

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

На правах рукопису
УДК 519.17

Тимошкевич Тарас Дмитрович

**Геометричні властивості ймовірнісних мір в лінійних
просторах та функціональні нерівності**

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Кулик Олексій Михайлович,
доктор фізико-математичних наук
провідний науковий співробітник
відділу теорії випадкових процесів
Інституту математики НАН України

Київ – 2016

Зміст

Перелік умовних позначень	4
Вступ	5
1 Огляд літератури за темою дисертації	13
1.1 Геометричні характеристики міри. Зоноїди	13
1.2 Класичні нерівності Пуанкаре і Соболева та їх узагальнення.....	14
1.3 Нерівності концентрації	15
1.4 Нерівності зсуву та обернена логарифмічна нерівність Соболева.	
Зважені нерівності Соболева та Пуанкаре, цензуровані міри	16
1.5 Мартингальний підхід до доведення функціональних нерівностей.....	18
2 Попередні відомості та допоміжні результати	20
2.1 Геометричні характеристики міри.....	20
2.2 Функціональні нерівності.....	25
3 Геометрична структура міри в контексті барицентричних координат	28
3.1 Означення та властивості	29
3.2 Барицентричне зображення відносно циліндричної міри.....	38
3.3 Барицентричне зображення в просторі з \mathbb{Z} -адитивною мірою.....	43
3.4 Барицентричні координати.....	47
3.5 Приклади	49

4 Функціональні нерівності.....	52
4.1 Зважений ліфт зоноід, нелінійні нерівності зсуву і зважена обернена логарифмічна нерівність Соболева	53
4.2 Зважена логарифмічна нерівність Соболева в	72
4.3 Цензурована гаусівська міра	82
4.4 Доведення теорем та наслідку	84
5 Мартингальні оцінки функціональних нерівностей.....	93
5.1 Вступ	93
5.2 Мартингальна оцінка для ентропії	94
5.3 Нарізки множин на \mathbb{R}^n і пов'язані з ними інтегральні оцінки для ентропії	100
5.4 Один наслідок: зважена логарифмічна нерівність Соболева на \mathbb{R}^n	107
5.5 Мартингальна оцінка для варіації.....	115
5.6 Критерій Макенхаупта.....	117
5.7 Зважена нерівність Пуанкаре	123
Висновки.....	127
Список використаних джерел.....	128

Перелік умовних позначень

Z_μ зоноід міри μ

\hat{Z}_μ ліфт зоноід міри μ

\hat{Z}_μ^ν узагальнений ліфт зоноід міри μ з вагою ν

$D_\alpha, \alpha \in [0;1]$ нарізка множин міри μ

$S(\mu)$ випукла замкнена оболонка носія міри μ

$B_A(\mu), \mu(A) > 0$ барицентр множини A по мірі μ

$B(\mu)$ множина всіх барицентрів по мірі μ

$L(\mu)$ лінійна оболонка $D_0(\mu)$ γ_c гауссівська міра з дисперсією c

Φ функція розподілу гауссівської міри

I гауссівська ізопериметрична функція

E_μ математичне сподівання міри μ

\mathbf{Ent}_μ ентропія міри μ

Var_μ варіація міри μ

ρ_μ щільність міри μ

\mathbf{N}^X клас всіх півпросторів банахового простору X

Вступ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено дослідженню та узагальненню таких геометричних характеристик міри як зоноід, ліфт зоноід та нарізка множин, а також новим методам доведення функціональних нерівностей, які ідейно пов'язані з вказаними вище характеристиками. Геометричні характеристики міри узагальнені на максимально можливий випадок нескінченно-вимірному простору з циліндричною мірою, та за допомогою них доведена теорема про зображення, однозначність представлення точок як барицентрів півпросторів. Ці характеристики вперше були запропоновані Глібом Кошевим та Карлом Мослером у статті [55] 1997 року. Авторами було отримано однозначність представлення міри через ліфт зоноід, введено відстань та частковий порядок на ліфт зоноїдах, а, отже, і на мірах, теорему про представлення точок через барицентри, без однозначності, та введено поняття глибини точок. Спираючись на зоноїдні характеристики, зручно узагальнювати класичні граничні теореми, зокрема 2014 році була опублікована стаття I. Molchanov, M. Schmutz, K. Stucki [76], в якій узагальнена ергодична теорема для інваріантних відносно перестановок послідовностей і границя характеризується. В 2009 році опублікована стаття С. Borell [23], в якій наводиться застосування зоноїдів, індукованих гауссовою мірою у фінансовій математиці. В 4 розділі дисертації, в якому розглядаються функціональні нерівності, класичним результатом [1] є критерій Вакру-Емері 1984 року, в якому накладаються умови на другу похідну щільності міри. Більш сучасним є результат 1999 року С. Бобкова

[19], в основному для одновимірного випадку наводиться інтегральна умова на хвості розподілу. Група французьких вчених E. Voissard, P. Cattiaux, A. Guillin, L. Miclo в статті [21] 2013 року досліджували можливі узагальнення цих функціональних нерівностей, зокрема нерівності Пуанкаре. Якщо втрачається випуклість логарифмічної похідної міри, то з'являються цікаві ефекти, і ця теорія важлива і досі не розвинута. В дисертації є суттєві просування в цьому напрямку, запропоновано критерії, які не потребують випуклості логарифмічної похідної та поліпшують оцінки, які отримано в 2013 році, що робить роботу дійсно актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-дослідної теми № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561) і №16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є дослідження геометричних характеристик міри таких як зоноід, ліфт зоноід і нарізка множин, та застосування одержаних результатів у доведенні функціональних нерівностей.

Це передбачає розв'язання таких задач:

- доведення властивостей зоноідів і ліфт зоноідів для циліндричних мір;
- барицентричне представлення точок;
- запропонувати умови на узагальнену обернену логарифмічну нерівність Соболева в термінах узагальнених ліфт зоноідів (узагальнена нерівність руху та узагальнена допоміжна функціональна нерівність);
- пряма логарифмічна нерівність Соболева, доведення нерівності Пуанкаре для сферично цензурованої багатовимірної гауссової міри та логарифмічної нерівності Соболева для проекції цієї міри на пряму;
- мартингальним методом встановлюється границя ентропії ймовірнісної міри в \mathbb{R}^d , як наслідок, одержуємо логарифмічну нерівність Соболева на \mathbb{R} ; так само встановлюється границя варіації ймовірнісної міри в \mathbb{R}^d , як наслідок, одержуємо критерій Макенхаупта для нерівності Пуанкаре на \mathbb{R} та зважена нерівність Пуанкаре з хорошим інтегральним ядром.

Об'єктом дослідження є геометричні характеристики міри такі як зоноід, ліфт зоноід, нарізки множин, функціональні нерівності Пуанкаре, нерівності зсуву, логарифмічна нерівність Соболева, пряма та обернена.

Предметом дослідження є властивості ліфт зоноідів в нескінченновимірному просторі з циліндричною мірою, теорема про зображення, оцінки в функціональних нерівностях, та залежність між функціональними нерівностями та геометричними характеристиками.

Основними *методами* дослідження є методи багатовимірного аналізу, теорії міри, мартингальні методи, понятійний апарат і методи геометричної теорії міри.

Наукова новизна одержаних результатів. Усі одержані наукові результати дисертаційної роботи є новими. Зокрема, у роботі та статтях автора:

- досліджені властивості ліфт зоноідів для максимально узагальненого випадку циліндричної міри в банаховому нескінченно-вимірному просторі;
- встановлено властивість однозначного представлення точок внутрішності випуклої замкненої оболонки носія міри як барицентра півпростору;
- введено поняття узагальненого ліфт зоноіда та досліджено його основні властивості;
- в термінах узагальнених ліфт зоноідів отримана достатня умова для виконання узагальненої оберненої логарифмічної нерівності Соболева;
- отримана нова сім'я достатніх умов, за яких ймовірнісна міра на дійсній прямій задовольняє пряму логарифмічну нерівність Соболева;
- для класу цензурованих гауссових мір в \mathbb{R}^d отримано поліноміальні оцінки сталої в нерівності Пуанкаре;
- запропоновані загальні мартингальні оцінки для ентропії та варіації, для величин на \mathbb{R}^d з фіксованою нарізкою множин;
- для зважених логарифмічної нерівності Соболева та Пуанкаре на прямій

отримано аналоги критеріїв Макенхаупта та Бобкова-Гьотце.

Практичне значення одержаних результатів. Отримані в роботі результати мають теоретичне значення при вивченні геометричної теорії ймовірностей та стохастичної геометрії, зокрема при дослідженні зв'язку між геометричними характеристиками мір та функціональними нерівностями, у цих результатах зроблено узагальнення для найбільш широкого можливого випадку нескінно-вимірного простору з циліндричною мірою. Крім того, з таких функціональних нерівностей, як логарифмічна нерівність Соболева та Пуанкаре, випливають нерівності концентрації, які мають практичне застосування у побудові довірчих інтервалів у статистичному оцінюванні і при наведенні неасимптотичних оцінок похибок в задачах моделювання.

Особистий внесок здобувача.

Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлено власні ідеї і розробки автора, що дозволили розв'язати поставлені завдання. Робота містить теоретичні та методичні положення і висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення чи гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на [92], [105], [93], [94] та семінарах:

- засіданні наукового семінару «Теорія ймовірностей та математична статистика» кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного

університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Мішури Ю. С. та проф. Козаченка Ю. В. (м. Київ, Україна, 2013, 2015, 2016);

- засіданні наукового семінару «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» під керівництвом проф. Клесова О. І. та проф. Іванова О. В. (м. Київ, Україна, 2016);

- засіданні наукового семінару відділу математичних методів дослідження операцій Інституту кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України під керівництвом проф., члена-кореспондента НАН України П. С. Кнопова (м. Київ, Україна, 2016);

- засіданні наукового семінару «Forschungsseminar, PU» під керівництвом проф. Сільвії Роеллі (м. Потсдам, Німеччина, 2013);

- засіданні наукового семінару кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка під керівництвом проф. Шевчука І. О. (м. Київ, Україна, 2013).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в [68], [69], [104], [70], [91]

Структура та обсяг роботи.

Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел. Обсяг дисертації становить 139 сторінок машинописного тексту, список використаних джерел налічує 104 найменування і займає 12 сторінок.

Розглянемо стислий зміст всіх структурних елементів дисертації.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету та методи досліджень, описується наукова новизна одержаних результатів та наводяться форми їх апробації, охарактеризовано зміст кожного розділу дисертації.

Перший розділ містить історичний огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **другому** розділі наводяться деякі означення та твердження про геометричні властивості мір та функціональні нерівності, що мають безпосереднє відношення до змісту дисертаційної роботи, зокрема: зоноїди, ліфт зоноїди та нарізка множин, побудованих за мірою, функціональні нерівності Пуанкаре та логарифмічна нерівність Соболева.

У **третьому** розділі розглядається такі характеристики міри як зоноїди, ліфт зоноїди, нарізка множин. Всі ці поняття узагальнюються на максимально можливий випадок нескінченно-вимірного простору з циліндричною мірою і доводяться всі відповідні властивості. Також доводиться теорема про зображення, яка є новим результатом не тільки в нескінченно-вимірному просторі, але і у скінченновимірному випадку.

У **четвертому** розділі розглядається узагальнений зважений ліфт зоноїд, нелійні нерівності зсуву, зважена обернена логарифмічна нерівність Соболева. Також доводиться пряма зважена логарифмічна нерівність Соболева, з якої ми одержуємо як наслідок звичайну логарифмічну нерівність Соболева, і для таких функцій, що мають необмежену знизу похідну від логарифмічної похідної міри (такі функції не задовільняють класичним критеріям для логарифмічної нерівності Соболева). Як приклад, доводяться нерівності Пуанкаре для цензурованих гауссових мір, отримуються поліноміальні оцінки на константу в нерівності.

У п'ятому розділі розглядаються загальні мартингальні оцінки ентропії та варіації функцій, причому фільтрація мартингалів породжується сім'єю множин побудованих по типу нарізки множин міри. Наводяться наслідки з цих оцінок у вигляді нерівності Пуанкаре та логарифмічної нерівності Соболева в одномірному випадку.

У висновках сформульовано основні результати дисертаційної роботи. Результати дисертаційної роботи можуть бути застосовані для розв'язання практичних задач, зокрема для доведення нерівностей концентрації.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертації

1.1 Геометричні характеристики міри. Зоноїди

Поняття *зоноїда* і *ліфт зоноїда* введені Глібом Кошевим та Карлом Мослером в 1997 році в [53] і мають різноманітний діапазон застосування. Оскільки ліфт зоноїд визначає задану міру однозначно, це поняття може бути використане в багатовимірній статистиці для вимірювання змін в розподілі випадкових векторів, і для впорядкування розподілів, дивись [55]. Поняття *зоноїдної еквівалентності* природнім чином з'являється і мотивоване фінансовими застосуваннями, і корисне для доведення розширення ергодичної теореми для зоноїдної стаціонарності і зоноїдної випадкової послідовності інваріантною відносно перестановок, див. І. Molchanov, M. Schmutz, K. Stucki [75], [76]. Ліфт зоноїд природнім чином призводить до пов'язаного з ним означення α -нарізки і зоноїдної глибини, дивись [53] і [30], і до барицентричного представлення точок в просторі з заданою мірою, дивись [53] і [68]. Останнім часом теорія зоноїдів та асоційованих з ними об'єктів набула значного розвитку, див. [89], [77], [34], [82], [59], [47]. Було розвинене широке коло її застосувань, зокрема, у нестандартних принципах інваріантності ([76], [75], [76]), різноманітних задачах, що потребують введення часткового порядку та поняття глибини даних (див. [53], [54], [55], [56], [57], [58], [38], [40], [41], [29], [30]). Щодо методів обчислення зоноїдів та асоційованих з ними об'єктів див. [9], [10],

[52].

Значна частина розділу 3 присвячена застосуванню поняття ліфт зоноїда до барицентричного представлення точок початкового простору відносно заданої на ньому міри. Можливість такого застосування згадувалась в [53]; однак, відповідна теорема 3.1 в [53] не є найкращою. В розділі 3 для *неперервної міри* μ (див. умову (3.8) розділу 3) кожна внутрішня точка замкненої випуклої оболонки носія $S(\mu)$ міри μ має *однозначне* представлення як барицентр якого-небудь півпростору, або цілого простору. Це барицентричне зображення по суті схоже на класичну теорему Крейна-Мільмана (див. [86], Розділ 3), але на відміну від теореми Крейна-Мільмана має важливу властивість однозначності представлення. В деяких цікавих випадках це робить можливим ввести *барицентричні координати* на початковому просторі.

Поняття зоноїда може бути розширене на нескінченно-вимірний випадок, і таке розширення може бути, як виявляється особливо корисним. Наприклад, було показано в [23], що (аналог) ліфт зоноїда, індукований броуновським рухом, може бути використаний в аналізі стійкості до збурень певної ітераційної задачі вибору портфолію. Загальну теорію зоноїдів у нескінченно-вимірних просторах розвинуто у розділі 3, що базується на статті [68].

1.2 Класичні нерівності Пуанкаре і Соболева та їх узагальнення

У славетній роботі Л.Гросса [50] логарифмічну нерівність Соболева, яка у класичному формулюванні наводиться для міри Лебега у обмеженій області, було доведено для гауссової ймовірнісної міри на

скінченновимірному просторі. У цій же роботі було встановлено зв'язок логарифмічної нерівності Соболева з властивістю гіперстиску для асоційованої півгрупи Орнштейна-Уленбека – явище відоме раніше, але яке отримувалось складними аналітичними методами. Майже негайно ці результати отримале широке узагальнення. Активно досліджувалось питання про те, для яких мір виконується логарифмічна нерівність Соболева, див. [100], [7]. У роботі [1] наведено загальну достатню умову (т.з. критерій Бакрі-Емері) для того, щоб ймовірнісна міра задовольняла логарифмічну нерівність Соболева. Цей критерій використовує поняття *кривизни* та у подальшому зазнав значних модифікацій та узагальнень, див. [97], [98], [35]. Було встановлено значний об'єм перехресних зв'язків між логарифмічною нерівністю Соболева та іншими типами функціональних нерівностей: ізопериметрична нерівність, нерівності транспорту, нерівність Брунна-Мінковського, див. [15], [16], [84], [18], [14], [12], [6], [2], [17], [81]. Природним чином, логарифмічна нерівність Соболева пов'язана з властивостями асоційованої півгрупи: спектральні властивості генератора (наявність т.з. спектральної щілини), наявність експоненційної ергодичності (у певному сенсі), наявність умов типу Ляпунова, див. [33], [27],[13], [31], [32], [4], [83]. Ці властивості, зазвичай у слабших формах, також можна отримати, використовуючи іншу класичну нерівність – нерівність Пуанкаре. Нерівність Пуанкаре накладає менше вимог на структуру міри, але з іншого боку дає менш точну інформацію про асоційовану півгрупу. Тому значна увага була присвячена дослідженню достатніх умов для виконання різноманітних узагальнених нерівностей, що є проміжними між логарифмічною нерівністю Соболева та нерівністю Пуанкаре, див. [85], [71], [11], [3], [99], [96].

1.3 Нерівності концентрації

Визначною властивістю логарифмічної нерівності Соболева та нерівності Пуанкаре є те, що для мір, які задовольняють таким нерівностям, виконуються гауссові нерівності концентрації та, відповідно, експоненційні нерівності концентрації. Наявність таких нерівностей є принципово важливою для застосувань у статистиці, стохастичному моделюванні, у зв'язку із чим цій тематиці була присвячена значна увага (див. огляди у [72], [49], [51]). Застосування нерівностей концентрації, що базуються на логарифмічній нерівності Соболева, останнім часом набуло значної популярності (див. [46]). Зауважимо, що ефективне застосування цих нерівностей вимагає певної гладкості від досліджуваних функціоналів, що у ряді ситуацій може бути істотним обмеженням. У зв'язку із цим значний інтерес становить інший метод, що базується на понятті субгауссових випадкових величин та його узагальненнях (перед-гауссові та φ -субгауссові величини). Основи цього методу закладено у монографії [24], щодо його подальшого розвинення та застосувань див. [90], [60], [61], [62], [25], [101], [63], [64], [66], [102], [65], [67].

1.4 Нерівності зсуву та обернена логарифмічна нерівність Соболева. Зважені нерівності Соболева та Пуанкаре, цензуровані міри

У важливій роботі [19] був наведений цикл результатів, що пов'язав властивості лінійних зсувів даної міри та функціональну нерівність, що є у певному сенсі оберненою до логарифмічної нерівності Соболева. Цей

результат міститься у напрямку досліджень, описаному у розділі 1.2, тобто пов'язує різні типи функціональних нерівностей (нерівність зсуву з оберненою логарифмічною нерівністю Соболева). У роботі [5] було зроблено важливе спостереження про те, що проміжний результат з роботи [19], так звана функціональна версія нерівності зсуву, може бути еквівалентним чином сформульований у термінах певної множини барицентрів щодо даної міри з вагою, що відповідає логарифмічній похідній міри. Це спостереження дозволило авторам [5] розширити результати [19] на клас мір більш загальний, ніж продакт-міри (що розглядались у [19]). Остаточного розвитку ця лінія досліджень набула у роботі здобувача [69], на якій базується розділ 4.1 дисертаційної роботи. У цій статті було встановлено еквівалентність функціональної нерівності зсуву до відношення зваженого зоноїдного порядку з вагою, вказаною вище. В цій же роботі було наведено максимальне узагальнення результатів [19], зокрема, було встановлено еквівалентність між властивостями нелінійних зсувів даної міри, зваженої оберненої логарифмічної нерівності Соболева та відношенням зваженого зоноїдного порядку. Таким чином, у [69] встановлено глибинний зв'язок між двома, на перший погляд, зовсім відмінними областями дослідження, присвяченим зоноїдам та функціональним нерівностям, відповідно.

Зваженим та модифікованим нерівностям Соболева та Пуанкаре присвячено особливу увагу. Це пояснюється сукупністю двох обставин: по-перше, зазвичай виконання цих нерівностей у класичному вигляді пов'язане з нетривіальними структурними обмеженнями, такими як додатність кривизни у критерії Бакрі-Емері. По-друге, наявність таких нерівностей дозволяє отримувати корисні наслідки (нерівності концентрації, тощо). Це привело до появи широкого спектру робіт, в яких певні модифікації нерівностей Соболева та Пуанкаре доводились за більш гнучких умов на

міру, див. [43], [44], [45], [8], [78]. Вибір конкретної форми модифікованої нерівності Соболева або Пуанкаре зазвичай є складною задачею. Тому надзвичайно вдалою є та обставина, що завдяки зваженим оберненим логарифмічним нерівностям Соболева, встановленим у [69], ми маємо можливість явно встановлювати потрібну форму вагової функції. Це дозволило у статті [104] встановити нову зважену нерівність Соболева, яка знайшла ефективне застосування у наступній області.

Останнім часом значний інтерес пов'язаний з дослідженням нерівності Соболева та Пуанкаре для «цензурованих» мір, див. [73], [21]. Найпростіший приклад тут становить міра, що отримується як умовний розподіл гауссової міри на зовнішності деякої кулі. На відміну від випадку міри, зосередженої всередині кулі (для якої застосовний критерій Бакрі-Емері та відповідна стала у нерівності Соболева не залежить від радіусу кулі та її розташування), ця ситуація є значно більш залежною від геометричних властивостей моделі. У роботі [21] наведено різні верхні оцінки на сталу у нерівності Пуанкаре для цензурованої гауссової міри в залежності від положення цензурованої кулі. Для випадку кулі великого радіусу R , розташованої на відстані більшій за $2R$ від початку координат, оцінка роботи [21] $O(e^{cR^2})$ є надзвичайно неточною. У роботі [104] отримано значно точнішу оцінку виду $O(R^p)$.

1.5 Мартингальний підхід до доведення функціональних нерівностей

Серед широкого спектру методів доведення функціональних нерівностей окремо виділяється ймовірнісний підхід, що базується на певній мартингальній структурі. У роботах [48], [26] було показано, що поєднання

класичної формули Clark-Ocone-Hausmann (див. [37], [80]) із методами стохастичного аналізу дозволяє просто отримувати логарифмічну нерівність Соболева для розподілу броуновського руху на відповідному просторі траєкторій (цей простір може бути нелінійним, у випадку броуновського руху на многовиді). Цей метод не зазнав широкого розвитку з огляду на специфічність моделі. Через це надзвичайно перспективним виглядає запропоноване у роботах [70], [91] узагальнення цього методу на довільні міри. Це узагальнення передбачає попередню побудову допоміжної мартингальної структури за допомогою введення *часової розгортки*, а отже не є обмеженим специфічною структурою міри.

Розділ 2

Попередні відомості та допоміжні результати

У другому розділі наведено означення зоноїду, ліфт зоноїду, зоноїдні нарізки множин, циліндричної міри та твердження, з якого випливає, що ліфт зоноїд та зоноїдна нарізка множин однозначно задає міру. Також наведена теорема про барицентричне зображення точок в скінченновимірному просторі.

2.1 Геометричні характеристики міри

Нехай μ – ймовірнісна міра зі скінченним першим моментом, визначена на Борелівській σ -алгебрі в \mathbb{R}^d . Поняття зоноїд, ліфт зоноїд та нарізка множин введені Глібом Кошевим та Карлом Мослером в 1997 році в статті [55].

Означення 1.1 Зоноїд $Z(\mu)$ міри μ – це множина всіх точок в \mathbb{R}^d наступного виду

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) x \mu(dx) \quad (2.1)$$

для довільної вимірної $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$.

Означення 1.2 Ліфт зоноїд $\hat{Z}(\mu)$ визначається як зоноїд міри $\delta_1 \times \mu$ в \mathbb{R}^{d+1} , тобто

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mu(dx), \int_{\mathbb{R}^d} g(x) x \mu(dx)\right)$$

для довільної вимірної $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$.

Зауваження 1.1 Якщо X – випадковий вектор з розподілом μ , тоді зоноід $Z(\mu)$ і ліфт зоноід $\hat{Z}(\mu)$ – це множини точок наступної форми

$$Eg(X)X \in \mathbb{R}^d \text{ і } (Eg(X), Eg(X)X) \in \mathbb{R}^{d+1} \quad (2.2)$$

відповідно. Зоноід $Z(\mu)$ (відповідно, ліфт зоноід $\hat{Z}(\mu)$) є випуклою компактною множиною в \mathbb{R}^d (відповідно, \mathbb{R}^{d+1}), симетричною відносно точки $(1/2)EX$ (відповідно, точки $((1/2), (1/2)EX)$).

Зауваження 2.1.2

1. У скінченномірному випадку є альтернативне визначення зоноїду як сподівання випадкового відрізка $[0, X]$, див. [55] Твердження 2.2. Отже, $Z(\mu) = E([0, X])$.

$$2. \hat{Z}(\mu) = E[0, (1, X)].$$

Означення 2.1.3 Для $\alpha \in (0,1]$ зоноїдна α -нарізка множин $D_\alpha(\mu)$ це множина всіх точок в \mathbb{R}^d вигляду

$$1\alpha E[\eta X],$$

де випадкова величина $\eta: \Omega \rightarrow [0,1]$, пробігає всі випадкові величини такі, що $E\eta = \alpha$.

Тепер сформулюємо твердження, яке дає нам можливість говорити про те, що ліфт зоноід це характеристика міри.

Твердження 1.1 Ліфт зоноїди двох мір збігаються тоді і тільки тоді, коли співпадають самі міри. Тобто

$$\hat{Z}(\mu) = \hat{Z}(\lambda) \Leftrightarrow \mu = \lambda.$$

В цьому підрозділі вводиться *барицентричне зображення* в X відносно даної циліндричної міри μ . Ми припускаємо, що μ *неперервна* в тому сенсі, що

$$\mu(\{x: \langle x, x^* \rangle = a\}) = 0, \quad x^* \in X \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Для циліндричної множини A з $\mu(A) > 0$ її *барицентр* відносно μ визначається рівністю

$$B_A(\mu) = \frac{\int_A x \mu(dx)}{\mu(A)}$$

(інший термін для барицентра $B_A(\mu)$ – це A -*центроїд* міри μ , див. [53]).

Наступна теорема – це скінченновимірний випадок теореми про зображення, яка буде доведена в Розділі 3 для нескінченно-вимірних просторів. Для цього випадку є деякі послаблення умов на міру μ .

Теорема 1.1 *Нехай μ – ймовірнісна міра порядку 1 така, що міра будь-якої гіперплощини дорівнює нулю.*

Тоді виконуються наступні твердження:

1. Множина $\mathbf{B}(\mu) = \{B_A(\mu), \mu(A) > 0\}$ всіх барицентрів відносно μ збігається з внутрішністю множини $\mathbf{S}(\mu)$.

2. Будь-яка точка $x \in \mathbf{B}(\mu)$ має зображення у формі

$$x = B_H(\mu), \quad H \in \mathbb{H}^X, \quad \mu(H) > 0, \quad (2.4)$$

де $\mathbb{H}^{\mathbb{R}^d}$ – множина всіх півпросторів \mathbb{R}^d . Це зображення однозначне в наступному розумінні: якщо $B_H(\mu) = B_G(\mu)$ для деяких $H, G \in \mathbb{H}^X$, тоді

$$\mu(H \Delta G) = 0.$$

Для узагальнення наведених результатів на нескінченно-вимірний простір, що будуть описані в Розділі 3, треба ввести наступні твердження.

Означення 1.4 Нехай X – рефлексивний сепарабельний банахів простір. Позначимо через \mathcal{C} його циліндричну алгебру – це сім'я підмножин в X вигляду

$$\{x \in X : (\langle x, x_1^* \rangle, K \langle x, x_m^* \rangle) \in B\}, \quad m \geq 1, \quad x_1^*, K, x_m^* \in X^*, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m),$$

тут і надалі X^* позначає спряжений простір до X , і $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначає спряження між X і X^* .

Означення 1.5 Циліндрична ймовірнісна міра μ , задана на \mathcal{C} першого типу (див. [95], Розділ IV, § 5), – це адитивна функція $\mu: \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ така, що

- для будь-якого $m \geq 1, x_1^*, K, x_m^* \in X^*$ звуження μ до σ -алгебри

$$\mathcal{C}_{x_1^*, K, x_m^*} := \{ \{x : (\langle x, x_1^* \rangle, K \langle x, x_m^* \rangle) \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \} =$$

$$\sigma(\langle \cdot, x_1^* \rangle, K, \langle \cdot, x_m^* \rangle)$$

– це ймовірнісна міра;

- існує $C_\mu > 0$ таке, що

$$\int_X |\langle x, x^* \rangle| \mu(dx) \leq C_\mu P_{x^*} P_{X^*}, \quad x^* \in X^*. \quad (2.5)$$

Зауваження 1.3 Циліндрична ймовірнісна міра не обов'язково σ -

аддитивна. В цьому розділі, щоб уникнути непорозуміння, ми будемо писати “ σ -адитивна ймовірнісна міра” замість звичайного “ймовірнісна міра”.

