УДК 514.18 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.7**

Олександр КУРЧЕНКО, Д-р. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-0417-5970
e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ольга СИНЯВСЬКА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0000-0002-2711-3940
e-mail: olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
ДВНЗ "Ужгородський національний університет", Ужгород, Україна

ОДНЕ ДОВЕДЕННЯ ФОРМУЛИ ОБ'ЄМУ ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ

Анотація. *Однією з актуальних задач сучасної української школи є формування математичної компетентності учнів, зокрема геометричної компетентності. Різні підходи до доведення теорем та формул геометрії сприяють розвитку геометричної компетентності учнів старшої школи.*

У статті наведено одне з доведень формули об'єму зрізаної піраміди. Формула об'єму зрізаної піраміди є важливим результатом у стереометрії та її застосуваннях. У сучасних підручниках геометрії цю формулу отримують як різницю об'ємів двох подібних пірамід. Пропоноване у даній статті доведення цієї формули спирається на лему про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри таким чином, що об'єм одного із таких тетраедрів дорівнює середньому пропорційному об'ємів двох інших тетраедрів. У статті також доведено цю лему та за її допомогою отримано формулу для обчислення об'єму зрізаного тетраедра. Перехід до зрізаної піраміди здійснюється за допомогою розбиття зрізаної піраміди на зрізані тетраедри.

Ключові слова: *піраміда; зрізана піраміда; об'єм піраміди; тетраедр; зрізаний тетраедр; призматоїд.*

1. Вступ

Одна з актуальних задач сучасної української школи – формування математичної компетентності учнів, зокрема геометричної компетентності (Мала, 2015). Різні підходи до доведення теорем та формул геометрії, безумовно, сприяють розвитку геометричної компетентності учнів старшої школи.

Об'єм зрізаної піраміди з площами основ S_1, S_2 та висотою h обчислюється за формулою:

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right). \qquad (1)$$

У сучасних підручниках з геометрії, наприклад, (Нелін, Долгова, 2019; Істер, Єргіна, 2019), формулу об'єму зрізаної піраміди зазвичай отримують як різницю об'ємів двох подібних пірамід.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

У цій статті доведення формули (1) ґрунтується на лемі про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри, так що об'єм одного з цих тетраедрів дорівнює середньому пропорційному (середньому геометричному) об'ємів двох інших тетраедрів.

Об'єктом дослідження є об'єм зрізаної піраміди.

Метою дослідження є доведення формули об'єму зрізаної піраміди із застосуванням леми про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри таким чином, що об'єм одного із таких тетраедрів дорівнює середньому пропорційному об'ємів двох інших тетраедрів.

2. Результати

Лема 1. (Baratech Montes, 1940) *Кожний зрізаний тетраедр можна розкласти на три тетраедри так, що основи двох з цих тетраедрів збігаються з основами зрізаного тетраедра і мають висоти, які дорівнюють висоті зрізаного тетраедра. Об'єм третього тетраедра дорівнює середньому пропорційному об'ємів цих двох тетраедрів*.

Доведення. Нехай $ABCDEF$ – зрізаний тетраедр (рис. 1), S_1 – площа його нижньої основи, S_2 – площа верхньої основи, h – довжина його висоти.

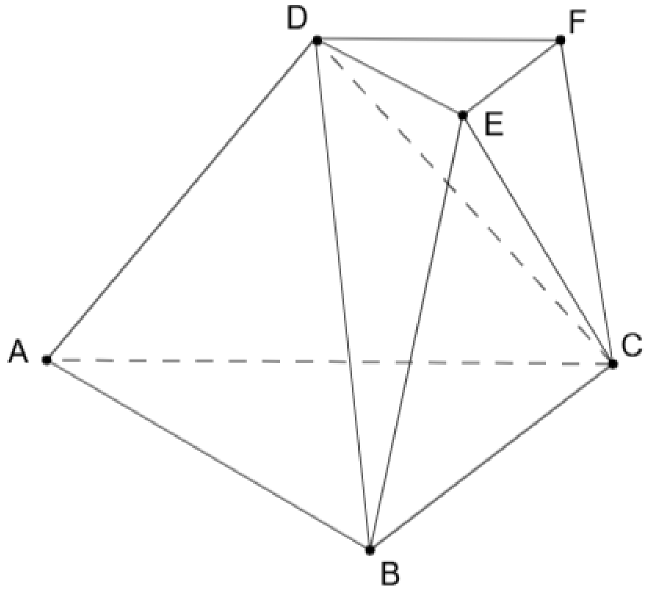

Рис. 1. Зрізаний тетраедр $ABCDEF$

Розглянемо тетраедри $DABC,\ CDEF,\ DEBC$. Зрозуміло, що сума об'ємів цих тетраедрів дорівнює об'єму зрізаного тетраедра $ABCDEF$.

