙТРАЛІЗАЦІЯ, СТРУМОВА НЕЙТРАЛІЗАЦІЯ.

ЗМІСТ

РЕФЕРАТ	2
ЗМІСТ	3
ВСТУП	4
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.	6
1.1 Фізика плазми	6
1.1.1 <i>Означення плазми. Квазінейтральність. Часовий та просторовий масштаби квазінейтральності плазми</i>	6
1.1.2 <i>Теплові флуктуації в плазмі</i>	6
1.1.3 <i>Класифікація видів плазми</i>	7
1.1.4 <i>Гідродинамічний опис плазми</i>	8
1.1.5 <i>Хвилі в плазмі без магнітного поля</i>	8
1.2 Плазмова електроніка	10
1.2.1 <i>Основні поняття, пов'язані з електронним пучком</i>	10
1.2.3 <i>Ефект електростатичного розбухання електронного пучка</i>	11
1.2.4 <i>Електронний пучок у плазмі</i>	13
1.2.3 <i>Зарядова та струмова нейтралізація пучка</i>	14
1.2.5 <i>Теорія Міллера про нейтралізацію електронного пучка у плазмі</i>	16
РОЗДІЛ 2. ОРИГІНАЛЬНА ЧАСТИНА	22
2.1 Отримання базового рівняння	22
2.1.1 <i>Опис моделі та вихідні рівняння</i>	22
2.1.2 <i>Отримання рівняння для поперечної компоненти електричного поля</i>	23
2.1.3 <i>Інтерпретація отриманого хвильового рівняння</i>	24
2.1.4 <i>Спрощення хвильового рівняння</i>	25
2.1.5 <i>Перехід до безрозмірних величин і граничні умови</i>	26
2. Побудова розв'язку	27
2.2.1 <i>Модель поверхневого заряду і просторовий спектр електричного поля</i>	27
2.2.2 <i>Зворотне перетворення Фур'є в поздовжньому напрямку</i>	28
Тепер виконаємо зворотне перетворення:	28
2.2.3 <i>Зворотне перетворення Фур'є по поперечній координаті</i>	32
ВИСНОВКИ	34
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	35

ВСТУП

Робота має за основу розгляд процесів, що відбуваються у плазмі, при проходженні електронного згустку. Двома важливими процесами є нейтралізація електронного згустку та збудження ним кільватерних хвиль. Нейтралізація електронного згустку за зарядом та збудження кільватерних хвиль є двома крайніми випадками однієї задачі, оскільки процес нейтралізації відбувається у плазмі з великою частотою зіткнень, а збудження кільватерних хвиль – у плазмі з малою частотою зіткнень.

Метою дипломної роботи є:

- Розгляд проміжного випадку задачі
- Відстеження процесів, що відбуваються у фоновій плазмі при проходженні в ній електронного згустку
- Розв'язок задачі про нейтралізацію електронного пучка в більш реалістичній геометрії, коли пучок рухається у плазмі, поперечні розміри якої більші ніж розміри пучка

Актуальність дипломної роботи: Традиційні методи прискорення заряджених частинок використовують їх рух у електромагнітних полях у вакуумі. Проте, існують альтернативні методи, які використовують рух заряджених частинок у різних середовищах, включаючи плазму.

У лінійних резонансних прискорювачах заряджені частинки прискорюються шляхом багаторазового застосування невеликої змінної напруги.

Проблема, що виникає в лінійних резонансних прискорювачах:

Коли електричне поле досягає певного критичного значення, відбувається пробій, що призводить до автоелектронної емісії з металевих стінок прискорювача. Це означає, що в цьому типі прискорювачів неможливо використовувати сильні електричні поля.

Отже, для досягнення частинок з високою енергією доводиться збільшувати розміри прискорювача. Однак, будівництво лінійних прискорювачів є вкрай витратним процесом і має фізичні обмеження щодо розмірів.

Циклотронний резонанс широко використовується для досягнення дуже високих енергій заряджених частинок (циклотрони, фазотрони, синхрофазотрони та інші). Найпростішим прискорювачем цього типу є циклотрон, призначений для прискорення іонів та протонів.

Проблема, що виникає в прискорювачах циклотронного типу:

У прискорювачах циклотронного типу, частинка рухається по кривій траєкторії, що призводить до її прискорення та випромінювання. Проте, існує верхня межа щодо досягнутої енергії для всіх циклотронних прискорювачів.

Отже, вивчення процесів, що відбуваються при інжекції електронного пучка в плазму, допоможе вирішити проблему обмеження енергії, яка виникає у лінійних та резонансних прискорювачах. Це дослідження матиме не тільки наукову, але й фінансову цінність.

Постановка задачі: строге отримання системи рівнянь, що описують зарядову та струмову нейтралізацію електронного пучка в моделі, що враховує протікання струму в напрямку, перпендикулярному до напрямку розповсюдження електронного згустку

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ.

1.1 Фізика плазми

1.1.1 Означення плазми. Квазінейтральність. Часовий та просторовий масштаби квазінейтральності плазми

Плазма – це електронейтральна суміш, що складається з електронів, іонів та нейтральних частинок (атомів і молекул), яка існує протягом тривалого періоду, більшого від часу ленгмюрівських коливань, і має розміри, перевищуючі дебаївський радіус.

Часовий масштаб визначається ленгмюрівською частотою, що описується формулою:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}$$

Просторовим масштабом порушення електронейтральності плазми є дебаївський радіус:

$$r_d = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n e^2}}$$

Дебаївський радіус є характерною віддалю, на якій поле малого пробного заряду буде екрануватися.

1.1.2 Теплові флуктуації в плазмі

На просторових масштабах, менших від дебаївського радіусу, або на часових масштабах, менших від періоду ленгмюрівських коливань, електронейтральність плазми може порушуватись оскільки набуває ваги тепловий рух електронів. Порушення електронейтральності є причиною виникнення випадкових електричних полів. Радіус дії випадкового електричного поля визначається дебаївським радіусом.

Максимальне збурення густини електронів, спричинене випадковим електричним полем обчислюється за формулою:

$$\delta n = \frac{\nabla \cdot E}{4\pi e r}$$

1.1.3 Класифікація видів плазми

Ідеальна плазма – модель плазми, в якій ми нехтуємо потенціальною енергією частинок порівняно з їх кінетичною енергією.

