КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра обчислювальної математики

Кваліфікаційна робота бакалавра

за спеціальністю 113 Прикладна математика

на тему:

Прогнозування курсу валют в найближчому майбутньому за допомогою чисельної інтерполяції на основі відомих показників

Виконала студентка 4-го курсу
Овсієнко Богдана Вячеславівна ____________

Науковий керівник:
Доктор філософії
Асистент кафедри обчислювальної математики

Тимошенко Андрій Анатолійович ____________

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка ________

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри обчислювальної математики
«29» травня 2023р., протокол № 8

Завідувач кафедри

Ляшко С. І. ____________

Київ – 2023

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ

Дипломна робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків, списку використаних джерел (21 найменувань). Загальний обсяг роботи становить 42 сторінки, основний текст роботи викладено на 38 сторінках.

Ключові слова: чисельні методи, інтерполяція, сплайни, поліном Ньютона з розділеними різницями, курси валют.

Реферат. В роботі проведений аналіз курсу валют методом інтерполяції. Інтерполяція проведена трьома методами, а саме: з використанням лінійних сплайнів, квадратичних сплайнів, поліномом Ньютона з розділеними різницями. Для прогнозування була обрана функція: залежний від дати курс євро та канадського долара відносно долара США. Зроблено висновки щодо доцільності використання запропонованих методів при побудові інтерполяції і прогнозування для обраної функції.

Key Words: numerical methods, interpolation, spline, Newton's divided difference interpolation formula, splines, currency rates.

Abstract. In this work an analysis of exchange rates by the interpolation method has been carried out. The interpolation has been performed using three methods: linear splines, quadratic splines, and Newton's method with divided differences. A function representing the exchange rate euro - USA dollar and Canadian dollar has been chosen for forecasting. Conclusions have been drawn regarding the suitability of these methods for interpolation and forecasting of the selected function.

ВСТУП

Актуальність проблеми прогнозування функції курсу валют є надзвичайно важливою у сучасному світі, оскільки курс валют має великий вплив на глобальну економіку, міжнародну торгівлю та фінансові ринки. Здатність прогнозувати та доповнювати функцію валютного курсу пропущеними значеннями з високою точністю допомагає зменшити фінансові ризики, забезпечує більш обґрунтоване планування та конкурентні переваги на фінансових ринках.

Як відомо, інтерполяція є потужним інструментом для апроксимації функцій на основі відомих даних. Метою даного дослідження є застосування чисельного методу інтерполяції для прогнозування значень курсу валют.

З використанням історичних даних про валютні курси, в роботі побудовано інтерполяційні моделі, які дозволять знаходити пропущені значення курсу валют та прогнозувати їх з високою точністю.

Для досягнення мети в роботі розглянуті різні методи чисельної інтерполяції, такі як лінійна інтерполяція та квадратична інтерполяція, а також метод Ньютона з розділеними різницями. Для кожного методу досліджено ефективність, точність та здатність адаптуватися до змінних ринкових умов. Для аналізу використовувалися різні параметри та фактори, що впливають на валютний курс.

В роботі порівнюються обрані методи побудови інтерполяції, розглядаються їх недоліки та переваги при використанні для обраної функції.

Таким чином, в дипломній роботі, розглянуто теоретичні основи чисельної інтерполяції та проведено експериментальний аналіз наявних методів побудови інтерполяції для функції валютного курсу.

РОЗДІЛ 1
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

1.1 Історія використання методів інтерполяції

Перші згадки про використання методу інтерполяції походять ще з стародавніх Вавилона та Греції [1]. Вже близько 300 року до нашої ери вони використовували не лише лінійні, але й більш складні форми інтерполяції, щоб передбачити положення сонця, місяця та відомих їм планет на небесній сфері. Приблизно в 150 році до н.е. Гіппарх Родоський використовував лінійну інтерполяцію для побудови «функції хорди» для обчислення положення небесних тіл.

Приблизно в 600 році н. е. китайський астроном Лю Чжо використав еквівалент інтерполяції Грегорі-Ньютона другого порядку для побудови «імперського стандартного календаря». Приблизно в той же час індійський астроном і математик Брахмагупта представив метод інтерполяції другого порядку функції синуса, а пізніше — і метод інтерполяції даних з нерівним інтервалом [2].