Зауваження 1.4 Циліндричну міру μ можна природнім чином інтерпретувати, як “розподіл” узагальненого випадкового елемента X в X з скінченним 1-им порядком, який є за означенням лінійним обмеженим оператором

$$X : X^* \rightarrow L_1(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

де (Ω, \mathcal{F}, P) – ймовірнісний простір; див. [95], Розділ IV докладніше. Середнє значення $\int_X x \mu(dx)$, інакше кажучи, математичне сподівання $E[X]$ добре визначене в наступному сенсі. Легко бачити, що оператор

$$T : X^* \ni x^* \mapsto \int_X \langle x, x^* \rangle \mu(dx) = E\langle X, x^* \rangle \in \mathbb{R}$$

лінійний та неперервний. Оскільки, X за припущенням рефлексивний, існує $x_\mu \in X$ такий, що $T(x^*) = \langle x_\mu, x^* \rangle$. За означенням,

$$\int_X x \mu(dx) = E[X] = x_\mu.$$

Помітимо, що за аналогічними міркуваннями, для будь-якої обмеженої випадкової величини η математичне сподівання $E[\eta X] \in X$ добре визначене.

Зауваження 1.5 Коли X – звичайний випадковий елемент в сепарабельному банаховому просторі, існування математичного сподівання $E[X]$ може бути гарантоване різними припущеннями щодо властивостей моментів X , наприклад, існування сильного моменту 1 порядку ([95], Розділ II, Твердження 3.2) або слабкий момент порядку $p > 1$ ([95], розділ II, теорема 3.1). На жаль, для узагальненого випадкового елемента X

достатні умови, які згадувались вище не застосовні, ось чому в цілому ми припускаємо, що X рефлексивний. Нижче у всіх результатах Розділу 3 припущення рефлексивності може бути опущеним, якщо μ – це σ -адитивна міра, яка задовольняє відповідну умову на момент.

2.2 Функціональні нерівності

Наведемо необхідні попередні відомості. Нехай μ – ймовірнісна міра на \mathbb{R}^n , абсолютно неперервна відносно міри Лебега. Далі ми використовуємо позначення

$$\mathbf{E}_\mu f = \int f d\mu$$

$$\text{Var}_\mu f = \int f^2 d\mu - (\int f d\mu)^2.$$

для математичного сподівання та дисперсії функції f відносно міри μ відповідно. Для невід'ємної функції f також позначатимемо ентропію функції f відносно міри μ :

$$\mathbf{Ent}_\mu f = \int f \ln f d\mu - \left[\int f d\mu \right] \ln \int f d\mu$$

За означенням, для міри μ виконується логарифмічна нерівність Соболева зі сталою $c > 0$, якщо для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і ∇f квадратично-інтегровні відносно міри μ , виконується:

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq c \mathbf{E}_\mu |\nabla f|^2.$$

Для міри μ виконується нерівність Пуанкаре, зі сталою $c > 0$, якщо для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і ∇f квадратично інтегровні відносно міри μ , виконується

$$\text{Var}_\mu f \leq c E_\mu \nabla f \mathbf{P}^2$$

Відомо, що з логарифмічної нерівності Соболева для міри μ випливає нерівність Пуанкаре з тією ж сталою ([4] Твердження 2.1 с.144).

Нехай γ_n – стандартна гаусівська міра на \mathbb{R}^n , $V \subseteq \mathbb{R}^n$ – довільна вимірنا множина з $\gamma_n(V) > 0$. Під цензурованою гаусівською мірою надалі ми розуміємо міру γ_n^V :

$$\gamma_n^V(A) = \frac{\gamma_n(A \cap V)}{\gamma_n(V)}$$

тобто умовну гаусівську міру, в якій V – множина допустимих значень, а відповідно $\mathbb{R}^n \setminus V$ – цензурована множина.

Класичні доведення логарифмічної нерівності Соболева та Пуанкаре, наприклад, метод Бакрі-Емері (див. [3]), потребують обмежень на похідну від логарифмічної похідної міри і не є безпосередньо застосовними до цензурованих мір (за винятком тривіального випадку $V = \mathbb{R}^n$). Такі методи, однак, неважко узагальнити для отримання логарифмічної нерівності та нерівності Пуанкаре для міри γ_n^V з опуклими множинами V . Випадок V , що не є опуклою, виявляється істотно більш складним; його дослідження було започатковане в недавній статті [2], цілком присвяченій геометрично найпростішому випадку, в якому цензурована множина є кулею. Міру γ_n^V , в якій $\mathbb{R}^n \setminus V$ – куля, ми називаємо *сферично цензурованою* гаусівською мірою. У статті [2] запропоновані методи доведення нерівності Пуанкаре для сферично-цензурованої гаусівської міри та оцінки для відповідних сталих c в термінах радіуса R цензурованої кулі.

В даній статті ми одержали верхню оцінку на сталу c в нерівності Пуанкаре для сферично-цензурованої міри, яка є поліміальною відносно радіуса кулі. Для цього ми, використовуємо метод, запропонований в [1],

аналізуючи сталу в логарифмічній нерівності Соболева для одномірної проекції сферично-цензурованої гаусівської міри на пряму, що проходить через центр відповідної кулі та центр координат. Це, як наслідок, дає оцінку на сталу в нерівності Пуанкаре для такої міри, що дозволяє застосувати метод “розкладу дисперсії” (“decomposition of variance”) зі статті [2].

Істотна відмінність між мірами з опуклими допустимими множинами та сферично-цензуваними добре ілюструє той факт, що, згідно з рівняннями [2], відповідна стала з необхідністю буде залежати від радіусу цензурованої кулі. Водночас, характер такої залежності ще не є достатньо дослідженим. В [2] виказується гіпотеза про те, що стала c при великих R не перевищує $c_1 R^2$. З іншого боку, для деяких випадків (R велике і відстань від початку координат до центру кулі лежить в інтервалі $[0, (1+\sqrt{2})R]$) у [2] отримано лише значно слабша оцінка $c \leq c_1 e^{c_2 R^2}$.

Розділ 3

Геометрична структура міри в контексті барицентричних координат

В цьому розділі узагальнені на максимально можливий випадок такі геометричні характеристики міри як зоноід, ліфт зоноід та зоноїдна нарізка множин у випадку нескінченно-вимірного простору з циліндричною мірою, а також доводяться відповідні властивості у нескінченно-вимірному випадку. Також наводиться теорема про зображення, яка є новим результатом не тільки в нескінченно-вимірному просторі, але і у скінченновимірному випадку.

Третій розділ має наступну структуру. В підрозділі 3.1. ми вводимо поняття зоноїду, ліфт зоноїду і зоноїдної нарізки множин, індукованих циліндричною ймовірнісною мірою в банаховому просторі. Наведемо основні властивості цих об'єктів і сформулюємо основні результати про барицентричне зображення відносно даної циліндричною міри μ . Барицентричне зображення в підрозділі 3.2 базується на припущенні, що *зоноїдна оболонка* $L(\mu)$ збігається з початковим простором (див. означення і обговорення в зауваженні 2.1). Для σ -адитивної міри μ таке припущення зазвичай не вдається; в підрозділі 3.3 ми формулюємо версію теореми про барицентричне зображення для простору з σ -адитивною мірою μ , яка враховує природну топологію зоноїдної оболонки $L(\mu)$. В підрозділі 3.4 ми обговорюємо спосіб, яким барицентричне зображення призводить до трьох тісно пов'язаних типів барицентричних координат в початковому просторі. В

підрозділі 3.5 ми розглядаємо наочний приклад з μ або центрованою циліндричною гаусівською мірою з тотожним коваріаційним оператором, або центрованою σ -адитивною гаусівською мірою.

3.1 Означення та властивості

Нехай μ – циліндрична ймовірнісна міра зі скінченним першим моментом, визначена на циліндричній алгебрі \mathcal{C} в рефлексивному сепарабельному банаховому просторі X , а X – випадковий вектор, який реалізує циліндричну міру μ .

Означення 1.1 *Зоноід $Z(\mu)$ циліндричної міри μ – це множина всіх точок в X виду $E[\eta X]$, де X – узагальнений випадковий елемент в X з розподілом μ , і $\eta: \Omega \rightarrow [0,1]$ пробігає всі $\sigma(X)$ -вимірні випадкові величини.*

Ліфт зоноід $\hat{Z}(\mu)$ – це множина всіх точок в $\mathbb{R} \times X$ виду $(E\eta, E[\eta X])$, де $\eta: \Omega \rightarrow [0,1]$ пробігає всі $\sigma(X)$ -вимірні випадкові величини.

Для $\alpha \in (0,1]$ зоноїдна α -нарізка множин $D_\alpha(\mu)$ – це множина всіх точок в X виду $1_\alpha E[\eta X]$, де випадкова величина $\eta: \Omega \rightarrow [0,1]$ пробігає множину F_α всіх $\sigma(X)$ -вимірних випадкових величин таких, що $E\eta = \alpha$.

В попередніх результатах у скінченномірній ситуації в зауваженні 2 нагадується означення зоноїду як сподівання випадкового відрізка $[0, X]$. Для завершення списку основних властивостей зоноїду циліндричної ймовірнісної міри ми даємо розширення цього означення для нескінченно-вимірної ситуації.

Означення 1.2 Позначимо через S_{X^*} одиничну сферу в X^* , і $h(C, \cdot)$ – опорна функція опуклої множини $C \subseteq X$:

$$h(C, x^*) = \sup\{\langle x, x^* \rangle, x \in C\}, \quad x^* \in S_{X^*}.$$

Розглянемо “випадковий відрізок” $[0, X]$, який узагальнений в тому сенсі, що X – узагальнений випадковий елемент в X . Відмітимо, що для будь-якого $x^* \in S_{X^*}$ відповідне значення опорної функції

$$h([0, X], x^*) = \langle X, x^* \rangle_+ := (\langle X, x^* \rangle \vee 0)$$

вимірне відносно S_{X^*} , обмежене випадковою величиною $|\langle X, x^* \rangle|$, а, отже, інтегроване.

Означення 1.3 Визначимо математичне сподівання $E[0, X]$ випадкового відрізка $[0, X]$ як опуклу замкнену множину в X таку, що

$$h(E[0, X], x^*) = Eh([0, X], x^*), \quad x^* \in S_{X^*}. \quad (3.1)$$

Твердження 1.1

1. Множина $E([0, X])$ добре визначена (3.1), і $Z(\mu) = E([0, X])$.
2. $\hat{Z}(\mu) = E[0, (1, X)]$.

Доведення твердження 1.1 близьке до доведення твердження 2.2 в [55], з невеликою різницею, викликаною тим, що $Z(\mu)$ не обов’язково компактне.

Зауваження 1.1 (а) Якщо X – випадковий вектор в \mathbb{R}^d , тоді будь-яка $\sigma(X)$ -вимірна випадкова величина η має вигляд $\eta = g(X)$ з борелівською вимірною функцією $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Таким чином, наведене вище означення є прямим узагальненням скінченновимірних означень зоноїда і ліфт зоноїда, що згадуються у вступі.

(b) Будь-який $\eta \in F_1$ дорівнює 1 майже напевне, отже, $D_1(\mu)$ – одноточкова множина $\{x_\mu\}$.

В наступній теоремі сходяться разом всі базові означення зоноїда, ліфт зоноїда і зоноїдної нарізки множин. Позначимо через \mathcal{H}^X клас всіх множин вигляду $\{x \in X : \langle x, x^* \rangle \leq a\}$ з $x^* \in X$, $a \in \mathbb{R}$; легко побачити, що кожна множина $H \in \mathcal{H}^X$ – це циліндрична множина. Позначимо також

$$S(\mu) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}^X: \mu(H)=1} H;$$

помітимо, що у випадку $X = \mathbb{R}^d$ і (звичайної) ймовірнісної міри μ множина $S(\mu)$ збігається з опуклою замкнутою оболонкою топологічного носія міри μ

Позначимо

$$D_0(\mu) = \bigcap_{\alpha \in (0,1]} D_\alpha(\mu).$$

Теорема 1.1 *Нехай μ – циліндрична ймовірнісна міра порядку 1, і X буде відповідним узагальненим випадковим елементом.*

Тоді виконуються наступні властивості.

- $Z(\mu)$ і $\hat{Z}(\mu)$ – замкнуті і опуклі множини в X і $\mathbb{R} \times X$ відповідно.
- $Z(\mu)$ і $\hat{Z}(\mu)$ і симетричні відносно точок $(1/2)E[X]$ і $((1/2), (1/2)E[X])$ відповідно.
- $\hat{Z}(\mu)$ визначає μ однозначно.
- Кожна $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1]$ – це обмежена замкнена множина в X .
- $D_\alpha(\mu) \supseteq D_\beta(\mu)$ для будь-якого $\alpha < \beta$.
- Якщо μ центрована (тобто $E[X] = 0$), тоді

$$\alpha D_\alpha(\mu) = -(1-\alpha)D_{1-\alpha}(\mu), \quad \alpha \in (0,1]$$

- Для будь-якої послідовності $\alpha_n \rightarrow \alpha \in (0,1)$

$$D_{\alpha_n}(\mu) \rightarrow D_\alpha(\mu)$$

в термінах відстані Хаусдорфа. В точці $\alpha = 1$ сім'я множин $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1]$ неперервна в наступному сенсі:

$$D_1(\mu) = \bigcap_{\alpha \in (0,1)} D_\alpha(\mu).$$

- Замикання $D_0(\mu)$ співпадає з $\mathbf{S}(\mu)$.

Доведення. Не втрачаючи загальності, ми припускаємо, що μ центрована міра.

Твердження (a), (b). Ясно, що достатньо довести (a) і (b) тільки для зоноїда $Z(\mu)$. Опуклість $Z(\mu)$ випливає із означення: якщо $x_1 = E[\eta_1 X]$ і $x_2 = E[\eta_2 X]$ – деякі точки з $Z(\mu)$, тоді для будь-якого $c \in [0,1]$ точка $cx_1 + (1-c)x_2 = E[(c\eta_1 + (1-c)\eta_2)X]$ так само належить $Z(\mu)$. Симетричність випливає з означення: для будь-якого $x = E[\eta X] \in Z(\mu)$ симетрична точка $(-x)$ може бути представлена як $(-x) = E[(1-\eta)X]$, і, отже, належить $Z(\mu)$.

Оскільки $x = E[\eta X] \in Z(\mu)$, для неї виконується (2.5)

$$|\langle x, x^* \rangle| \leq E|\eta| |\langle X, x^* \rangle| \leq E|\langle X, x^* \rangle| \leq C_\mu \mathbf{P}_x \mathbf{P}_{x^*}^*, \quad x^* \in X^*,$$

множина $Z(\mu)$ лежить в кулі $\{x: \mathbf{P}_x \mathbf{P}_x \leq C_\mu\}$ і, отже, обмежена.

Нехай $x_n = E[\eta_n X], n \geq 1$ – послідовність із $Z(\mu)$. Розглянемо змінні $\eta_n, n \geq 1$ в

якості елементів одиничної кулі в просторі $L_\infty(\Omega, \sigma(X), P) = (L_1(\Omega, \sigma(X), P))^*$. Тоді за теоремою Банаха-Алаоглу (див. [86], Розділ 3) існує $*$ -слабко збіжна підпослідовність $\{\eta_{n_k}\}$, позначимо її границю через $\hat{\eta}$.

Тоді

$$\langle x_{n_k}, x^* \rangle = E\eta_{n_k} \langle X, x^* \rangle \rightarrow E\hat{\eta} \langle X, x^* \rangle, \quad x^* \in X^*.$$

Таким чином, якщо $x_n \rightarrow x$ в X , тоді $x = E[\hat{\eta}X] \in Z(\mu)$; отже, $Z(\mu)$ – замкнена множина.

Твердження 1. Насправді, ми тільки що довели, що для будь-якої послідовності $\{x_n\} \subseteq Z(\mu)$ існує підпослідовність $\{x_{n_k}\}$, слабко збіжна до $\hat{x} := E[\hat{\eta}X]$. Давайте доведемо, що $x_{n_k} \rightarrow \hat{x}$ (сильно) в X ; це дасть нам потрібну властивість компактності.

Припустимо, що $x_{n_k} \not\rightarrow \hat{x}$ in X , ми маємо послідовність $\{x_k^*\}$ елементів одиничної сфери X^* таких, що

$$\langle x_{n_k} - \hat{x}, x_k^* \rangle \not\rightarrow 0. \quad (3.2)$$

З теореми Банаха-Алаоглу, ми можемо припустити, не втрачаючи загальності, що $x_k^* \rightarrow x^*$ $*$ -слабко. Тоді

$$\langle X, x_k^* \rangle \rightarrow \langle X, x^* \rangle,$$

з ймовірністю 1. З рівномірної інтегрованості (3.4) ця збіжність також виконується у $L_1(\Omega, \sigma(X), P)$. Тоді

$$\langle x_{n_k}, x_k^* \rangle = E\eta_{n_k} \langle X, x^* \rangle + E\eta_{n_k} (\langle X, x_k^* \rangle - \langle X, x^* \rangle) \rightarrow E\hat{\eta} \langle X, x^* \rangle = \langle \hat{x}, x^* \rangle$$

тому що $\eta_{n_k} \rightarrow \hat{\eta}$ $*$ -слабко в $L_\infty(\Omega, \sigma(X), P)$. Останнє співвідношення суперечить (3.2). Це доводить компактність $Z(\mu)$. Для $\hat{Z}(\mu)$ і $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0, 1]$, доведення абсолютно аналогічне.

Твердження (с). Доведення цілком аналогічне доведенню теореми 3.5, [55] в скінченновимірному випадку, отже, ми просто опишемо його.

Для $x^* \in X^*$ позначимо через μ_{x^*} відповідну одновимірну проекцію міри μ ; вона є розподілом випадкової величини $\langle X, x^* \rangle$. Розрахунки з доведення теореми 3.4 в [55] показують, що для довільної циліндричної міри μ, ν включення $\hat{Z}(\mu) \subseteq \hat{Z}(\nu)$ дає включення $\hat{Z}(\mu_{x^*}) \subseteq \hat{Z}(\nu_{x^*}), x^* \in X^*$. Таким чином, із тотожності $\hat{Z}(\mu) = \hat{Z}(\nu)$ випливає, що для всіх $x^* \in X^*$ ліфт зоноїди $\hat{Z}(\mu_{x^*}), \hat{Z}(\nu_{x^*})$ збігаються і, отже, (див. зауваження 3.2 в [55]) $\mu_{x^*} = \nu_{x^*}$. Оскільки циліндрична міра визначається однозначно її одновимірними проекціями, ми маємо тоді $\mu = \nu$.

Твердження (d) випливає прямо з твердження (a), бо $D_\alpha(\mu)$ є проекцією на X перерізу $\hat{Z}(\mu)$ афінною гіперплощиною $\{(t, x) : t = \alpha\} \subseteq \mathbf{R} \times X$. Твердження (e) і (f) прямо випливають з означення.

Твердження (g). Спираючись на твердження (f), щоб довести першу частину твердження достатньо показати, що

$$D_{\alpha_n}(\mu) \rightarrow D_\alpha(\mu), \quad \alpha_n \uparrow \alpha < 1$$

в метриці Хаусдорфа. З твердження (e) ми маємо $D_\alpha(\mu) \subseteq D_{\alpha_n}(\mu)$ і єдине, що залишається довести – це, що для довільної послідовності $x_n \in D_{\alpha_n}(\mu), n \geq 1$

$$\text{dist}(x_n, D_\alpha(\mu)) \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

Нехай

$$x_n = 1_{\alpha_n} E[\eta_n X], \quad n \geq 1,$$

де кожна $\eta_n : \Omega \rightarrow [0, 1]$ – це $\sigma(X)$ -вимірна випадкова величина така, що $E\eta_n = \alpha_n$. Покладемо

$$\zeta_n = \eta_n + \frac{\alpha - \alpha_n}{1 - \alpha_n} (1 - \eta_n),$$

тоді ζ_n – це $\sigma(X)$ -вимірний випадковий величина, яка приймає значення в $[0,1]$. Очевидно, $E\zeta_n = \alpha$, і тому $x_n := (1/\alpha)E[\zeta_n X]$ належить $D_\alpha(\mu)$. Оскільки μ центрована, ми маємо

$$x_n = x_n - \frac{\alpha - \alpha_n}{1 - \alpha_n} x_n.$$

Не всі x_n належать множині $D_{\alpha_1}(\mu)$, яка обмежена, що випливає з твердження (d). Оскільки $\alpha_n \rightarrow \alpha$ і $\alpha < 1$, ми маємо $P_{x_n - x_n} P \rightarrow 0$, що доводить (3.3).

Множина $D_1(\mu)$ складається з однієї точки $E[X] = 0$. Отже, щоб довести другу частину твердження, ми повинні показати, що якщо $x = (1/\alpha_n)E[\eta_n X]$ для деякої послідовності $\sigma(X)$ -вимірних випадкових величин з $\alpha_n := E\eta_n \rightarrow 1$, тоді $x = 0$. Оскільки μ центрована, $(-x) = (1/\alpha_n)E[(1-\eta_n)X]$. Очевидно, $(1-\eta_n) \rightarrow 0$ за ймовірністю. Тоді за теоремою Лебега про мажоровану збіжність ми маємо

$$E(1-\eta_n)\langle X, x^* \rangle \rightarrow 0, \quad x^* \in X^*.$$

одержуємо $\langle (-x), x^* \rangle = 0, x^* \in X^*$ і тому $x = 0$.

Твердження (h). По-перше, покажемо, що для будь-якого $\alpha \in (0,1]$ множина $D_\alpha(\mu)$ містить всі $H \in \mathcal{H}^X$ з $\mu(H) = 1$; це дасть $D_0(\mu) \subseteq \mathbf{S}(\mu)$. Якщо $H = X$, включення тривіальне. В іншому випадку $H = \{x : \langle x, x^* \rangle \geq a\}$ є афінним півпростором, і ми маємо $\langle X, x^* \rangle \geq a$ з ймовірністю 1. Тоді для всіх випадкових величин зі значеннями в $[0,1]$ виконується нерівність

$$E[\eta \langle X, x^* \rangle] \geq a E\eta,$$

що передбачає необхідне включення.

З іншого боку, з тверджень (d), (e) випливає, що замикання $D_0(\mu)$ – це опукла множина і, звісно, замкнена множина. Тоді, за другою теоремою про відкромленість, для будь-якої точки x , яка не належить цьому замиканню, існує $x^* \in X^*, a \in \mathbb{R}$ така, що:

$$a := \inf_{y \in D_0(\mu)} \langle y, x^* \rangle > \langle x, x^* \rangle.$$

Легко побачити, що афінний півпростір $H = \{x : \langle x, x^* \rangle > a\}$ задовольняє умові $\mu(H) = 1$. Дійсно, якщо б це було не так, тоді значення міри μ на множині $X \setminus H = \{x : \langle x, x^* \rangle < a\}$ – ненульове значення, і тоді точка

$$z := 1\mu(X \setminus H)E_{[X \setminus H]}(X)X$$

належить множині $D_0(\mu)$. Але з зображення z випливає, що $\langle z, x^* \rangle < a$, це суперечить означенню a . Тому для будь-якого $x \notin H$ існує афінний півпростір H з $\mu(H) = 1$ такий, що $x \notin H$. Це означає, що $x \notin S(\mu)$ і, отже, замикання множини $D_0(\mu)$ збігається зі всією множиною $S(\mu)$.

У [23] було зауважено, що для (звичайної) ймовірнісної міри μ її зоноід обов'язково компактний. Більш точно, ця властивість може бути сформульована наступним чином.

Твердження 1.2 *Нехай μ – ймовірнісна міра така, що відповідне сімейство випадкових величин*

$$\{\langle X, x^* \rangle, P_{x^*} P_{x^*} \square\} \quad (3.4)$$

є рівномірно інтегрованим.

Тоді $Z(\mu)$, $\hat{Z}(\mu)$, і $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0, 1]$ є компактними множинами в X .

Твердження 2. Ми довели в теоремі 1.1, що $Z(\mu)$ є (непорожньою) замкненою опуклою множиною. Тоді за другою теоремою про

відокремленість (наприклад [87], розділ II, теорема 9.2):

$$Z(\mu) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}^X: Z(\mu) \subseteq H} H.$$

Візьмемо $x^* \in \mathcal{S}_{X^*}$ і розглянемо півпростір виду $H = \{x: \langle x, x^* \rangle \leq a\}$. Для всіх $\sigma(X)$ -вимірних $\eta: \Omega \rightarrow [0,1]$ має місце

$$E\eta \langle X, x^* \rangle \leq E\langle X, x^* \rangle_+ = Eh([0, X], x^*), \quad (3.5)$$

а отже, що $Z(\mu) \subseteq H$ для будь-якого півпростору вище зазначеної форми з $a \geq Eh([0, X], x^*)$. З іншого боку, для $\eta = \langle X, x^* \rangle_0$ нерівність (3.5) перетворюється в рівність, що означає, що $Z(\mu) \not\subseteq H$ для будь-якого півпростору вище зазначеної форми з $a < Eh([0, X], x^*)$. Це доводить теорема 1.1. Твердження 2 випливає з теореми 1.1.

Зауваження 1.2 Для рівномірної інтегрованості сім'ї (3.4) достатньо того, щоб міра μ мала сильний момент порядку 1:

$$E|X| < \infty, \quad (3.6)$$

або слабкий момент порядку $p > 1$:

$$E|\langle X, x^* \rangle|^p < \infty, \quad x^* \in X^*. \quad (3.7)$$

За припущення, що μ має слабкий момент порядку $p > 1$, властивість компактності еквівалентна твердженню 1.1, [39].

3.2 Барицентричне зображення відносно циліндричної міри

В цьому підрозділі вводиться *барицентричне зображення* в X відносно даної циліндричної міри μ . Ми припускаємо, що μ *неперервна* в тому сенсі, що

$$\mu(\{x: \langle x, x^* \rangle = a\}) = 0, \quad x^* \in X \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Для циліндричної множини A з $\mu(A) > 0$ її *барицентр* відносно μ визначається рівністю:

$$B_A(\mu) = \frac{\int_A x \mu(dx)}{\mu(A)}$$

(інший термін для барицентра $B_A(\mu)$ – це A -*центроїд* міри μ , див. [53]).

Теорема 2.1 *Нехай μ – циліндрична ймовірнісна міра порядку 1.*

Припустимо, що:

- μ задовольняє (3.8);
- внутрішність множини $D_0(\mu)$ непорожня.

Тоді виконуються наступні твердження:

1. Множина $\mathbf{B}(\mu) = \{B_A(\mu), \mu(A) > 0\}$ всіх барицентрів відносно μ збігається з внутрішністю множини $\mathbf{S}(\mu)$.

2. Будь-яка точка $x \in \mathbf{V}(\mu)$ має зображення у формі

$$x = B_H(\mu), \quad H \in \mathbf{H}^\times, \quad \mu(H) > 0. \quad (3.9)$$

Це зображення однозначне в наступному розумінні: якщо $B_H(\mu) = B_G(\mu)$ для деяких $H, G \in \mathbf{H}^\times$, тоді

$$\mu(H \Delta G) = 0.$$

Ми використовуємо властивості (d) – (h) α -нарізки множин зоноіда, щоб довести теорему 2.1.

По-перше, ми відмітимо, що деяке $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1)$, має непорожню внутрішність. Дійсно, кожна $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1)$ замкнена, і якщо жодна із них не має внутрішньої точки, тоді $D_0(\mu)$ є множиною Бера 1-ї категорії; нагадаємо, що сім'я $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1)$ монотонна (властивість (e)), отже, $D_0(\mu)$ зможе бути представлене як об'єднання деякої послідовності множин $D_{\alpha_n}(\mu), n \in \mathbb{N}$ з $\alpha_n \rightarrow 0$. Це, за теоремою Бера про категорії, суперечить припущенню (ii).

Отже, в силу властивостей (e), (f) кожна $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0,1)$, має непорожню внутрішність.

Далі перейдемо до конструювання барицентричного зображення точок $x \in D_0(\mu)$ у вигляді (3.9). Очевидно, що для $x = 0$ існує таке зображення з $H = X$, і це зображення однозначне в зазначеному вище сенсі. Розглянемо довільну точку $x \in D_0(\mu)$, $x \neq 0$. Існує єдине $\alpha = \alpha(x) \in (0,1)$ таке, що $x \in D_\alpha(\mu)$ і $x \notin D_\beta(\mu)$ для будь-якого $\beta > \alpha$; це випливає з властивості (e) у теоремі 1.1. З властивості неперервності (g) випливає, що $x \in \partial D_\alpha(\mu)$. Оскільки $D_\alpha(\mu)$ має непорожню внутрішність, ми можемо застосувати першу теорему про

відокремленість (наприклад [87], розділ II, теорема 9.1 і подальші наслідки), і одержуємо, що існує *опорний гіперпростір* в точці x до множини $D_\alpha(\mu)$. Це означає, що існує $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ такий, що

$$\langle x, x^* \rangle \langle y, x^* \rangle, \quad y \in D_\alpha(\mu). \quad (3.10)$$

За умовою (3.8) існує a таке, що

$$\mu(\{x' : \langle x', x^* \rangle = a\}) = \alpha.$$

Покладемо $f =_{A} (X)$, $A = \{x' : \langle x', x^* \rangle = a\}$. Тоді $f \in F_\alpha(\mu)$, і для всіх $g \in F_\alpha(\mu)$

$$\begin{aligned} E(f - g)(X, x^*) &= E(f - g)(\langle X, x^* \rangle - a) \\ &= E(\langle X, x^* \rangle - a)((1 - g)_A(X)) \\ &\quad + E(\langle X, x^* \rangle - a)(-g_{X \setminus A}(X))0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

тому що математичне сподівання у правій частині (3.11) невід'ємне. Це означає, що

$$1\alpha E[_A(X)X] = B_A(\mu)$$

– *єдина* точка в множині $D_\alpha(\mu)$, яка забезпечує екстремальне значення для функціонала $y \alpha \langle y, x^* \rangle$ на цій множині. В сукупності з (3.10) це надає потрібне зображення (3.9) з $H = A$. Однозначність зображення впливає з строгості нерівності в (3.11) для функцій f і g , що не є рівними майже напевне.