У наведеному вище визначенні плазми вона була охарактеризована як газ, що складається із заряджених частинок. Взаємодія між зарядженими частинками підпорядкована закону Кулона. Для кулонівської взаємодії частинок критерій ідеальності записується як

$$e^2/r_{cp} \sim e^2 n^{1/3} \ll kT$$

Цей запис є умовою того, що плазма є ідеальним газом, в якому існує електричне поле та просторовий заряд, но при цьому відсутня взаємодія між двома окремими частинками. Додатковою умовою ідеальності плазми є велика кількість частинок в дебаївській сфері:

Кількість частинок у сфері обчислюється за формулою:

$$N_D = nV_D = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \frac{(kT)^{3/2}}{e^3 n^{1/2}}$$

Отже, ідеальною вважається плазма з великою кінетичною енергією та малою потенціальною енергією частинок, тобто гаряча та розріджена.

Приклади ідеальної плазми: космічна плазма, плазма в магнітних пастках для керованого термоядерного синтезу, плазма газових розрядів низького тиску.

У випадку *неідеальної класичної плазми* взаємодія між окремими зарядженими частинками відіграє помітну роль, тому неідеальна плазма більше схожа на рідину, ніж на газ.

Приклади неідеальної плазми: електронний газ в металах, плазма в установках керованого термоядерного синтезу, квантова вироджена плазма в білих карликах, плазма в магнітосферах пульсарів та в центрі Сонця.

1.1.4 Гідродинамічний опис плазми

Найбільш точним є кінетичний опис плазми. Проте, через його складність, використовують простішу модель гідродинамічного опису плазми. Застосовність цієї моделі можлива у випадку, коли плазма близька до стану термодинамічної рівноваги, що означає, що її функція розподілу близька до Максвеллівської. Близькість розподілу функції до Максвеллівського обумовлений зіткненнями між частинками. Отже, гідродинамічний опис плазми застосовується до плазми, в якій зіткнення між частинками є суттєвим.

Ідеєю гідродинамічного опису є розгляд двокомпонентної плазми, що складається з електронів та іонів як одного суцільного провідного середовища в склад якого входять електронна та іонна рідини. Вони взаємодіють через зіткнення та спільне електричне поле. Це також називають дворідинною гідродинамікою.

Модель дворідинної гідродинаміки

Використання гідродинамічного опису вимагає використання окремих рівнянь для електронної та іонної складової:

$$Mn_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\nabla p_i + en_i \vec{E} + \frac{en_i}{c} [\vec{v}_i \times \vec{B}] - \frac{mn_i}{\tau} (\vec{v}_i - \vec{v}_e),$$
$$mn_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = -\nabla p_e - en_e \vec{E} - \frac{en_e}{c} [\vec{v}_e \times \vec{B}] - \frac{mn_e}{\tau} (\vec{v}_e - \vec{v}_i).$$

В ці рівняння входять: градієнт тиску, сила що діє на частинки в електричному полі, сила Лоренца та сила тертя частинок під час зіткнень.

1.1.5 Хвилі в плазмі без магнітного поля

В плазмі здатні поширюватись хвилі. Це хвилі, що самоузгоджені з колективним рухом заряджених частинок. На відміну від твердого тіла, в плазмі частинки можуть вільно рухатись. Далекодійучі кулонівські сили призводять до пружкості плазми, завдяки чому в ній можуть збуджуватись та розповсюджуватись хвилі.

Основними типами хвиль є: електронні плазмові (ленгмюрівські) хвилі, електромагнітні хвилі та іонно-звукові хвилі. Всі вищезазначені хвилі поширюються в плазмі за відсутності магнітного поля.

Наслідком поширення хвиль є протікання струмів. Це обумовлене тим, що плазма є гарним провідником.

Тоді має місце рівняння густини струму в плазмі:

$$\vec{j}_m = -en\vec{v}_m = -\frac{ie^2n}{m\omega} \left[\vec{E}_m + \frac{\vec{k}(\vec{k}\vec{E}_m)v_{Te}^2}{\omega^2 - k^2v_{Te}^2} \right]$$

В загальному випадку вектори густини струму та напруженості електричного поля не паралельні один одному. Причиною цього є вплив градієнту тиску на рух електронів. Наслідком з формули є зв'язок між густиною струму та напруженістю прикладеного електричного поля. Він буде різним для випадків, коли електричне поле спрямоване вздовж хвильового вектора і коли ці вектори взаємно перпендикулярні.

1.2 Плазмова електроніка

1.2.1 Основні поняття, пов'язані з електронним пучком

Електронний пучок – потік електронів, що рухається в одному напрямку на сусідніх траєкторіях. Електронні пучки бувають нерелятивістськими, релятивістськими та ультрарелятивістськими.

Пучок характеризується довжиною та шириною, при чому довжина набагато більша за ширину. В залежності від форми поперечного перерізу розрізняють: стрічкоподібні, циліндричні та трубчасті електронні пучки. Проте, в процесі транспортування через плазму, форма пучка може змінюватись.

Основними характеристиками електронного пучка є дві величини: струм I та прискорювальна напруга U . Прискорювальна напруга визначає швидкість електронів пучка v , відповідно, їх класифікацію. Добуток цих характеристик дає величину потужності пучка P .

Швидкість електронів пучка

1) Нерелятивістський пучок:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

Електронні пучки вважаються нерелятивістськими, якщо їх прискорювальна напруга $U \leq 10 \text{ кВ}$.

2) Релятивістський пучок:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{eU}{mc^2} + 1 \right)^{-2}}$$

3) Для ультрарелятивістського пучка також справедлива формула:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{eU}{mc^2} + 1 \right)^{-2}}$$

Ультрарелятивістський пучок характеризується значенням прискорювальної напруги $U > 511 \text{ кВ}$.

Потужність електронного пучка

Потужність електронного пучка є добутком струму I , що переноситься, та напруги U , якою було прискорено електрони ($P=IU$).

Первеанс

Важливою характеристикою потоку електронів є первеанс, що є мірою інтенсивності потоку та визначає ступінь розбухання пучка під дією власного об'ємного заряду.

Монохроматичний пучок – електронний пучок, в якому всі частинки мають однакову швидкість. Очевидно, що ця система є ідеалізованою і в реальності ми не спостерігаємо абсолютної моноенергетичності. На практиці відбувається розкид електронів за повздовжніми швидкостями.

Цей розкид має пропорційну залежність до зміни температури:

$$\Delta v = \sqrt{2k_B T / m}$$

Емітанс

Окрім невизначеності за швидкістю, в електронного пучка також наявний певний характерний радіус, через що виникає невизначеність за координатою. Характеристика просторової неідеальності пучка має назву емітанс, що кількісно характеризує об'єм, що займає пучок у фазовому просторі. Емітанс може бути поздовжнім та поперечним.

