

УДК 539.3

Реут В. В., к.ф.-м.н., доц.,
Молоканов Ю. В., студент

Плоский напряженный стан для смуги, що ослаблена тріщиною

Одеський національний університет імені
І. І. Мечникова, 65082, м. Одеса, вул.
Дворянська, 2,
e-mail: reut@onu.edu.ua,
molokanov9@gmail.com

V. V. Reut, Cand. Sc. (Phys. & Math.), Assoc. Prof.,
Yu. V. Molokanov, student

Plane stress state of a strip weakened by a crack

Odesa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odesa, Dvoryan'ska str., 2,
e-mail: reut@onu.edu.ua,
molokanov9@gmail.com

Досліджено плоску задачу теорії пружності для нескінченної смуги зі скінченною поздовжньою тріщиною. Запропоновано метод, що може бути застосований для розрахунку напруженого стану та переміщень для нескінченної та напівнескінченної смуги із поздовжньою тріщиною та довільною конфігурацією крайових умов. Його перевага полягає у відсутності потреби використання апарату матричного диференційного числення. За допомогою узагальненої схеми метода інтегральних перетворень початкову задачу зведено до одновимірної крайової задачі. Застосуванням оберненого інтегрального перетворення Фур'є отриману одновимірну задачу зведено до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь на скінченному інтервалі. Розв'язок цієї системи будувався методом ортогональних многочленів за допомогою розкладення шуканих функцій у ряд за многочленами Чебишова другого роду. Побудовано графік залежності коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) від геометричних параметрів задачі. Показано, що зі збільшенням ширини смуги значення КІН наближається до значення КІН для нескінченної площини.

Ключові слова: плоска задача теорії пружності, нескінченна смуга, поздовжня тріщина, напружений стан, коефіцієнт інтенсивності напружень.

The plane stress elastic infinite strip problem of a finite longitudinal crack is investigated. The method that can be applied to calculate the stress state and the displacements for an infinite and semi-infinite strip with the longitudinal crack and arbitrary configuration of the boundary conditions is proposed. The main advantage of this method lies in the absence of necessity for use of the apparatus of the matrix differential calculus. Initial problem is reduced to the one-dimensional boundary value problem with the help of the generalized scheme of the integral transform method. By using the inverse integral Fourier transform, the one-dimensional problem is reduced to solving of the system of singular integral equations on a finite interval. The solution of this system was constructed with the help of the method of orthogonal polynomials by means of the second kind Chebyshev polynomials series expansion of the unknown functions. A graph of dependence of the stress intensity factor (SIF) on the geometric parameters of the problem is plotted. It is shown that the SIF for the case of the said strip tends to the SIF for the case of an infinite plane as the width of the strip approaches infinity.

Key Words: plane elastic problem, infinite strip, longitudinal crack, stress state, stress intensity factor.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Розв'язання задач теорії пружності для нескінчених смуг із поздовжніми тріщинами має велике значення для практичних застосувань та розробки теоретичних методів. Дефекти типу тріщин часто трапляються в різноманітних

інженерних конструкціях (компонентах машин, підвалів будівель, обшивці суден і автомобілів). Такі дефекти помітно знижують міцність конструкцій під час експлуатації та в деяких випадках можуть призвести до повного їх руйнування, тому важливою є розробка методів, за допомогою яких було б можливо розрахувати

коефіцієнти інтенсивності напружень в околі тріщини та з'ясувати вплив їх розташування на можливе руйнування тіл.

Для побудови розв'язків задач пружності використовуються два підходи: аналітичні методи та чисельні методи. Чисельні методи можуть бути застосовані до задач теорії пружності, але у випадку наявності особливих точок такі методи не можуть забезпечити точних розрахунків. Цим обумовлюється необхідність розробки аналітичних методів розв'язання задач теорії пружності.

Так, у праці Саврука М. П. та ін. [1] було розроблено метод сингулярних інтегральних рівнянь для розв'язання двовимірних задач теорії пружності із тріщинами; Слепяна Л. І. [2] — досліджено статичні, повільно зростаючі та динамічні тріщини у твердих тілах і критерій росту тріщини; Саврука М. П. [3] — розглянуто методи розв'язання двовимірних крайових задач математичної теорії тріщин для ізотропних тіл, досліджено задачі для напівплощин та смуг із тріщинами; Михаськова В. та ін. [4] — досліджено тривимірну пружно-динамічну взаємодію між круглою тріщиною і тонким проміжним шаром, що з'єднує два пружних півпростори, за допомогою модифікованого методу крайових інтегральних рівнянь; Устинова К. Б. [5] — зведено задачу про напівнескінчену тріщину, паралельну межі напівплощини, до матричної задачі Рімана за допомогою двостороннього перетворення