Помітимо, що $\mathbf{V}(\mu) \subseteq D_0(\mu)$. Оскільки ми вже довели (однозначність) зображення будь-якої точки $D_0(\mu)$ як барицентра деякої множини $H \in \mathcal{H}$, це завершує доведення твердження 2.

Нагадаємо, що $D_0(\mu)$ опукла і має непорожню внутрішність. Тоді (див. [87], розділ II, § 1.3) внутрішність множини $D_0(\mu)$ збігається з внутрішністю замикання цієї множини. В сукупності з властивістю (h) з теореми 1.1, це означає, що кожна точка внутрішності множини $\mathbf{S}(\mu)$ належить

(внутрішності) $D_0(\mu)$. З іншого боку, оскільки внутрішність $S(\mu)$ непорожня, це впливає з першої теореми про відокремленість, що для кожної точки $x \in S(\mu)$, яка не є внутрішньою точкою множини $S(\mu)$, існує $x^* \in X \setminus \{0\}$ і число a таке, що $\langle x, x^* \rangle = a$ і $\mu(x' : \langle x', x^* \rangle \leq a) = 1$. Тоді, користуючись (3.8), легко бачити, що для кожної точки $y \in D_0(\mu)$ виконується $\langle y, x^* \rangle < a$, і, отже, $x \notin D_0(\mu)$. Це означає, що $D_0(\mu)$ збігається з внутрішністю множини $S(\mu)$, і це завершує доведення твердження 1.

Зауваження 2.1 Умова (ii) може бути переформульована в наступній, більш геометричній формі. Не втрачаючи загальності, ми можемо припустити, що міра μ центрована. Позначимо $L(\mu)$ лінійну оболонку $D_0(\mu)$. Із тверджень (e), (f) теореми 1.1, маємо

$$L(\mu) = \bigcup_{r \in (0, \infty)} rD_{1/2}(\mu) \subseteq \bigcup_{r \in (0, \infty)} rZ(\mu);$$

тут ми скористались тим, що $D_{1/2}(\mu) \subseteq 2Z(\mu)$. З іншого боку, будь-яка точка $x \in Z(\mu)$ має зображення $x = E[\eta X]$ з деяким η зі значеннями в $[0, 1]$, тому $x \in \alpha D_\alpha(\mu) \subseteq D_0(\mu)$ з $\alpha = E\eta$. Остаточно це дає нам наступну рівність

$$L(\mu) = \bigcup_{r \in (0, \infty)} rD_{1/2}(\mu) = \bigcup_{r \in (0, \infty)} rZ(\mu). \quad (3.12)$$

Тоді (ii) еквівалентне наступному твердженню:

$$L(\mu) = X.(ii')$$

З рівності (3.12) лінійний простір $L(\mu)$ природним чином наділяється нормою

$P \cdot P_L$ рівною функціоналу Мінковського для множини зоноїда $Z(\mu)$; відмітимо, що $Z(\mu)$ симетрична і опукла множина, тому що μ – центрована міра. Ми називаємо $L(\mu)$ наділену нормою $P \cdot P_L$ оболонкою зоноїда циліндричної міри μ , і відмітимо, що умова (ii) насправді означає, що початковий простір X збігається з оболонкою зоноїда міри μ .

Зауваження 2.2 У випадку $X = \mathbb{R}^d$ умова (ii) (і таким чином (i))

очевидно виконується: якщо (ii) не виконується, тоді міра сконцентрована на гіперплощині $L(\mu)$, що суперечить (i).

Втім, в нескінченно-вимірному випадку умова (ii) набагато вимогливіша. Наприклад, ця умова не виконується для будь-якої σ -адитивної ймовірнісної міри μ , на нескінченно-вимірному гільбертовому просторі такому, що відповідна сім'я (3.4) рівномірно інтегрована. Дійсно, у випадку, коли $D_0(\mu)$ буде σ -компактною множиною, отже, за теоремою Бера про категорії має порожню внутрішність. Іншими словами, у цьому випадку геометрія оболонки зоноїда $L(\mu)$ обов'язково відрізняється від геометрії X .

Це спостереження показує, що в нескінченно-вимірному випадку, (ii), (i) зазвичай вимагають, щоб зоноїд був не компактним. В основному, це мотивує наш інтерес до циліндричних ймовірнісних мір, тому що їх зоноїди не обов'язково компактні.

Зауваження 2.3 Виникає природне запитання, чи існують природні приклади циліндричних ймовірнісних мір, які задовольняють (ii), (i).

Конструкція, яка приведе до широкого класу таких прикладів представлена в підрозділі 3.3 нижче; див. обговорення в зауваженні 3.1.

3.3 Барицентричне зображення в просторі з σ -адитивною мірою

Нехай X – сепарабельний (не обов'язково рефлексивний) банахів простір і μ – це σ -адитивна ймовірнісна міра на Борелівській σ -алгебрі в X . Припустимо, що μ має слабкий момент порядку $p > 1$; а саме, виконується (3.7). Теорема 2.1 не може бути застосована, оскільки умова (ii) не виконується. Тут ми обговоримо структуру лінійної оболонки зоноідів $L(\mu)$ і запропонуємо версії барицентричного зображення дійсного в цьому випадку. Не втрачаючи загальності, ми припускаємо, що міра μ – центрована.

Щоб вивчати властивості зоноїдної оболонки $L(\mu)$, зручно використовувати об'єкти, пов'язані з поняттям *вимірного лінійного функціонала*; див. наприклад, [39]. Нагадаємо коротко відповідні конструкції. Для $r \in [1, p]$, позначимо канонічне вкладення X^* в $L_r(X, \mu)$ за $T_{r, \mu}$. Визначимо $N_{r, \mu}(X)$ як замикання $T_{r, \mu}$; будь-який елемент в $N_{r, \mu}(X)$ називається (L_r -інтегровним) *вимірним лінійним функціоналом*.

Для будь-якого $g \in L_\infty(X, \mu)$ інтеграл

$$\int_X g(x) x \mu(dx) \in X$$

добре визначений (див. [95], розділ II, § 3). Це можна легко перевірити, що спряжений оператор $T_{1, \mu}^* : L_\infty(X, \mu) \rightarrow X^{**}$ має форму

$$T_{1, \mu}^* g = \int_X g(x) x \mu(dx), \quad g \in L_\infty(X, \mu),$$

і, зокрема, приймає значення в $X \subseteq X^{**}$.

Твердження 3.1

1. Множина $L(\mu)$ збігається з образом $T_{1,\mu}^*$.
2. Норма $P \cdot P_L$ еквівалентна нормі $P \cdot P_R$ визначеній як

$$P_x P_R = \inf_{g \in L_\infty(X,\mu): T_{1,\mu}^* g = x} P g P_{L_\infty(X,\mu)}, \quad x \in L(\mu) = R(T_{1,\mu}^*). \quad (3.13)$$

Доведення. Доведення випливає прямо з означення відповідних об'єктів, і, отже, ми опускаємо подробиці.

Твердження 2.1 можна зробити більш точним. Розглянемо спряжений простір $[H_1(X,\mu)]^*$; а саме, фактор-простір в $L_\infty(X,\mu)$ відносно відношенню еквівалентності

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \int_X (g_1(x) - g_2(x)) \langle x, x^* \rangle \mu(dx) = 0, \quad x^* \in X^*, \quad (3.14)$$

(див [86], розділ 4). Можна легко бачити, що для будь-якого $g \in L_\infty(X,\mu)$

$$T_{1,\mu}^* g = 0 \Leftrightarrow g \sim 0.$$

Це означає, що $T_{1,\mu}^*$ можна природним чином розуміти як лінійний оператор $[H_1(X,\mu)]^* \rightarrow L(\mu)$. Крім того, норма в просторі $[H_1(X,\mu)]^*$ визначається відношенням

$$P g P_{[H_1(X,\mu)]^*} = \inf_{\tilde{g}: g} P \tilde{g} P_{L_\infty(X,\mu)}.$$

Порівнюючи це з виразом в правій частині (3.13), ми одержуємо наступне.

Наслідок 3.1 *Оболонка зоноідів $L(\mu)$ – це банахів простір ізоморфний до спряженого простору $H_1(X, \mu)$ L_1 -інтегровних вимірних лінійних функціоналів. Відповідний ізоморфізм здійснюється оператором $T_{1,\mu}^*$.*

Тепер ми готові надати версію барицентричного зображення, що діє у розглянутому випадку. Позначимо через $H_{1,\mu}^X$ сім'ю множин вигляду

$$\{x: h(x) = a\}, \quad h \in H_{1,\mu}(X), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Теорема 3.1 *Припустимо, що:*

- для всіх $h \in H_{1,\mu}(X) \setminus \{0\}, a \in \mathbb{R}$

$$\mu(\{x: h(x) = a\}) = 0;$$

- для всіх $r > 1, H_{1,\mu}(X) = H_{r,\mu}(X)$.

Тоді виконуються наступні твердження:

1. Множина $\mathbf{B}(\mu) = \{B_A(\mu), \mu(A) > 0\}$ всіх барицентрів відносно міри μ збігається з внутрішністю $S(\mu) \cap L(\mu)$ відносно топології індукованої нормою $P \cdot P_L$.

2. Будь-яка точка $x \in \mathbf{B}(\mu)$ має зображення в формі

$$x = B_H(\mu), \quad H \in H_{1,\mu}^X, \quad \mu(H) > 0. \quad (3.15)$$

Це зображення однозначне в наступному сенсі: якщо $B_H(\mu) = B_G(\mu)$ для деякого $H, G \in H_{1,\mu}^X$, тоді

$$\mu(H \Delta G) = 0.$$

Доведення.

Тотожність $H_{1,\mu}(X) = H_{r,\mu}(X)$ дає, що банахові простори $[H_{1,\mu}(X)]^*$ і $[H_{r,\mu}(X)]^*$ ізопериметричні. Визначимо $r' = r/(r-1)$, тоді $[H_{r,\mu}(X)]^*$ в факторпросторі $L_{r'}(X, \mu)$ відносно еквіваленції (3.14). Використовуючи факт, що $L_{r'}(X, \mu)$ рефлексивний простір, легко показати, що кожний з просторів $[H_{r,\mu}(X)]^*$, $[H_{1,\mu}(X)]^*$ і $L(\mu)$ також рефлексивний.

Позначимо $\tilde{X} = L(\mu)$, тоді \tilde{X}^* ізопериметричний до $H_{1,\mu}(X)$. Визначимо $J: H_{1,\mu}(X) \rightarrow \tilde{X}^*$ як відповідну ізометрію, і визначимо на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (X, \mathcal{B}(X), \mu)$ узагальнений випадковий елемент \tilde{X} , визначений в \tilde{X} як

$$\langle \tilde{X}, Jh \rangle = h, \quad h \in H_{1,\mu}(X).$$

За побудовою, розподіл $\tilde{\mu}$ елементу \tilde{X} – це циліндрична міра порядку 1. До того ж $\sigma(\tilde{X})$ збігається з \mathcal{F} , з цього випливає, що зоноід, ліфт зоноід і α -нарізка множин для міри μ збігаються з образами таких самих об'єктів для $\tilde{\mu}$ при природному вкладенні $L(\mu) \rightarrow X$. Тому необхідні твердження випливають з теореми 2.1 застосованої до $\tilde{\mu}$.

Зауваження 3.1 *Ключовим моментом в описаній вище конструкції є розгляд замість вихідної міри μ її “узагальненого звуження” $\tilde{\mu}$ зоноїдну оболонку $L(\mu)$. Тоді нова циліндрична ймовірнісна міра $\tilde{\mu}$ одразу буде задовільняти умовам (ii), (ii') з підрозділу 3.2.*

Умова (b) в наведеному вище доведенні використовується, щоб гарантувати $L(\mu)$ рефлексивність банаховому просторі. Ця умова виконується в особливо цікавому випадку, тобто для гаусівської міри μ або, в більш загальному випадку, для опуклої міри μ ; дивись [22]. Однак, це не

тривіальне структурне допущення на міру μ , і є інтерес в інших умовах, які забезпечують $L(\mu)$ рефлексивність. Це предмет для подальшого дослідження.

3.4 Баріцентричні координати

Ми коротко згадували у вступі, що баріцентричне зображення, встановлене в теоремі 2.1, в деяких особливо цікавих випадках уможливорює введення *баріцентричних координат* в початковому просторі. Тут ми обговорюємо цю тему детально.

Припустимо, що μ – циліндрична ймовірнісна міра порядку 1 на X центрована і задовольняє умови (i),(ii) теореми 2.1. Припустимо також, що

$$(3.16)$$

Зауважимо, що вищенаведені припущення приводять до того, що кожна непорожня множина $H \in \mathcal{H}^X$ має додатне значення міри μ . Тому множина $S(\mu)$ збігається з усім X , і за теоремою 2.1 ми маємо

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} D_\alpha(\mu). \quad (3.17)$$

Для $x \in X$ визначимо

$$\alpha(x) = \sup\{\alpha \in (0,1] : x \in D_\alpha(\mu)\}$$

– *зonoїдна глибина даних* точки x відносно міри μ (див. означення 7.1 в [53] і [30]). Для однієї виняткової точки $x = 0$, ми маємо $\alpha(x) = 1$. Для всіх інших – ми маємо $\alpha(x) \in (0,1)$, і відповідно до (3.16) і доведення з підрозділу 3.2 існує єдине $x^* \in S_{x^*}$ і $a \in \mathbb{R}$ такий, що x є баріцентром півпростору $H = \{x' : \langle x', x^* \rangle \leq a\}$. Очевидно, що пара (a, x^*) визначає x однозначно, отже, ми можемо визначити будь-яку точку $x \in X \setminus \{0\}$ парою

$$(a, x^*) \in \mathbb{R} \times \mathbf{S}_{X^*}. \quad (3.18)$$

З іншого боку, для будь-якого $x \neq 0$ розглянемо відповідно $x^* \in \mathbf{S}_{X^*}$ і значення опорної функції множини $D_{\alpha(x)}(\mu)$ на x^* :

$$h = h(D_{\alpha(x)}(\mu), x^*).$$

Легко бачити, що x – єдина точка множини $D_{\alpha(x)}(\mu)$ з афінної гіперплощини $\{x' : \langle x', x^* \rangle = h\}$. Отже, є ще одна можливість визначити точку $x \in X \setminus \{0\}$ парою

$$(h, x^*) \in (0, \infty) \times \mathbf{S}_{X^*}. \quad (3.19)$$

Нарешті, дані множина $D_\alpha(\mu)$ і $x^* \in \mathbf{S}_{X^*}$ однозначно визначають $h > 0$ такий, що афінна гіпер-площина $\{x' : \langle x', x^* \rangle = h\}$ є гіперплощиною носієм для $D_\alpha(\mu)$.

Отже, ми можемо також визначити точку $x \in X \setminus \{0\}$ парою

$$(\alpha, x^*) \in (0, 1) \times \mathbf{S}_{X^*}, \quad (3.20)$$

де перша координата збігається з зоноїдною глибиною даних $\alpha(x)$.

Підсумуємо. Ми представили X як диз'юнктне об'єднання

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0, 1]} Z_\alpha(\mu), \quad (3.21)$$

де $Z_\alpha(\mu)$ визначає множину точок з зоноїдною глибиною даних відносно міри μ рівну α ; різниця між (3.17) і (3.21) полягає в тому, що множини $Z_\alpha(\mu), \alpha \in (0, 1]$, попарно неперетинні. Множина $Z_1(\mu)$ складається з однієї точки 0 . Для $\alpha \in (0, 1)$ будь-яка точка $x \in Z_\alpha(\mu)$ визначається відповідним $x^* \in \mathbf{S}_{X^*}$, котрий можемо природно розуміти як однозначний “зовнішній дотичний напрямок” для $Z_\alpha(\mu)$ в точці x . Це призводить до зображення (3.20). Без втрати властивості однозначності зображення, скаляр α може бути замінений $h = \langle x, x^* \rangle$ (з цього випливає (3.19)), або a такий, що x

барицентр аффіного півпростору $H = \{x' : \langle x', x^* \rangle = a\}$ (з цього випливає (3.18)).

3.5 Приклади

Проілюструємо одержані результати на прикладі гаусівської міри μ , де обрахунки максимально прості. Нижче наведені результати не є новими; наприклад твердження 5.2 є вже відомим (див. теорему 4.3 в [23]).

Нехай X – сепарабельний гільбертовий простір, і μ – центрована циліндрична гаусівська міра на X з тотожним оператором коваріації. З означення випливає, що для відповідного узагальненого випадкового елемента X

$$(X, x)_X : N(0, P_x P_x^2), \quad x \in X;$$

тут ми ототожнюємо X^* з X і пишемо $(\cdot, \cdot)_X$ замість $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Очевидно, що міра μ задовольняє (3.8) і (3.16).

Розподіл X є *ротаційно інваріантним*; це означає, що UX має такий самий розподіл з X для будь-якого унітарного оператора $U : X \rightarrow X$. Тоді легко побачити, що кожна множина $D_\alpha(\mu)$ це замкнена куля в X ; визначимо радіус цієї кулі $r(\alpha)$. Ми можемо визначити цей радіус легко, використовуючи аргументацію з підрозділу 5.4. А саме, для кожної точки x на границі множини $D_\alpha(\mu)$ відповідний “зовнішній дотичний напрямок” збігається з $P_x P_x^{-1} x$. Тоді x може бути однозначно зображений як барицентр півпростору

$$H_x = \{x' : (x', P_x P_x^{-1} x)_X = a(x)\}, \quad (3.22)$$

де скаляр $a = a(x)$ визначений відношенням $\mu(H_x) = \alpha$. Оскільки

$$\mu(H_x) = P\left(\left(X, P_x P_x^{-1} x\right)_X \leq a(x)\right),$$

і $(X, P_x P_x^{-1} x)$ має стандартну гаусівський розподіл, ми маємо:

$$a(x) = \Phi^{-1}(1-\alpha), \quad \Phi(u) := \int_{-\infty}^u \varphi(v) dv, \quad \varphi(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= P_x P_x^{-1} \left(x, P_x P_x^{-1} x \right) = 1\alpha E\left(X, P_x P_x^{-1} x \right)_{X(X, P_x P_x^{-1} x)_X \leq a(x)} \\ &= 1\alpha \sqrt{2\pi} \int_{a(x)}^{\infty} u e^{-u^2/2} du = 1\alpha I(\alpha), \end{aligned}$$

де $I := \varphi \circ \Phi^{-1}$ так звана *гаусівська ізопериметрична функція*; тут ми використовуємо $\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$ і φ – парна функція. Помітимо, що для $x \neq 0$ відповідна зоноїдна глибина рівна $r^{-1}(P_x P_x^{-1} x)$, отже,

$$a(x) = -\Phi^{-1}(r^{-1}(P_x P_x^{-1} x)) = -G^{-1}(P_x P_x^{-1} x), \quad \varphi \chi \quad G(u) := \varphi(u)\Phi(u);$$

помітимо, що функція $G: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ монотонна. Таким чином, ми довели наступне.

Твердження 5.1 *Нехай μ – центрована циліндрична гаусівська міра в X з тотожнім коваріаційним оператором.*

Тоді виконуються наступне.

1. Кожна зоноїдна α -нарізка $D_\alpha(\mu), \alpha \in (0, 1)$ рівна кулі з радіусом $r(\alpha) = \alpha^{-1} I(\alpha)$.

2. Кожна точка $x \neq 0$ має однозначне зображення як барицентр відносно міри μ півпростору (3.22) з $a(x) = -G^{-1}(P_x P_x^{-1} x)$.

Випадок, коли μ – центрована σ -скінченна гаусівська міра в сепарабельному банаховому просторі X , може бути зведений до випадку,

розглянутого вище, як це було зроблено в підрозділі 3.3. Оскільки із збіжності за ймовірністю гаусівської послідовності випливає L_p -збіжність для всіх $p \geq 1$, ми маємо, що всі простори $H_{p,\mu}(X)$, $p \geq 1$ зараз збігаються. Відповідний простір називається *відворюючим ядром простору* для гаусівської міри μ ; ми позначаємо H_μ . Оскільки, $H_\mu = H_{2,\mu}(X)$ може розглядатись як гільбертів простір, $L(\mu)$ збігається з образом H_μ при природному вкладенні $J_\mu : H_\mu \rightarrow X$ (цей образ зазвичай називають *простором Камерона-Мартіна* міри μ). В цьому просторі μ породжує центровану гаусівську циліндричну міру $\tilde{\mu}$ з тотожним оператором коваріації. Застосовуючи твердження 2.2 до $\tilde{\mu}$, ми одержуємо наступне.

Твердження 5.2 *Нехай μ це центрована σ -скінченна гаусівська міра в сепарабельному банаховому просторі X .*

Тоді виконується наступне.

1. Кожній зоноїдна α -нарізка $D_\alpha(\mu)$, $\alpha \in (0,1)$ співпадає з образом кулі в H_μ з радіусом $r(\alpha) = \alpha^{-1}I(\alpha)$ під дією природного вкладення H_μ в X .

2. Кожна точка $x \neq 0$ в просторі Камерона-Мартіна має однозначне зображення як барицентр відносно міри μ вимірного півпростору

$$H_x = \left\{ x' : \left(x', \mathbf{P} J_\mu^{-1} x \mathbf{P}_{H_\mu}^{-1} J_\mu^{-1} x \right)_{H_\mu} = a(x) \right\}, \quad a(x) = -G^{-1}(\mathbf{P} J_\mu^{-1} x \mathbf{P}_{H_\mu}),$$

де $(\cdot, h)_{H_\mu}$ позначає лінійний вимірний функціонал відповідний до $h \in H_\mu$.

Розділ 4

Функціональні нерівності

У четвертому розділі введено поняття зваженого ліфт зоноіда та показано, що умова порядку на міру μ , накладена у термінах зважених ліфт зоноідів цієї міри, приводить до таких функціональних нерівностей на цю міру, як нелінійне узагальнення нерівності зсуву Бобкова та зваженої оберненої логарифмічної нерівності Соболева. Вибір ваги K у нашій версії оберненої логарифмічної нерівності Соболева істотно відрізняється від наявних у літературі та вимагає, щоб вага ν з означення зваженого ліфт зоноіда дорівнювала дивергенції ваги K відносно вихідної міри μ . Показано, що такий вибір також може бути корисним при доведенні прямої логарифмічної нерівності Соболева.

Вивчається нова область, де поняття ліфт зоноіда можуть бути застосовані природним чином. В якості безпосереднього розширення означення ліфт зоноіда ми введемо поняття *зваженого ліфт зоноіда* $\hat{Z}^\nu(\mu)$ з векторнозначною функцією ваги ν . Ми покажемо, що належним чином вибрані функція ваги ν , відношення порядку на міру μ , сформульована в термінах зваженого ліфт зоноіда міри, веде до відомих функціональних нерівностей для цієї міри, таких яких нелінійне розширення *нерівності зсуву* [19] Бобкова і зваженої *оберненої нерівності Соболева*. Зважена версія класичних функціональних нерівностей (Пуанкаре, логарифмічна нерівність Соболева і т.д.) вивчалась останнім часом в різних контекстах. Вибір ваги K , яка бере участь у нашій версії оберненої логарифмічної нерівності Соболева, специфічний і суттєво відрізняється від наявних в літературі. Цей вибір в

основному мотивований (розширенням) функціональної форми нерівності зсуву Бобкова, і потребує ваги ν , яка використовується в означенні зваженого ліфт зоноїда, дорівнює *дивергенції* ваги K відносно даної міри μ . Зауважимо, що такий вибір так само може бути корисним для доведення (зваженої) прямої логарифмічної нерівності Соболева. У випадку обмеженої ваги це може приводити до нових достатніх умов для логарифмічної нерівності Соболева. Проілюструємо спектр застосувань в цих умовах в двох прикладах підрозділу 5.4.

4.1 Зважений ліфт зоноід, нелінійні нерівності зсуву і зважена обернена логарифмічна нерівність Соболева

Нехай μ – ймовірнісна міра на борелівській σ -алгебрі в \mathbb{R}^d , і $\nu: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – вимірна функція така, що

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nu(x) \mu(dx) < \infty;$$

тут і надалі ми позначаємо $\|\cdot\|$ Евклідову норму в \mathbb{R}^d . Ми визначаємо *зважений зоноід* $Z^\nu(\mu)$ з вагою ν як множину всіх точок в \mathbb{R}^d виду

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) \nu(x) \mu(dx) \tag{4.1}$$

з довільною борелівською вимірною функцією $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$. *Зважений ліфт зоноід* $\hat{Z}^\nu(\mu)$ визначено як зважений зоноід міри $\delta_1 \times \mu$ в \mathbb{R}^{d+1} . Відповідно, зважений зоноід $Z^\nu(\mu)$ і зважений ліфт зоноід $\hat{Z}^\nu(\mu)$ – це множини точок виду

$$Eg(X)\nu(X) \in \mathbb{R}^d \quad \text{and} \quad (Eg(X)Eg(X)\nu(X)) \in \mathbb{R}^{d+1} \tag{4.2}$$

відповідно, де X – це довільний вектор з розподілом μ . Це означення пряме узагальнення означення зоноїду і ліфт зоноїду (див. [55], означення 2.1), де функція ν має вигляд $\nu(x) = x$.

Ліфт зоноід $\hat{Z}(\mu)$ є випуклою компактною множиною в \mathbb{R}^{d+1} , симетричною відносно точки $((1/2)(1/2)EX)$, яка визначає вихідну міру μ однозначно; див. [55]. З іншого боку, легко бачити, що означення зваженого ліфт зоноіда $\hat{Z}^v(\mu)$ не зміниться, якщо обмежити клас борелівських функцій g до класу функцій вигляду

$$g(x) = G(v(x)), \quad G: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$$

– вимірної борелівської функції.

Це спостереження одразу призводить до рівності $\hat{Z}^v(\mu) = \hat{Z}(\mu \circ v^{-1})$; тобто, зважений ліфт зоноід $\hat{Z}^v(\mu)$ збігається з (звичайним) ліфт зоноідом образу міри μ при відображенні v . Як наслідок, ми отримаємо зважений ліфт зоноід $\hat{Z}^v(\mu)$ – випуклу компактну множину в \mathbb{R}^{d+1} , симетричну відносно точки $((1/2)(1/2)Ev(X))$, і він визначає образ міри $\mu \circ v^{-1}$ однозначно.

Наступна теорема мотивує наведене вище визначення зваженого ліфт зоноіда. Щоб сформулювати його, нам необхідно ввести деякі позначення. Визначимо γ_c центровану гаусівську міру в \mathbb{R}^d з матрицею коваріацій $c^2 I_{\mathbb{R}^d}$. Позначимо через

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

стандартну гаусівську функцію щільності і стандартну гаусівську функцію розподілу, відповідно, і позначимо через

$$I(p) = \varphi(\Phi^{-1}(p)), \quad p \in (0,1), \quad I(0) = I(1) = 0 \quad (4.3)$$

гаусівську ізопериметричну функцію.

Для будь-якої вимірної функції f на \mathbb{R}^d ми пишемо $E_\mu f$ для інтегралу

f відносно міри μ ; функція f може бути векторнозначною, тоді інтеграл розуміється в покомпонетному сенсі. Для функції f зі значеннями в \mathbb{R}^+ її μ -ентропія визначається

$$\mathbf{Ent}_\mu f = \mathbf{E}_\mu (f \log f) - (\mathbf{E}_\mu f) \log(\mathbf{E}_\mu f),$$

вважаючи $0 \log 0 = 0$.

Далі ми припускаємо, що міра μ має *логарифмічний градієнт* v_μ ; де функція $v_\mu: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – інтегрована відносно міри μ і така, що для кожної гладкої $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм

$$\mathbf{E}_\mu \nabla f = -\mathbf{E}_\mu (v_\mu f). \quad (4.4)$$

Це припущення еквівалентне наступному, дивись твердження 3.4.3 в [20]: існує щільність p_μ міри μ відносно міри Лебега, яка належить до класу Соболева $W_{1,1}(\mathbb{R}^d)$; в цьому випадку

$$[v_\mu]_i = \partial_{x_i} p_\mu p_\mu, \quad i = 1, \dots, d.$$

Теорема 1.1 *I. Наступні три твердження еквівалентні.*

- $\dot{Z}^{v_\mu}(\mu) \subseteq \dot{Z}(\gamma_c)$.