1.2.3 Ефект електростатичного розбухання електронного пучка

Процес електростатичного розбухання електронного пучка є результатом того, що електронний промінь відчуває розбіжність або дисперсію в результаті електростатичних сил відштовхування між зарядженими

частинками, що входять до складу пучка. Об'ємний заряд радіально обмеженого пучка викликає його розширення (SWELLING). Зокрема, спочатку у циліндричних довгих пучках з'являється власне(здебільшого радіальне) електричне поле. У цьому електричному полі електрони рухаються у радіальному напрямку, та набувають радіальної швидкості, що призводить до збільшення радіуса пучка.

Визначення густини просторового заряду (ρ) в електронному пучку можна здійснити за допомогою формули:

$$\rho = q \cdot n$$

Вищезгадане рівняння містить q як квантор, що позначає заряд кожного присутнього електрона, і n як представлення густини електронів, що міститься в пучку. Підвищена щільність просторового заряду призводить до посилення сил електростатичного відштовхування, тим самим сприяючи прояву ефектів розбухання.

Радіус електронного пучка зростає за параболічним законом при віддаленні від джерела. Приріст радіусу описується формулою:

$$\Delta r = \frac{\pi a e j}{\gamma m v_z} \left(\frac{z}{v_z} \right)^2$$

Показник розбухання (BF) оцінює ступінь розповсюдження електронного пучка і характеризується як пропорція реального розмаху пучка (r) до ідеального розмаху пучка без розбухання (r_0). Його можна розрахувати за допомогою рівняння $BF = r/r_0$. Вищі компоненти проростання демонструють більш помітний рівень розбухання електронного згустку.

Фактори, що впливають на ефект електростатичного розбухання:

- 1) Струм (I). Великі значення струму пучка призводять до збільшення щільності просторового заряду, що призводить до більш обґрунтованої сили електростатичного удару та наступної ймовірності розбухання.

- 2) Енергія пучка (E). Вищі енергії пучків можуть зменшити впливи розбухання, розширюючи енергію електронів і зменшуючи їх вплив на електростатичні сили.
- 3) Розмір апертури пучка. Розмір поперечного перерізу пучка впливає на електростатичне розбухання. Менші поперечні розміри пучка призводять до вищої щільності просторового заряду та більшої сили електростатичного удару, що погіршує вплив розбухання.

Методи боротьби з розбуханням електронного згустку у вакуумі:

Дія кулонівської сили на пучок може бути частково компенсована силою Лоренца. Фактично, для циліндричного променя він створює магнітне поле, спрямоване в азимутальному напрямку, і Сила Лоренца, породжена осьовим рухом заряджених частинок у цьому полі, має радіальний напрямок. Майже повна компенсація цих сил можлива лише для релятивістських електронів, у лінійних прискорювачах. Ще один спосіб боротьби з розширенням пучка — часткова нейтралізація його заряду позитивними іонами. В цьому випадку необхідно, щоб промінь рухався крізь плазму. Нарешті, найчастіше, щоб протидіяти розширенню променя, його поміщають у поздовжнє магнітне поле.

1.2.4 Електронний пучок у плазмі

Під час руху інтенсивного пучка електронів з низькою енергією у газі, спостерігається зниження швидкості та розсіювання частинок. Проте, при використанні пучків з вищою енергією, виникає нагрівання та іонізація газу, що спричиняє утворення плазмового каналу. При дуже високих енергіях, ефективний переріз іонізації електронним ударом значно зменшується, тому пружне розсіювання під малими кутами відіграє основну роль.

Внаслідок взаємодії з нейтральними атомами, траєкторії електронів зміщуються відносно осі пучка. Це призводить до загального гальмування і розширення його радіуса.

Кількість відхилення траєкторій електронів від осі пучка можна виміряти за допомогою середнього квадрату кута відхилення θ на відстані L :

$$\langle \theta^2 \rangle = n_a L \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \theta^2 d\sigma(\theta)$$

де n_a - густина атомів, θ_{max} та θ_{min} - найбільший та найменший кути розсіювання, $d\sigma(\theta)$ - диференціальний переріз кулонівського розсіювання. Фактично, потік частинок на одиницю площі розсіюється на $n_a L$ розсіювальних центрах. Безрозмірна величина $n_a L d\sigma(\theta)$ визначає частку частинок, розсіяних в інтервалі кутів $[\theta, \theta + d\theta]$, тобто ймовірність відхилення електрона на кут θ . Тоді інтеграл визначає квадрат кута розсіювання, усереднений у діапазоні від θ_{min} до θ_{max} .

Диференціальний переріз розсіювання $d\sigma(\theta)$ - це співвідношення між кількістю електронів, які розсіюються в інтервалі кутів $[\theta, \theta + d\theta]$, та густини потоку падаючих частинок (має розмірність площі). По суті, це площа кільця в площині, перпендикулярній початковій швидкості потоку, з центром у розсіювальному центрі, де частинки, які потрапляють у це кільце, розсіюються на кут в інтервалі $[\theta, \theta + d\theta]$. Радіус цього кільця називається прицільним параметром $b(\theta)$, який відповідає розсіюванню під кутом θ .

1.2.3 Зарядова та струмова нейтралізація пучка

Транспортування, тобто рух пучків у плазмі призводить до виникнення нестационарних процесів, які залежать від багатьох факторів, зокрема параметрів пучка, провідності плазми та геометрії дрейфового простору.

Одними з таких процесів є струмова та зарядова нейтралізація пучка.

Зарядова та струмова нейтралізація істотно підвищують струм електронного пучка в плазмі в порівнянні з транспортуванням у вакуумі,

шляхом приглушення ефектів, пов'язаних з об'ємним зарядом. Однак, для релятивістських електронних пучків у плазмі без струмової нейтралізації або після її завершення, зростає вагомість власного магнітного поля, що може обмежувати струм пучка.

Внесений електронним пучком заряд у плазму викликає радіальне електричне поле, яке спричиняє виштовхування електронів з обсягу пучка. Ці електрони поглинаються або осідають на стінках, що обмежують плазмовий обсяг (у випадку лабораторної плазми). Для компенсації заряду пучка необхідно, щоб густина плазми була не меншою за густину пучка. Характерний час нейтралізації заряду пучка становить приблизно $14\pi\sigma$, де σ - активна провідність плазми. Зазвичай цей час значно менший за 1 нс.