Одним із найважливіших застосувань інтерполяційних методів була морська навігація. Чисельними методами були побудовані таблиці значень спеціальних функцій, за яким моряки визначали значення широти та довготи їх місця перебування. З введенням метричної системи такі таблиці набули широкого розповсюдження у Франції.

Основоположниками класичної теорії інтерполяції вважають Ньютона та Лагранжа. В 1675 році британський фізик і математик І. Ньютон розпочав свою роботу над цим питанням, яка створила підвалини «класичної теорії інтерполяції». У 1795 році Лагранж опублікував інтерполяційну формулу, яка тепер відома під його іменем [3].

1.2 Принципи інтерполяції

Якщо відомі значення функції тільки в певних точках, то для обчислення проміжних значень функції використовують інтерполяційні методи. В інтерполяційних методах реальна функція замінюється апроксимуючою функцією, яка у вузлах інтерполяції має такі ж значення, як і реальна функція. Така заміна дозволяє обчислити значення реальної функції в проміжних точках. Таким чином, інтерполяція - це метод апроксимації функції за допомогою побудови нових точок в межах відомих даних. Суть інтерполяції полягає у визначенні значень функції в проміжних точках на основі існуючих значень у відомих точках [4].

Інтерполяція використовується в багатьох галузях науки, техніки і комп'ютерних наук для прогнозування, апроксимації і реконструкції даних, у наукових дослідженнях та інженерній практиці, таких як моделювання, планування експериментів, табулювання функцій та інші області [4, 5].

Існує велика кількість інтерполяційних методів, в яких можна застосувати формулу або до всього проміжку одразу, або розбити його на декілька менших проміжків та застосувати складену інтерполяційну формулу. У першому випадку будується єдиний поліном на всьому інтерполяційному інтервалі, в той час, як для другого на кожному інтервалі між двома послідовними вузловими точками обирається свій інтерполяційний поліном [6,7]. У локальній інтерполяції на кожному інтервалі будується окремий поліном, наприклад, лінійна або кусково-лінійна інтерполяція. Квадратична інтерполяція є складнішою за лінійну, але забезпечує більшу якість. Вона використовує квадратичні поліноми для апроксимації. Однак, при квадратичній інтерполяції можуть виникати проблеми з виродженістю параболи, що вимагає обчислень з підвищеною точністю для зменшення помилок, пов'язаних з обмеженнями чисельного представлення на ЕОМ [8].

Найбільш відомим поліномами, які відносяться до глобальної інтерполяції, є поліноми Ньютона, Лагранжа, Гауса [9].

У порівнянні з поліноміальною інтерполяцією, сплайни мають кращі апроксимаційні властивості і забезпечують мінімальну похибку. Сплайн - це функція, складена з фрагментів алгебраїчних поліномів певної степені (наприклад, кубічних поліномів). Вибір конкретного типу сплайна залежить від умов задачі та обмежень реалізації, з метою досягнення заданої точності при використанні обмежених ресурсів [8,9,10].

Окрім поліномів і сплайнів існує ще більш універсальний метод інтерполяції - інтерполяція дробово-раціональними функціями, які використовуються для відображення функцій зі складними властивостями, такими як різкі зміни або западини.

1.3 Інтерполяція сплайнами

Сплайном називають функцію з областю визначення, розбитою на інтервали, на кожному з яких, функція представлена поліномом. Інтерполяція сплайнами забезпечує високу точність на всьому діапазоні інтерполяції та мінімальну похибку [8-10].

Для підвищення точності інтерполювання необхідно збільшити кількість вузлів інтерполяції і це призводить до зростання степеня інтерполяціних поліномів. Проте, за відсутності додаткової інформації про конкретну функцію, що задана таблично, при використанні останніх з'являється значна похибка. Тоді більш ефективним може бути використання сплайнів, які є поліномами достатньо низького степеня на проміжку між вузлами інтерполювання.

Суть сплайн-інтерполяції полягає у розподіленні інтервалу, на якому проводиться інтерполяція, на декілька проміжків, і для кожного проміжку ми використовуємо формулу, яка описується інтерполяційним поліном для цього проміжку. При цьому, на кінцях проміжку здійснюється стикування значень функції та її похідних, щоб забезпечити гладкість і неперервність інтерполяційної функції.