- Для гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ з компактним носієм, виконується

нерівність

$$\mathbf{P} \mathbf{E}_\mu \nabla f \mathbf{P} \square_{\mathcal{I}} \mathbf{E}_\mu f. \quad (4.5)$$

- Для будь-якого $h \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbf{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) - cPhP) \square \mu(A+h) \square \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + cPhP). \quad (4.6)$$

II. Із умов **A** - **C**, випливає обернена логарифмічна нерівність Соболева: для будь-якої гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ з компактним носієм,

$$PE_\mu \nabla f P^2 \square Ent_\mu f E_\mu f. \quad (4.7)$$

Зауваження 1.1 За означенням (див. означення 5.1 в [55]), дві міри μ_1, μ_2 пов'язані ліфт зоноїдним порядком (позначення: $\mu_1 \prec_{LZ} \mu_2$), якщо

$$\hat{Z}(\mu_1) \subseteq \hat{Z}(\mu_2).$$

Нагадаємо, що $\hat{Z}^{\nu_\mu}(\mu)$ збігається з ліфт зоноїдом міри $\nu_\mu := \mu \circ v_\mu^{-1}$; тобто, ліфт зоноїдом від розподілу логарифмічного градієнта міри μ . Отже, твердження **A** може бути еквівалентно сформульоване наступним чином: розподіл ν_μ логарифмічного градієнту міри μ мажорується у сенсі ліфт зоноїдного порядку канонічною гаусівською мірою в \mathbb{R}^d .

Теорема 1.1 не є повністю новою. Еквівалентність умов **B** і **C** використовував С. Бобков в [19] як ключовий інгредієнт в доведенні нерівності зсуву (4.6) (в [19], для міри μ яка припускається продуктом мірою, але доведення еквівалентності (4.5) і (4.6) насправді не залежить від цього припущення). Нариси доведень (4.7) при умові (4.5) і (4.6) наводиться в [5]. Треба підкреслити, що умова **B**, яка зазвичай називається *функціональною*

версією нерівності зсуву, еквівалентна умові **A**, яка згідно з зауваженням 1.1 може бути записана як ліфт зоноїдне відношення порядку

$$v_{\mu} \uparrow_{LZ} \gamma_c. \quad (4.8)$$

Доцільним буде порівняти (4.8) з наступною необхідною і достатньою умовою для функціональної версії нерівності зсуву, наведена в [19] у випадку, коли міра μ є продакт мірою з рівними маргинальними розподілами μ_1 . Ця умова стверджує, що існує $c > 0$ таке, що виконується (4.5), тоді і тільки тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon x^2} v_{\mu_1}(dx) \geq 1 \quad (4.9)$$

крім того, оптимальні константи c в (4.5) і ε в (4.9) пов'язані співвідношенням

$$1/\sqrt{6\varepsilon} \leq c \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad (4.10)$$

Для продакт міри $\mu(dx) = \prod_{i=1}^d \mu_1(dx_i)$ відповідний розподіл логарифмічного градієнта знову є продакт мірою:

$$v_{\mu}(dx) = \prod_{i=1}^d v_{\mu_1}(dx_i),$$

і в цьому випадку в силу наслідку 5.3 в [55] відношення (4.8) еквівалентне до

$$v_{\mu_1} \uparrow_{LZ} \gamma_c^1, \quad (4.11)$$

де $\gamma_c^1 \in \mathcal{N}(0, c^2)$ -гаусівська міра на \mathbb{R} . Обидві умови (4.9) і (4.11) є умовами на хвости розподілів логарифмічного градієнту міри μ_1 , але (4.11) більш точна, оскільки вона включає в себе ту ж саму константу c з (4.5).

Основний результат цього підрозділу – теорема 1.2, що наведена нижче, – це узагальнення теореми 1.1, яке мотивоване спостереженням, що у теоремі 1.1 еквівалентність зв'язку **A** і **B** впливає прямим чином з формули інтегрування по частинам (4.4); дивись доведення теореми 1.2 нижче. Маючи

це спостереження на увазі, ми представляємо широкий клас функцій ваги, які допускають аналогію з формулою інтегрування по частинам (4.4). Щоб це зробити, ми нагадаємо, що ми називаємо μ -дивергенцією функції $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, якщо вона існує, яка позначається як функція $\delta_\mu(g) \in L_1(\mathbb{R}^d, \mu)$ така, що для будь-якої гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм

$$\mathbf{E}_\mu(\nabla f, g)_{\mathbb{R}^d} = \mathbf{E}_\mu f \delta_\mu(g).$$

μ -дивергенція добре визначена, наприклад, для будь-якої функції $g \in C^1$ обмеженої разом з своїми частковими похідними; у цьому випадку,

$$\delta_\mu(g) = -\sum_{i=1}^d [v_\mu]_i g_i - \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} g_i.$$

Це випливає прямо з (4.4); дивись [20], Розділ 6 для більш детальної інформації на цю тему. Нехай функція $v: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для функції K яка приймає значення $d \times d$ -матриці,

$$v_i = \delta_\mu(K_i), \quad i=1, \dots, d, \quad (4.12)$$

де K_i позначає i -ий рядок матриці K . Тоді для будь-якої гладкої f з компактним носієм

$$\mathbf{E}_\mu(K \nabla f) = \mathbf{E}_\mu f v; \quad (4.13)$$

тут і нижче ми розглядаємо елементи \mathbb{R}^d як вектор-стовпчики. Формула (4.13) – це просто розширення формули інтегрування по частинам (4.4), де градієнт ∇ змінюється на “зважений градієнт” $K \nabla$ з матричнозначною

вагою K , і логарифмічний градієнт v_μ змінений на μ -дивергенцію функції K . Крім того, якщо K задовільняє деякі додаткові умови регулярності, наприклад,

$$K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} \quad \chi \nu \zeta \quad (4.14)$$

тоді для кожного $h \in \mathbb{R}^d$ існує потік розв'язків $\{\Psi_t^{K,h}(x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d\}$ задачі Коші

$$d\Psi_t(x) = (K^* h)(\Psi_t(x)) dt, \quad \Psi_0(x) = x. \quad (4.15)$$

Теорема 1.2 I. Нехай $v = (v_i)_{i=1}^d$ задовільняє (4.12). Тоді наступні два твердження еквівалентні:

- $\dot{Z}^v(\mu) \subseteq \dot{Z}(\gamma_c)$.

- Для будь-якої гладкої функції $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ з компактним носієм,

виконується нерівність

$$\mathbb{P} \mathbb{E}_\mu K \nabla f \mathbb{P} \square I(\mathbb{E}_\mu f). \quad (4.16)$$

Якщо додатково матрично-значна функція K задовільняє (4.14), тоді **A1** і **B1** еквівалентні наступному твердженню.

- Для будь-якого $h \in \mathbb{R}^d, A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) - cPh\mathbb{P}) \square \mu([\Psi_1^{K,h}]^{-1}(A)) \square \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + cPh\mathbb{P}). \quad (4.17)$$

II. За умови **A1**, або еквівалентній їй **B1**, виконується наступна зважена обернена логарифмічна нерівність Соболева: для будь-якої гладкої функції $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ з компактним носієм:

$$\mathbf{PE}_\mu \mathcal{K} \nabla f \mathcal{P}^2 \mathbb{Z}^2 \mathbf{Ent}_\mu f \mathbf{E}_\mu f. \quad (4.18)$$

Помітимо, що умова **A1** це просто відношення ліфт зоноїдного порядку для образу міри μ під дією ν :

$$\mu \circ \nu^{-1} \ll \nu. \quad (4.19)$$

До того, як навести доведення теореми 1.2, підсумуємо, що ми маємо: умова ліфт зоноїдного порядку (4.8) – це *критерій* для нерівності зсуву, записаний або в його точній формі (4.6), або в своїй функціональній формі (4.5). Ця еквівалентність досить гнучка в наступному сенсі: якщо логарифмічний градієнт ν_μ в (4.8) замінити на іншу вагову функцію ν наступної форми

$$\nu = \delta_\mu(K) \quad (4.20)$$

(див. (4.12)), тоді відповідна умова ліфт зоноїдного порядку (4.19) залишається еквівалентною ваговій версії (4.16) функціональної форми (узагальненої) нерівності зсуву. Точна форма (узагальненої) нерівності зсуву у цьому випадку також доступна і містить замість лінійних зсувів трансформацію вихідної міри μ потоком розв'язків (4.15).

Доведення теореми 1.2: твердження I. Ліфт зоноїд $\hat{Z}(\gamma)$ стандартної гаусівської міри γ в \mathbb{R}^d можуть бути ідентифіковані наступним способом: для даного $\alpha \in (0,1)$, переріз $\hat{Z}(\gamma)$ гіперплощиною $\{\alpha\} \times \mathbb{R}^d$ має проекцію на останні d координат рівну кулі з центром в точці 0 і радіусом $I(\alpha)$; дивись [53], підрозділ 6.3 або [68], твердження 3.4. З означення ліфт зоноїда очевидно випливає, що

$$\hat{Z}(\gamma_c) = c\hat{Z}(\gamma).$$

Отже, умова **A1** може бути переписана в наступній еквівалентній формі: для кожної борелівської вимірної функції $g: \mathbb{R}^d \rightarrow [0,1]$ такої, що $\mathbf{E}_\mu g = \alpha$,

$$\|\mathbf{E}_\mu(gv)\| \square cI(\alpha) = cI(\mathbf{E}_\mu g).$$

За апроксимаційною процедурою, умова записана вище, еквівалентна аналогічній з борелівською вимірною g заміненою гладкою функцією f з компактним носієм. Оскільки для такої f з (4.13)

$$\|\mathbf{E}_\mu(fv)\| = \|\mathbf{E}_\mu(K\nabla f)\|,$$

умови **A1** і **B1** еквівалентні.

Доведення еквівалентності **B1** і **C1** слідує лінії доведення С. Бобкова з [19] для випадку продукт мір і лінійних зсувів; щоб зробити тлумачення самодостатніми, демонструємо основні кроки цього доведення.

Визначимо $R_r(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) + r)$, $r > 0$, $p \in (0,1)$. Тоді виконуються наступні властивості:

- для кожного $r > 0$ функція R_r увігнута;
- сімейство $\{R_r, r > 0\}$ є напівгрупою відносно композиції функцій,

тобто

$$R_{r_1} \circ R_{r_2} = R_{r_1+r_2};$$

- функція R_0 тотожня, і “генератор” напівгрупи $\{R_r, r > 0\}$ рівний гаусівській ізопериметричній функції I в тому сенсі, що

$$R_r(p) - pr \rightarrow I(p), \quad r \rightarrow 0+.$$

Аналогічно, сімейство функцій $S_r(p) = \Phi(\Phi^{-1}(p) - r)$, $r \geq 0, p \in (0, 1)$ має наступні властивості:

- для кожного $r \geq 0$ функція S_r є випуклою;
- сімейство $\{S_r, r \geq 0\}$ – напівгрупа відносно композиції функцій;
- функція S_0 – тотожня, і “генератор” напівгрупи $\{S_r, r \geq 0\}$ рівний $(-I)$.

Зауважимо, що **C1** еквівалентно наступному.

- Для будь-якого $h \in \mathbb{R}^d$ і борелівської вимірної $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$

$$S_{cPhP}(\mathbf{E}_\mu f) \leq \mathbf{E}_\mu (f \circ \Psi_1^{K,h}) \leq R_{cPhP}(\mathbf{E}_\mu f). \quad (4.21)$$

Дійсно, поклавши $f = \chi_A$ ми одержуємо **C1** з **C2**. І навпаки, з **C1** уявності R_r і нерівності Єнсена маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mu (f \circ \Psi_1^{K,h}) &= \int_0^\infty \mu(\{x : f(\Psi_1^{K,h}(x)) \geq t\}) dt \leq \int_0^\infty R_{cPhP}(\mu(\{x : f(x) \geq t\})) dt \\ &\leq R_{cPhP} \left(\int_0^\infty \mu(\{x : f(x) \geq t\}) dt \right) = R_{cPhP}(\mathbf{E}_\mu f). \end{aligned}$$

Доведення лівої частини нерівності в (4.21) є аналогічним і опускається. Отже, **C1** і **C2** еквівалентні.

Щоб отримати **B1** з **C2**, візьмемо th замість h і продиференціюємо праву частину нерівності в (4.21) відносно t в точці $t = 0$. Більш детально, позначимо $f_t(x) = f(\Psi_1^{K,th}(x))$, тоді

$$f_t(x) = f(\Psi_t^{K,h}(x)),$$

і тоді існує неперервна похідна

$$\partial_t f_t(x) = ((\nabla f)(\Psi_t^{K,h}(x)), (K^*h)(\Psi_t^{K,h}(x)))_{\mathbb{R}^d}.$$

Оскільки f – гладка функція з компактним носієм і K задовільняє (4.14), ця похідна обмежена як функція від $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ для кожної фіксованої точки T . Тому за теоремою про мажоровану збіжність

$$t(\mathbf{E}_\mu f_t - \mathbf{E}_\mu f) \rightarrow \mathbf{E}_\mu (\nabla f, K^*h)_{\mathbb{R}^d} = (\mathbf{E}_\mu K\nabla f, h)_{\mathbb{R}^d}, \quad t \rightarrow 0+.$$

Оскільки,

$$t(R_{cPhP}(\mathbf{E}_\mu f) - \mathbf{E}_\mu f) = cPhPI(\mathbf{E}_\mu f),$$

ми одержуємо з (4.21)

$$(\mathbf{E}_\mu K\nabla f, h)_{\mathbb{R}^d} \square cPhPI(\mathbf{E}_\mu f), \quad h \in \mathbb{R}^d.$$

Беручи \sup по всім h з $PhP = 1$, ми одержуємо (4.16).

Щоб отримати **C2** з **B1**, спочатку розглянемо випадок де f гладка функція з компактним носієм і така, що $0 < \mathbf{E}_\mu f < 1$. За нерівністю (4.16) для даного $h \in \mathbb{R}^d$ ми маємо, що

$$ddt|_{t=0} \mathbf{E}_\mu f_t = (\mathbf{E}_\mu K\nabla f, h)_{\mathbb{R}^d} \square cPhPI(\mathbf{E}_\mu f).$$

Нагадаємо, що

$$ddt|_{t=0} R_{cPhPt}(\mathbf{E}_\mu f) = cPhPI(\mathbf{E}_\mu f).$$

Тому для кожного $\rho > 1$ існує $\delta = \delta(f) > 0$ така, що для кожного $t \in (0, \delta)$:

$$\mathbf{E}_\mu f_t \square R_{\rho cPhPt}(\mathbf{E}_\mu f). \quad (4.22)$$

Помітимо, що якщо $t_1 \in (0, \delta(f))$ і $t_2 \in (0, \delta(f_{t_1}))$, тоді

$$\mathbf{E}_\mu f_{t_1+t_2} = \mathbf{E}_\mu (f_{t_1} \circ \Psi_{t_2}^{K,h}) \square R_{\rho cPhPt_1}(\mathbf{E}_\mu f_{t_1}) \square R_{\rho cPhP(t_1+t_2)}(\mathbf{E}_\mu f); \quad (4.23)$$

тут ми використали властивість потоку $\{\Psi_t^{K,h}, t \in \mathbb{R}\}$, напівгрупову властивість $\{R_r, r \geq 0\}$, і монотонність R_r . Оскільки, похідна $\partial_t f_t \in \mathbb{R}^d$ є рівномірно неперервною відносно $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$ для кожної фіксованої точки T , то можна показати, що

$$\delta_T = \inf_{t \in [0, T]} \delta(f_t) > 0.$$

Тоді, використовуючи (4.23) щонайбільше T/δ_T разів, ми одержуємо, що (4.22) виконується для всіх $t \in [0, T]$. Отже, (4.22) виконується для кожного $t \in \mathbb{R}^+$ і ρ може бути замінено на 1. Це дає праву частину нерівності в (4.21) для гладкої функції f з компактним носієм таким, що $0 < \mathbf{E}_\mu f < 1$. За апроксимаційною процедурою нерівність може бути поширена на будь-яку вимірну $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$. Доведення лівої частини нерівності в (4.21) абсолютно аналогічне і тому опускається.

Доведення теореми 1.2: твердження II. Наступна лема є прямим узагальненням частини твердження 2 і [5] (яке стверджує, що $P_1(c)$ і $P_2(c)$ еквівалентні в позначеннях [5]).

Лема 1.1 *Твердження **V1** еквівалентне наступному.*

Для будь-якої гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ з компактним носієм,

маємо

$$\sqrt{(\mathbf{E}_\mu I(f))^2 + \frac{1}{c^2} \mathbf{P} \mathbf{E}_\mu K \nabla f \mathbf{P}^2} \leq \mathbf{V}(\mathbf{E}_\mu f). \quad (4.24)$$

Доведення: Абсолютно аналогічне до наведеного в [5], тому, ми тільки зробимо його начерк. **V2** \Rightarrow **V1** – тривіально. Щоб отримати обернене включення, нагадаємо спочатку, що стандартна гаусівська міра γ^d на \mathbb{R}^d задовільняє **V2** з $c=1$ і тотожна матриця K (див. [5], розділ 2). Розглянемо гладку функцію $f: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ з компактним носієм, а $F(r) = \mu(\{x: f(x) \leq r\})$ – її функція розподілу відносно міри μ . Припустимо, що F абсолютно

неперервна відносно міри Лебега на \mathbb{R} , і візьмемо $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Визначимо $\psi_\varepsilon(x) = I_{[0,r]}(x) + (1 - \frac{x-r}{\varepsilon})I_{[r,r+\varepsilon]}(x)$. Застосовуючи **B1** до функції $g = \psi_\varepsilon(f)$ і спрямовуючи $\varepsilon \rightarrow 0$, ми одержуємо

$$F'(r)P\theta(r)P \leq I(F(r)) \text{ for } \mu \circ f^{-1} \text{ (4.25)}$$

де $\theta(r) = E_\mu(K\nabla f | f = r)$. Позначимо $k = F^{-1} \circ \Phi$, тоді k перетворює стандартну гаусівську міру γ^1 на \mathbb{R} в $\mu \circ f^{-1}$. Взявши похідну в тотожності $F(k) = \Phi$, ми одержуємо рівність $k'F'(k) = \varphi$. Тоді з (4.25) при $r = k(x)$ ми одержуємо нерівність

$$\frac{1}{c}P\theta(k(x))P \leq k'(x) \text{ (4.26)}$$

вірну майже скрізь по мірі γ^1 . Ми вже згадували, що стандартна гаусівська міра задовільняє **B2** з $c = 1$ і тотожністю K ; для випадку $d = 1$ це може бути записано як

$$\sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} I(g) d\gamma^1\right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}} g' d\gamma^1\right)^2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} g d\gamma^1\right)$$

Застосовуючи цю нерівність для $g = k$ і використовуючи (4.26), ми одержуємо

$$\sqrt{\left(\int_0^1 I(r) dF(r)\right)^2 + \left(\int_0^1 \frac{1}{c} P\theta(r) P dF(r)\right)^2} \leq \left(\int_0^1 r dF(r)\right); \text{ (4.27)}$$

тут ми врахували, що образ γ^1 під дією k це $\mu \circ f^{-1}$, і $\mu \circ f^{-1}$ приймає значення в $[0,1]$. Використовуючи нерівність

$$\int_0^1 \mathbb{P} \theta(r) \mathbb{P} dF(r) \left\| \int_0^1 \theta(r) dF(r) \right\| = \mathbb{P} \mathbf{E}_\mu K \nabla f \mathbb{P},$$

ми завершили доведення необхідного нам твердження. Додаткове припущення, що $\mu \circ f^{-1}$ абсолютно неперервне можна прибрати за апроксимаційною процедурою.

Згідно леми 1.1, щоб довести твердження II теореми 1.2 достатньо показати, що з **B2** випливає (4.18) для будь-якої невід'ємної гладкої функції f з компактним носієм. Це буде також правильно, якщо довести це для функцій f виду $0 < c_1 \leq f \leq c_2$, бо верхня оцінка вже гарантується тим, що функція f неперервна і має компактний носій, а нижню границю можна звести до нуля, апроксимуючи невід'ємні функції функціями відділеними від нуля, та переходячи до границі у вихідній нерівності твердження II.

При маленьких ε , εf приймає значення в $[0,1]$ і можна застосувати **B2**. Після тривіальних перетворень, ми одержуємо

$$\frac{1}{c^2} \mathbb{P} \mathbf{E}_\mu K \nabla f \mathbb{P}^2 \leq \frac{I^2(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f) - (\mathbf{E}_\mu I(\varepsilon f))^2}{\varepsilon^2}.$$

Тому необхідне твердження буде випливати із співвідношення

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{I^2(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f) - (\mathbf{E}_\mu I(\varepsilon f))^2}{\varepsilon^2} = 2 \mathbf{Ent}_\mu f \mathbf{E}_\mu f. \quad (4.28)$$

Це співвідношення може бути доведено безпосередньо, використовуючи наступний асимптотичний розклад:

$$I(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}} - \frac{\varepsilon \log(2 \log \frac{1}{\varepsilon})}{2 \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}}} + \frac{\varepsilon \kappa(\varepsilon)}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}}}, \quad (4.29)$$

де $\kappa(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0+$. Асимптотичний розклад (4.29) впливає з стандартного розкладу

$$\Phi(t) = -\frac{1}{t} \varphi(t) + \frac{1}{t^3} \varphi(t) + O(t^{-5} \varphi(t)), \quad t \rightarrow -\infty,$$

що впливає з формули інтегрування частинами.

Отже, покажемо, як впливає (4.28) з (4.29). Спочатку доведемо це для обмежених функцій f виду $0 < c_1 \leq f \leq c_2$.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{I^2(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f) - (\mathbf{E}_\mu I(\varepsilon f))^2}{\varepsilon^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} (I^2(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f) - (\mathbf{E}_\mu I(\varepsilon f))^2) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{\varepsilon^2} \left((\varepsilon \mathbf{E}_\mu f) \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}} - \frac{\varepsilon (\mathbf{E}_\mu f) \log(2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f})}{2 \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}}} + \frac{\varepsilon (\mathbf{E}_\mu f) \kappa(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f)}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}}} \right)^2 - \\ &\quad - (\mathbf{E}_\mu (f (\varepsilon \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}} - \frac{f \log(2 \log \frac{1}{\varepsilon f})}{2 \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}} + \frac{f}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}} + \frac{f \kappa(\varepsilon f)}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}}))^2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((\mathbf{E}_\mu f)^2 \left(\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}} - \frac{\log(2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f})}{2 \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}}} + \frac{\kappa(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f)}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}}} \right)^2 - \\
&\quad - \mathbf{E}_\mu \left(f \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}} - \frac{f \log(2 \log \frac{1}{\varepsilon f})}{2 \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}} + \frac{f}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}} + \frac{f \kappa(\varepsilon f)}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}} \right)^2 =
\end{aligned}$$

В кожній дужці, яка підноситься до квадрату, є по три доданки, які прямують до нуля (всі крім першого), отже і квадрати цих доданків і їх попарні добутки теж будуть прямувати до нуля, отже, ми можемо від них позбавитись, в кожній дужці після піднесення до квадрату та прибирання доданків, що прямують до нуля, залишаться тільки квадрат першого доданку, та його подвоєні попарні добутки з другим та третім доданком (добуток з четвертим доданком також прямує до нуля). В другій дужці, що віднімається, ситуація буде такою самою, адже за умови $f \in \mathcal{C}$ другий, третій і четвертий доданок будуть прямувати до нуля рівномірно. Тому в другій дужці залишаємо квадрат першого доданку та подвоєні добутки першого доданка з другим, третім та четвертим:

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((\mathbf{E}_\mu f)^2 \left(2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f} - \log(2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}) + 2 \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -(\mathbf{E}_\mu(f\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}))^2 + \mathbf{E}_\mu\left(\frac{f\log(2\log\frac{1}{\varepsilon f})}{\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}}\right)\mathbf{E}_\mu\left(f\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}\right) - \\
& -2\mathbf{E}_\mu\left(\frac{f}{\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}}\right)\mathbf{E}_\mu\left(f\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}\right) - 2\mathbf{E}_\mu\left(\frac{f\kappa(\varepsilon f)}{\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}}\right)\mathbf{E}_\mu\left(f\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}\right) = \\
& = 2(\mathbf{E}_\mu f)^2 + 2\log\frac{1}{\mathbf{E}_\mu f}(\mathbf{E}_\mu f)^2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((\mathbf{E}_\mu f)^2(2\log\frac{1}{\varepsilon} - \log(2\log\frac{1}{\varepsilon\mathbf{E}_\mu f})) - \\
& -(\mathbf{E}_\mu(f\sqrt{2\log\frac{1}{\varepsilon f}}))^2 + \mathbf{E}_\mu\left(\frac{f\log(2\log\frac{1}{\varepsilon f})}{\sqrt{1+\frac{\log f}{\log\varepsilon}}}\right)\mathbf{E}_\mu\left(f\sqrt{1+\frac{\log f}{\log\varepsilon}}\right) - \\
& -2\mathbf{E}_\mu\left(\frac{f}{\sqrt{1+\frac{\log f}{\log\varepsilon}}}\right)\mathbf{E}_\mu\left(f\sqrt{1+\frac{\log f}{\log\varepsilon}}\right) - \\
& -2\mathbf{E}_\mu\left(\frac{f\kappa(\varepsilon f)}{\sqrt{1+\frac{\log f}{\log\varepsilon}}}\right)\mathbf{E}_\mu\left(f\sqrt{1+\frac{\log f}{\log\varepsilon}}\right) =
\end{aligned}$$

Останній доданок за теоремою про мажоровану збіжність прямує до нуля за умови, що функція f обмежена зверху і знизу відділена від нуля, а попередній доданок прямує до $-2(\mathbf{E}_\mu f)^2$, отже, вираз приймає наступну вигляд:

$$\begin{aligned}
&= -2\log(\mathbf{E}_\mu f)(\mathbf{E}_\mu f)^2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((\mathbf{E}_\mu f)^2 (2\log \frac{1}{\varepsilon} - \log(2\log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f})) - \\
&\quad - (\mathbf{E}_\mu (f \sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon f}}))^2 + \mathbf{E}_\mu \left(\frac{f \log(2\log \frac{1}{\varepsilon f})}{\sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}}} \right) \mathbf{E}_\mu \left(f \sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}} \right) = \\
&= -2\log(\mathbf{E}_\mu f)(\mathbf{E}_\mu f)^2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((\mathbf{E}_\mu f)^2 2\log \frac{1}{\varepsilon} - (\mathbf{E}_\mu (f \sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon f}}))^2) + \\
&\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\mathbf{E}_\mu \left(\frac{f \log(2\log \frac{1}{\varepsilon f})}{\sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}}} \right) \mathbf{E}_\mu \left(f \sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}} \right) - (\mathbf{E}_\mu f)^2 \log(2\log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}) \right) = \\
&= -2\log(\mathbf{E}_\mu f)(\mathbf{E}_\mu f)^2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} ((\mathbf{E}_\mu f)^2 2\log \frac{1}{\varepsilon} - (\mathbf{E}_\mu (f \sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon f}}))^2) + \\
&\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\mathbf{E}_\mu \left(\frac{f \log(2\log \frac{1}{\varepsilon f})}{\sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}}} \right) \mathbf{E}_\mu \left(f \sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}} \right) - (\mathbf{E}_\mu f)^2 \log(2\log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}) \right) =
\end{aligned}$$

Простими перетвореннями під знаком останньої границі можна залишити головну частину функції, а під знаком другої границі скористатись формулою різниці квадратів:

$$\begin{aligned}
&= -2\log(\mathbf{E}_\mu f)(\mathbf{E}_\mu f)^2 + \\
&\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{E}_\mu f \left(\sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon}} - \sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon f}} \right) (\mathbf{E}_\mu f) \sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon}} + \mathbf{E}_\mu \left(f \sqrt{2\log \frac{1}{\varepsilon f}} \right) + \\
&\quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\mathbf{E}_\mu \left(f \log(2\log \frac{1}{\varepsilon f}) \right) \mathbf{E}_\mu (f) - (\mathbf{E}_\mu f)^2 \log(2\log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}) \right) = \\
&= -2\log(\mathbf{E}_\mu f)(\mathbf{E}_\mu f)^2 +
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{E}_\mu f \left(\frac{-2 \log \frac{1}{f}}{\sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}} + \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}} \right) (\mathbf{E}_\mu f) \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}} + \mathbf{E}_\mu (f \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon f}}) +$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_\mu f \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\mathbf{E}_\mu f (\log(2 \log \frac{1}{\varepsilon f}) - \log(2 \log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}))) = \\ & = -2 \log(\mathbf{E}_\mu f) (\mathbf{E}_\mu f)^2 + \end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbf{E}_\mu f \left(\frac{2 \log f}{1 + \sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}}} \right) (\mathbf{E}_\mu f + \mathbf{E}_\mu (f \sqrt{1 + \frac{\log f}{\log \varepsilon}})) +$$

$$\mathbf{E}_\mu f \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\mathbf{E}_\mu f (\log \frac{\log \frac{1}{\varepsilon f}}{\log \frac{1}{\varepsilon \mathbf{E}_\mu f}})) =$$

$$-2 \log(\mathbf{E}_\mu f) (\mathbf{E}_\mu f)^2 + \mathbf{E}_\mu f \left(\frac{2 \log f}{1+1} \right) (\mathbf{E}_\mu f + \mathbf{E}_\mu (f)) + \mathbf{E}_\mu f (\mathbf{E}_\mu f (\log 1)) =$$

$$-2 \log(\mathbf{E}_\mu f) (\mathbf{E}_\mu f)^2 + 2 \mathbf{E}_\mu (f \log f) (\mathbf{E}_\mu f) = 2 \mathbf{Ent}_\mu f \mathbf{E}_\mu f$$

Ми довели, що для відділених від нуля та обмежених зверху функцій f правильно, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I^2(\varepsilon \mathbf{E}_\mu f) - (\mathbf{E}_\mu I(\varepsilon f))^2}{\varepsilon^2} = 2 \mathbf{Ent}_\mu f \mathbf{E}_\mu f.$$

Зауваження 1.2 Вище наведене доведення твердження II впливає, в основній ідеї, з нарису доведення в [5] (доведення імплікації $P_3(c) \Rightarrow P_6(c\sqrt{2})$ в твердження 2), де автори посилаються на лекції Бекнера в Інституті Анрі Пуанкаре. Але, замість того, щоб використовувати еквівалентність

$I(\varepsilon) : \varepsilon \sqrt{2 \log \frac{1}{\varepsilon}}, \varepsilon \rightarrow 0$, якої безсумнівно не достатньо, щоб забезпечити (4.28),

ми використовуємо сильніший асимптотичний розклад (4.29).