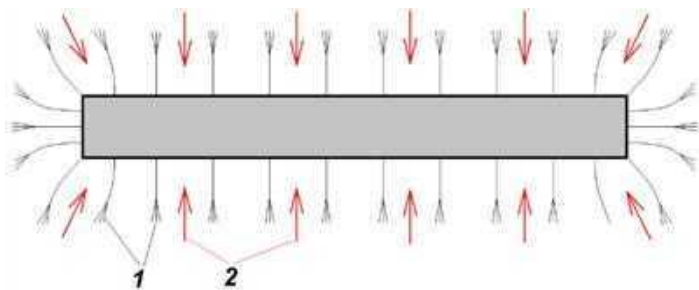


Рис.1 Електричне поле зарядженого згустку 1 та спричинені ним компенсаційні струми 2

Зменшення електричного поля, що виникає внаслідок зарядової нейтралізації електронних пучків у плазмі (повна або часткова), призводить до посилення впливу ефектів, пов'язаних з власним магнітним полем пучків. Відзначимо, що силові лінії цього поля утворюють кільця, які охоплюють пучок. У моделі ідеальної магнітної гідродинаміки плазми такі кільця діють як пружні нитки, стискаючи пучок. По-перше, цей стиск може значно впливати на радіальну стійкість пучка, компенсуючи газокінетичний тиск електронів. По-друге, зменшення зворотного струму, яке призводить до збільшення азимутального магнітного поля, може спричинити скорочення радіуса пучка. По-третє, за певних умов це поле може призвести до повного перетискання пучка і його заперечення власним магнітним полем (ефект запирання пучка).

Щодо магнітного поля, його значення в різних точках має значні відмінності, які найкраще спостерігаються на фронтах електронного пучка. Під час руху фронтів в результаті зміни магнітного поля за законом електромагнітної індукції виникає вихрове електричне поле. У подальшому, воно забезпечує появу зворотного струму у плазмі. Зворотній струм породжується переважно в тій частині, де безпосередньо локалізується пучок і спрямовується на передньому фронті, на протигагу струму пучка, а на задньому фронті – в тому ж напрямку. Зворотній струм, що виникає на передньому фронті та струм пучка мають спільну область протікання та схожі величини.

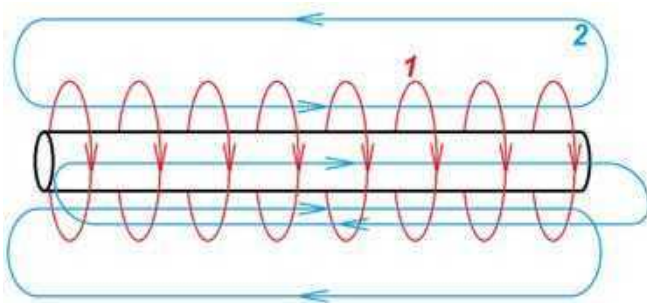


Рис. 2 Магнітне **1** та вихрове

електричне **2** поля, збуджувані в плазмі струмом електронного згустку.

Таким чином можна дати визначення *магнітної нейтралізації* пучка.

Магнітна нейтралізація пучка – це ефект виникнення зворотного струму у плазмі при транспортуванні електронного згустку.

Нейтралізація обумовлена компенсацією магнітного поля пучка за рахунок магнітного поля зворотного струму.

Завдяки нейтралізації електронних пучків під час їхнього руху в плазмі зникають обмеження на величину струму пучка у вакуумі та проблема розбухання електронного пучка.

1.2.5 Теорія Міллера про нейтралізацію електронного пучка у плазмі

Теорія Міллера про нейтралізацію електронного пучка є напівфеноменологічною моделлю, яка використовується для опису

взаємодії електронних пучків з середовищем, зокрема для оцінки втрат енергії та зменшення заряду пучка внаслідок нейтралізації в процесі його розповсюдження.

Розвиток теорії був спонуканий викликами, пов'язаними з розумінням та контролем нейтралізації електронного пучка, зокрема:

1. **Комплексні взаємодії:** Нейтралізація електронного пучка включає в себе складні взаємодії між електронами та нейтралізуючими частинками, такими як атоми, молекули чи плазма. Мотивацією для розробки теорії Міллера було створення комплексної теоретичної рамки, яка здатна описати ці складні взаємодії та врахувати їх вплив на нейтралізацію пучка.
2. **Експериментальні спостереження:** Наявні теоретичні моделі недостатньо пояснювали спостережувані експериментальні результати. Це стимулювало розробку нової теорії, яка б могла більш точно пояснити та узгодити експериментальні дані.
3. **Практичні застосування:** Мотивацією для розробки напівфеноменологічної теорії Міллера була потреба у практичних моделях та інструментах для керування електронними пучками. Розуміння процесів нейтралізації дозволяє покращити якість та ефективність різних технологічних застосувань, забезпечуючи точність та контроль над пучком.
4. **Зв'язок між теорією та експериментами:** Мотивація полягала у створенні теоретичного фундаменту, який би пояснював експериментальні результати та давав засновані на науці рекомендації для подальших досліджень та розвитку методів нейтралізації електронних пучків.

Теорія Міллера дозволяє розраховувати характеристики електронного пучка після взаємодії з середовищем, такі як енергетичні втрати, зменшення заряду, розподіл енергії між електронами пучка та молекулами середовища, швидкість розповсюдження пучка та інші параметри. Однак, важливо враховувати, що це напівфеноменологічна модель, тобто вона має деякі спрощення та припущення, які можуть не враховувати всі деталі фізичних процесів, що відбуваються при нейтралізації електронного пучка.

Теорія Міллера може бути застосована в різних дослідженнях, таких як плазмохімічний осад, літографія, електронне променеве легування та інші процеси, де взаємодія електронних пучків з середовищем є важливим фактором. Вона дозволяє оцінити вплив цих взаємодій на характеристики електронного пучка та оптимізувати умови процесу залежно від вимог конкретного застосування.

Основні припущення теорії Міллера:

1. Всі електрони пучка мають однакову енергію.
2. Взаємодія між електронами пучка та молекулами середовища відбувається за допомогою струмової та зарядової нейтралізації.
3. Струмова нейтралізація полягає в тому, що електрони пучка втрачають енергію, передаючи її молекулам середовища, які внаслідок цього іонізуються та випускають електрони, які приєднуються до пучка.
4. Зарядова нейтралізація полягає в тому, що електрони пучка втрачають свій заряд, взаємодіючи з молекулами середовища, які мають протилежний заряд.
5. Взаємодія електронів пучка з молекулами середовища відбувається за допомогою кулонівських сил взаємодії.
6. Величина втрат енергії та зменшення заряду пучка залежить від розмірів пучка, його енергії, щільності середовища, заряду молекул середовища та інших параметрів.