Таким чином, сплайн-інтерполяція дає можливість апроксимувати складні функції. Цей метод широко використовується для інтерполяції та апроксимації функцій, де гладкість та сполучення значень функції та її похідних є важливими.

Один з найбільш вивчених і широко застосовуваних підходів полягає у побудові сплайна - кусково-неперервного інтерполяційного многочлена *n-го* степеня виду:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{ik} x^k, x_{i-1} \le x \le x_i \tag{1.1}$$

між будь-якими двома точками. Цей сплайн приймає значення інтерпольованої функції та є неперервним разом зі своїми (*n - 1*) похідними.

Для побудови сплайна його коефіцієнти знаходяться на основі умов, що виконуються у вузлах сітки. Зокрема, значення сплайна мають бути рівними значенням інтерпольованої функції, а також його (*n - 1*) похідні мають бути рівними похідним відповідних многочленів, враховуючи похідні на сусідніх інтервалах.

Тож, використання сплайн-інтерполяції дозволяє побудувати плавний і неперервний кусково-інтерпольований многочлен, який апроксимує функцію і забезпечує збереження значень та властивостей похідних на відрізках між вузлами сітки. Цей підхід широко використовується для інтерполяції та апроксимації функцій, забезпечуючи гладкість та точність у визначених точках.

Як правило, сплайни складаються з фрагментів алгебраїчних поліномів непарних степенів не вище заданого степеню [11,12]. Найчастіше використовують лінійні та кубічні поліноми, а також поліноми п’ятого степеня. Також використовують поліноми другого ступеня. Як і в інших інтерполяційних методах при інтерполяції сплайнами графік функції інтерполяції проходить точно через вузлові точки кожного сплайну. При цьому у вузлових точках відсутні розриви функції і її похідних.

Дефект сплайна можна описати як різницю між степенем сплайна (порядком його поліномів) і порядком найвищої неперервної похідної, яка існує на всьому інтервалі. Степень сплайна визначається як найвищий степень многочленів, який використовується на кожному з проміжків сплайна.

Доцільність застосування певного виду сплайна зумовлюється конкретними умовами задачі та обмеженнями, що накладаються на можливість реалізації даного сплайну.

1.3.1 Інтерполяція лінійним сплайном

Інтерполяція поліномом високого ступеня є достатньо складною задачею. Проте, якщо апроксимуюча (fitting) функція повинна мати тільки декілька неперервних похідних, то можна скористатися кусковим поліномом.

Лінійна сплайн-інтерполяція — це метод, який використовується для оцінки значень між двома відомими точками даних шляхом створення серії прямолінійних сегментів або «сплайнів» між цими точками. Метод передбачає розбиття інтервалу між точками даних на менші підінтервали та побудову лінійних функцій, які апроксимують значення функції в межах кожного підінтервалу [13].

Визначмо, що таке кусково-лінійний поліном (сплайн).

Визначення. Нехай інтервал $[a,b]$ розділений на підінтервали $[x_i; x_{i+1}]$, де $i = 0,1\ldots n\text{-}1$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Кусково-лінійний поліном (сплайн) – це функція $s(x)$, визначена на інтервалі $[a;b]$, так що $s(x) = s_i(x)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, де для $i = 1, 2, \ldots n$ кожна функція $s_i(x)$ є поліном, визначеним на $[x_{i-1}; x_i]$. Степенем функції $f(x)$ є максимальний степінь кожного з поліномів $s_i(x)$ для $i = 1, 2, \ldots n$.

Зауважимо, що, згідно до визначення, кусковий поліном, визначений на інтервалі $[a;b]$, дорівнює деякому поліному на кожному з підінтервалів $[x_{i-1}; x_i]$ для $i = 1, 2, \ldots n$, але для кожного підінтервалу можуть бути використані різні поліноми.

Розглянемо спочатку один з найпростіших типів кускових поліномів, а саме, кусково-лінійний поліном або лінійний сплайн [14].

При інтерполяції лінійними сплайнами кожні дві вузлові точки з`єднуються відрізком прямої, тобто, через дві сусідні точки проводиться пряма. Це правило діє для всіх інтервалів.