Для того щоб відношення (4.19) виконувалось для деякого c необхідно і достатньо, щоб для деякого ε виконувалось умова (4.9).

Твердження 1.1 *Існує $c > 0$ таке, що (4.19) виконується, тоді і тільки тоді, коли існує $\varepsilon > 0$ таке, що:*

$$\mathbf{E}_\mu e^{\varepsilon(v,h)^2_{\mathbb{R}^d}} \leq \mathbf{P}h\mathbf{P} \quad (4.30)$$

Оптимальна константа c в (4.19) і ε в (4.30) пов'язані відношенням (4.10).

Оскільки відношення ліфт зоноїдного порядку еквівалентне до такого самого відношення для всіх одновимірних проєкцій (див. розділ 5 в [55]), твердження 1.1 впливає одразу із одновимірного твердження, наведеного нижче.

Лема 1.2 *Для міри ν на \mathbb{R} існує константа $c > 0$ така, що*

$$\nu'_{LZ} \gamma_c$$

з $\gamma_c : \mathcal{N}(0,c)$ тоді і тільки тоді, коли існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon x^2} dx \leq \mathbf{P}$$

у цьому випадку, оптимальні константи c, ε пов'язані відношенням (4.10).

Доведення леми 1.2, насправді, міститься в доведенні леми 4.1 в [19], отже, ми опускаємо його тут.

4.2 Зважена логарифмічна нерівність Соболева в \mathbb{R}

Наведена вище теорема 1.2 дає достатню умову для зваженої оберненої логарифмічної нерівності Соболева на основі пари функцій ν, K пов'язаних

співвідношенням (4.20). Основний результат цього підрозділу – теорема 2.1, наведена нижче, показує, що використання цієї ж пари може привести до достатніх умов для (прямої) логарифмічної нерівності Соболева, в зваженій або в класичній формі. Примітним є те, що навіть в найпростішому одновимірному випадку теорема 2.1 призводить до нових достатніх умов для логарифмічної нерівності Соболева, в порівнянні з тими, що доступні в літературі; дивись нижче наведене твердження 2.1, твердження 2.2 і два приклади у підрозділі 5.4. Здається, що причина такого вдалого вибору *пари* функцій ваги ν, K в нерівності (4.31) які пов'язані умовою (4.20).

Теорема 2.1 *Нехай $d = 1$ і функції ν, K пов'язані відношенням (4.20).*

Припустимо що для деякого $\alpha > 0$

$$K\nu' \leq \alpha. \quad (4.31)$$

Припустимо в додатку, що функція K і

$$a := 2KK' + K^2\nu_\mu \quad (4.32)$$

належать до C^∞ мають не більше ніж лінійне зростання на ∞ , і їх похідні мають не більше ніж поліноміальне зростання на ∞ .

Тоді для кожної гладкої функції f з компактним носієм

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \frac{2}{\alpha} \mathbf{E}_\mu (Kf')^2. \quad (4.33)$$

Як наслідок, якщо K обмежене, тоді μ задовільняє (класичній) логарифмічній нерівності Соболева: для кожної абсолютно неперервної функції f такої, що обидві функції f і f' квадратично інтегровані відносно міри μ ,

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \frac{2}{\alpha} \left(\sup_x K^2(x) \right) \mathbf{E}_\mu (f')^2. \quad (4.34)$$

Зауваження 2.1 *Доведення 2.1 основане на класичному критерії Бакрі-*

Емері; дивись нижче. Вочевидь, таку саму техніку можна буде застосувати в багатовимірному випадку, але через можливі некомутативні матричнозначні функцій ваги, які з'являються в ньому, зараз не наведено багатовимірної версії теореми 2.1 – це предмет подальшого дослідження.

Зауваження 2.2 *Додаткові припущення гладкості на функції K, a та певні умови зростання, в окремих випадках, можуть бути прибрані за апроксимаційною процедурою; дивись, наприклад, твердження 2.1 і 2.2, описаних нижче.*

Доведення теореми 2.1. Розглянемо марківський процес X визначений як сильний розв'язок СДР:

$$dX_t = a(X_t)dt + \sqrt{2}K(X_t)dW_t;$$

дивись (4.32) формула яка визначає коефіцієнт a . Тоді на просторі Шварца $S(\mathbb{R})$ функцій C^∞ таких, що всі їх похідні затухають на ∞ швидше за будь-який поліном, генератор L процесу X має форму:

$$Lf = af' + bf'' = v_\mu f' + (bf')', \quad b := K^2.$$

За побудовою, міра μ є симетричною мірою для півгрупи $\{T_t\}$ породженої процесом X :

$$\mathbf{E}_\mu f T_t g = \mathbf{E}_\mu g T_t f, \quad t \geq 0;$$

зокрема,

$$\mathbf{E}_\mu T_t f = \mathbf{E}_\mu f, \quad t \geq 0,$$

тобто μ є інваріантною мірою для X . Клас $G = S(\mathbb{R})$ є алгеброю, інваріантною відносно суперпозиції C^∞ -функцій і щільною в кожному $L_p(\mu), p \geq 1$. До того ж, завдяки умові гладкості і обмеженням на зростання,

накладеним на коефіцієнти a, K , клас \mathbf{G} інваріантний відносно напівгрупи T , і генератора L . Визначимо $f, g \in \mathbf{G}$

$$\Gamma(f, g) = 12(L(fg) - fLg - gLf), \quad \Gamma_2(f, g) = 12(L\Gamma(f, g) - \Gamma(Lf, g) - \Gamma(f, Lg)).$$

Ми доведемо, що

$$\Gamma_2(f, f) \leq \alpha \Gamma(f, f), \quad f \in \mathbf{G}, \quad (4.35)$$

тоді необхідне твердження буде випливати з критерію Бакрі-Емері [1].

Прості розрахунки дають

$$\Gamma(f, g) = bf'g',$$

$$\begin{aligned} 2\Gamma_2(f, f) &= (ab' + bb'' - 2a'b)(f')^2 - 2bb'ff'' + 2b^2(f'')^2 \\ &= (ab' + bb'' - 2a'b - (b')^2 2)(f')^2 + (b'f'\sqrt{2} - bf''\sqrt{2})^2 \\ &\quad - (ab' + bb'' - 2a'b - (b')^2 2)(f')^2. \end{aligned}$$

Тому для доведення (4.35) буде достатньо показати, що

$$2ab' + 2bb'' - 4a'b - (b')^2 \leq 4\alpha b. \quad (4.36)$$

Нагадаємо, що

$$v = \delta_\mu(K) = -Kv_\mu - K',$$

отже, ми можемо виразити коефіцієнти a, b через функції K і v :

$$a = KK' - Kv, \quad b = K^2.$$

Підставляючи ці вирази в (4.36), після деяких трансформацій, які є простими, але громіздкими і тому опускаються, ми перепишемо (4.36) у наступній формі:

$$K^3 v' \leq \alpha K^2.$$

Остання нерівність очевидно має місце за умови (4.31). Отже, застосовуючи критерій Бакрі-Емері, ми одержуємо (4.33) для будь-кого $f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$.

Якщо K обмежена, тоді для кожного $f \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$ (5.1) виконується наслідок (4.33). Це стандартна процедура для апроксимації даної абсолютно

неперервної функції f такої, що $f, f' \in L_2(\mu)$ послідовністю гладких функцій f_n з компактним носієм, таким чином, що $f_n \rightarrow f$ and $f'_n \rightarrow f'$ in $L_2(\mu)$; дивись, наприклад, доведення наслідку 2.6.10 в [20]. Переходячи до межі в (5.1) для $f_n, n1$, ми закінчуємо доведення.

Маємо широкий вибір для пари функцій v, K пов'язаних співвідношенням (4.20). Нижче ми наводимо дві версії теореми 2.1 котрі відповідають конкретним парам цих функцій. Перша пара з'являється, коли ми покладемо $v(x) = x - \langle \mu \rangle$,

$$\langle \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}} y \mu(dy).$$

Твердження 2.1 *Нехай міра μ на \mathbb{R} має перший абсолютний момент і має додатню неперервну щільність p_μ . Позначимо*

$$\bar{K}_\mu(x) = 1 p_\mu(x) \int_x^\infty (y - \langle \mu \rangle) p_\mu(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Виконуються наступні твердження.

• Якщо $\inf_x \bar{K}_\mu(x) = \alpha > 0$, тоді для будь-якої гладкої функції f з компактним носієм

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \frac{2}{\alpha} \mathbf{E}_\mu (\bar{K}_\mu f')^2.$$

• Якщо, до того ж, $\sup_x \bar{K}_\mu(x) = \beta < \infty$, тоді для кожної абсолютно неперервної функції f такої, що обидві функції f і f' квадратично інтегровані відносно міри μ ,

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq 2\beta \mathbf{E}_\mu (f')^2$$

$$\bar{c}_\mu = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

В другому випадку теореми 2.1, ми вибираємо K таким, що $\delta_\mu(K) = \nu$ з

$$\nu = \Phi^{-1}(F_\mu), \quad F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), \quad (4.37)$$

тоді $\mu \circ \nu^{-1} = \gamma$, $\gamma: \mathbf{N}(0,1)$. Такий вибір ваги ν мотивований нашою метою, щоб

$$\hat{Z}^\nu(\mu) = \hat{Z}(\gamma);$$

для того, щоб мати відношення порядку (4.19) з $c=1$ настільки точною, наскільки це можливо, тобто замінити нерівність рівністю. Оскільки $\hat{Z}^\nu(\mu) = Z(\mu \circ \nu^{-1})$ визначає розподіл $\mu \circ \nu^{-1}$ однозначно, такий намір природнім чином приводить до формули (4.37).

Наведемо приклад застосування твердження 8:

Приклад 2.1 Нехай μ на \mathbf{R} має додатню C^1 -щільність p_μ , таку, що для деякого $a, R > 0$

$$v_\mu(x) \geq ax^2, \quad |x| > R \quad (4.38)$$

Давайте покажемо, що тоді умова $\inf \bar{K}_\mu > 0$ з твердження 2.1 виконується. Замінюючи змінні $x \leftarrow x - \langle \mu \rangle$, ми можемо обмежитись випадком $\langle \mu \rangle = 0$. Тоді ми маємо для $x > R$

$$\begin{aligned} \bar{K}_\mu(x) &= \int_x^\infty y \exp(\log p_\mu(y) - \log p_\mu(x)) dy \\ &= \int_x^\infty y \exp\left(\int_x^y v_\mu(z) dz\right) dy \int_x^\infty y \exp\left(-a \int_x^y z dz\right) dy \\ &= e^{ax^2/2} \int_x^\infty y e^{-ay^2/2} dy = 1/a. \end{aligned}$$

Аналогічне співвідношення виконується для $x < -R$; щоб переконатись в

цьому, варто зазначити, що

$$\bar{K}_\mu = -1 p_\mu(x) \int_{-\infty}^x y p_\mu(y) dy$$

тому що μ центрована міра. Нарешті, оскільки $p_\mu \in C^1$ додатне, \bar{K}_μ має додатну нижню межу $[-R, R]$, що завершує доведення.

Аналогічним чином, якщо до того ж для деякого $b > 0$

$$v_\mu(x) x \geq b x^2, \quad |x| > R, \quad (4.39)$$

тоді $\sup \bar{K}_\mu < \infty$. Отже, за твердженням II твердження 2.1, для міри μ , що задовільняє (4.38) і (4.39) виконується логарифмічна нерівність Соболева.

Помітимо, що (4.39) добре відома умова "переносу" достатня для нерівності Пуанкаре, наприклад, теорема 3.1 і зауваження 3.2 в [33]. Однак, різні достатні умови для логарифмічної нерівності Соболева, наявні в літературі, зазвичай потребують додаткових припущень на *кривизну*, яка в даному контексті дорівнює $-v_\mu$. А саме, відомий критерій Bakry-Emery ([1]) потребує $-v_\mu \geq \delta > 0$; умова Wang ([96]) і Cattiaux-Guillin ([33], теорема 5.1) є більш гнучкими, але як і раніше містять вимогу, щоб кривизна була обмежена знизу, тобто, в нашому випадку

$$-v_\mu \geq \delta \quad (4.40)$$

з деяким $\delta \in \mathbb{R}$. Умова наведена вище (4.38) може розумітись як "інтегральна" версія (4.40), і легко навести приклад міри μ , яка задовільняє (4.38) і (4.39) така, що не виконується (4.40).

Твердження 2.2 *Нехай міра μ в \mathbb{R} має додатну неперервну щільність розподілу p_μ . Позначимо*

$$\hat{K}_\mu(x) = I(F_\mu(x)) p_\mu(x).$$

Тоді виконуються наступні твердження.

- Для будь-якої гладкої функції f з компактним носієм,

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \mathbf{E}_\mu (\hat{K}_\mu f')^2. \quad (4.41)$$

• Якщо, в додатку, \hat{K}_μ обмежене, тоді для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що обидві функції f і f' квадратично інтегровані відносно міри μ ,

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \hat{c}_\mu \mathbf{E}_\mu (f')^2$$

де

$$\hat{c}_\mu = \sup_x (\hat{K}_\mu(x))^2.$$

Зауваження 2.3 *Визначимо ізопериметричну функцію міри μ як*

$$I_\mu(p) = p_\mu(F_\mu^{-1}(p)), \quad p \in (0,1), \quad I_\mu(0) = I_\mu(1) = 1.$$

Тоді, очевидно, функція I визначена як (4.3) еквівалентна $I_\gamma, \gamma: \mathbf{N}(0,1)$. Вище зазначена функція $\hat{K}_\mu(x)$ може бути виражена як відношення

$$I_\gamma(p) I_\mu(p) |_{p=F_\mu(x)},$$

і при припущеннях твердження 2.2 функція F_μ дає взаємно-однозначну відповідність між $(-\infty, \infty)$ і $(0,1)$. Отже, вище зазначена константа \hat{c}_μ може бути альтернативно визначена як

$$\hat{c}_\mu = \left(\sup_{p \in (0,1)} I_\gamma(p) I_\mu(p) \right)^2.$$

Доведення твердження 2.1 і твердження 2.2. Якщо $v(x) = x - \langle \mu \rangle$, ми маємо $\bar{K}_\mu v' = \bar{K}_\mu$, і тоді припущення $\inf \bar{K}_\mu = \alpha > 0$ зроблене в твердженні 2.1 передбачає головною умовою (4.31). Для функції v визначеній в (4.37) і функції \hat{K}_μ , ця умова приймає навіть більш просту форму, тому що пряме обчислення показує, що

$$\hat{K}_\mu v' = 1.$$

Отже, можна очікувати, що твердження 2.1 і твердження 2.2 впливають з версії критерію Бакрі-Емері наведеному в теоремі 2.1. Проте, ми не можемо застосувати цю теорему тут безпосередньо, через накладених в ній додаткових умов зростання і гладкості на функції K, a . Стратегія доведення буде наступною: по-перше, ми розглядаємо сім'ю мір, які наближують міру μ належним чином і задовольняють умови (4.31) для відповідної пари K, v , і додаткової гладкості і умов зростання на відповідні функції K, a . Тоді, при переході до границі, ми одержуємо відповідну зважену логарифмічну нерівність Соболева, тобто доводимо твердження I в твердженні 2.1, 2.2. Нарешті, використовуючи таку саму апроксимаційну процедуру, як і в доведенні теореми 2.1 вище, ми розширюємо клас функцій f у випадку, коли вага K обмежена.

Щоб скоротити викладки, ми пояснемо в деталях тільки те, як ця стратегія реалізується в доведенні твердження 2.2. Детальне доведення твердження 2.1 аналогічне і опускається. Ми також не повторюємо апроксимаційну процедуру з доведення теореми 2.1 вище, і концентруємося на доведенні (4.41) для гладких функцій f з компактним носієм.

Розглянемо спочатку наступний допоміжний випадок: $p_\mu \in C^\infty$, і для деякого $R > 0$

$$p_\mu(x) = \varphi(x), \quad |x| \leq R. \quad (4.42)$$

Тоді v_μ (яке, нагадаємо, рівне p_μ/p_μ) і \hat{K}_μ належить до C^∞ і

$$v_\mu(x) = -x, \quad \hat{K}_\mu(x) = 1, \quad |x| \leq R.$$

Тоді функції $K = \hat{K}_\mu$ і a визначені (4.32) задовольняють умовам теореми 2.1.

Отже, застосовуючи теорему 2.1, ми одержуємо (4.41).

Далі, розглянемо загальний випадок. Зафіксуємо деякі функції $\chi \in C^\infty$ зі значеннями в $[0,1]$ такі, що $\chi(0) = 0, \chi(x) = 1, x \geq 1$, і визначимо

$$\varphi_{r,\delta}(x) = \varphi(x)(\delta + (1-\delta)\chi(|x|+r)), \quad x \in \mathbb{R};$$

тоді кожне $\varphi_{r,\delta}, r > 0, \delta > 0$ належить C^∞ . Визначимо

$$M(r) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{r,0}(x) dx,$$

тоді M – це строго спадна функція на $[0, \infty)$ і $M(0) < 1$. Для даного $Q > 0$, розглянемо звуження p_μ^Q функції p_μ на відрізок $[-Q, Q]$, і припустимо, що Q достатньо велика для того щоб виконувалась нерівність

$$\int_{|x| > Q} p_\mu(x) dx < M(0).$$

Тоді для кожного δ достатньо малого для того, що б існувало єдине $r = r(Q, \delta) > 0$ таке, що

$$\int_{\mathbb{R}} (p_\mu^Q(x) + \varphi_{r,\delta}(x)) dx = 1.$$

Візьмемо деяке невід'ємне $\psi \in C^\infty$, визначене на $[-1, 1]$ і таке, що $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 1$, і розглянемо ймовірнісну міру $\mu_{Q,\delta}$ з щільністю

$$p_{\mu_{Q,\delta}}(x) = 1\delta \int_{[-\delta,\delta]} p_\mu^Q(y) \psi(x-y\delta) dy + \varphi_{r,\delta}(x).$$

За побудовою, кожне $\mu_{Q,\delta}$ має позитивну C^∞ щільність і задовільняє (4.42) для деякого великого R . Тоді, (4.41) виконується з $\mu_{Q,\delta}$ замість μ . Легко побачити, що

$$P_{\mu_{Q,\delta}} \rightarrow P_\mu, \quad K_{\mu_{Q,\delta}} \rightarrow K_\mu, \quad \delta \rightarrow 0, \quad Q \rightarrow \infty,$$

збігаються рівномірно на кожному скінченному відрізку. Переходячи до границі, ми одержуємо (4.41) для початкової міри μ і довільної гладкої функції f з компактним носієм.

4.3 Цензурована гаусівська міра

В цьому розділі наводиться цілий клас мір, що є прикладом застосування введеного у попередньому розділі критерію для зваженої нерівності Соболева. Буде доведено нерівність Пуанкаре для сферично цензурованої багатовимірної гаусівської міри та логарифмічної нерівності Соболева для проекції цієї міри на пряму.

Гаусівська міра ротативно інваріантна відносно центру координат, тому далі ми можемо не порушуючи загальності, досліджувати нерівність Пуанкаре для сферично цензурованої гаусівська міри у випадку, коли центр відповідної кулі має вигляд $(a, 0, 0, \dots, 0, a)$. Позначимо $\mu_n^{a,R}$ таку сферично цензувану міру, та $\mu_{n,a,R}$ її проекцію на вісь $(1, 0, 0, \dots, 0)$.

Зазначимо, що щільність міри $\mu_{n,a,R}$ має вигляд

$$\rho_{\mu_{n,a,R}}(x) = \begin{cases} \frac{c_{n-1} e^{-ax + \frac{a^2 - R^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(1 - B_n(a, R))} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2}), & x \in [a-R, a+R], \\ \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}(1 - B_n(a, R))}, & \varphi \ x. \end{cases}$$

де $B_n(a, R) = \gamma_n(B((a, 0, \dots, 0); R))$, $H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}} dy$,

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{[0,\pi]^{n-2}} \sin(\vartheta_1) \dots (\sin(\vartheta_{n-2}))^{n-2} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_{n-2}.$$

Теорема 3.1 Для будь-якої абсолютно неперервної функції f такої, що f і f' квадратично інтегровані відносно міри $\mu_{n,a,R}$,

$$\mathbf{Ent}_{\mu_{n,a,R}} f^2 \square_{n,R} \mathbf{E}_{\mu_{n,a,R}} (f')^2.$$

$$\text{де } c_{\mu_{n,R}} = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} (\sqrt{2R} H_{n-2}(R) + \frac{4c_n H_{n-1}(R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{c_{n-1}(n-3)!!})$$

Зауваження 3.1 Зазначимо, що

$$H_{2k+1}(x) = \sum_{m=0}^k \frac{(2k)!!}{(2(k-m))!!} x^{2(k-m)},$$

$$H_{2k}(x) = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k-2m-1)!!} x^{2k-2m-1} + (2k-1)!! e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\square_{m=0}^{k-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k-2m-1)!!} x^{2k-2m-1} + (2k-1)!! \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

тобто функція H_n обмежується поліномом. Отже, як вже нагадувалось, стала в нерівності Соболева для міри $\mu_{n,a,R}$ допускає оцінку, поліноміальну за R .

Наслідок 3.1 Має місце нерівність Пуанкаре для $\mu_{n,a,R}$:

$$\mathbf{Var}_{\mu_{n,a,R}} f \square_{n,R} \int |\nabla f|^2 d\mu_{n,a,R}$$

Нерівність Пуанкаре для міри $\mu_n^{a,R}$ з поліноміально залежною від R

константою є наслідком нерівності Пуанкаре для міри $\mu_{n,a,R}$. Сформулюємо це твердження, його доведення впливає з наслідка 2.1, формул (4.1) і (4.3) статті [2].

Теорема 3.2 *Має місце нерівність Пуанкаре для гаусівської міри з вирізаною кулею $\mu_n^{a,R}$:*

$$\text{Var}_{\mu_n^{a,R}} f \left(\frac{1}{c_{n,R}} + 1 + \frac{R^2}{n-1} \right) \int \mathbb{P} \nabla f \mathbb{P}^2 d\mu_n^{a,R}$$

4.4 Доведення теорем та наслідку

Умова, яка доводиться в наступній лемі, є достатньою для виконання логарифмічної нерівності Соболева з твердження теорема 3.1. Це є результат статті [1]. Тому доведення теорема 3.1 фактично зводиться до леми 4.1.

Лема 4.1 *Виконується нерівність*

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) = \frac{\rho_{\gamma_1}(F_{\gamma_1}^{-1}(F_{\mu_{n,a,R}}(x)))}{\rho_{\mu_{n,a,R}}(x)} \square_{c_{n,R}}$$

$$= \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} (\sqrt{2} R H_{n-2}(R) + \frac{4c_n H_{n-1}(R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{c_{n-1}(n-3)!!})$$

де $F_{\mu_{n,a,R}}(x)$, F_{γ_1} - функції розподілу відповідних мір.

Почнемо доведення з випадку коли $x \in (-\infty, a-R] \cup [a+R, \infty)$.

Лема 4.2 Для $x \in (-\infty, a-R] \cup [a+R, \infty)$ вірна нерівність $K_{\mu_{n,a,R}}(x) \leq c$.

Proof. Будемо позначати $I(p) := \rho_{\gamma_1}(F_{\gamma_1}^{-1}(p))$ ізопериметричну функцію стандартної гаусівської міри. Помітимо, що $I'(p) = -F_{\gamma_1}^{-1}(p)$. Тоді для будь-якого $c > 1$ і $x \in F_{\gamma_1}^{-1}(1/c)$ ми маємо

$$[I(cF_{\gamma_1}(x))] = -F_{\gamma_1}^{-1}(cF_{\gamma_1}(x))c\rho_{\gamma_1}(x) \leq x c\rho_{\gamma_1}(x) = c\rho_{\gamma_1}'(x),$$

тому що $F_{\gamma_1}^{-1}$ – зростаюча функція. Зрозуміло, що обидві функції $I(cF_{\gamma_1}(x))$ і $\rho_{\gamma_1}(x)$ прямують до нуля при $x \rightarrow -\infty$, отже,

$$I(cF_{\gamma_1}(x)) = \int_{-\infty}^x [I(cF_{\gamma_1}(y))] dy \leq c \int_{-\infty}^x \rho_{\gamma_1}'(y) dy = c\rho_{\gamma_1}(x), \quad x \in F_{\gamma_1}^{-1}(1/c).$$

Помітимо, що для $x \leq a-R$

$$F_{\mu_{n,a,R}}(x) = C_R F_{\gamma_1}(x), \quad \rho_{\mu_{n,a,R}} = C_R \rho_{\gamma_1}(x),$$

і $C_R > 1$. Також, півпростір $\{y = (y_1, y_2, y_3) : y_1 \leq x\}$ міститься в $\mathbb{R}^n \setminus B_n(a, R)$, отже,

$$F_{\gamma_1}(x) = \gamma_n(\{y = (y_1, y_2, y_3) : y_1 \leq x\}) \leq C_R \Leftrightarrow x \in F_{\gamma_1}^{-1}(1/C_R),$$

і ми можемо застосувати тільки що доведену нерівність, щоб отримати

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) = I(F_{\mu_{n,a,R}}(x)) \rho_{\mu_{n,a,R}}(x) = I(C_R F_{\gamma_1}(x)) C_R \rho_{\gamma_1}(x) \leq c \quad x < a-R.$$

Для випадку, коли $x > a+R$

$$1 - F_{\mu_{n,a,R}}(x) = C_R(1 - F_{\gamma_1}(x))$$

Помітимо, що $I(p) = I(1-p)$ і $F_{\gamma_1}^{-1}(1 - F_{\gamma_1}(x)) = -x$, тому ми можемо використати таке саме доведення, як і для випадку $x \leq a-R$, що $K_{\mu}(x) \leq c$, бо для будь-якого $c > 1$

$$I(c(1 - F_{\gamma_1}(x))) = -c \int_x^{\infty} F_{\gamma_1}^{-1}(c(1 - F_{\gamma_1}(y))) dy \leq c \int_x^{\infty} y \rho_{\gamma_1}'(y) dy = c\rho_{\gamma_1}(x).$$

Тепер залишилось довести нерівність з леми 4.1, для випадку $x \in [a-R, a+R]$. Для цього нам знадобиться допоміжне твердження.

Лема 4.3 Для $x \in (0,1)$ виконується нерівність

$$I(x) = \rho_{\gamma_1}(F_{\gamma_1}^{-1}(x)) \square \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} (1-x) \sqrt{\ln \frac{1}{1-x}}.$$

Proof. Покладемо $g(y) = \exp\{-\frac{y^2}{2}\} - F_{\gamma_1}(-y)$. Помітимо, що

$$g'(y) = -y \exp\{-\frac{y^2}{2}\} - (-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{y^2}{2}\} = \exp\{-\frac{y^2}{2}\} (\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - y),$$

отже, на промені $[0, \infty)$ функція g має один локальний мінімум в точці 0, та зменшується на промені $[\sqrt{2\pi}, +\infty)$. Маємо $g(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 0 - 0 = 0$.