Нехай V_1 – об'єм тетраедра $DABC$, V_2 – об'єм тетраедра $CDEF$, V_3 – об'єм тетраедра $DEBC$ відповідно. За формулою об'єму піраміди

$$V_1 = \frac{1}{3} h S_1, \tag{2}$$

$$V_2 = \frac{1}{3} h S_2. \tag{3}$$

Доведемо, що

$$V_3 = \sqrt{V_1 V_2}. \tag{4}$$

Розглянемо тетраедри $DABC$ і $DEBC$ як тетраедри з вершиною C та основами ABD і BED відповідно. Ці тетраедри мають спільну висоту, опущену з вершини C. Довжину цієї висоти позначимо через h_C. Площі трикутників ABD і BED позначимо через S_{ABD} та S_{BED} відповідно. Тоді

$$V_1 = \frac{1}{3} h_C S_{ABD},$$

$$V_3 = \frac{1}{3} h_C S_{BED},$$

звідки

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{S_{ABD}}{S_{BED}}. \tag{5}$$

Оскільки $DE \parallel AB$, то висота $\Delta\, ADE$, опущена з вершини A на сторону DE, і висота $\Delta\, BED$, опущена з вершини E на сторону AB, мають однакову довжину. Тому

$$\frac{S_{ABD}}{S_{BED}} = \frac{AB}{DE}. \tag{6}$$

Із рівностей (5) та (6) випливає, що

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{AB}{DE}. \tag{7}$$

Проведемо аналогічні міркування для тетраедрів $DECF$ і $DEBC$ із спільною вершиною D та основами ECF і EBC відповідно. У результаті отримаємо рівність

$$\frac{V_3}{V_2} = \frac{BC}{EF}. \tag{8}$$

Внаслідок подібності основ зрізаного тетраедра,

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}. \tag{9}$$

Із рівностей (7), (8), (9) випливає, що

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$\frac{V_1}{V_3} = \frac{V_3}{V_2},$$

звідки $V_3 = \sqrt{V_1 V_2}$. Лема доведена.

■

Зауваження 1. *Зауважимо, що об'єм V зрізаного тетраедра дорівнює сумі об'ємів тетраедрів розбиття*:

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \quad (10)$$

3. Обчислення об'єму зрізаного тетраедра

Із рівностей (2), (3), (4) маємо:

$$V_3 = \sqrt{V_1 V_2} = \sqrt{\frac{1}{3} h S_1 \cdot \frac{1}{3} h S_2} = \frac{1}{3} h \sqrt{S_1 S_2}.$$

Тепер із рівності (10) слідує, що об'єм зрізаного тетраедра з висотою h і площами основ S_1, S_2 дорівнює:

$$V = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

4. Обчислення об'єму зрізаної піраміди

Нехай $A_1 A_2 \dots A_n A_1' A_2' \dots A_n'$ – зрізана n-кутна піраміда з висотою h, площею нижньої основи S_1 і площею верхньої основи S_2. На рис. 2 зображено зрізану п'ятикутну піраміду.

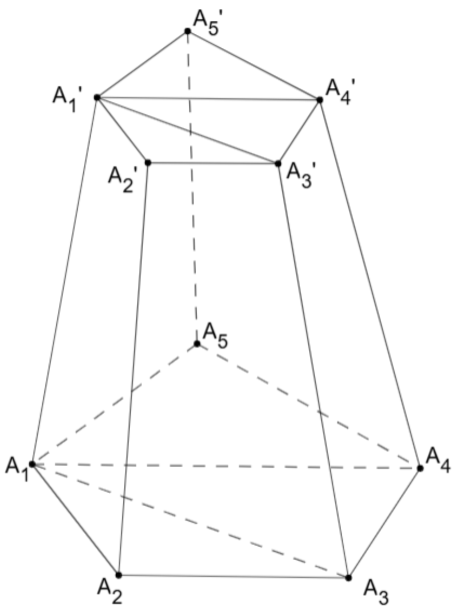

Рис. 2. Зрізана піраміда

Розіб’ємо зрізану n-кутну піраміду на $n-2$ зрізаних тетраедри $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$, $A_1A_3A_4A_1'A_3'A_4'$, …, $A_1A_{n-1}A_nA_1'A_{n-1}'A_n'$. Висота кожного з тетраедрів дорівнює висоті зрізаної піраміди.

Через $a_i, a_i{}'$ позначимо відповідно площі нижньої і площу верхньої основи зрізаного тетраедра $A_1A_iA_{i+1}A_1'A_i'A_{i+1}'$, $2 \le i \le n-1$.