Нехай $f \in C[a, b]$. Точки $x_0, x_1,\ldots,x_n$ визначені як зазначено вище, тоді лінійний сплайн $s_L(x)$, що інтерполює f в цих точках, визначається як:

$$s_L(x) = f(x_{i-1})\frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} + f(x_i)\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n \quad (1.2)$$

Вираз (1.2) можна переписати у вигляді:

$$s_L(x) = f(x_{i-1}) + (x - x_{i-1})\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n \quad (1.3)$$

Зазначимо, що $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}$ є кутовим коефіцієнтом відрізку прямої між точками x_i та x_{i-1}. Точки $x_0, x_1,\ldots,x_n$ називають вузлами сплайну.

Таким чином, для кожного інтервалу $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n$, отримуємо лінійну функцію виду *p₁(x)* = *c₁x* + *c₀*, що проходить через дві точки з координатами $(x_{i-1} y_{i-1})$ та $(x_i y_i)$. Коефіцієнти функції c_1 та c_0 визначаються з системи лінійних рівнянь:

$$f_1(x_i) = f(x_i) = y_i \ (i = 0{,}1), \begin{cases} c_1 x_0 + c_0 = y_0 \\ c_1 x_1 + c_0 = y_1 \end{cases}. \tag{1.4}$$

$$c_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}; \ c_0 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$$

Отже, функцію $f_i(x)$ можна записати для кожного відрізка $[x_{i-1}, x_i]$, у вигляді:

$$f_i(x) = \frac{y_{i-1} - y_i}{x_{i-1} - x_1} x + \frac{x_{i-1} y_i - x_i y_{i-1}}{x_{i-1} - x_i} = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_0 + \frac{x_{i-1} - x}{x_{i-1} - x_i} y_i. \tag{1.5}$$

З геометричної точки зору, формула інтерполяції лінійним сплайном дозволяє замістити дугу кривої $y = f(x)$ на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$ відрізком прямої $f_i(x)$ = *(x)*, яка проходить через точки $(x_{i-1} y_{i-1})$ та $(x_i y_i)$.

$\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}$. Звідки у $= \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} (x - x_{i-1}) + y_{i-1}$.

Формула для обчислення похибки при інтерполяції лінійним сплайном на i-тому проміжку подається у вигляді:

$|f(x) - s_i(x)| \le \frac{1}{8} (x_i - x_{i-1})^2 \max\limits_{x_{i-1} \le \xi \le x_i} |f''(\xi)|$, де $(x_i - x_{i-1})^2 = h_i$

$$|f'(x) - S_i'(x)| \le h_i \max_{x_{i-1} \le \xi \le x_i} |f''(\xi)|. \tag{1.6}$$

1.3.2 Інтерполяція квадратичним сплайном

Нехай інтервал $\{(x_{k,}y_k)\}_{i=0}^{N}$ має $N+1$ точок, які задовільняють умові:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b. \qquad (1.7)$$

Функція $S(x)$ називається квадратичним сплайном, якщо існує N поліномів другого ступеня $S^k(x)$ з коефіцієнтами $s^k{}_0$, $s^k{}_1$, $s^k{}_2$, для яких є справедливими наступні твердження [15,16,17,18]:

1. $S(x) = S^k(x) = s^k{}_0 + s^k{}_1\,(x - x_k) + s^k{}_2(x - x_k)^2$ для $x \in \langle x_k, x_{k+1}\rangle$, $k = 0, 1,\ldots, N - 1$.
2. $S(x_k) = y_k$ для $k = 0, 1, 2\ldots, N.$ (1.8)
3. $S^k(x_{k+1}) = S^{k+1}(x_{k+1})$ для $k = 0, 1, 2,\ldots, N - 2$.
4. $S^{k\prime}(x_{k+1}) = S^{k+1\prime}(x_{k+1})$ для $k = 0, 1, 2,\ldots, N - 2$.

Отже, квадратичний сплайн утворюють N поліномів другого порядку, для кожного з яких необхідно обчислити три невідомі коефіцієнти $s^k{}_0$, $s^k{}_1$, $s^k{}_2$. Таким чином, маємо $3N$ невідомих значень.