Лапласа; Антіпова Ю. А. та ін. [6] — розглянуто плоску деформівну задачу пружної напівплощини із тріщиною, що проходить вздовж межі двох ідеально зчеплених окремих чвертьплощин, і послідовно зведено змішану крайову задачу до системи двох функціональних рівнянь типу Вінера — Гопфа. У роботах [7], [8] було запропоновано новий підхід із застосуванням матричних диференціальних обчислень і матричного апарату Гріна, що дозволяє врахувати фіксовані особливості в задачі для пружної напівнескінченої смуги із поперечною тріщиною при побудові її рішень.

Запропонований у цій роботі метод може бути застосований для розрахунку напруженого стану та переміщень для нескінченої та напівнескінченої смуги зі скінченною поздовжньою тріщиною та довільною конфігурацією крайових умов. Його перевага в порівнянні із розглянутими вище методами [7], [8] полягає у відсутності потреби використання апарату матричного диференціального числення. При цьому для забезпечення єдиності розв'язку накладаються додаткові обмеження на асимптотику функцій-розв'язків, які полягають у необхідності спадання шуканих функцій на нескінченності.

Показано, що розв'язок плоскої задачі для смуги у випадку фінітного (за y) навантаження у класі функцій-розв'язків можна звести до системи рівнянь (1)

$$\begin{cases} \Delta^2 \sigma_x = -[\Delta X' + (1+\nu)X''^{\square}] + [\Delta Y^{\square} - (1+\nu)Y'^{\square}], & -a < x < b, \quad -\infty < y < \infty, \\ \tau_{xy}^{\square} = -\sigma'_x - X, \quad \sigma_y^{\square} = \sigma''_x + X' - Y^{\square}, \\ Ev^{\square} = [\Delta \sigma_x - (1+\nu)\sigma_x^{\square}] + X' - Y^{\square}, \\ Eu^{\square} = -[\Delta \sigma'_x + (1+\nu)\sigma_x'^{\square}] - [\Delta X + (1+\nu)X'^{\square}] - \nu X + Y'^{\square}. \end{cases} \quad (1)$$

Штрихом в (1) позначено похідну за змінною x , крапкою — похідну за змінною y ; u, v — переміщення; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ — напруження. Це дозволяє засотувати інтегральне перетворення за змінною y .

Постановка задачі

Розглянемо плоску задачу теорії пружності для нескінченої смуги $\{-a < x < b, |y| < \infty\}$, обидві межі якої знаходяться у стані гладкого контакту. У середині смуги вздовж відрізка $\{x=0, |y| < 1\}$ розташована тріщина, на береги якої діє

нормальне навантаження інтенсивності $p(y)$ та дотичне навантаження інтенсивності $t(y)$. Об'ємні сили відсутні. Припускається, що контакт берегів тріщини відсутній.

З математичної точки зору задача зводиться до розв'язування крайової задачі виду

$$\begin{cases} \Delta^2 \sigma_x(x, y) = 0, & -a < x < b, \quad -\infty < y < \infty, \\ x = -a: \quad \sigma'_x = 0, \quad \sigma''_x = 0, \\ x = b: \quad \sigma'_x = 0, \quad \sigma''_x = 0, \\ x = \pm 0, |y| < 1: \quad \sigma_x = p(y), \quad \tau_{xy} = t(y). \end{cases} \quad (2)$$

**Метод розв'язування та аналітичні
результати**

Дотримуючись узагальненої схеми метода інтегральних перетворень, замінимо останні умови в (2) на умови

$$\langle \sigma_x \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \langle u \rangle = \chi(y), \langle v \rangle = \mu(y),$$

де $\langle f(x) \rangle = f(-0) - f(+0)$.