Математичний опис теорії:

Напівфеноменологічна теорія Міллера про нейтралізацію електронного пучка може бути описана математично наступним чином:

1. Розподіл енергії між електронами пучка та молекулами середовища може бути визначений за допомогою рівняння енергетичного балансу:

$$\frac{dE}{dz} = -\alpha \cdot n \cdot E(z)$$

де E - енергія електронного пучка, z - відстань вздовж напрямку розповсюдження пучка, α - коефіцієнт втрат енергії на одиницю довжини шляху, n - концентрація молекул середовища.

2. Зміна заряду пучка може бути врахована за допомогою рівняння зміни заряду:

$$\frac{dQ}{dz} = -\beta \cdot n \cdot E(z)$$

де Q - заряд електронного пучка, β - коефіцієнт зарядової нейтралізації.

3. Зв'язок між енергією та зарядом електронного пучка може бути виражений рівнянням:

$$E(z) = \frac{Q(z)}{C}$$

де C - ємність середовища, яка враховує вплив заряду пучка на електричне поле.

Проте, теорія Міллера є спрощеною моделлю, і в деяких випадках можуть бути потрібні більш детальні теоретичні моделі або експериментальні дослідження для точнішого опису взаємодії електронних пучків з середовищем.

Недоліки теорії Міллера:

1) Використання закону Ома:

А) Закон Ома описує лінійний зв'язок між електричним струмом, напругою та опором, передбачає лінійність та омічну поведінку плазми. Однак плазма - це високонелінійне та неповне середовище, яке характеризується складними взаємодіями та явищами, такими як міжелектронне зіткнення, взаємодія частинок з хвилями та нестійкість плазми, тож має бути врахована також нелінійність та неповність плазми.

Б) Закон Ома, заснований на моделі дрейф-дифузії, передбачає квазі-нейтральну плазму, в якій електрони та іони рухаються з однаковою швидкістю. Однак у контексті нейтралізації електронного пучка, кінетика електронів може суттєво відрізнитися від поведінки фонові плазми. Припущення закону Ома не враховує взаємодію пучка з плазмою та генерацію вторинного електронного струму, що призводить до неповного представлення динаміки нейтралізації.

В) Закон Ома розглядає лише стаціонарну поведінку електричного поля та ігнорує залежність від часу під час процесу нейтралізації. Під час взаємодії електронного пучка з плазмою, динаміка електричного поля відіграє важливу роль у розповсюдженні пучка, його зв'язку з плазмою та загальної ефективності нейтралізації. Ігнорування тимчасових змін електричного поля обмежує точність прогнозування та не дозволяє точно описати поведінку процесу нейтралізації.

2) Штучна

геометрія:

Задача розв'язується в специфічній геометрії, де система вміщена у металеву трубку, а також використовується модельний профіль густини електронного пучка, що описується функцією Бесселя. Ця модель передбачає, що нейтралізація електронного згустку, який інжектується в систему, відбувається тільки на передньому і задньому

фронтах. Однак цей підхід не відповідає умовам лабораторних досліджень. У реальності поперечні розміри плазмового утворення завжди перевищують поперечні розміри електронного пучка. Тому така модель є штучною та непридатною для лабораторних досліджень.

У іоносферних експериментах, де відсутні металеві стінки, і коли довжина електронного пучка значно перевищує його поперечні розміри (що завжди має місце), основну роль у нейтралізації відіграє напрямок, перпендикулярний до напрямку розповсюдження пучка.

РОЗДІЛ 2. ОРИГІНАЛЬНА ЧАСТИНА

2.1 Отримання базового рівняння

2.1.1 Опис моделі та вихідні рівняння

Розглядається електронний пучок, що інжектуються в однорідну плазму без магнітного поля. Для спрощення розрахунків розглядатимемо двовимірну модель і вважатимемо пучок стрічкоподібним, його довжину (в напрямку його руху) – скінченною, розподіл концентрації електронів у пучку – однорідним (з різкими межами).

Отже, електронний пучок має вигляд плоского шару завтовшки $2a$, довжиною L , в напрямку Y – необмежений і однорідний, так що $\partial/\partial y = 0$. Пучок електронів з концентрацією n_b рухається в напрямку Z зі швидкістю \vec{v}_b . Рух пучка вважаємо заданим. Тоді густина струму пучка може бути записана у вигляді:

$$\vec{j}_b = -e_z n_b v_b J(\vec{r}, t) \quad (1)$$

$$J(\vec{r}, t) = f_1(x) f_2(z, t); \quad (2)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_2(z, t) = \begin{cases} 1, & |z - v_b t| \leq L; \\ 0, & |z - v_b t| > L. \end{cases} \quad (4)$$

Пучок рухається в необмеженій однорідній плазмі, незбурена густина електронів та іонів n_p , температура електронів – T_e , іони вважаємо нерухомими. У плазмі $\mu = 1$, тому можна вважати, що $\vec{H} = \vec{B}$ (в системі одиниць Гаусса)

Перші два рівняння Максвелла для електромагнітних полів мають вигляд:

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} e n_p v_e \vec{r} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_b + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

(враховано, що густина струму в плазмі $\vec{j}_e = -en_e\vec{v}_e$, де n_e та \vec{v}_e – миттєві концентрація та швидкість електронів плазми).

Електрони плазми задовольняють рівнянню руху, записаному на основі 2 закону Ньютона (силою Лоренца нехтуємо через мализну магнітного поля, створюваного пучком):

$$m \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\vec{E} - \frac{1}{n_e} \nabla p - m\nu_e \vec{v}_e. \quad (7)$$

де $p = n_e k_B T_e$ – тиск електронів плазми (k_B – стала Больцмана, T_e – електронна температура), ν – частота зіткнень електронів з іонами, m і e – маса і заряд електрона.

Систему (5)-(7) слід доповнити рівнянням неперервності

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_p \nabla \cdot \vec{v}_e = 0. \quad (8)$$

Система (5)-(8) містить 10 рівнянь (рівняння (5)-(7) – векторні) з 10 невідомими (по 3 компоненти векторів \vec{E} , \vec{B} , \vec{v}_e , а також величина n_e).

2.1.2 Отримання рівняння для поперечної компоненти електричного поля

Рівняння (7)-(8) можна є нелінійними, тому в такому вигляді розв'язати їх аналітично не вдається. Тому для отримання розв'язку їх слід лінеаризувати, вважаючи електромагнітне поле та змінні складові густини і швидкості електронів плазми малими. Далі виключаємо з системи магнітне поле та змінні складові густини і швидкості електронів плазми. В результаті можна отримати неоднорідне хвильове рівняння для електричного поля у формі:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nu_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \omega_p^2 \vec{E} \right] = \frac{4\pi}{c^2} \left[\nu_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{j}_b) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial \vec{j}_b}{\partial t} \right], \quad (9)$$

де $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_p / m$ – електронна ленгмюрівська частота фонової плазми.