Згідно до твердження *2* (1.8) сплайн повинен проходити через вузлові точки (кількість таких точок $N + 1$), відповідно, на функцію накладаються додаткові $N + 1$ умови. На відміну від лінійного сплайну, для якого достатнім було виконання твердження 3 ($(N – 1)$ додаткових умов), для квадратичного сплайну, крім твердження 3, додається ще одна умова (твердження 4) про неперервність першої похідної функції $S^k(x)$ (1.8). Неперервність першої похідної функції $S^k(x)$ забезпечує відсутність у інтерполяційному сплайні $S(x)$ гострих кутів. Вимога неперервності першої похідної функції $S^k(x)$ накладає ще $N – 1$ додаткових умов.

Таким чином, маємо $N + 1 + N – 1 + N – 1 = 3N-1$ додаткових умов (рівнянь). Оскільки кількість невідомих коефіцієнтів $3N$, а кількість рівнянь для пошуку невідомих коефіцієнтів $3N\text{-}1$, то що один з коефіцієнтів може бути обраний довільним чином. Наприклад, якщо коефіцієнт $s^0{}_2$ покласти рівним нулеві, то поліном $S^0(x)$ буде поліномом першого ступеня (відрізком прямої).

Обчислимо $3N\text{-}1$ невідомих коефіцієнтів. Для цього скористаємося твердженнями *1* та *2* (1.8). Запишемо рівняння згідно до твердження *1* для $x = x_k$:

$$S(x_k) = S^k(x_k) = s^k{}_0 + s^k{}_1\,(x_k - x_k) + s^k{}_2(x_k - x_k)^2 = s^k{}_0, \tag{1.9}$$

але за твердженням *2* $S(x_k) = y^k$. Отже, маємо:

$$s^k{}_0 = y^k. \tag{1.10}$$

Це зменшує кількість невідомих до $2N - 1$ ($s^k{}_1, k \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$, $s^k{}_2, k \in \{1, \dots, N - 1\}$.

Далі скористаємося твердженням *3*. Відповідно до твердження *3* (1.8):

$$S^k(x_{k+1}) = S^{k+1}(x_{k+1}) \Rightarrow$$
$$s^k{}_0 + s^k{}_1\,(x_{k+1} - x_k) + s^k{}_2(x_{k+1} - x_k)^2 = s^{k+1}{}_0 + s^{k+1}{}_1\,(x_{k+1} - x_{k+1}) + s^{k+1}{}_2(x_{k+1} - x_{k+1})^2\,. \tag{1.11}$$

Позначимо інтервал $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$ як h_k, а y_{k+1} - y_k як Δy_k. Тоді (1.11) можемо переписати, як:

$$s^k{}_1 h_k + s^k{}_2\,(h_k)^2 = \Delta y_k,\ k = 0, 1, \dots, N - 1. \tag{1.12}$$

Таким чином, отримано систему N рівнянь з $2N - 1$ невідомими (коефіцієнт $s^2{}_0$ визначається довільно). Система (1.12) не може бути розв'язана, оскільки кількість невідомих перевищує кількість рівнянь. Для розширення системи (1.12) скористаємося твердженням *4* для квадратичного сплайна (1.8), а саме, неперервністю першої похідної функції $S(x)$ у вузлових точках. Перша похідна функції $S_k(x)$ для поліному другого порядку записується, як:

$$S^{k\prime}(x_k) = s^k{}_1 + 2s^k{}_2 \cdot (x - x_k). \tag{1.13}$$

Згідно до твердження $4\ S^{k\prime}(x_{k+1}) = S^{k+1\prime}(x_{k+1}) \Rightarrow$

$$s^k{}_1 + 2s^k{}_2 \cdot (x_{k+1} - x_k) = s^{k+1}{}_1 + 2s^{k+1}{}_2 \cdot (x_{k+1} - x_{k+1}). \tag{1.14}$$

Подамо (1.14) у вигляді:

$$s^k{}_1 - s^{k+1}{}_1 + 2s^k{}_2 \cdot h_k = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, N - 2. \tag{1.15}$$

Таким чином, отримуємо систему з $N - 1$ рівнянь з $N + 2$ невідомими. Об'єднану систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.12) та (1.15) можна подати за допомогою матриць:

$$\mathbf{Hs} = \mathbf{u}. \tag{1.16}$$

Шукані коефіцієнти квадратичного сплайна утворюють вектор **s**, де

$$\begin{pmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_1^2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 & h_2^2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & h_{n-1} & h_{n-1}^2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2h_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2h_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2h_{n-1} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_1^1 \\ s_2^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ s_1^k \\ s_2^k \\ \vdots \\ \vdots \\ s_1^{n-1} \\ s_2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta y_0 - s_2^0 h_0^2 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} \\ -2 s_2^0\ h_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

Наведена система (17) має тільки один розв'язок.