Застосовуючи до системи (2) інтегральне перетворення Фур'є за змінною y та враховуючи співвідношення (1), перейдемо до одновимірної крайової задачі

$$\begin{cases} L^2 \sigma_\lambda(x) = 0, & -a < x < b, \quad x \neq c, & (3) \\ U_j[\sigma_\lambda] = 0, & j = \overline{0, 3}, & (4) \\ \langle \sigma_\lambda^{(k)} \rangle \Big|_{x=c} = \sigma_k, & k = \overline{0, 3}, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \chi(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \int_{-1}^1 \chi(\eta) K_{11}(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \mu(\eta) K_{12}(y, \eta) d\eta = p(y), & |y| < 1, \\ \frac{d^2}{dy^2} \int_{-1}^1 \mu(\eta) \ln \frac{1}{|y-\eta|} d\eta + \int_{-1}^1 \chi(\eta) K_{21}(y, \eta) d\eta + \int_{-1}^1 \mu(\eta) K_{22}(y, \eta) d\eta = t(y), & |y| < 1, \end{cases} \quad (7)$$

де $K_{ij}(y, \eta)$ — нескінченно-диференційовані функції, а $\chi(\eta)$ та $\mu(\eta)$ — відповідні стрибки нормальних та дотичних переміщень при переході через тріщину, причому

$$\begin{aligned} K_{11}(y, \eta) &= \int_0^\infty \lambda^4 \hat{G}_\lambda(\pm 0, 0) \cos \lambda(y - \eta) d\lambda, \\ K_{12}(y, \eta) &= \int_0^\infty \lambda^3 \hat{G}_\lambda^\square(\pm 0, 0) \sin \lambda(y - \eta) d\lambda, \\ K_{21}(y, \eta) &= -\int_0^\infty \lambda^3 \hat{G}'_\lambda(\pm 0, 0) \sin \lambda(y - \eta) d\lambda, \\ K_{22}(y, \eta) &= \int_0^\infty \lambda^2 \hat{G}_\lambda^{\square\square}(\pm 0, 0) \cos \lambda(y - \eta) d\lambda, \end{aligned}$$

де функція $\hat{G}_\lambda(x, \xi)$ має вигляд (9) – (10).

Розв'язок системи (7) будувався методом ортогональних многочленів [9] за допомогою розкладення шуканих функцій $\chi(\eta)$, $\mu(\eta)$ у ряд за многочленами Чебишова другого роду:

$$\begin{aligned} \hat{G}_\lambda(x, \xi) &= \frac{1 + \lambda|x + \xi + 2a|}{4\lambda^3} e^{-\lambda|x + \xi + 2a|} + \\ &+ \frac{1}{4\lambda} [C_0^{(2)} ch \lambda(x + a) + C_1^{(2)}(x + a) sh \lambda(x + a)] \cdot [(b - \xi) e^{-\lambda|b - \xi|} + (b + \xi + 2a) e^{-\lambda|b + \xi + 2a|}] + \\ &+ \frac{1}{4} [C_0^{(3)} ch \lambda(x + a) + C_1^{(3)}(x + a) sh \lambda(x + a)] \cdot \{ [\lambda(b - \xi) - 2] e^{-\lambda|b - \xi|} + [\lambda(b + \xi + 2a) - 2] e^{-\lambda|b + \xi + 2a|} \}; \end{aligned} \quad (9)$$

де $U_0[\sigma_\lambda] = \sigma'_\lambda|_{x=-a}$, $U_1[\sigma_\lambda] = L\sigma'_\lambda|_{x=-a}$, $U_2[\sigma_\lambda] = L\sigma'_\lambda|_{x=b}$, $U_3[\sigma_\lambda] = L\sigma'_\lambda|_{x=b}$; $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \mu_\lambda$, $\sigma_3 = \chi_\lambda$. Тоді розв'язок крайової задачі (3) – (5) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(x) &= -\sigma_3 G_\lambda(x, c) + \sigma_2 G_\lambda^\square(x, c) - \\ &- \sigma_1 [G_\lambda^{\square\square}(x, c) - 2\lambda^2 G_\lambda(x, c)] + \\ &+ \sigma_0 [G_\lambda^{\square\square\square}(x, c) - 2\lambda^2 G_\lambda^\square(x, c)] = \\ &= E i \lambda^3 \mu_\lambda G_{|\lambda|}^\square(x, 0) + E \lambda^4 \chi_\lambda G_{|\lambda|}(x, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

де $G_\lambda(x, \xi)$ — функція Гріна крайової задачі (3) – (4).