Запишемо проєкції рівняння (9) на осі координат, врахувавши, що

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0; \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

Тоді отримана система рівнянь розбивається на дві підсистеми – однорідне рівняння для компоненти E_y (s-поляризовані хвилі) і два неоднорідні рівняння, що описують поляризовані хвилі р-типу, які можуть бути збуджені електронним пучком. Останні можуть бути зведені до одного рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \right] E_x = \\ & = 4\pi \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (10)$$

2.1.3 Інтерпретація отриманого хвильового рівняння

Якщо прибрати електронний пучок (тобто покласти $j_b = 0$), рівняння розпадається на два незалежні рівняння:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] E_x = 0 \quad (11)$$

і

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \right] E_x = 0. \quad (12)$$

Рівняння (11) описує поширення поперечних електромагнітних хвиль у плазмі із зіткненнями. Для них справедливий закон дисперсії

$$\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_z^2) + \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega - i\nu}. \quad (13)$$

Рівняння (12) описує поширення поздовжніх хвиль в плазмі, які можуть бути електронними плазовими хвилями або ленгмюрівськими хвилями, згідно з законом дисперсії

$$\omega(\omega - iv) = v_{Te}^2 (k_x^2 + k_z^2) + \omega_p^2 \quad (14)$$

У холодній плазмі, замість ленгмюрівських хвиль ми спостерігаємо ленгмюрівські коливання.

Отже, в загальному випадку рівняння (12) описує збудження електромагнітних хвиль та ленгмюрівських коливань в плазмі, створене заданим електронним пучком.

2.1.4 Спрощення хвильового рівняння

Перейдемо до моделі холодної плазми ($v_{Te}^2 = 0$). Тоді рівняння суттєво спрощується:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) + \omega_p^2 \right] E_x = 4\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (15)$$

Додатково спростити рівняння можна у випадку, коли

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) E_x \right| \gg \omega_p^2 |E_x|. \quad (16)$$

Тоді після інтегрування отримаємо:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial E_x}{\partial t} = 4\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (17)$$

Додатково припустимо, що

$$\left| \frac{\partial E_x}{\partial t} \right| \ll \nu |E_x|. \quad (18)$$

Тоді рівняння (34) набуває вигляду

$$\left[\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2 \nu} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial E_x}{\partial t} = 4\pi \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (19)$$

Рівняння описує збудження електромагнітних полів заданим струмом електронного пучка, струм якого задається формулами (1)-(3). Цей струм залежить від координати x і комбінації $\zeta = z - v_b t$ (автомодельна змінна).

Оскільки пучок рухається в однорідній плазмі, можна чекати, що збуджені

ним поля також залежатимуть від x, ζ . Тоді в рівнянні (30) можна зменшити кількість змінних, зробивши заміни:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} = -v_b \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (20)$$

Отримаємо після інтегрування:

$$\left[\left(1 - \frac{v_b^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_p^2 v_b}{c^2 v} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_x = \frac{4\pi}{v_b} \frac{\partial j_b}{\partial x}$$

або

$$\left[\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \kappa \right) \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] E_x = \frac{4\pi}{v_b} \frac{\partial j_b}{\partial x}, \quad (21)$$

де введено параметри

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \gamma v_b}{c^2 v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}}. \quad (22)$$

2.1.5 Перехід до безрозмірних величин і граничні умови

Введемо безрозмірні змінні $\xi = \kappa \zeta$, $\chi = \kappa x$:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right] E_x = \frac{4\pi}{\kappa v_b} \frac{\partial j_b}{\partial \chi}, \quad (23)$$

Позначимо

$$j_b(\chi, \xi) = en_b v_b J(\chi, \xi), \quad \frac{\kappa E_x}{4\pi en_b} = \varepsilon,$$

де $J(\chi, \xi)$ та ε - відповідно безрозмірний розподіл струму пучка та безрозмірна поперечна компонента електричного поля. Отримаємо:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right] \varepsilon = \frac{\partial J}{\partial \chi}. \quad (24)$$

Це рівняння нам і потрібно буде далі розв'язувати.

Оскільки модель симетрична щодо площини $x=0$, достатньо знати розв'язок у півплощині $\chi \geq 0$.

Граничні умови до рівняння (41) мають вигляд:

$$\varepsilon(\chi=0)=0; \quad \varepsilon(\chi \rightarrow +\infty)=0; \quad \varepsilon(\xi \rightarrow \pm\infty)=0. \quad (25)$$

2. Побудова розв'язку

2.2.1 Модель поверхневого заряду і просторовий спектр електричного поля

На першому етапі побудови розв'язку замінимо електронний розподіл густини струму (3) розподілом, що відповідає поверхневому заряду:

$$f_1(x) = \delta(x), \quad (26)$$

де $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака. В результаті функція $J(\chi, \xi)$ набуває вигляду:

$$J(\chi, \xi) = \begin{cases} \kappa\delta(\chi), & |\xi| \leq \Lambda; \\ 0, & |\xi| > \Lambda, \end{cases} \quad \Lambda = \kappa\gamma L. \quad (27)$$

Шукатимемо розв'язок рівняння (41) методом інтегралів Фур'є:

$$\varepsilon(\chi, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \varepsilon(k_{\chi}, k_{\xi}) \exp(ik_{\chi}\chi + ik_{\xi}\xi), \quad (28)$$

$$\varepsilon(k_{\chi}, k_{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \varepsilon(\chi, \xi) \exp(-ik_{\chi}\chi - ik_{\xi}\xi). \quad (29)$$

Функцію $J(\chi, \xi)$ також подаємо у вигляді інтегралу Фур'є:

$$J(\chi, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} J(k_{\chi}, k_{\xi}) \exp(ik_{\chi}\chi + ik_{\xi}\xi), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} J(k_{\chi}, k_{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} J(\chi, \xi) \exp(-ik_{\chi}\chi - ik_{\xi}\xi) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \exp(-ik_{\chi}\chi) \kappa\delta(\chi) \int_{-\Lambda}^{\Lambda} dk_{\xi} \exp(-ik_{\xi}\xi) = \\ &= \frac{\kappa}{(2\pi)^2} \frac{\exp(-ik_{\xi}\Lambda) - \exp(ik_{\xi}\Lambda)}{-ik_{\xi}} = \frac{\kappa}{2\pi^2 k_{\xi}} \sin(k_{\xi}\Lambda). \end{aligned} \quad (31)$$