Отже, $\exp\{-\frac{y^2}{2}\} > F_{\gamma_1}(-y), y \in [0, +\infty)$

$$\Rightarrow \exp\{-\frac{(\sqrt{2 \ln \frac{1}{x}})^2}{2}\} = x > F_{\gamma_1}(-\sqrt{2 \ln \frac{1}{x}}), x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow F_{\gamma_1}^{-1}(x) < -\sqrt{2 \ln \frac{1}{x}}, x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow -F_{\gamma_1}^{-1}(x) > \sqrt{2 \ln \frac{1}{x}}, x \in (0,1)$$

Помітимо, що на проміжку $x \in (0, \frac{1}{2})$ має місце нерівність

$$\sqrt{2\ln\frac{1}{x} - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1}} \left(\sqrt{2\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}}} \right)$$

тому

$$\Rightarrow -F_{\eta_1}^{-1}(x) - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} \left(\sqrt{2\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2\ln\frac{1}{x}}}} \right), \quad x \in (0, \frac{1}{2}]$$

$$\Rightarrow (I(x) - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} x \sqrt{2\ln\frac{1}{x}})' \geq 0 \quad x \in (0, \frac{1}{2}]$$

за умови $\lim_{x \rightarrow 0} (I(x) - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} x \sqrt{2\ln\frac{1}{x}}) = 0$

$$\Rightarrow I(x) \geq \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} x \sqrt{2\ln\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, \frac{1}{2}]$$

Тепер доведемо нерівність для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$$I(x) = I(1-x) - \frac{2\ln 2}{2\ln 2 - 1} (1-x) \sqrt{2\ln\frac{1}{1-x}}.$$

Для доведення нерівності у випадку $x \in (0, \frac{1}{2}]$ скористаємося наступним

фактом:

$$(1-x) \sqrt{\ln\frac{1}{1-x}} \geq x \sqrt{\ln\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, \frac{1}{2}].$$

Ця нерівність правильна, оскільки функція $g_1(x) = (1-x)^2 \ln\frac{1}{1-x} - x^2 \ln\frac{1}{x}$,

приймає значення 0 в точках $\frac{1}{2}$ і 1, і випукла вгору

$g_1''(x) = 2(\ln x - \ln(1-x)) \geq 0, x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Отже,

$$I(x) = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} x \sqrt{2 \ln \frac{1}{x}} \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} (1-x) \sqrt{2 \ln \frac{1}{1-x}}, \quad x \in (0, \frac{1}{2}]$$

Тепер ми можемо обмежити функцію

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 1} (1 - F_{\mu_{n,a,R}}(x)) \rho_{\mu_{n,a,R}}(x) \sqrt{2 \ln \frac{1}{1 - F_{\mu_{n,a,R}}(x)}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Легко помітити, що з результату наступної леми випливає твердження леми 4.1 для $x \in [a-R, a+R]$.

Лема 4.4 Для $x \in [a-R, a+R]$ виконується нерівність

$$(1 - F_{\mu_{n,a,R}}(x)) \rho_{\mu_{n,a,R}}(x) \sqrt{2 \ln \frac{1}{1 - F_{\mu_{n,a,R}}(x)}} \geq \sqrt{2} R H_{n-2}(R) + \frac{2\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R) + 1}{c_{n-1} H_{n-2}(0)}$$

Proof.

$$K_1(x) = \frac{1 - F_{\mu_{n,a,R}}(x)}{\rho_{\mu_{n,a,R}}(x)}$$

$$= \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy}{e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} + \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{c_{n-1} e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})}$$

Покладемо

$$A := \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy}{e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})}$$

$$B := \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{c_{n-1} e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})}$$

Відмітимо, що

$$A \square \frac{1 - e^{a(x-a-R)} H_{n-2}(R)}{a H_{n-2}(0)}$$

$$K_2(x) = \sqrt{\ln \frac{1}{1 - F_{\mu_{a,n,R}}(x)}}$$

$$= \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi}(1 - \gamma_n(B(a; R)))}{c_{n-1} e^{-\frac{a^2-R^2}{2}} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}}$$

$$\square \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi}(1 - \gamma_n(B(0; R-a)))}{c_{n-1} e^{-\frac{a^2-R^2}{2}} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}}$$

$$= \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a) e^{-\frac{(R-a)^2}{2}}}{c_{n-1} e^{-\frac{a^2-R^2}{2}} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy + \int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}}$$

$$= \sqrt{2aR + \ln \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy + m(a+R)}}$$

$$\square \sqrt{2aR} + \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy + m(a+R)}}$$

Покладемо

$$C := \sqrt{2aR}$$

$$D := \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy + m(a+R)}}$$

Нерівність 1.

$$AC = \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy}{e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \sqrt{2aR}$$

$$\frac{1-e^{a(x-a-R)}}{a} H_{n-2}(R) \sqrt{2aR} \frac{1-e^{-2aR}}{a} \sqrt{2aR} H_{n-2}(R) =$$

$$\sqrt{1-e^{-2aR}} \sqrt{\frac{1-e^{-2aR}}{2aR}} \sqrt{2R} H_{n-2}(R) \sqrt{2R} H_{n-2}(R)$$

Нерівність 2. Скористаємося нерівністю $\sqrt{\ln x} \leq x$, $x \in [1, +\infty)$

$$AD = \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy}{e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$

$$\times \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy + m(a+R)}}$$

$$\frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy}{e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})}$$

$$\times \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy + m(a+R)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy}{e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} \\
& \times \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-y)^2}) dy} \\
& = \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} e^{-ax+a^2+aR} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} \\
& \square \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} \square \frac{\sqrt{2\pi} c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} H_{n-2}(0)}
\end{aligned}$$

Нерівність 3.

$$\begin{aligned}
BC &= \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{c_{n-1} e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} \sqrt{2aR} \\
&= \frac{m(a+R) e^{-\frac{(a+R)^2}{2}}}{c_{n-1} e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})} \sqrt{2aR} \\
& \square \frac{m(a+R) e^{-\frac{(a+R)^2}{2}}}{c_{n-1} H_{n-2}(0)} \square \sqrt{2aR} \square \frac{m(a+R) \sqrt{2aR}}{c_{n-1} H_{n-2}(0)} \square \frac{1}{c_{n-1} H_{n-2}(0)}
\end{aligned}$$

Нерівність 4. Знову скористаємося нерівністю $\sqrt{\ln x} \square x$, $x \in [1, +\infty)$

$$BD = \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{c_{n-1} e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2 - (a-x)^2})}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sqrt{\ln \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy + m(a+R)}} \\
& \quad \square \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{c_{n-1}e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \\
& \times \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1}e^{a^2+aR} \int_x^{a+R} e^{-ay} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-y)^2}) dy + m(a+R)} \\
& \quad \square \frac{\int_{a+R}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy}{c_{n-1}e^{-ax} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{m(a+R)} \\
& \quad \square \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a) e^{\frac{ax-(a+R)^2}{2}}}{c_{n-1} H_{n-2}(\sqrt{R^2-(a-x)^2})} \square \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R-a)}{c_{n-1} H_{n-2}(0)}
\end{aligned}$$

Отже,

$$K_{\mu_{n,a,R}}(x) \square K_1(x) K_2(x) = AC + AD + BC + BD$$

$$\sqrt{2}RH_{n-2}(R) + 2 \frac{\sqrt{2\pi}c_n H_{n-1}(R)}{c_{n-1} H_{n-2}(0)} + \frac{1}{c_{n-1} H_{n-2}(0)}$$

$$= \sqrt{2}RH_{n-2}(R) + \frac{4c_n H_{n-1}(R)}{c_{n-1}(n-3)!!} + \frac{\sqrt{2}}{c_{n-1}(n-3)!!}$$

– многочлен $n-1$ степеня.

Отже, лема 4.1 повністю доведена, адже $c_{n,R} > 1$, і ця оцінка виконується також для $x \in (-\infty, a-R) \cup (a+R, +\infty)$.

Як вже було зазначено, з результату лемми 4.1 випливають результати теореми 3.1 2.1. і теореми 3.2, що і треба було довести.

Розділ 5

Мартингальні оцінки функціональних нерівностей

5.1 Вступ

У п'ятому розділі, використовуючи мартингальний метод, в інтегральній формі наводяться оцінки для ентропії ймовірнісної міри на \mathbb{R}^d . Як наслідок, в одновимірному випадку ми одержуємо зважену логарифмічну нерівність Соболева.

Ймовірнісна міра μ на \mathbb{R}^d задовольняє *логарифмічній нерівності Соболева*, якщо для кожної функції з компактним носієм $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ентропія f^2 , яка за означенням рівна

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 = \int_{\mathbb{R}^d} f^2 \log f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu \right) \log \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu \right)$$

має оцінку

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} P \nabla f P^2 d\mu \quad (5.1)$$

з деякою константою c . Найменша можлива константа c така, що (5.1) виконується для кожної функції з компактним носієм f , називається лог-Соболевською константою для міри μ ; множник 2 в (5.1) вибрано таким чином, що для стандартної гаусівської міри на \mathbb{R}^d її лог-Соболевська константа рівна 1.

Зважена логарифмічна нерівність Соболева має форму

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} P W \nabla f P^2 d\mu, \quad (5.2)$$

де функція W приймає значення в $\mathbb{R}^{d \times d}$ і розуміється як *вага*. Зрозуміло, що

можна розглядати (5.1) як частковий випадок (5.2), маса якого W рівна константі \sqrt{c} , помноженій на одиничну матрицю. Задача з пошуку точних умов на міру μ , які забезпечують логарифмічну нерівність Соболева або її модифікації, інтенсивно вивчається в літературі, зокрема, через численні зв'язки між цими нерівностями з концентрацією міри, напівгрупові властивості, і т.д., наприклад [72]. Керуючись цією загальною задачею, пропонується підхід, який базується в основному на мартингальних методах і забезпечує точну оцінку для ентропії в інтегральній формі.

Цей підхід мотивований добре відомим фактом, що в просторі траекторій броунівського руху, логарифмічна нерівність Соболева має просте доведення, яке базується на гарних властивостях простору; дивись [26],[48]. Ми помітили, що частина цього доведення, у великій степені, чуттєва до структури ймовірнісного простору; ми сформулювали відповідну мартингальну оцінку для ентропії в 5.2 нижче. Щоб застосувати цю загальну оцінку на ймовірнісному просторі виду (\mathbb{R}^d, μ) , потрібна відповідна мартингальна структура на цьому просторі. В підрозділі 5.3, була представлена така структура в термінах *нарізаної фільтрації*, визначеної в термінах *нарізки множин* в \mathbb{R}^d . Це приводить до інтегральної оцінки для ентропії на (\mathbb{R}^d, μ) . В підрозділі 5.4 ми показуємо шлях, як ця границя може бути використана, щоб отримати зважену логарифмічну нерівність Соболева; це зроблено для одновимірного випадку $d = 1$.

5.2 Мартингальна оцінка для ентропії

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) встановлена фільтрація $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$, яка є неперервною справа та повною, тобто кожна \mathcal{F}_t містить

всі P -нульові множини з \mathcal{F} . Нехай $\{M_t, t \in [0,1]\}$ невід'ємний квадратично інтегрований мартингал відносно фільтрації \mathcal{F} на цьому просторі, який має *cádlág* траєкторії. Далі будуть використані наступні стандартні факти і позначення (див. [36]).

Мартингал M має єдиний розклад $M = M^c + M^d$, де M^c – неперервний мартингал, і M^d – чисто розривний (див. [36], означення 9.20). Позначимо через $\langle M^c \rangle$ квадратичну варіацію мартингала M^c , а також позначимо через

$$[M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum_{s \square} (M_s - M_{s-})^2$$

опціонально квадратичну варіацію мартингалу M , і $\langle M \rangle$ передбачувана квадратична варіація мартингалу M ; це проекція $[M]$ на множину \mathcal{F} -передбачуваних процесів. Альтернативно $\langle M \rangle$ визначається як \mathcal{F} -передбачуваний процес, який з'являється в розкладі Дуба-Мейера для M^2 ; це \mathcal{F} -передбачуваний неспадний процес A такий, що $A_0 = 0$ і $M^2 - A$ – це мартингал.

Визначимо для невід'ємної випадкової величини ξ її ентропію $\mathbf{Ent}_\mu \xi = \mathbf{E}_\mu \xi \log \xi - \mathbf{E}_\mu \xi \log(\mathbf{E}_\mu \xi)$ з умовою $0 \log 0 = 0$.

Теорема 2.1 *Нехай \mathcal{F}_0 – вироджена σ -алгебра. Тоді для будь-якого невід'ємного квадратично інтегрованого мартингала $\{M_t, t \in [0,1]\}$ з *cádlág* траєкторіями,*

$$\mathbf{Ent}_\mu M_1 \mathbf{E}_\mu \int_0^1 1_{M_t} d\langle M \rangle_t.$$

Proof. Розглянемо перший випадок, де

$$c_1 \square M_t \square c_2, \quad t \in [0,1] \tag{5.3}$$

з деякими додатними константами c_1, c_2 . Розглянемо гладку функцію Φ , обмежену разом з усіма своїми похідними, таку, що

$$\Phi(x) = x \log x, \quad x \in [c_1, c_2].$$

Тоді за формулою Іто (дивись [36], теорему 12.19):

$$\begin{aligned} \Phi(M_1) - \Phi(M_0) &= \int_0^1 \Phi'(M_{t-}) dM_t + 1/2 \int_0^1 \Phi''(M_{t-}) d\langle M^c \rangle_t \\ &+ \sum_{0 < t \leq 1} [\Phi(M_t) - \Phi(M_{t-}) - \Phi'(M_{t-})(M_t - M_{t-})]. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\mathbf{E}_\mu \int_0^1 \Phi'(M_{t-}) dM_t = 0.$$

Оскільки F_0 за припущенням вироджена, $M_0 = \mathbf{E}_\mu [M_1 | F_0] = \mathbf{E}_\mu M_1$ майже напевно, отже:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ent}_\mu M_1 &= \mathbf{E}_\mu (\Phi(M_1) - \Phi(M_0)) = 1/2 \mathbf{E}_\mu \int_0^1 \Phi''(M_{t-}) d\langle M^c \rangle_t \\ &+ \mathbf{E}_\mu \sum_{0 < t \leq 1} [\Phi(M_t) - \Phi(M_{t-}) - \Phi'(M_{t-})(M_t - M_{t-})]. \end{aligned}$$

Для $x \in [c_1, c_2]$ маємо $\Phi'(x) = 1 + \log x$, $\Phi''(x) = 1/x$. Зауважимо, що для будь-якого x, δ таке, що $x, x + \delta \in [c_1, c_2]$:

$$\begin{aligned} \Phi(x + \delta) - \Phi(x) - \Phi'(x)\delta &= (x + \delta) \log(x + \delta) - x \log x - \delta(1 + \log x) \\ &= (x + \delta) \log(1 + \delta/x) - \delta(1 + \log x) - \delta = \frac{\delta^2}{x}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\mathbf{Ent}_\mu M_1 \leq \mathbf{E}_\mu \int_0^1 1M_{t-} d\langle M^c \rangle_t + \mathbf{E}_\mu \sum_{0 < t \leq 1} (M_t - M_{t-})^2 M_{t-} \mathbf{E}_\mu \int_0^1 1M_{t-} d[M]_t.$$

Оскільки процес $M_{t-}, t \in [0, 1]$ є F -передбачуваний, маємо

$$\mathbf{E}_\mu \int_0^1 1M_{t-} d[M]_t = \mathbf{E}_\mu \int_0^1 1M_{t-} d\langle M \rangle_t,$$

що завершує доведення необхідної оцінки в припущенні (5.3).

Верхня оцінка в припущенні може бути усунена за допомогою наступної стандартної процедури локалізації. Візьмемо N і визначимо

$$\tau_N = \inf\{t \in [0, 1]; M_t \leq N\}$$

вважаючи $\inf \emptyset = 1$. Тоді, повторюючи попередні міркування, одержуємо:

$$\mathbf{Ent}_\mu M_{\tau_N} \mathbf{E}_\mu \int_0^{\tau_N} 1M_{t-} d\langle M \rangle_t \mathbf{E}_\mu \int_0^1 1M_{t-} d\langle M \rangle_t.$$

Маємо $M_{\tau_N} \rightarrow M_1, N \rightarrow \infty$ майже напевно. З іншого боку, $\mathbf{E}_\mu M_{\tau_N}^2 \mathbf{E}_\mu M_1^2$ і

$$x \log x = o(x^2), \quad x \rightarrow +\infty,$$

отже сім'я $\{M_{\tau_N} \log M_{\tau_N}, N\}$ є рівномірно інтегрованою, і

$$\mathbf{Ent}_\mu M_{\tau_N} \rightarrow \mathbf{Ent}_\mu M_1, \quad N \rightarrow \infty.$$

переходячи до границі $N \rightarrow \infty$, одержуємо необхідне твердження в припущенні, що $M_t \geq c_1 > 0$. Поклавши $M_t + (1/n)$ замість M_t і тоді, переходячи до границі $n \rightarrow \infty$, завершуємо доведення теореми.

Нижче наведені два приклада, де застосовується доведена мартингальна оцінка для ентропії. В цих прикладах було б зручніше припустити, що t змінюється в $[0, \infty)$ замість $[0, 1]$; відповідна версія теореми 2.1 доводиться буквально тим самим способом.

Приклад 2.1 (Логарифмічна нерівність Соболева на множині траекторій броунівського руху; [26],[48]) Нехай (Ω, \mathcal{F}, P) – процес Вінера $B_t, t \geq 0$ такий, що $\mathcal{F} = \sigma(B)$. Нехай $\{\mathcal{F}_t\}$ – це натуральна фільтрація в \mathcal{F} . Тоді для кожної $\zeta \in L_2(\Omega, P)$ існує наступний мартингальний розклад:

$$\zeta = \mathbf{E}_\mu \zeta + \int_0^\infty \eta_s dB_s, \quad (5.4)$$

З інтегралом Іто (єдиного) квадратично інтегрованого $\{\mathcal{F}_t\}$ -узгодженим процесом $\{\eta_t\}$ в правій частині (див. [37]). Візьмемо $\xi \in L_4(\Omega, P)$ і покладемо $\zeta = \xi^2$,

$$M_t = \mathbf{E}_\mu[\zeta | \mathcal{F}_t] = \mathbf{E}_\mu \zeta + \int_0^t \eta_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

Тоді обрахунки з доведення теореми 2.1 дають оцінку:

$$\mathbf{Ent}_\mu \xi^2 \square \mathbf{E}_\mu \int_0^1 M_t d\langle M^c \rangle_t = 12 \mathbf{E}_\mu \int_0^1 \eta_t^2 M_t dt = 12 \mathbf{E}_\mu \int_0^1 \eta_t^2 \mathbf{E}_\mu [\xi^2 | \mathbf{F}_t] dt,$$

звернемо увагу на додатковий коефіцієнт $1/2$, який маємо зараз, оскільки мартингал M неперервний.

Далі згадаємо розклад Окона ([80]) для процесу $\{\eta_t\}$, який є дійсним, якщо ζ має похідну Маллявена $D\zeta = \{D_t\zeta, t0\}$:

$$\eta_t = \mathbf{E}_\mu [D_t\zeta | \mathbf{F}_t], \quad t0; \quad (5.5)$$

опускаємо деталі, які стосуються числення Маллявена, рекомендуючи читачу, в разі необхідності, [79]. Оскільки похідна Маллявена задовольняє ланцюговому правилу, маємо:

$$\eta_t^2 = 4(\mathbf{E}_\mu [\xi D_t\xi | \mathbf{F}_t])^2 \square \mathbf{E}_\mu [\xi^2 | \mathbf{F}_t] \mathbf{E}_\mu [(D_t\xi)^2 | \mathbf{F}_t],$$

і, отже, виконується наступна нерівність типу лог-Соболева:

$$\mathbf{Ent}_\mu \xi^2 \square \mathbf{E}_\mu \int_0^1 \mathbf{E}_\mu [(D_t\xi)^2 | \mathbf{F}_t] dt = 2 \mathbf{E}_\mu PD\xi_{\mathcal{P}_H}^2, \quad (5.6)$$

де $D\xi$ розглядається як випадковий елемент в $H = L_2(0, \infty)$. При належній процедурі апроксимації можна показати, що (5.7) виконується для кожної $\xi \in L_2(\Omega, P)$ для якої існує похідна Маллявена $D\xi \in L_2(\Omega, P, H)$.

Попередній приклад класичний і добре відомий. Наступний приклад вочевидь є новим, що трохи дивує, оскільки, основні складові в ньому (числення Маллявена на просторі Пуассона і, відповідно, аналог розкладу Кларка-Окона (5.4), (5.5)) добре відомі (див. [28], [42]).

Приклад 2.2 (Логарифмічна нерівність Соболева на Пуассонівському просторі). Нехай $N_t, t0$ – процес Пуассона з інтенсивністю λ , і $\mathbf{F} = \sigma(N)$. Позначимо через $\tau_k, k1$ моменти послідовних стрибків процесу N , і через

$F_t = \sigma(N_s, s \leq t), t \geq 0$ – натуральну фільтрацію для N . Для будь-якої змінної вигляду

$$\xi = F(\tau_1, K, \tau_n)$$

з деяким $n \geq 1$ і функцією $F \in C^1(\mathbb{R}^n)$ з компактним носієм, визначимо довільний елемент $D\xi$ в $H = L_2(0, \infty)$ як

$$D\xi = - \sum_{k=1}^n F'_k(\tau_1, K, \tau_n) 1_{[0, \tau_k]}.$$

Позначимо також символом D замикання D , який розглядається як необмежений оператор $L_2(\Omega, P) \rightarrow L_2(\Omega, P, H)$. Тоді є наступний аналог розкладу Кларка-Окона(5.4), (5.5) дивись ([42]): для кожної ζ , яка має стохастичну похідну $D\zeta$, є наступне мартингальне представлення:

$$\zeta = \mathbf{E}_\mu \zeta + 1\lambda \int_0^\infty \eta_s d\tilde{N}_s,$$

де $\tilde{N}_t = N_t - \lambda t$ позначає компенсований Пуассонівський процес, що відповідає N , і $\{\eta_t\}$ – це проекція в $L_2(\Omega, P, H)$ оператора $D\zeta$ на підпростір породжений $\{F_t\}$ -передбачуваним процесом.

Діючи аналогічним чином, зробивши те саме, що і в попередньому прикладі, одержуємо наступну нерівність по типу лог-Соболева на Пуассонівському просторі траекторій:

$$\mathbf{Ent}_\mu \xi^2 \leq \mathbf{E}_\mu PD\xi_H^2. \quad (5.7)$$

5.3 Нарізки множин на \mathbb{R}^d і пов'язані з ними інтегральні оцінки для ентропії

Нехай μ – це ймовірнісна міра на \mathbb{R}^d з борелівською σ -алгеброю $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Подальша мета – це застосування загальної мартингальної оцінки з теореми 2.1 в конкретних умовах $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$. Щоб це зробити, спочатку *сконструюємо* фільтрацію $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, 1]\}$.

Надалі будемо позначати через $\mathcal{N}_\mu = \{A \in \mathcal{F} : \mu(A) = 0\}$; тобто клас μ -нульових борелівських множин.

Зафіксуємо сім'ю $\{D_t, t \in [0, 1]\}$ замкнених підмножин \mathbb{R}^d таких, що:

- $D_s \subseteq D_t, s \leq t$;
- $D_0 \in \mathcal{N}_\mu, \mu(D_t) < 1$ для $t < 1$, і $D_1 = \mathbb{R}^d$;
- для кожного $t > 0$

$$D_t \setminus \left(\bigcup_{s < t} D_s \right) \in \mathcal{N}_\mu,$$

і для кожного $t < 1$

$$D_t = \bigcap_{s > t} D_s.$$

Назвемо множини $D_t, t \in [0, 1]$ *нарізкою множин*, слідуючи термінології яка часто використовується в багатовимірному аналізі (див. [53]). Дану сім'ю множин $\{D_t\}$, визначаємо відповідно як *нарізану фільтрацію* $\{\mathcal{F}_t\}$ за наступною умовою. Позначимо $Q_t = \mathbb{R}^d \setminus D_t$. Тоді, за означенням, множина $A \in \mathcal{F}$ належить до \mathcal{F}_t якщо будь-яка множина $A \cap Q_t \in \mathcal{N}_\mu$, або $Q_t \setminus A \in \mathcal{N}_\mu$.

За конструкцією σ -алгебра $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ – повна. Також очевидно, що за властивістю (ii) сім'ї $\{D_t\}$, σ -алгебра \mathcal{F}_0 вироджена, і за властивістю (iii)

фільтрація F є неперечною. Отже, можемо застосувати теорему 2.1.

Зафіксуємо борелівську вимірну функцію $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$, яка є квадратично інтегрованою відносно μ . Розглянемо її як випадкову величину на $(\Omega, F, P) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu)$ і визначимо

$$g_t = \mathbf{E}_\mu[g | F_t], \quad t \in [0, 1].$$

Оскільки σ -алгебра має явний опис, можемо прямо порахувати кожне g_t , а саме, маємо для $t > 0$ і μ -м.с. x :

$$g_t(x) = \begin{cases} g(x), & x \in D_t, \\ G_t, & x \in Q_t, \end{cases} \quad (5.8)$$

де

$$G_t = 1\mu(Q_t) \int_{Q_t} g(y) \mu(dy). \quad (5.9)$$

Помітимо, що $\mu(Q_t) > 0$ для $t < 1$ і функція $G: [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^+$ неперевна. З цього випливає, що розглядається модифікація процесу $\{g_t\}$, визначеного як (5.8) для *кожного* $x \in \mathbb{R}^d$. Ці траєкторії можуть бути описані наступним чином. Позначимо:

$$\tau(x) = \inf\{t : x \in D_t\}, \quad (5.10)$$

тоді за властивістю (iii) сім'ї $\{D_t\}$ маємо $\tau(x) = \min\{t : x \in D_t\}$, і за властивістю (ii) $\tau(x) < 1, x \in \mathbb{R}^d, \tau(x) = 0 \Leftrightarrow x \in D_0$. Тоді для фіксованого $x \in \mathbb{R}^d$ маємо

$$g_t(x) = g(x)1_{t \geq \tau(x)} + G_t 1_{t < \tau(x)}, \quad t \in [0, 1],$$

що є c\`adl\`ag функцією, оскільки $\{G_t\}$ неперевна на $[0, 1)$.

Теорема 3.1 *Нехай g – борелівська вимірна функція $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$, квадратично інтегрована відносно μ . Нехай $\{D_t\}$ – це нарізка множин, яка задовольняє (i) – (iii).*

Тоді

$$\mathbf{E}_{\mu} g \int_{\mathbb{R}^d} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 G_{\tau(x)} \mu(dx),$$

де функції G і τ визначені як (5.9) і (5.10) відповідно.

Proof. Вже перевірено припущення теореми 2.1: фільтрація $\{F_t\}$ є повною і неперервною справа, і квадратично інтегрований мартингал $\{g_t\}$ має *cádlág* траєкторії. Оскільки $g_1 = g$ майже напевно і F_0 вироджена, маємо за теоремою 2.1 оцінку

$$\mathbf{E}_{\mu} g \mathbf{E}_{\mu} \int_0^1 1_{g_t} d\langle g \rangle_t.$$

Отже, маємо тільки вказати інтеграл в правій частині цієї межі. А саме, мета полягає в тому, щоб довести, що

$$\mathbf{E}_{\mu} \int_0^1 1_{g_t} d\langle g \rangle_t = \int_{\mathbb{R}^d} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 G_{\tau(x)} \mu(dx). \quad (5.11)$$

Спочатку розглянемо наступне твердження.

Лема 3.1 *Нехай $0 < s < t < 1$, і нехай α буде обмеженою F_s -вимірною випадковою величиною.*

Тоді

$$\mathbf{E}_{\mu} [\alpha(\langle g \rangle_t - \langle g \rangle_s)] = \int_{D_t \setminus D_s} \alpha(x) (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx).$$

Proof. За означенням $\langle g \rangle$:

$$\mathbf{E}_{\mu} [\alpha(\langle g \rangle_t - \langle g \rangle_s)] = \mathbf{E}_{\mu} [\alpha(g_t^2 - g_s^2)] = \mathbf{E}_{\mu} [\alpha(\mathbf{E}_{\mu}(g_t^2 | F_s) - g_s^2)].$$

Маємо:

$$g_s^2(x) = \begin{cases} g^2(x), & x \in D_s, \\ G_s^2, & x \in Q_s, \end{cases} \quad g_t^2(x) = \begin{cases} g^2(x), & x \in D_t, \\ G_t^2, & x \in Q_t, \end{cases}$$

і застосуємо формулу (5.8) з $g = g_t^2, t = s$, одержуємо

$$\mathbf{E}_\mu(g_t^2 | \mathbf{F}_s)(x) - g_s^2(x) = \begin{cases} 0, & x \in D_s, \\ H_{t,s} \mu(Q_s), & x \in Q_s, \end{cases}$$

$$H_{t,s} = \left(\int_{D_t \setminus D_s} (g^2(x) - G_s^2) \mu(dx) + \int_{Q_t} (G_t^2 - G_s^2) \mu(dx) \right).$$

Оскільки $\alpha \in \mathbf{F}_s$ -вимірною, вона дорівнює Q_s μ -майже напевно. Позначимо цю константу A , тоді з обчислень, наведених вище, маємо:

$$\mathbf{E}_\mu[\alpha(\langle g \rangle_t - \langle g \rangle_s)] = AH_{t,s}.$$

Розпишемо $H_{t,s}$ у вигляді

$$H_{t,s} = \int_{D_t \setminus D_s} g^2(x) \mu(dx) + \mu(Q_t) G_t^2 - \mu(Q_s) G_s^2.$$

Позначимо

$$\mu_t = \mu(Q_t), \quad I_t = \int_{Q_t} g d\mu,$$

тоді

$$\mu(Q_t) G_t^2 = \mu_t G_t^2 = I_t^2 \mu_t.$$

Зауважимо, що функції $\mu_t, t \in [0,1]$ і $I_t, t \in [0,1]$ є неперервними функціями обмеженої варіації, і $\mu_t > 0, t < 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \mu(Q_t)G_t^2 - \mu(Q_s)G_s^2 &= \int_s^t d(I_v^2 \mu_v) = \int_s^t (-I_v^2 \mu_v^2 d\mu_v + 2I_v \mu_v dI_v) = \\ &= \int_s^t (-G_v^2 d\mu_v + 2G_v dI_v) \end{aligned}$$

Легко показати, що

$$-\int_s^t G_v^2 d\mu_v = \int_{D_t \setminus D_s} G_{\tau(x)}^2 \mu(dx). \quad (5.12)$$

Дійсно, оскільки G неперервна на $[0,1)$, інтеграл в лівій частині може бути наближений інтегральними сумами

$$\sum_{k=1}^m G_{v_k}^2 (\mu_{v_{k-1}} - \mu_{v_k}),$$

де $s = v_0 < v_1 < \dots < v_m = t$ — деяке розбиття $[s, t]$. Ця сума дорівнює

$$\sum_{k=1}^m G_{v_k}^2 \mu(D_{v_k} \setminus D_{v_{k-1}}).$$

Для $x \in D_{v_k} \setminus D_{v_{k-1}}$ маємо $\tau(x) \in [v_{k-1}, v_k]$. Отже, вище зазначена сума дорівнює

$$\sum_{k=1}^m \int_{D_{v_k} \setminus D_{v_{k-1}}} G_{\tau(x)}^2 \mu(dx) = \int_{D_t \setminus D_s} G_{\tau(x)}^2 \mu(dx)$$

з точністю до залишкового члену, що обмежений

$$\sup_{u, v \in [s, t], |u-v| \leq \frac{1}{k} \max(v_k - v_{k-1})} |G_u^2 - G_v^2|,$$

і прямує до нуля, коли діаметр розбиття прямує до нуля. Це доводить (5.12).