Застосування до (6) оберненого інтегрального перетворення Фур'є дозволяє звести проблему до розв'язування системи сингулярних інтегральних рівнянь на скінченному інтервалі виду (7)

$$\begin{aligned} \chi(\eta) &= \sqrt{1 - \eta^2} \sum_{k=0}^\infty \chi_k P_k^{1/2/2}(\eta), \\ \mu(\eta) &= \sqrt{1 - \eta^2} \sum_{k=0}^\infty \mu_k P_k^{1/2/2}(\eta). \end{aligned}$$

В результаті отримана нескінченна система лінійних алгебраїчних многочленів типу Пуанкаре — Коха коефіцієнтів розкладення

$$\begin{cases} \chi_n + \sum_{k=0}^\infty [\chi_k A_{nk}^{(1,1)} + \mu_k A_{nk}^{(1,2)}] = B_n^{(1)}, & n = \overline{0, \infty}, \\ \mu_n + \sum_{k=0}^\infty [\chi_k A_{nk}^{(2,1)} + \mu_k A_{nk}^{(2,2)}] = B_n^{(2)}, \end{cases} \quad (8)$$

де $B_0^{(1)} = 1$, $B_0^{(2)} = 0$, $B_n^{(1)}, B_n^{(2)} = 0$, $n = \overline{1, \infty}$, а коефіцієнти $A_{nk}^{(i,j)}$ мають вигляд (11).

$$C_0^{(2)} = \frac{3\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda(a+b) + \lambda^3(a+b) \operatorname{ch}\lambda(a+b)}{2\lambda^3 \operatorname{sh}^2\lambda(a+b)},$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2\operatorname{sh}\lambda(a+b)},$$

$$C_0^{(3)} = -\frac{\operatorname{sh}\lambda(a+b) + \lambda(a+b) \operatorname{ch}\lambda(a+b)}{2\lambda^3 \operatorname{sh}^2\lambda(a+b)},$$

$$C_1^{(3)} = \frac{1}{2\lambda^2 \operatorname{sh}\lambda(a+b)}.$$
(9)

$$A_{nk}^{(1,1)} = \frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda^2 \hat{G}_\lambda(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda,$$

$$A_{nk}^{(1,2)} = \frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda \hat{G}_\lambda^\square(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda,$$

$$A_{nk}^{(2,1)} = -\frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \sin\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \lambda \hat{G}'_\lambda(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda,$$

$$A_{nk}^{(2,2)} = \frac{4E}{n!k!} \cdot \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) \cdot \cos\left[\frac{\pi}{2}(k-n)\right] \cdot \int_0^\infty \hat{G}_\lambda^{\square\square}(\pm 0, 0) \cdot J_{n+1}(\lambda) \cdot J_{k+1}(\lambda) d\lambda.$$
(10)

Чисельні результати

Застосуванням методу редукції до (8) було отримано розв'язок системи та розраховано значення коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень (КІН) для різних геометричних параметрів задачі.

На графіку (рис. 1) показано залежність КІН K від величини параметра b для випадку, коли тріщина знаходиться на однаковій відстані від обох меж смуги ($a = b$). З нього випливає, що зі збільшенням параметра b (зростанням ширини смуги) значення КІН наближається до значення КІН для нескінченної площини

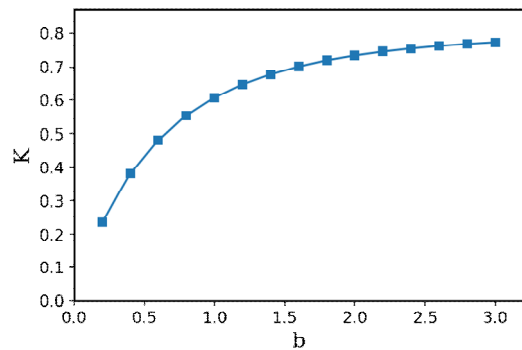


Рис. 1 Залежність КІН від ширини смуги.

Список використаних джерел

1. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук. – Киев: Наукова думка, 1989. – 248 с.
2. Слепян Л.И. Механика трещин. / Л.И. Слепян. – Ленинград: Судостроение, 1990. – 296 с.
3. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. / М.П. Саврук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 324 с.
4. Mykhas'kiv V. 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces. / V. Mykhas'kiv, V. Stankevych, I. Zhabdynskiy та ін. // International Journal of Fracture. – 2009. – № 159 (2). – С. 137-149.

References

1. SAVRUK, M. P., OSIV, P. N. and PROKOPCHUK, I. V. (1989) *Chislennyy analiz v ploskikh zadachah teorii treschin*. Kiev: Naukova dumka.
2. SLEPYAN, L. I. (1990) *Mehanika treschin*. Leningrad: Sudostroenie.
3. SAVRUK, M. P. (1981) *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treschinami*. Kiev: Naukova dumka.
4. MYKHAS'KIV, V., STANKEVYCH, V., ZHBADYNSKYI, I. and ZHANG, C. (2009) 3-D dynamic interaction between a penny-shaped crack and a thin interlayer joining two elastic half-spaces. *International Journal of Fracture*. 159 (2). p.137-149.

Надійшла до редколегії 31.05.19