Підставимо представлення (28) та (30). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right] \varepsilon(\chi, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \varepsilon(k_{\chi}, k_{\xi}) \exp(ik_{\chi}\chi + ik_{\xi}\xi) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \exp(ik_{\chi}\chi + ik_{\xi}\xi) \varepsilon(k_{\chi}, k_{\xi}) [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]. \end{aligned} \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} J(\chi, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} (ik_{\chi}) J(k_{\chi}, k_{\xi}) \exp(ik_{\chi}\chi + ik_{\xi}\xi). \quad (33)$$

Прирівнюючи підінтегральні вирази, маємо:

$$\varepsilon(k_{\chi}, k_{\xi}) = \frac{ik_{\chi} J(k_{\chi}, k_{\xi})}{[(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} = - \frac{i\kappa}{2\pi^2} \frac{k_{\chi} \sin(k_{\xi}\Lambda)}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]}$$

2.2.2 Зворотне перетворення Фур'є в поздовжньому напрямку

Тепер виконаємо зворотне перетворення:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\chi, \xi) &= - \frac{i\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \frac{k_{\chi} \sin(k_{\xi}\Lambda)}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \exp(ik_{\chi}\chi + ik_{\xi}\xi) = \\ &= - \frac{i\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} k_{\chi} \exp(ik_{\chi}\chi) \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \frac{\sin(k_{\xi}\Lambda)}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \exp(ik_{\xi}\xi) = \\ &= - \frac{\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} k_{\chi} \sin k_{\chi}\chi \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \frac{\sin(k_{\xi}\Lambda)}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \exp(ik_{\xi}\xi) = - \frac{\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\chi} k_{\chi} \sin k_{\chi}\chi \varepsilon(k_{\chi}, \xi) \end{aligned} \quad (34)$$

Спершу розрахуємо внутрішній інтеграл:

$$\varepsilon(k_{\chi}, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \frac{\sin(k_{\xi}\Lambda)}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \exp(ik_{\xi}\xi). \quad (35)$$

Знайдемо нулі знаменника підінтегрального виразу. Видно, що точка $k_{\xi} = 0$

не є полюсом цього виразу. Два інші корені знаходимо з рівняння

$$\begin{aligned} (k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2 &= 0 \\ k_{\xi}^2 - ik_{\xi} + k_{\chi}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Маємо:

$$k_{\xi 1,2} = \frac{1}{2} \left(i \pm \sqrt{-1 - 4k_{\chi}^2} \right) = \frac{i}{2} \left(1 \pm \sqrt{4k_{\chi}^2 + 1} \right) \equiv iK_{\xi 1,2} \quad (37)$$

Обидва корені уявні, причому $K_{\xi 1} > 0$, $K_{\xi 2} < 0$.

Перетворимо інтеграл:

$$\varepsilon(k_{\chi}, \xi) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} dk_{\xi} \frac{\exp[ik_{\xi}(\xi + \Lambda)] - \exp[ik_{\xi}(\xi - \Lambda)]}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} = I_{01} + I_{02}. \quad (38)$$

Безпосередній розрахунок інтегралів I_{01} та I_{02} виконуємо за допомогою леми Жордана. Відповідно до неї в області $\xi + \Lambda > 0$ внесок до інтегралу I_{01} дає лише корінь з додатною уявною частиною, тобто $k_{\xi 1}$, і, навпаки, в області $\xi + \Lambda < 0$ внесок до інтегралу дає лише $k_{\xi 2}$. В результаті маємо:

$$\operatorname{res}_{k_{\xi}=k_{\xi 1}} \left\{ \frac{\exp[ik_{\xi}(\xi + \Lambda)]}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \right\} = \frac{\exp[ik_{\xi 1}(\xi + \Lambda)]}{k_{\xi 1}(k_{\xi 1} - k_{\xi 2})} = -\frac{\exp[-K_{\xi 1}(\xi + \Lambda)]}{K_{\xi 1}(K_{\xi 1} + |K_{\xi 2}|)}, \quad (39)$$

$$\operatorname{res}_{k_{\xi}=k_{\xi 2}} \left\{ \frac{\exp[ik_{\xi}(\xi + \Lambda)]}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \right\} = \frac{\exp[ik_{\xi 2}(\xi + \Lambda)]}{k_{\xi 2}(k_{\xi 2} - k_{\xi 1})} = \frac{\exp[|K_{\xi 2}|(\xi + \Lambda)]}{|K_{\xi 2}|(|K_{\xi 2}| + K_{\xi 1})}. \quad (40)$$

Отже,

$$\begin{aligned} I_{01}(\xi + \Lambda > 0) &= \frac{2\pi i}{2i} \operatorname{res}_{k_{\xi}=k_{\xi 1}} \left\{ \frac{\exp[ik_{\xi}(\xi + \Lambda)]}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \right\} = -\frac{\pi \exp[-K_{\xi 1}(\xi + \Lambda)]}{K_{\xi 1}(K_{\xi 1} + |K_{\xi 2}|)} = \\ &= -\frac{\pi \exp\left[-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4k_{\chi}^2 + 1})(\xi + \Lambda)\right]}{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4k_{\chi}^2 + 1})\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1}} = -\frac{2\pi \exp\left[-\frac{\xi + \Lambda}{2}(\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1} + 1)\right]}{\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1}(\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1} + 1)} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} I_{01}(\xi + \Lambda < 0) &= -\frac{2\pi i}{2i} \operatorname{res}_{k_{\xi}=k_{\xi 2}} \left\{ \frac{\exp[ik_{\xi}(\xi + \Lambda)]}{k_{\xi} [(k_{\xi} - i)k_{\xi} + k_{\chi}^2]} \right\} = -\frac{\pi \exp[|K_{\xi 2}|(\xi + \Lambda)]}{K_{\xi 2}(K_{\xi 1} + |K_{\xi 2}|)} = \\ &= -\frac{2\pi \exp\left[\frac{\xi + \Lambda}{2}(\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1}(\sqrt{4k_{\chi}^2 + 1} - 1)} \end{aligned} \quad (42)$$

Аналогічно

$$I_{02}(\xi - \Lambda > 0) = \frac{2\pi \exp\left[-\frac{\xi - \Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)}, \quad (43)$$

$$I_{02}(\xi - \Lambda < 0) = \frac{2\pi \exp\left[\frac{\xi - \Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1\right)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1\right)}. \quad (44)$$