Аналогічно можна показати, що:

$$\int_s^t G_v dI_v = - \int_{D_t \setminus D_s} G_{\tau(x)} g(x) \mu(dx).$$

Ми можемо підвести підсумок розрахунків наступним чином:

$$\mathbf{E}_\mu [\alpha(\langle g \rangle_t - \langle g \rangle_s)] = A \int_{D_t \setminus D_s} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx).$$

Оскільки $\alpha(x) = A$ для μ -а.а. $x \notin D_s$, це завершує доведення.

Продовжимо доведення (5.11). Спочатку припустимо, що $g \in C$ для деякого $c > 0$. Тоді $g_t \in C$, і, отже, процес $1/g_{t-}$ неперервний зліва і обмежений. До того ж, функція $G_t = I_t/\mu_t$ обмежена на кожному відрізку $[0, T] \subseteq [0, 1)$.

Зафіксуємо $T < 1$ і візьмемо послідовність $\{\lambda^n\}$ двійкового розбиття $[0, T]$:

$$\lambda^n = \{t_k^n, k = 0, K, 2^n\}, \quad t_k^n = Tk2^{-n},$$

і визначимо

$$g_t^n = g_0 1_{t=0} + \sum_{k=1}^{2^n} g_{t_{k-1}^n} 1_{t \in (t_{k-1}^n, t_k^n]}.$$

Для кожного фіксованого $t > 0$ значення g_t^n рівне значенню g в деяких (двійкових) точках $t_n < t$, і $t_n \rightarrow t-$. Отже,

$$1/g_t^n \rightarrow 1/g_{t-}, \quad n \rightarrow \infty$$

поточково. До того ж, завдяки додатковому припущенню $g \in C$, ця послідовність обмежена числом $1/c$. Отже, за теоремою про мажоровану

збіжність:

$$\mathbf{E}_\mu \int_0^T 1_{g_{t-}} d\langle g \rangle_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\mu \sum_{k=1}^{2^n} 1_{g_{t_{k-1}^n}} (\langle g \rangle_{t_k^n} - \langle g \rangle_{t_{k-1}^n});$$

тут візьмемо до уваги, що точкою $t=0$ в лівій частині інтеграла можна знехтувати, тому що $g_t \rightarrow \mathbf{E}_\mu g, t \rightarrow 0+$ in L_2 , отже, $\langle g \rangle_t \rightarrow 0, t \rightarrow 0+$ in L_1 . За лемою 3.1:

$$\mathbf{E}_\mu \sum_{k=1}^{2^n} 1_{g_{t_{k-1}^n}} (\langle g \rangle_{t_k^n} - \langle g \rangle_{t_{k-1}^n}) = \mathbf{E}_\mu \sum_{k=1}^{2^n} \int_{D_{t_k^n} \setminus D_{t_{k-1}^n}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 G_{t_{k-1}^n} \mu(dx).$$

Нагадаємо, що $g_{t_{k-1}^n}(x) = G_{t_{k-1}^n}$ for $x \notin D_{t_{k-1}^n}$. Далі, для $x \in D_{t_k^n} \setminus D_{t_{k-1}^n}$ маємо:

$|\tau(x) - t_{k-1}^n| \leq \tau^n$. Оскільки $G_t, t \in [0, T]$ рівномірно неперервна і відділена від нуля,

і $G_{\tau(x)}, x \in D_T$ обмежена, ми одержуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\mu \int_0^T 1_{g_{t-}} d\langle g \rangle_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\mu \sum_{k=1}^{2^n} \int_{D_{t_k^n} \setminus D_{t_{k-1}^n}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 G_{t_{k-1}^n} \mu(dx) = \\ &= \int_{D_T} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 G_\tau(x) \mu(dx). \end{aligned}$$

Спрямовуючи $T \rightarrow 1-$ і застосовуючи теорему про монотонну збіжність до обох частин рівності вище, ми одержуємо (5.11).

Щоб прибрати додаткове припущення $g \in \mathcal{C}$, розглянемо сім'ю

$$g_t^n = g_t + 1/n. \quad \text{Тоді} \quad \langle g^n \rangle = \langle g \rangle, \quad g^n(x) - G_{\tau(x)}^n = g(x) - G_{\tau(x)},$$

$$g_{t-}^n = g_{t-} + (1/n), G_{\tau(x)}^n = G_{\tau(x)} + (1/n). \quad \text{Отже, ми можемо написати (5.11) для } g^n,$$

застосувати теорему про монотонну збіжність до обох частин рівності, і

отримати (5.11) для g .

5.4 Один наслідок: зважена логарифмічна нерівність Соболева на \mathbb{R}

В цьому підрозділі буде показано шлях, яким встановлюється інтегральна оцінка в теоремі 3.1 та яким можна отримати зважені логарифмічні нерівності Соболева. Розглянемо неперервну ймовірнісну міру μ на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ і позначимо через p_μ щільність абсолютно неперервної частини. Зафіксуємо сім'ю відрізків $D_t = [a_t, b_t], t \in [0, 1)$, де $a_0 = b_0$, функція a_t неперервна і спадає до $-\infty$ при $t \rightarrow 1^-$, і функція b_t неперервна і зростає до $+\infty$ при $t \rightarrow 1^-$. Тоді сім'я множин

$$D_t = [a_t, b_t], \quad t \in [0, 1), \quad D_1 = \mathbb{R}$$

задовільняє припущенню, накладеному вище. Отже, теорема 3.1 може бути застосована.

Назвемо функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *симетричною* відносно сім'ї множин $\{D_t\}$, якщо

$$f(a_t) = f(b_t), \quad t \in [0, 1)$$

В наступному твердженні застосуємо теорему 3.1 до $g = f^2$, де f гладка і симетрична.

Твердження 4.1 *Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – гладка функція, симетрична*

відносно сім'ї множин $\{D_t\}$. Тоді

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \mathbb{E}_R \int W(x)(f'(x))^2 \mu(dx),$$

де

$$W(x) = V^2(x) \log(1/\mu_{\tau(x)}), \quad V(x) = \begin{cases} \mu((-\infty, x)) p_\mu(x), & x \leq a_0; \\ \mu((x, \infty)) p_\mu(x), & x > a_0. \end{cases}$$

Proof. Розпишемо:

$$g(x) - G_{\tau(x)} = 1/\mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} (g(x) - g(y)) \mu(dy) = 1/\mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} \int_x^y g'(z) dz \mu(dy).$$

Проаналізуємо вираз у правій частині. Зауважимо, що зараз $Q_{\tau(x)}$ – це об'єднання двох інтервалів $(-\infty, a_{\tau(x)})$ і $(b_{\tau(x)}, +\infty)$. Позначимо

$$Q_t^+ = (b_t, \infty), \quad Q_t^- = (-\infty, a_t), \quad \mu_t^\pm = \mu(Q_t^\pm).$$

Точка x дорівнює або $a_{\tau(x)}$ або $b_{\tau(x)}$; отже, з того, що $g = f^2$ – симетрична функція, випливає:

$$g(x) = g(a_{\tau(x)}) = g(b_{\tau(x)}).$$

Тоді маємо

$$\int_x^y g'(z) dz = \begin{cases} \int_{b_{\tau(x)}}^y g'(z) dz, & y \in Q_{\tau(x)}^+, \\ \int_{a_{\tau(x)}}^y g'(z) dz, & y \in Q_{\tau(x)}^-. \end{cases}$$

Отже,

$$|g(x) - G_{\tau(x)}| \leq \mu_{\tau(x)} \left[\int_{Q_{\tau(x)}^+} \int_{Q_{\tau(x), \tau(z)}^+ \square_{\tau(y)}} |g'(z)| dz \mu(dy) + \int_{Q_{\tau(x)}^-} \int_{Q_{\tau(x), \tau(z)}^- \square_{\tau(y)}} |g'(z)| dz \mu(dy) \right].$$

Використовуючи теорему Фубіні, одержуємо

$$|g(x) - G_{\tau(x)}| \leq \mu_{\tau(x)} \left[\int_{Q_{\tau(x)}^+} \mu_{\tau(z)}^+ |g'(z)| dz + \int_{Q_{\tau(x)}^-} \mu_{\tau(z)}^- |g'(z)| dz \right] + \mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} V(z) |g'(z)| \mu(dz).$$

Оскільки, $g = f^2$ значить $g' = 2ff'$, тоді за нерівністю Коші маємо

$$\begin{aligned} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 &\leq \left(\mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} (V(z) f'(z))^2 \mu(dz) \right) \left(\mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} (f(z))^2 \mu(dz) \right) \\ &= 4 \left(\mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} (V(z) f'(z))^2 \mu(dz) \right) G_{\tau(x)}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$z \in Q_{\tau(x)} \Leftrightarrow \tau(z) > \tau(x) \Leftrightarrow x \in D_{\tau(z)} \setminus \{a_{\tau(z)}, b_{\tau(z)}\}.$$

Отже, за теоремою 3.1 і теоремою Фубіні маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{Ent}_{\mu}(f^2) &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\mu_{\tau(x)} \int_{Q_{\tau(x)}} (V(z) f'(z))^2 \mu(dz) \right) \mu(dx) \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_{\tau(z)}} \mu(dx) \mu_{\tau(x)} \right) (V(z) f'(z))^2 \mu(dz). \end{aligned}$$

Аналогічно доведенню (5.12), можна показати, що

$$\int_{D_t} \mu(dx) \mu_{\tau(x)} = \log \mu_s \Big|_{s=0}^{s=t} = \log(1\mu_t);$$

остання тотожність виконується, бо $\mu_0 = 1$. Це завершує доведення.

Далі розробимо процедуру *симетризації* для того, щоб зняти обмеження на симетричність функції f . Для будь-якої $x \neq a_0$ одна з кінцевих точок відрізка $D_\tau(x)$ рівна x , тоді позначимо через $s(x)$ іншу кінцеву точку. Позначимо також: $s(a_0) = a_0$. Визначимо σ -алгебру \hat{F} симетричних множин $A \in F$; тобто, таких $A \in F$, що $x \in A \Leftrightarrow s(x) \in A$. Для функції $f \in L_2(\mathbb{R}, \mu)$ розглянемо її L_2 -симетризація

$$\hat{f} = (\mathbf{E}_\mu[f^2 | \hat{F}])^{1/2}.$$

Легко бачити, що існує вимірна функція $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ така, що для μ -а.а. $x \in \mathbb{R}$,

$$(\hat{f})^2(x) = p(x)f^2(x) + (1-p(x))f^2(s(x)) = \mathbf{E}_{\nu_x} f^2,$$

де

$$\nu_x = p(x)\delta_x + (1-p(x))\delta_{s(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Маємо

$$\mathbf{E}_\mu f^2 = \mathbf{E}_\mu (\hat{f})^2,$$

отже,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ent}_\mu f^2 - \mathbf{Ent}_\mu (\hat{f})^2 &= \mathbf{E}_\mu f^2 \log f^2 - \mathbf{E}_\mu (\hat{f})^2 \log (\hat{f})^2 \\ &= \mathbf{E}_\mu (\mathbf{E}_\mu [f^2 \log f^2 - (\hat{f})^2 \log (\hat{f})^2 | \hat{F}]) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{Ent}_{\nu_x} f^2) \mu(dx). \end{aligned}$$

Добре відомо (див. [72]), що для міри Бернуллі $\nu = p\delta_1 + q\delta_{-1}$ ($p+q=1$) виконується наступний дискретний аналог логарифмічної нерівності

Соболева:

$$\mathbf{Ent}_\nu f^2 \leq C_p (Df)^2, \quad C_p = \begin{cases} pq \log p - \log qp - q, & p \neq q, \\ 12, & p = q, \end{cases}$$

де $Df = f(1) - f(-1)$. Це дає оцінку:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ent}_\mu f^2 - \mathbf{Ent}_\mu (\hat{f})^2 &= \int_{\mathbb{R}} C_{p(x)} (f(x) - f(s(x)))^2 \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} C_{p(x)} \left(\int_{D_{\tau(x)}} f'(z) dz \right)^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

За нерівністю Коші,

$$\left(\int_{D_{\tau(x)}} f'(z) dz \right)^2 \left(\int_{D_{\tau(x)}} (f'(z))^2 \mu_{\tau(z)}^{3/2} p_\mu^2(z) \mu(dz) \right) \left(\int_{D_{\tau(x)}} \mu(dz) \mu_{\tau(z)}^{3/2} \right),$$

і, аналогічно доведенню (5.12), можна показати, що:

$$\int_{D_{\tau(x)}} \mu(dz) \mu_{\tau(z)}^{3/2} = 2(\mu_{\tau(x)}^{-1/2} - 1) < 2\mu_{\tau(x)}^{-1/2}$$

Це дає наступну оцінку для різниці $\mathbf{Ent}_\mu f^2 - \mathbf{Ent}_\mu (\hat{f})^2$, сформульовану в термінах f' :

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 - \mathbf{Ent}_\mu (\hat{f})^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (f'(z))^2 U(z) \mu(dz), \quad U(z) = \mu_{\tau(z)}^{3/2} p_\mu^2(z) \int_{Q_{\tau(z)}} C_{p(x)} \mu(dx) \mu_{\tau(x)}^{1/2}.$$

Помітимо, що $C_p \leq 1$ для будь-якого $p \in [0, 1]$, отже маємо

$$U(z) \leq \left(\int_{Q_{\tau(z)}} \mu_{\tau(x)}^{1/2} \mu(dx) \right)^2.$$

Припускаючи, що оцінку з твердження 4.1 можна застосувати до \hat{f} (який ще належить вивчити, тому що \hat{f} може не бути гладкою функцією), одержуємо наступну нерівність, правильну без припущення симетричності f :

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (4W(x) ((\hat{f})'(x))^2 + 2U(x) (f'(x))^2) \mu(dx). \quad (5.13)$$

права частина нерівності містить похідну \hat{f} , отже, залежить від вибору сімейства сімейства нарізки множин $\{D_t\}$. Нижче буде наведено конкретний наслідок, який з'являється, коли $\{D_t\}$ – множина квантильної нарізки

множин. Надалі припускаємо, що міра μ має додатний розподіл p_μ , і вибираємо $\{D_t = [a_t, b_t]\}$ наступним чином. Позначимо $q_v = F_\mu^{-1}(v)$, тобто квантиль міри μ рівня v , і покладемо:

$$a_t = q_{1/2-t/2}, \quad b_t = q_{1/2+t/2}, \quad t \in [0,1].$$

Зокрема, $a_0 = b_0 = m$ – медіана μ . Позначимо також $\hat{F}_\mu = \min(F_\mu, 1 - F_\mu)$; зауважимо, що

$$\hat{F}_\mu(x) = 12\mu_{\tau(x)}.$$

Теорема 4.1 *Нехай μ – ймовірнісна міра на \mathbb{R} з додатною щільністю розподілу p_μ . Тоді для абсолютно неперервної функції f маємо:*

$$\mathbf{Ent}_\mu f^2 \int_{\mathbb{R}} K(x) (f'(x))^2 \mu(dx), \quad K(x) = 8 \left(\hat{F}_\mu(x) p_\mu(x) \right)^2 \left(\log 12 \hat{F}_\mu(x) + 1 \right).$$

Proof. Спочатку, зауважимо, що зараз L_2 -симетризація функції f має вигляд

$$\hat{f}(x) = \sqrt{12(f^2(x) + f^2(s(x)))}. \quad (5.14)$$

Ця тотожність очевидна для функцій f виду $1_{(-\infty, F_\mu^{-1}(v))}$, $v \in (0, 1/2]$, $1_{[F_\mu^{-1}(v), \infty)}$, $v \in [1/2, 1)$, і потім легко розширюється до загального випадку f .

Далі зауважимо, що

$$s(x) = F_\mu^{-1}(1 - F_\mu(x)), \quad (5.15)$$

і тому F_μ – абсолютно неперервна і строго зростаюча функція, так само $s(x)$ – абсолютно неперервна. Тоді \hat{f} абсолютно неперервна з

$$(\hat{f})'(x) = f(x)f'(x) + f(s(x))f'(s(x))s'(x)\sqrt{2(f^2(x) + f^2(s(x)))};$$

тут і нижче похідні добре визначені для а.а. x . Використовуючи стандартну localization/approximation процедуру, можна показати, що твердження 4.1 добре застосовне до будь-якої абсолютно неперервної функції. Отже, його можна застосувати до \hat{f} , і, отже, виконується (5.13).

Маємо:

$$((\hat{f})'(x))^2 (\hat{F}'(x))^2 + (f(s(x))f'(s(x))s'(x))^2 f^2(x) + f^2(s(x))(\hat{F}'(x)f(x))^2 + (f'(s(x))s'(x))^2.$$

Функція $W(x)$ в (5.13) зараз може бути записана як

$$W(x) = \left(\hat{F}_\mu(x)p_\mu(x)\right)^2 \log 2\hat{F}_\mu(x),$$

отже,

$$\int_{\mathbb{R}} W(x)((\hat{f}'(x)))^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} W(x)(f'(x))^2 \mu(dx) + \int_{\mathbb{R}} W(x)(f'(s(x)))^2 (s'(x))^2 \mu(dx).$$

Розглянемо другий інтеграл в правій частині. За (5.15):

$$s'(x) = -p_\mu(x)p_\mu(s(x)), \quad (5.16)$$

отже,

$$\int_{\mathbb{R}} W(x)(f'(s(x)))^2 (s'(x))^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} (f'(s(x)))^2 \left(\hat{F}_{\mu}(x) p_{\mu}(s(x)) \right)^2 \log 2 \hat{F}_{\mu}(x) p_{\mu}(x) dx.$$

Зробимо заміну змінної $y = s(x)$; зауважимо, що маємо $x = s(y)$ і $\hat{F}_{\mu}(x) = \hat{F}_{\mu}(y)$.

Тоді остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} W(x)(f'(y))^2 (s'(x))^2 \mu(dx) = \\ & = \int_{\mathbb{R}} (f'(s(x)))^2 \left(\hat{F}_{\mu}(y) p_{\mu}(y) \right)^2 \log 2 \hat{F}_{\mu}(y) p_{\mu}(s(y)) p_{\mu}(y) p_{\mu}(s(y)) dy \\ & = \int_{\mathbb{R}} W(y)(f'(y))^2 \mu(dy), \end{aligned}$$

і таким чином

$$\int_{\mathbb{R}} W(x)((\hat{f}')^2(x)) \mu(dx) \stackrel{D}{=} \int_{\mathbb{R}} W(x)(f'(x))^2 \mu(dx).$$

З іншого боку, в силу тотожності (5.14), маємо тепер $C_{p(x)} = 1/2$ і функція $U(x)$

в (5.13) може бути записана як:

$$U(x) = \left(\mu_{\tau(x)} p_{\mu}(x) \right)^2 = 4 \left(\hat{F}_{\mu}(x) p_{\mu}(x) \right)^2,$$

що завершує доведення потрібного твердження.

5.5 Мартингальна оцінка для варіації

В цьому підрозділі ми оцінюємо варіацію, так само за допомогою мартингалів з сигма-алгеброю, побудованою на нарізці множин міри. Також наведені два конкретних приклади застосування загальної оцінки, а саме

критерій Макенхаупта для класичної нерівності Пуанкаре в \mathbb{R} та зважена нерівність Пуанкаре з хорошим інтегральним ядром.

Кажуть, що виконується нерівність *Пуанкаре* для ймовірнісної міри μ на \mathbb{R}^d , якщо для кожної гладкої функції $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм, виконується наступна нерівність:

$$\text{Var}_\mu f \leq c \int_{\mathbb{R}^d} P \nabla f P^2 d\mu$$

з деякою константою c , де

$$\text{Var}_\mu f = \int_{\mathbb{R}^d} f^2 d\mu - \left(\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \right)^2$$

позначає *варіацію* функції f .

Найменша можлива константа c така, що виконується наведена нерівність для всіх гладких функцій f з компактним носієм, називається *константою Пуанкаре* для міри μ .

Одна із можливих форм розширення нерівності Пуанкаре – це *зважена нерівність Пуанкаре*:

$$\text{Var}_\mu f \leq \int_{\mathbb{R}^d} P K \nabla f P^2 d\mu,$$

де функція K приймає значення в $\mathbb{R}^{d \times d}$ і розуміється як *вага*.

В теоремі 2.1 нижче наводиться мартингальне представлення для варіації на \mathbb{R}^d . Як наслідок з цього представлення, в наслідку 1 наводиться інше доведення критерію Макенхаупта для нерівності Пуанкаре на \mathbb{R} , та в наслідку 2 наводиться достатня умова для того, щоб виконувалась зважена нерівність Пуанкаре на \mathbb{R} .

Для формулювання результатів, нам знадобиться додаткова конструкція. Для ймовірнісної міри μ в \mathbb{R}^d ми фіксуємо сім'ю множин

$$\{D_t, t \in [0, 1]\},$$

і їх доповнення

$$\{Q_t = \mathbb{R} \setminus D_t, t \in [0, 1]\};$$

і покладемо:

$$F_t = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A \cap Q_t \in \{\emptyset, Q_t\}\}$$

Властивості сім'ї множин $D_t \in F_t$:

1) $D_t \cap D_s = \emptyset, D_0 = \emptyset, D_1 = \mathbb{R}^d$

2) $F_t \cap F_s = F_0 = \{\emptyset, \mathbb{R}^d\}$

Покладемо

$$\tau(x) = \sup\{t \mid x \in Q_t\}$$

і також покладемо

$$G_t = 1_{\mu(Q_t)} \int_{Q_t} g(y) \mu(dy),$$

тоді

$$g_t(x) = E(g | F_t)(x) = g(x) 1_{D_t}(x) + G_t 1_{Q_t}(x).$$

Теорема 5.1

$$\text{Var}_{\mu}(g) = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx)$$

Доведення. За лемою 1 [1], для $0 < s < t < 1$ виконується наступне:

$$E(g_t^2 - g_s^2) = \int_{D_t \setminus D_s} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx)$$

Також можна побачити, що

$$\lim_{s \rightarrow 0} E_\mu(g_s^2 - (E_\mu g)^2) = \lim_{s \rightarrow 0} E_\mu(\mathbb{1}_{D_s} g^2) + \lim_{s \rightarrow 0} (\mathbb{1}_{Q_s} G_s^2) - \lim_{s \rightarrow 0} (E_\mu g)^2 =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mu(Q_s) G_s^2 - (E_\mu g)^2 = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\int_{Q_s} g(x) \mu(dx) \right)^2 - (E_\mu g)^2 = (E_\mu g)^2 - (E_\mu g)^2 = 0,$$

і

$$\lim_{t \rightarrow 1} |E_\mu(g^2 - g_t^2)| = \lim_{t \rightarrow 1} |E_\mu \mathbb{1}_{Q_t}(g^2 - G_t^2)| = \lim_{t \rightarrow 1} E_\mu(\mathbb{1}_{Q_t} g^2) + \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) G_t^2 =$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) G_t^2 = \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) \left(\frac{\int_{Q_t} g(x) \mu(dx)}{\mu(Q_t)} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow 1} \mu(Q_t) \frac{\int_{Q_t} g(x)^2 \mu(dx)}{\mu(Q_t)} = 0.$$

Це означає, що

$$\begin{aligned} \text{Var}(g) &= E_\mu(g^2 - (E_\mu g)^2) = \lim_{s \rightarrow 0, t \rightarrow 1} E_\mu(g_t^2 - g_s^2) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0, t \rightarrow 1} \int_{D_t \setminus D_s} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx). \end{aligned}$$

Це завершує доведення. \square

5.6 Критерій Макенхаупта

Застосування будуть сформульовані для одновимірного випадку, тому, окрім того, що $\{D_t, t \in [0, 1)\}$ – це сім'я відрізків $D_1 = \mathbb{R}$ і покладемо точку D_0 рівну медіані m міри μ , це означає, що $F_\mu(m) = \frac{1}{2}$. Тоді одну з кінцевих

точок $D_{\tau(x)}$ можемо назвати

$$\{s(x)\} = \Gamma(D_{\tau(x)}) \setminus \{x\}$$

Для формулювання застосування нам знадобляться наступні об'єкти:

$$F(z) = F_\mu(z) - I_{(D_0; +\infty)}(z)$$

$$q_x(z) = F(z)I_{Q_{\tau(x)}}(z) + F(s(x))I_{D_{\tau(x)}}(z)$$

Визначимо $u(z) = \left| \int_m^z \frac{1}{\rho(y)} \mu(dy) \right|$. В подальшому $\mu_t = \mu(Q_t), t \in [0; 1]$

Наслідок 6.1

Нехай $u | F | \square_c$, де c – додатна константа, тоді нерівність Пуанкаре виконується з константою $50c$:

$$\text{Var}_\mu(g) \leq 50c \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz)$$

Доведення

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_{\tau(x)}^2} \times \left(\int_{Q_{\tau(x)}} \int_y^x g'(z) dz \mu(dy) \right)^2 \mu(dx) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g'(z) q_x(z) dz \right)^2 \mu(dx) = (1) \end{aligned}$$

Тоді можемо використати нерівність Коші для (1):

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{\mathbb{R}} g'(z) q_x(z) dz \right)^2 \mu(dx) \\ &\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) q_x(z) dz \right)^2 + \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) q_x(z) \mu(dz) \right)^2 \right) \mu(dx) = \\ &\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) F(z) dz \right)^2 + \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) F(s(x)) \mu(dz) \right)^2 \right) \mu(dx) \end{aligned}$$

Покладемо:

$$A = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) F(z) dz \right)^2 \mu(dx)$$

$$B = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) F(s(x)) \mu(dz) \right)^2 \mu(dx)$$

Помітимо, що:

$$|F(z)|' = \rho(z) \text{sign}(m-z), z \neq m$$

$$u(z)' = \frac{\text{sign}(z-m)}{\rho(z)}, z \neq m$$

Використовуємо нерівність Коші для A :

$$\begin{aligned} & A \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \int_{Q_{\tau(x)}} \frac{|F(z)|^{2-\beta}}{\rho(z)} dz \mu(dx) = \\ & \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{2-\beta} (u(z) \text{sign}(z-m))' dz \mu(dx) = \\ & \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) (|F(z)|^{2-\beta} u(z) \text{sign}(z-m)) \Big|_{Q_{\tau(x)}} - \\ & - (2-\beta) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{1-\beta} \rho(z) u(z) \text{sign}(z-m) \text{sign}(m-z) dz \mu(dx) = \\ & \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) (-|F(x)|^{2-\beta} u(x) - |F(s(x))|^{2-\beta} u(s(x)) + \\ & (2-\beta) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{1-\beta} \rho(z) u(z) dz) \mu(dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) (2-\beta) \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{1-\beta} \rho(z) u(z) dz \mu(dx) | \\
& \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) (2-\beta) c \int_{Q_{\tau(x)}} |F(z)|^{-\beta} \rho(z) dz \mu(dx) = \\
& \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \frac{2-\beta}{1-\beta} c \int_{Q_{\tau(x)}} (|F(z)|^{1-\beta} \text{sign}(m-z))' dz \mu(dx) = \\
& \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \frac{2-\beta}{1-\beta} c (|F(x)|^{1-\beta} + |F(s(x))|^{1-\beta}) \mu(dx) = (2)
\end{aligned}$$

Зараз ми скористаємося нерівністю Єнсена:

$$\frac{1}{2} (|F(x)|^{1-\beta} + |F(s(x))|^{1-\beta}) \left(\frac{1}{2} |F(x)| + \frac{1}{2} |F(s(x))| \right)^{1-\beta} = \frac{1}{2^{1-\beta}} \mu_{\tau(x)}^{1-\beta}$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned}
(2) & \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) \frac{2-\beta}{1-\beta} c 2^\beta \mu_{\tau(x)}^{1-\beta} \mu(dx) | \\
& \int_{\mathbb{R}} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \mu(dz) 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \mu_{\tau(x)}^{-1-\beta} \mu(dx) = \\
& 2^{\beta+1} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \int_{D_{\tau(z)}} \mu_{\tau(x)}^{-\beta-1} \mu(dx) \mu(dz) = \\
& 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 |F(z)|^\beta \int_{\min(z, s(z))}^m \left(\frac{-\mu_{\tau(x)}^{-\beta}}{\beta} \right)' d(\mu_{\tau(x)}) \mu(dz) =
\end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^{n+1} \frac{c(2-\beta)}{1-\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu_{\tau(z)}^\beta \frac{\mu_{\tau(z)}^{-\beta}}{\beta} \mu(dz) = 2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{\beta(1-\beta)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz)$$