Зауважимо, що

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} = S_1,$$

$$a_2' + a_3' + \cdots + a_{n-1}' = S_2.$$

Нехай k – коефіцієнт подібності верхньої і нижньої основ для n-кутної зрізаної піраміди, причому:

$$k = \frac{A_1'A_2'}{A_1A_2} = \frac{A_2'A_3'}{A_2A_3} = \cdots = \frac{A_n'A_1'}{A_nA_1}.$$

При цьому відношення площ подібних фігур дорівнює k^2:

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2, \qquad \frac{a_i'}{a_i} = k^2, 2 \le i \le n-1.$$

Об’єм зрізаного тетраедра $A_1A_iA_{i+1}A_1'A_i'A_{i+1}'$ дорівнює

$$V_i = \frac{h}{3}\left(a_i + a_i' + \sqrt{a_ia_i'}\right) = \frac{h}{3}(a_i + a_i' + ka_i),\ \ 2 \le i \le n-1.$$

Об’єм зрізаної n-кутної піраміди дорівнює

$$V = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{h}{3}(a_i + a_i' + ka_i) = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + kS_1) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{k^2S_1S_1}\right) = \frac{h}{3}\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right).$$

Формулу (1) доведено.

■

5. Узагальнення результату

Опуклий многогранник, всі вершини якого лежать у двох паралельних площинах, називається *призматоїдом*. Ці паралельні площини називають також опорними. Зрізана піраміда є призматоїдом, але не навпаки.

Об’єм призматоїда обчислюється за формулою:

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

$$V = \frac{H}{6}(S_1 + 4S_c + S_2), \quad (11)$$

де H – відстань між опорними площинами (висота призматоїда);

S_1, S_2 – площі основ призматоїда;

S_c – площа середнього перерізу, тобто перерізу, який проходить через середину висоти і паралельний до опорних площин.

Доведення формули (11) можна знайти у статті (Кукуш, Ушаков, 2002).

6. Висновки

У статті доводиться формула для обчислення об'єму зрізаної піраміди. Доведення формули спирається на розглянуту у статті лему про розбиття зрізаного тетраедра на три тетраедри, таким чином, що об'єм одного із таких тетраедрів дорівнює середньому пропорційному об'ємів двох інших тетраедрів. Спочатку розглянуто випадок для зрізаного тетраедра, а потім – для зрізаної n-кутної піраміди. Актуальність проведеного дослідження полягає у розвитку геометричних методів доведення, що сприяє розвитку геометричної компетентності учнів.

Внесок авторів

Олександр Курченко – концептуалізація; методологія, написання; Ольга Синявська – аналіз джерел, підготовка огляду літератури, написання – перегляд і редагування.

Список використаних джерел

Мала, Л. (2015). Аналіз сучасних проблем формування геометричної компетентності учнів старшої школи. Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (74), 39-43. https://seanewdim.com/wp-content/uploads/2021/03/Analysis-of-current-problems-of-forming-geometrical-competence-high-school-students-L.O.-Mala.pdf

Нелін, Є.П., & Долгова, О.Є. (2019). Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Вид-во «Ранок». 208 с.

Істер О., & Єргіна, О. (2019). Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза. 288 с.

Baratech Montes, B. (1940). Matemáticas: tercer curso del bachillerato. Geometria. Librería General, Zaragoza. 128 p.

Кукуш, О.Г., & Ушаков, Р.П. (2002) Призматоїд та його об'єм. У світі математики: Український математичний журнал для школярів, 8 (2), 46-50.

Отримано редакцією журналу: 06.04.2025
Прорецензовано: 28.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Olexandr KURCHENKO, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-0417-5970
e-mail: oleksandrkurchenko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Olga SYNIAVSKA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0000-0002-2711-3940
e-mail: olga.synyavska@uzhnu.edu.ua
Uzhhorod National University, Uzhhorod, Ukraine

THE FORMULA FOR THE VOLUME OF A TRUNCATED PYRAMID

Abstract. *One of the current tasks of the modern Ukrainian school is the formation of students' mathematical competence, mainly geometric competence. Various approaches to proving theorems and formulas of geometry contribute to the development of geometric competence of high school students.*

This article presents one of the proofs of the formula for the volume of a truncated pyramid. The formula for the volume of a truncated pyramid is an important result in solid geometry and its applications. In modern geometry textbooks, this formula is obtained as the difference of the volumes of two similar pyramids. The proof of this formula proposed in this article is based on the lemma about the division of a truncated tetrahedron into three tetrahedrons in such a way that the volume of one of such tetrahedrons is equal to the average proportional volume of the other two tetrahedrons. The proof of this lemma is also given in this article. Using this lemma, we obtain a formula for calculating the volume of a truncated tetrahedron. The transition to a truncated pyramid is accomplished by breaking the truncated pyramid into truncated tetrahedron.

Keywords: *pyramid; truncated pyramid; pyramid volume; tetrahedron; truncated tetrahedron; prismatoid.*