Отже, перед згустком

$$\begin{aligned} \varepsilon(k_\chi, \xi > \Lambda) &= I_{01}(\xi + \Lambda > 0) + I_{02}(\xi - \Lambda > 0) = \\ &= -\frac{2\pi \exp\left[-\frac{\xi + \Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)} + \frac{2\pi \exp\left[-\frac{\xi - \Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)} = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{\xi - \Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right] - \exp\left[-\frac{\xi + \Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right] \right\} \quad (45) \\ &= -\frac{2\pi \exp\left[-\frac{\xi}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)} 2sh\left[\frac{\Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]; \end{aligned}$$

При $\xi = \Lambda$ (на передньому фронті згустку) маємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon(k_\chi, \xi = \Lambda) &= \\ &= -\frac{2\pi \exp\left[-\frac{\Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)} 2sh\left[\frac{\Lambda}{2}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right] = \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)} \left(1 - \exp\left[-\Lambda\left(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1\right)\right]\right). \quad (45a) \end{aligned}$$

Всередині згустку

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k_\chi, \Lambda > \xi > -\Lambda) &= I_{01}(\xi + \Lambda > 0) + I_{02}(\xi - \Lambda < 0) = \\
&= -\frac{2\pi \exp\left[-\frac{\xi + \Lambda}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)} + \frac{2\pi \exp\left[\frac{\xi - \Lambda}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}} \left\{ \frac{\exp\frac{1}{2}\left[(\xi - \Lambda)(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} - \frac{\exp\frac{1}{2}\left[-(\xi + \Lambda)(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)\right]}{(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)} \right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}} \times \\
&\times \left\{ \frac{\exp\left[\frac{1}{2}(\xi\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - \xi - \Lambda\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + \Lambda)\right]}{(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} - \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\xi\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + \xi + \Lambda\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + \Lambda)\right]}{(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)} \right\} = \\
&= \frac{2\pi \exp\left[-\frac{1}{2}(\xi + \Lambda\sqrt{4k_\chi^2 + 1})\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}} \left\{ \frac{\exp\left[\frac{1}{2}(\xi\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + \Lambda)\right]}{(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} - \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(\xi\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + \Lambda)\right]}{(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)} \right\}.
\end{aligned} \tag{46}$$

На передньому фронті згустку (при $\xi = \Lambda$):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k_\chi, \xi = \Lambda) &= \\
&= -\frac{2\pi \exp\left[-\Lambda(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)} + \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1} - \frac{\exp\left[-\Lambda(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1} \right\}
\end{aligned} \tag{46a}$$

На задньому фронті (при $\xi = -\Lambda$):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k_\chi, \xi = -\Lambda) &= -\frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)} + \frac{2\pi \exp\left[-\Lambda(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}} \left\{ \frac{\exp\left[-\Lambda(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1} - \frac{1}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1} \right\}
\end{aligned}$$

За згустком

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k_\chi, \xi < -\Lambda) &= I_{01}(\xi + \Lambda < 0) + I_{02}(\xi - \Lambda < 0) = \\
&= \frac{2\pi \exp\left[\frac{\xi - \Lambda}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} - \frac{2\pi \exp\left[\frac{\xi + \Lambda}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} = \\
&= -\frac{4\pi \exp\left[\frac{\xi}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} \operatorname{sh}\left[-\frac{\Lambda}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right].
\end{aligned} \tag{47}$$

На задньому фронті (при $\xi = -\Lambda$):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(k_\chi, \xi = \Lambda) &= \frac{2\pi \exp\left[-\Lambda(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} - \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)} = \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}} \left\{ \frac{\exp\left[-\Lambda(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1)\right] - 1}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1} - 1} \right\}.
\end{aligned} \tag{47a}$$

Видно, що функція $\varepsilon(k_\chi, \xi)$ має розриви на передньому й задньому фронтах пучка.

2.2.3 Зворотне перетворення Фур'є по поперечній координаті

Перейдемо до інтегрування по k_χ . Як впливає з формули,

$$\varepsilon(\chi, \xi) = -\frac{\kappa}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_\chi k_\chi \sin k_\chi \chi \varepsilon(k_\chi, \xi).$$

Область перед згустком ($\xi > \Lambda$).

Перш ніж підставляти (61)

$$\varepsilon(k_\chi, \xi > \Lambda) = -\frac{4\pi \exp\left[-\frac{\xi}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)\right] \operatorname{sh}\left[\frac{\Lambda}{2}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)\right]}{\sqrt{4k_\chi^2 + 1}(\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1)},$$

до (51), знайдемо особливості цієї функції, маючи на увазі, що інтегрування буде виконуватися з використанням методу лишків і леми Жордана.

Оскільки другий співмножник цього виразу при $\sqrt{4k_\chi^2 + 1} + 1 \rightarrow 0$ прямує до одиниці, то вираз має лише дві особливості порядку 1/2:

$$k_\chi = \pm i/2,$$

як це впливає з умови

$$\sqrt{4k_x^2 + 1} = 2\sqrt{(k_x + i/2)(k_x - i/2)} = 0.$$

ВИСНОВКИ

1. На основі рівнянь Максвелла та гідродинамічної моделі теплої плазми отримано рівняння, яке точно описує процеси взаємодії плазми з плоским електронним згустком обмеженої довжини (в наближенні заданого струму згустку).
2. З'ясовано умови, за яких це рівняння зводиться до побудованої раніше напівфеноменологічної теорії Міллера.
3. В автономній системі координат отримано двовимірний просторовий спектр електричного поля, збудженого згустком у плазмі.
4. Вдалося виконати зворотне перетворення Фур'є по автономній координаті.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. *Анісімов І.О.* Фізика плазми. Конспект лекцій., ВПЦ «Київський університет», 2018.
2. *Анісімов І.О.* Коливання та хвилі. К., ВПЦ «Київський університет», 2009.
3. *Анісімов І.О.* Плазмова електроніка. Конспект лекцій., ВПЦ «Київський університет», 2021
4. *N. A. Krall, A. W. Trivelpiece.* Principles of plasma physics. Print Book, English, 1973. p.526.
5. *R.B. Miller.* An introduction to the physics of intense charged particle beams. PLENUM PRESS, New York, 1982. p.432.
6. *Francis F. Chen* Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion Third Edition, 2016
7. *Robert Wray Hamm, Marianne Elizabeth Hamm* Industrial Accelerators and Their Applications, 2012
8. *Andre Gsponer* The Physics of high-intensity high-energy Particle Beam Propagation in open Air and outer-space Plasmas, 2009