Щоб довести нерівність, вибираємо сім'ю D_t так, що $u(s(x)) = u(x)$. Тоді, використовуючи нерівність Коші для B , одержуємо:

$$\begin{aligned} & B \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \int_{D_{\tau(x)}} \frac{u(z)^{-\alpha}}{\rho(z)} dz \mu(dx) = \\ & \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \int_{D_{\tau(x)}} \left(\frac{u(z)^{1-\alpha} \text{sign}(m-z)}{1-\alpha} \right)' dz \mu(dx) = \\ & \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \frac{u(x)^{1-\alpha} + u(s(x))^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mu(dx) = \\ & \int_{\mathbb{R}} \frac{2F(s(x))^2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \frac{2u(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mu(dx) | \\ & \int_{\mathbb{R}} 2 \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \mu(dz) \frac{2u(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \mu(dx) = \\ & \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^\alpha \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{1-\alpha} \mu(dx) \mu(dz) = \\ & \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^\alpha (u^{1-\alpha} F|_{Q_{\tau(z)}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-\alpha} u'(x) F(x) dx \mu(dz) = \\
& \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} (u(z)^{1-\alpha} |F(z)| + u(s(z))^{1-\alpha} |F(s(z))| - \\
& \quad -(1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-\alpha} u'(x) F(x) dx) \mu(dz) | \\
& \quad \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} (cu(z)^{-\alpha} + cu(s(z))^{-\alpha} + \\
& \quad + (1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-\alpha} |F(x)| |u'(x)| dx) \mu(dz) = \\
& \quad \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} (2cu(z)^{-\alpha} + \\
& \quad + (1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} u(x)^{-1-\alpha} |u(x)F(x)| |u'(x)| dx) \mu(dz) | \\
& \quad \square \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} (2cu(z)^{-\alpha} + \\
& \quad + c(1-\alpha) \int_{Q_{\tau(z)}} \left(\frac{u(x)^{-\alpha}}{-\alpha} \text{sign}(m-x) \right)' dx) \mu(dz) = \\
& \quad \frac{4}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} (2cu(z)^{-\alpha} + \frac{2c(1-\alpha)}{\alpha} u(z)^{-\alpha}) \mu(dz) = \\
& \quad = \frac{8c}{(1-\alpha)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 u(z)^{\alpha} (u(z)^{-\alpha} + \frac{(1-\alpha)}{\alpha} u(z)^{-\alpha}) \mu(dz) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{8c}{(1-\alpha)\alpha} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz)$$

Тоді для $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$:

$$\text{Var}_{\mu}(g) = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx) \leq A + B$$

$$2^{\beta+1} \frac{c(2-\beta)}{\beta(1-\beta)} + \frac{8c}{(1-\alpha)\alpha} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz) \leq c \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \mu(dz)$$

5.7 Зважена нерівність Пуанкаре

Наслідок 7.1

$$\text{Var}_{\mu}(g) \leq \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{F(z)^2}{\rho(z)^2} \mu(dz)$$

Доведення Щоб довести нерівність, вибираємо сім'ю D_t так, що $|F(s(x))| = |F(x)|$.

$$\text{Var}_{\mu}(g) = \int_{\mathbb{R}} (g(x) - G_{\tau(x)})^2 \mu(dx)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(z)}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 + \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(s(x))}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \right) \mu(dx)$$

Покладемо:

$$C = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(z)}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx)$$

$$D = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{F(s(x))}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx)$$

Використаємо нерівність Коші для C :

$$C = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\left(\int_{Q_{\tau(x)}} g'(z) |F(z)|^{\frac{5}{4}} \frac{1}{|F(z)|^{\frac{1}{4}} \rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx) \right) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \left(\int_{Q_{\tau(x)}} \frac{1}{|F(z)|^{\frac{1}{2}}} \mu(dz) \right) \mu(dx) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \mu(dz) 2 |F|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(m-z) |_{Q_{\tau(x)}} \mu(dx) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \int_{Q_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \mu(dz) (-4 |F(x)|^{\frac{1}{2}}) \mu(dx) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \int_{D_{\tau(z)}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} (-4 |F(x)|^{\frac{1}{2}} \mu(dx)) \mu(dz) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} \int_{D_{\tau(z)}} \frac{-2}{|F(x)|^{\frac{3}{2}}} \mu(dx) \mu(dz) |$$

$$\int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} 8(F(z)^{-\frac{1}{2}} - 2) \mu(dz)$$

$$\int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{\frac{5}{2}}}{\rho(z)^2} 8 |F(z)|^{-\frac{1}{2}} \mu(dz) = 8 \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^2}{\rho(z)^2} \mu(dz)$$

Використовуємо нерівність Коші для D :

$$D = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\mu_{\tau(x)}^2} \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{|F(s(x))|}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{D_{\tau(x)}} g'(z) \frac{1}{\rho(z)} \mu(dz) \right)^2 \mu(dx)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \int_{D_{\tau(x)}} |F(z)|^{-1-\beta} \mu(dz) \mu(dx) =$$

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \int_{D_{\tau(x)}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \mu(dz) \frac{2}{\beta} \left(\frac{1}{2^{-\beta}} - |F(x)|^{-\beta} \right) \mu(dx) =$$

$$\frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \int_{Q_{\tau(z)}} \left(|F(x)|^{-\beta} - \frac{1}{2^{-\beta}} \right) \mu(dx) \mu(dz)$$

$$\frac{1}{\beta} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} \int_{Q_{\tau(z)}} |F(x)|^{-\beta} \mu(dx) \mu(dz) =$$

$$\frac{2}{\beta(1-\beta)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^{1+\beta}}{\rho(z)^2} |F(z)|^{1-\beta} \mu(dz) =$$

$$\frac{2}{\beta(1-\beta)} \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^2}{\rho(z)^2} \mu(dz)$$

Тоді можемо покласти $\beta = \frac{1}{2}$, і одержуємо

$$\text{Var}_{\mu}(g) \leq C + D \int_{\mathbb{R}} g'(z)^2 \frac{|F(z)|^2}{\rho(z)^2} \mu(dz)$$

Висновки

Дисертаційна робота присвячена геометричній характеристиці міри як

ліфт зоноід та її застосуванню у доведеннях функціональних нерівностей. У дисертації одержано такі основні результати:

- досліджені властивості ліфт зоноідів для максимально узагальненого випадку циліндричної міри в банаховому нескінченно-вимірному просторі;
- доведена теорема про однозначне представлення точок внутрішності випуклої замкненої оболонки носія міри як барицентра півпростору;
- введено поняття узагальненого ліфт зоноіда;
- введена умова на обернену логарифмічну нерівність Соболева у термінах ліфт зоноідів;
- введена умова на узагальнену обернену логарифмічну нерівність Соболева у термінах узагальнених ліфт зоноідів;
- введено новий критерій для прямої логарифмічної нерівності Соболева, не потребує другої похідної від щільності міри;
- Доведено нерівність Пуанкаре для класу цензурованих гаусівських мір в \mathbb{R}^d ;
- Доведені мартингальні оцінки для ентропії та варіації;
- Доведені оцінки для логарифмічної нерівності Соболева та Пуанкаре, як наслідки із мартингальних оцінок для ентропії та варіації.

Список використаних джерел

- [1] *Bakry D.* Hypercontractivity for diffusion semi-groupes. / D. Bakry M. Emery. // *Comptes rendus des seances de l'Academie des sciences. Serie 1.* - 1984.

- Vol. 15 - P. 775 – 778.

[2] *Bakry D.* Levy–Gromovs isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator. / Bakry D., Ledoux, M. // *Invent Math* - 1996. - Vol. 123 - P. 259-281.

[3] *Bakry D.* A simple proof of the Poincare inequality for a large class of probability measures. / Bakry D., Barthe F., Cattiaux P., Guillin. A. // *Electronic Communications in Probability*. - 2008. - Vol. 13 - P.60-66.

[4] *Bakry D.* Rate of convergence for ergodic continuous Markov processes: Lyapunov versus Poincare. / Bakry D., Cattiaux P., Guillin A. // *J. Func. Anal.* -1996 - Vol. 254 - P.727-759.

[5] *Barthe F.* Gaussian shift inequalities and norms of barycenters. / Barthe F., Cordero-Erausquin D., Fradelizi M. // *Studia Math.* - 2001. - Vol. 146(3) - P. 245 – 259.

[6] *Barthe F.* Mass Transport and Variants of the Logarithmic Sobolev Inequality. / Barthe, F. Kolesnikov, A. // *J Geom Anal* - 2008. - Vol. 18 - P. 921-979.

[7] *Barthe F.* Sobolev inequalities for probability measures on the real line. / Barthe, F., Roberto, C. // *Studia Math.* - 2003 - Vol. 159(3) - P.481-497.

[8] *Barthe F.* Modified Logarithmic Sobolev Inequalities on \mathbb{R} . / Barthe, F., Roberto, C. // *Potential Anal* - 2008 - Vol. 29 - P.167-193.

[9] *Bazovkin P.* Computing zonoid trimmed regions of dimension $d > 2$. / Bazovkin P., Lange T., Mosler K. // *Computational Statistics and Data Analysis* - 2009. - Vol. 53 - P. 2500-2510.

[10] *Bazovkin P.* An exact algorithm for weighted-mean trimmed regions in any dimension. / Bazovkin P., Mosler K. // *Journal of Statistical Software* - 2012. - Vol. 47(13).

[11] *Beckner W.* A generalized Poincare inequalities for Gaussian measures. / Beckner W. // Proc. Am. Math. Soc. - 1989. - Vol. 105(2) - P. 397-400.

[12] *Beckner W.* Sharp Sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality, / Beckner W. // Ann. of Math. - 1993. - Vol.138 - P. 213 - 242.

[13] *Beckner W.* Geometric asymptotics and the logarithmic Sobolev inequality. / Beckner, W. // Forum Math. - 1999. - Vol. 11(1) - P. 105-137.

[14] *Bobkov S.* Exponential integrability and transportation cost related to log-Sobolev inequalities. / Bobkov S., Gotze F. // J. Funct. Anal. - 1999. - Vol.163(1) - P. 1-28.

[15] *Bobkov S.* Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures. / Bobkov S.G. // Ann. Probab.- 1999. - Vol.27(4) - P.1903-1921.

[16] *Bobkov S.* Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities. / Bobkov, S., Houdre, C. // Mem. Am. Math. Soc. - 1997. - Vol. 129(616).

[17] *Bobkov S.* Poincare's inequalities and Talagrand's concentration phenomenon for the exponential distribution. / Bobkov S., Ledoux M. // Probab. Theory Relat. Fields - 1997. - Vol. 107(3) - P. 383-400.

[18] *Bobkov S.* From Brunn-Minkovsky to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequality. / Bobkov S., Ledoux M. // Geom. Funct. Anal. - 2000. - Vol. 10 - P.1028-1052

[19] *Bobkov S.* The size of singular component and shift inequalities. / Bobkov S. // The Annals of Probability - 1999. - Vol. 27(1) - P. 416-431.

[20] *Bogachev V.* Differentiable measures and the Malliavin calculus.

/Bogachev V. // Providence: AMS - 2010.

[21] *Boissard E.* Ornstein-Uhlenbeck pinball: I. Poincare inequalities in a punctured domain. / E. Boissard, P. Cattiaux, A. Guillin, L. Miclo. // eprint arXiv:1309.0986 - 2013.

[22] *Borell C.* Convex measures on locally convex spaces. / C. Borell. // Ark. Math. - 1974. - Vol. 12 - P.239 - 252.

[23] *Borell C.* Zonoids induced by Gauss measure with an application to risk aversion. / C. Borell. // Alea - 2009. - Vol.6 - P.133 - 147.

[24] *Buldygin V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. / V.V. Buldygin, Yu.V. Kozachenko // American Mathematical Society, Providence, Rhode Island – 2000. – 269p.

[25] *Bushmitch D.* Generalized sub-Gaussian fractional Brownian queuing model. / Yamnenko R., Kozachenko Yu., Bushmitch D. // Queuing Systems - 2014. - Vol.77 - P. 75 - 96.

[26] *Capitaine M.* Martingale representation and a simple proof of logarithmic Sobolev inequalities on path spaces. / Capitaine M., Hsu E., Ledoux. M. // Electron. Comm. Probab. -1997 - Vol. 2 - P.71 – 81.

[27] *Carlen E.* Logarithmic Sobolev inequalities and spectral gaps. / Carlen E., Loss M. // In Recent Advances in the Theory and Applications of Mass Transport. Contemp. Math. Am. Math. Soc. - 2004. - Vol.353 - P. 53-60.

[28] *Carlen E.* Differential calculus and integration by parts on Poisson space. / Carlen E., Pardoux. E. // Stoch., Algebra and Analysis in Classical and Quantum Dynamics - 1990. - Vol. 59.- P. 63 – 73.

[29] *Cascos I.* Integral trimmed regions. / Cascos, I., Lypez-DHáz M. // J. Multivar. Anal.- 2005. - Vol.96 - P.404-424.

- [30] *Cascos I.* Data depth: multivariate statistics and geometry. / I. Cascos. // *New Perspectives in Stochastic Geometry* - 2010. - P. 398–426.
- [31] *Cattiaux P.* Lyapunov conditions for Super Poincare inequalities / Cattiaux P., Guillin A., Y. Wang F., Liming Wu. Lyapunov // *J. Funct. Anal.* - 2009. - Vol. 256(6) - P. 1821-1841.
- [32] *Cattiaux P.* Poincare inequalities and hitting times. / Cattiaux P., Guillin A., Zitt P. // *Ann. Inst. Henri Poincaré e. Prob. Stat.* - 2013. - Vol.49(1) - P. 95-118.
- [33] *Cattiaux P.* Functional inequalities via Lyapunov conditions. / Cattiaux P., Guillin A. // In « *Optimal transportation. Theory and applications.* » London Mathematical Society Lecture Notes Series -2014. - Vol. 413 P.274-287.
- [34] *Cascos I.* Multivariate risks and depth-trimmed regions. / Cascos I., Molchanov I. // *Finance and Stochastics* - 2007. - Vol. 11 - P. 373-397.
- [35] *Chen M.* Estimates of logarithmic Sobolev constant: An improvement of Bakry-Emery criterion. / Chen M., Wang F. // *J. Funct. Anal.* - 1997. - Vol.144(2) - P. 287-300.
- [36] *Cohen S.* Stochastic calculus and applications. / Cohen S., Elliott R. // *Probability and Its Applications* - 2015.
- [37] *Clark J.M.C.* The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. / Clark. J.M.C. // *AMS* - 1970. - Vol. 41(4) - P. 46 – 52.
- [38] *Dall’Aglio M.* Zonoids, linear dependence, and size-biased distributions on the simplex / Dall’Aglio M., Scarsini M. // *Adv. in Appl. Probab.* - 2003. - Vol. 35(4) - P 871–884.
- [39] *Dorogovtsev A.* Measurable functionals and finitely absolutely

continuous measures on Banach spaces. / Dorogovtsev A. // Ukrainian Math. Jour. - 2000. - Vol.52(9) - P.1366-1379.

[40] *Dyckerhoff R.* Zonoid data depth: Theory and computation. / Dyckerhoff R., Koshevoy G., Mosler K. // In: COMPSTAT '96 - Proceedings in Computational Statistics (Prat, Albert, ed.). Physica, Heidelberg - 1996. - P.235-240.

[41] *Dyckerhoff R.* Weighted-mean regions of a probability distribution / Dyckerhoff R., Karl M. // Statistics and Probability Letters - 2012. - Vol.82(2) - P.318-325

[42] *Elliott R.J.* Integration by parts for Poisson processes. / Elliott R.J. Tsoi A.H. // Jour. of Multivar. Analysis - 1993.- Vol.44 - P. 179 – 190.

[43] *Gentil I.* Modified logarithmic Sobolev inequalities and transportation inequalities. / Gentil I., Guillin A., Miclo L. // Probab. Theory Relat. Fields - 2005.- Vol. 133(3) - P. 409-436.

[44] *Gentil I.* Modified logarithmic Sobolev inequalities in null curvature. / Gentil I. Guillin A., Miclo L. // Rev. Mat. Iberoam.- 2007. - Vol. 23(1) - P. 237-260.

[45] *Gentil I.* From the Prekopa-Leindler inequality to modified logarithmic Sobolev inequality. / Gentil I. // Annales de la faculté des sciences de Toulouse Mathématiques - 2008. - Vol.17(2) - P. 291-308

[46] *Gobet E.* Monte-Carlo Methods and Stochastic Processes: From Linear to Non-Linear. / Emmanuel Gobet // Chapman and Hall/CRC - 2016.

[47] *Goodey P.* Zonoids and generalizations. / Goodey P. Weil W. // Handbook of Convex Geometry B (P. M. Gruber and J. M. Wills, eds.) North-Holland, Amsterdam. - 1993. - P. 1297-1326.

[48] *Gong F.-Zh.* Martingale representation and log-Sobolev inequality on

loop space / Gong F.-Zh., Ma Zh.-M. // C.R. Acad. Sci. Paris, - 1998. - Vol.326(6), P. 749 – 753.

[49] *Gross L.* Logarithmic Sobolev inequalities and contractivity properties of semigroups. / Gross L. // Dirichlet Forms. Lect. Notes Math. Springer, Berlin - 1993. - Vol.1563 - P. 54-88.

[50] *Gross L.* Logarithmic Sobolev Inequalities / Gross L. // American Journal of Mathematics - 1975. - Vol.97(4) - P. 1061-1083.

[51] *Guionnet A.* Lectures on logarithmic Sobolev inequalities. / Guionnet A., Zegarlinski B. // Seminaire de probabilites de Strasbourg - 2002. - Vol.36 - P. 1-134.

[52] *Kiderlen M.* Non-parametric estimation of the directional distribution of stationary line and fibre processes. / Kiderlen M. // Adv. in Appl. Probab. - 2001. - Vol. 33 - P. 6-24.

[53] *Koshevoy G.* Zonoid trimming for multivariate distributions. / Koshevoy G., Mosler K. // Ann. Stat. - 1998. - Vol.25(5)- P. 1998-2017.

[54] *Koshevoy G.* Multivariate Lorenz dominance based on zonoids / Koshevoy G., Mosler K. // AStA Advances in Statistical Analysis - 2007. - Vol.91(1) - P. 57-76.

[55] *Koshevoy G.* Lift zonoids, random convex hulls and the variability of random vectors. / Koshevoy G., Mosler K. // Bernoulli - 1998. - Vol.4 - P.377 - 399.

[56] *Koshevoy G.* A scatter matrix estimate based on the zonotope. / Koshevoy G., Möttönen J., Oja H. // Annals of statistics - 2003. - Vol.31(5) - P. 1439–1459.

[57] *Koshevoy G.* Lift zonoid and multivariate depths. / Koshevoy G. // *Developments in Robust Statistics*, - 2003. - P.194-202.

[58] *Koshevoy G.* The Lorenz zonotope and multivariate majorizations. / Koshevoy G. // *Social Choice and Welfare* November - 1997.- Vol. 15(1) - P. 1-14.

[59] *Koshevoy G.* The Lorenz Zonoid of a Multivariate Distribution. / Koshevoy G., Mosler K. // *Journal of the American Statistical Association* - 1996. - Vol. 91(434) - P. 873-882.

[60] *Kozachenko Yu.* On the increase rate of random fields from space on unbounded domains. / Kozachenko Yu., Slyvka-Tylyshchak A. // *Statistics, optimization and information computing* - 2014 - Vol.2 - P. 79-92.

[61] *Kozachenko Yu.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space. / Kozachenko Yu., Slyvka-Tylyshchak A. // *Applied Mathematics* - 2014. - Vol.5 - P. 2318-2333.

[62] *Kozachenko Yu.V.* Application of φ -sub-Gaussian Random Processes in Queuing Theory / Kozachenko Yu.V., Yamnenko R.E. // *Modern Stochastics and Applications (Springer Optimization and Its Applications)* - 2014.- Vol.90 - P. 21 - 38.

[63] *Kozachenko Yu.* The restricted isometry property for random matrices with φ -subgaussian entries. / Kozachenko Yu., Troshki V. // *Random Operators and Stochastic Equations* - 2015. - Vol.23(3) - P. 169 - 178.

[64] *Kozachenko Y.* On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion / Kozachenko Y., Melnikov A., Mishura Y. // *Statistics. A Journal of Theoretical and Applied Statistics* - 2015. - Vol.49(1) - P. 35 - 62.

[65] *Kozachenko Y.* Probability distributions of extremes of self-similar Gaussian random fields. / Kozachenko Yu., Makogin V. // *Journal of Classical*

Analysis - 2014 - Vol.5(1) - P. 25 - 42.

[66] *Kozachenko Yu.* A criterion for testing hypotheses about the covariance function of a stationary Gaussian stochastic process. / Kozachenko Yu., Troshki V. // *Modern Stochastics: Theory and Application* - 2014 - Vol.1(2) - P. 139 - 149.

[67] *Kozachenko Y.* Estimates of distributions for some functionals of stochastic processes from an Orlicz space. / Kozachenko Yu., Sergiienko M. // *Random Operators and Stochastic Equations* - 2014. - Vol.22(2) - P. 65 - 72.

[68] *Kulik A.* Lift zonoid and barycentric representation on a Banach space with a cylinder measure / Kulik M., Tymoshkevych T. // *Lithuanian Mathematical Journal* - 2013. - Vol. 53 - No 2 - P.181-195.

[69] *Kulik A.* Lift zonoid order and functional inequalities / Kulik M., Tymoshkevych T. // *Theor. Probability and Math. Statist.* - 2013. - Vol. 89 - P.75-90.

[70] *Kulik A.* A martingale bound for the entropy associated with a trimmed filtration on R^d . / Kulik A., Tymoshkevych T. // *Modern Stochastics: Theory and Applications* - 2014. - Vol. 1 - P.151-165.

[71] *Latala R.* Between Sobolev and Poincare. / Latala R., Oleszkiewicz K. // *Geometric aspects of functional analysis. Lecture Notes in Math.*, - 2000. - Vol. 1745 - P.147-168.

[72] *Ledoux M.* Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities / M. Ledoux. // *S'eminare de probabilit'es (Strasbourg)* - 1999. - Vol.33 - P.120-216.

[73] *Lieb E.* Poincare Inequalities in Punctured Domains / Lieb E., Seiringer R., Yngvason J. // *Annals of Mathematics Second Series* - 2003. - Vol.158(3) P. 1067-1080.

[76] *Molchanov I.* Invariance properties of random vectors and stochastic processes based on the zonoid concept. / Molchanov I., Schmutz M., Stucki K. // *Bernoulli* -2014.- Vol. 20(3) - P. 1210–1233.

[75] *Molchanov I.* Exchangeability type properties of asset prices. / Molchanov I., Schmutz M. // *Adv. Appl. Probab.* - 2011. - Vol.43 - P. 666 - 687.

[76] *Molchanov I.* Invariance properties of random vectors and stochastic processes based on the zonoid concept. / Molchanov I., Schmutz M., Stucki K. // *Bernoulli* - 2014.- Vol. 20(3) - P. 1210-1233.

[77] *Mosler K.* Multivariate Dispersion, Central Regions, and Depth: The Lift Zonoid Approach. / Mosler K. // *Lecture Notes in Statist.* Springer, New York. - 2002.

[78] *Muckenhoupt B.* Hardy's inequality with weights / Muckenhoupt B. // *Studia Mathematica* - 1972. - Vol. 44 - P. 31–38.

[79] *Nualart D.* Analysis in Wiener space and anticipating stochastic calculus. / Nualart D. // *Lectures on Probability Theory and Statistics* - 1998.- Vol.1690 - P. 123-220.

[80] *D.Ocone.* Malliavin's calculus and stochastic integral representation of functionals of diffusion processes. / D.Ocone. // *Stochastics* - 1984. - Vol. 12 - P. 161 – 185.

[81] *Otto F.* Generalization of an inequality by Talagrand and links with the logarithmic Sobolev inequality. / Otto F., Villani C. // *J. Funct. Anal.* - 2000. - Vol. 173(2) - P. 361-400.

[82] *Richard A.* Expected Absolute Random Determinants and Zonoids / Richard A. // *The Annals of Applied Probability* - 1991. - Vol. 1(2) - P. 293-300.

[83] *Rockner M.* Weak Poincare inequalities and L^2 -convergence rates of Markov semigroups. / Rockner M., Wang, F. // *J. Funct. Anal.* - 2001. - Vol. 185 -

P. 564-603.

[84] *Rothaus O.* Analytic inequalities, isoperimetric inequalities and logarithmic Sobolev inequalities. / Rothaus O. // J. Funct. Anal. - 1985. - Vol.64 - P. 296-313.

[85] *Rosen J.* Sobolev inequalities for weight spaces and supercontractivity. / Rosen J. // Trans. Am. Math. Soc. - 1976. - Vol.222 - P. 367-376.

[86] *Rudin W.* Functional Analysis / Rudin W. // McGraw-Hill, New-York - 1973.

[87] *Schaefer H.* Topological vector spaces. / Schaefer H. // New York: Springer-Verlag - 1971.

[88] *Schneider R.* Nonstationary Poisson hyperplanes and their induced tessellations / Schneider R. // Adv. in Appl. Probab. - 2003. - Vol. 35(1) - P. 139-158.

[89] *Schneider R.* Zonoids and related topics. / Schneider R., Weil W. // Convexity and Its Applications - 1983. - P. 296-317.

[90] *Slyvka-Tylyshchak A.* Simulation of vibrations of a rectangular membrane with random initial conditions / Slyvka-Tylyshchak A. // Annales Mathematicae and Informaticae - 2012. - Vol.39 - P.325-338.

[91] *Tymoshkevych T.D.* A martingale bound for the variation and an analogue of the Muckenhoupt criterion for a weighted Poincare inequality on \mathbb{R} . / Tymoshkevych T. // Visn., Ser. Fiz.-Mat. Nauky, Kyiv. Univ. Im. Tarasa Shevchenka - 2015. - Vol. 1 - P. 15-20.

[92] *Tymoshkevych T.D.* Barycentres of sets in Banach space with a measure / T.D. Tymoshkevych // Abstracts of International conference Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems Lviv, Ukraine. – June 14-20, 2009.

[93] *Tymoshkevych T.D.* Barycentric code and functional inequalities / T.D. Tymoshkevych // Abstracts of International Conference “Modern Stochastics: Theory and Applications III” Kyiv — September 10–14, 2012. — P.99.

[94] *Tymoshkevych T.D.* Barycenter of sets in a Banach space with a measure / T.D. Tymoshkevych // Abstracts of International conference of students and young scientists “Lomonosov-2009”, Moscow - April 13-18, 2009.

[95] *Vakhania N.* Probability distributions on Banach spaces. / N. Vakhania, V. Tarieladze, S. Chobanyan // New York: Springer-Verlag - 1987.

[96] *Wang F.* Functional inequalities for empty essential spectrum. / Wang F. // J. Funct. Anal. - 2000. - Vol.170(1) - P.219-245.

[97] *Wang F.* Logarithmic Sobolev inequalities on non-compact Riemannian manifolds. / Wang F. // Probab. Theory Relat. Fields. - 1997. - Vol.109 - P. 417-424.

[98] *Wang F.* Logarithmic Sobolev inequalities: conditions and counterexamples. / Wang F. // J. Oper. Theory - 2001. - Vol. 46 - P. 183-197.

[99] *Wang F.* A generalization of Poincare and log-Sobolev inequalities. / Wang F. // Potential Anal. -2005. - Vol.22(1) - P.1-15.

[100] *Weissler F.* Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle. / Weissler F. // J. Func. Anal. -1980. - Vol.37(2) - P. 218-234.

[101] *Василик О.І.* φ -субгауссові випадкові процеси: монографія. / Василик О.І., Козаченко Ю.В., Ямненко Р.Є. // К.: ВПЦ «Київський університет» - 2008. - 231 р.

[102] *Дарійчук І.В.* Випадкові процеси з просторів Орліча. / Дарійчук

І.В., Козаченко Ю.В., Перестюк М.М. // Золоті литаври - 2011. - 212 р.

[103] *Затула Д.В* Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $F_{\Psi}(\Omega)$ випадкових величин. / Затула Д.В, Козаченко Ю.В. // Теорія ймовірностей та математична статистика - 2014. - Vol.91 - Р. 38 - 54.

[104] *Тимошкевич Т.Д.* Нерівність Пуанкаре та логарифмічна нерівність Соболева для сферично цензурованої гауссової міри / Тимошкевич Т.Д. // Теорія ймовірностей та математична статистика - 2014. - №. 91 - С. 164–173.

[105] *Тимошкевич Т.Д.* Барицентричне представлення і барицентричний код для міри в Евклідовому просторі / Тимошкевич Т.Д. // Тези доповідей XIV міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ - Квітень 19-21, 2012.- Р.130.