Таким чином, отримані всі невідомі коефіцієнти для N поліномів другого порядку.

Недоліком квадратичного сплайну є те, що поліном другого порядку (парабола) на кожному інтервалі може бути або тільки опуклою, або тільки впуклою. Це приводить до того, що інтерполяційна крива в деяких випадках може відхилятися від вихідної залежності [4].

1.4 Інтерполяційний поліном Ньютона з розділеними різницями

Побудова інтерполяційного поліному Ньютона з розділеними різницями є чисельним методом для інтерполяції функцій. Він базується на ідеї використання розділених різниць для побудови інтерполяційного полінома, який може апроксимувати функцію на заданому наборі точок [19,20].

Розділені різниці визначаються шляхом рекурсивного обчислення різниць між значеннями функції у вузлах інтерполяції. Потім розділені різниці утворюють коефіцієнти полінома, який надалі може бути використаний для інтерполяції значень функції на нових точках.

Поліном будується за заданим набором точок і його можна використовувати навіть якщо проміжки між суміжними значеннями аргументу не є однаковими. Степінь інтерполяційного полінома Ньютона можна збільшити, додавши більше членів і точок, не відкидаючи існуючі.

Нехай дана функція $y = f(x)$, яка задана таблично n точками, причому $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0$, де $i = (\overline{0,\ n})$:

x_0	x_1	$\cdots$	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	$\cdots$	y_{n-1}	y_n

Суть методу полягає у побудові полінома вигляду:

$$P_{(x)} = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_1)(x - x_0)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f\left[x_0, x_{1,\dots} x_n\right], \quad (1.18)$$

де $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots \left[x_0, x_{1,\dots} x_n\right]$ – послідовні розділені різниці.

Розділена різниця першого порядку визначається як:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_0}. \quad (1.19)$$

Розділена різниця другого порядку:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}. \quad (1.20)$$

Відповідно, розділена різниця $n -$ го порядку визначається через розділені різниці $(n - 1) -$ го порядку наступним чином:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+k} - x_i}. \quad (1.21)$$

Зазначимо, що розділені різниці є симетричними відносно аргументів, тобто не залежать від порядку аргументів. Наприклад:

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_2, x_1, x_0] = f[x_1, x_2, x_0].$$

Тоді на основі заданих (відомих) точок функції та обчислених розділених різниць можна сформувати наступну таблицю:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_j]$	$f[x_i, x_j, x_k]$	$\cdots$	$f[x_i, \dots, x_m]$	$f[x_i, \dots, x_m, x_p]$
x_0	y_0	$[x_0, x_1]$		$\cdots$		
x_1	y_0		$f[x_1, x_2, x_3]$	$\cdots$		
x_2	y_0	$[x_1, x_2]$		$\cdots$	$f[x_1, \dots, x_d]$	
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$		$f[x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$
x_{n-2}	y_{n-2}	$[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$\cdots$	$f[x_d, \dots, x_n]$	
x_{n-1}	y_{n-1}		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$\cdots$		
x_n	y_n	$[x_{n-1}, x_n]$		$\cdots$		

Отже, за відомими коефіцієнтами можна записати шуканий поліном вигляду:

$$P_{(x)} = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_1)(x - x_0)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \\ + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})f\left[x_0, x_{1,\dots}x_n\right] \tag{1.22}$$

РОЗДІЛ 2
ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

2. 1 Постановка практичної задачі

Даний експеримент передбачає побудову інтерполяції трьома методами, а саме: з використанням лінійних сплайнів (*1*), з використанням квадратичних сплайнів (*2*), інтерполяційним поліномом Ньютона з розділеними різницями (*3*). Будуть використані декілька наборів точок, які відрізнятимуться кількістю точок, досліджуваним часовим проміжком, інтервалом між точками тощо.

За допомогою отриманих результатів можна порівняти ефективність використання досліджуваних методів побудови інтерполяції в різних ситуаціях, тобто, дослідити особливості різних методів під час їхнього застосування на різних наборах точок.

2.2 Вхідні дані

В якості вхідних даних був використаний фрагмент відкритого набору даних exchange_rate.csv [21]. Набір даних описує курси обміну більшості іноземних валют до долара США за останні декілька рокі. Також варто зазначити, що у вхідному наборі даних записані значення обмінного курсу для кожної дати. Для побудови інтерполяції був використаний фрагмент даного набору даних, а саме були взяті обмінні курси декількох валют до американського долара у часовому проміжку від 01.08.2022 до 15.10.2022.

Були обрані такі валюти: євро (EUR) та канадський долар (CAD), У наборі даних вказані курси обраних валют відносно американського долара.

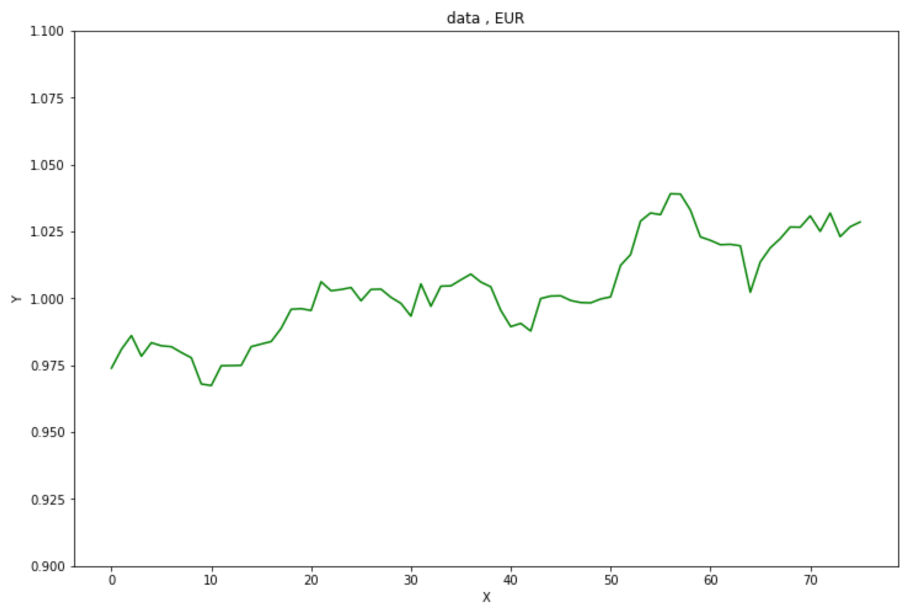
Для кожної валюти було обрано декілька наборів точок, параметри яких наведені в Таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Обрані набори даних.

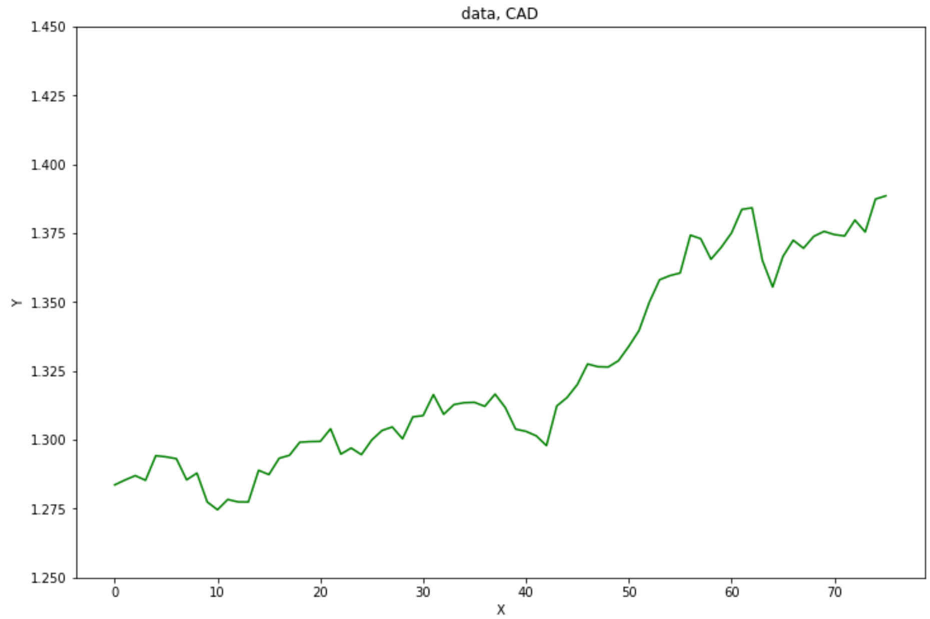
Номер набору точок	Часовий проміжок	Кількість точок	Інтервал між точками (кіль-ть днів)
1	10.09.22 – 15.10.22	8	Кожен 5-й день
2	12.09.22 – 15.10.22	12	Кожен 3-й день
3	04.08.22-15.10.22	13	Кожен 6-й день
4	01.08.22-15.10.22	26	Кожен 3-й день
5	06.08.22-15.10.22	8	Кожен 5-й день
6	01.08.22-15.10.22	16	Кожен 10-й день

Також варто зазначити, що для побудови інтерполяції дати, що наявні у початковому наборі даних, необхідно було перевести, відповідно, у невід'ємні числа, які потім використовувалися як *x-ва* координата точок.

Часові залежності курсів валют наведені на рисунку 2.1.



а) (EUR)



б) (CAD)

Рис. 2.1. Часові залежності курсів валют: а) USD – EUR, USD - CAD.

Зазначимо, що наведена, задана точково фунція є часовим рядом.

Інтерполяція квадратичними сплайнами та інтерполяція лінійними сплайнами часто використовуються для інтерполяції часових рядів, особливо якщо дані мають нерівномірний часовий проміжок. За допомогою сплайн-інтерполяції можна побудувати плавну апроксимацію функції, що дозволяє відтворити загальну тенденцію часового ряду.

Інтерполяція поліномом Ньютона з розділеними різницями також може бути застосована до часових рядів, зокрема, якщо дані мають рівномірний часовий проміжок. Цей метод дозволяє побудувати поліном Ньютона, який проходить через задані точки і наближає функцію.

Часовий ряд обмінного курсу мати деякі особливості, які необхідно враховувати при аналізі та обробці даних. А саме, до цих особливостей можна віднести:

- Сезонність. Часовий ряд обмінного курсу може мати сезонні залежності, особливо якщо існують циклічні зміни в попиті на валюту в певний період року або під впливом економічних подій. Сезонні компоненти можуть впливати на інтерпретацію та прогнозування обмінного курсу.
- Тенденція. Часовий ряд може мати трендові залежності, які вказують на загальну тенденцію зростання або спаду курсу. Такі тренди можуть бути короткостроковими або довгостроковими, і вираховування їх може бути важливим при інтерполяції та прогнозуванні.
- Волатильність. Часовий ряд обмінного курсу може бути волатильним, зі значними коливаннями значень. Врахування волатильності може бути важливим для точності інтерполяції та прогнозування. Деякі методи, такі як архівні моделі, можуть бути корисними для моделювання волатильності валютного ринку.
- Аномалії та важливі події. Часовий ряд може містити аномалії або важливі події, такі як економічні кризи, політичні події або макроекономічні показники, які суттєво впливають на обмінний курс. Врахування цих аномалій може вимагати спеціального аналізу та моделювання.

Перед побудовою інтерполяції перевіримо даний часовий ряд на наявність викидів за допомогою статистичних методів, таких як розрахунок середнього значення і стандартного відхилення з подальшим виявлення точок, які відхиляються від цих мір. Для цього обчислимо середнє значення функції та її стандартне відхилення, що являє собою міру розсіювання значень функції навколо середнього значення і може бути визначено, як квадратний корінь з дисперсії функції. Встановимо порогове значення, яке буде використовуватись для визначення викидів. Для цього використаємо кратне значення до стандартного відхилення, а саме – потроєне стандартне відхилення. Побудуємо графік і візуально порівняємо відомі значення функції зі встановленими пороговими значеннями (Рис. 2.2). Якщо значення функції відхилятимуться від середнього значення на величину, більшу ніж порогові значення, вони вважатимуться викидами.

а) (EUR)

б) (CAD)

Рис. 2.2. Графік функції з пороговим значенням.

Як видно з рисунків, обидві обрані функції викидів не мають.

2.3 Аспекти реалізації алгоритму

Для реалізації обраних алгоритмів побудови інтерполяції була обрана мова програмування Python, що є об’єктно-орієнтованою мовою високого рівня з строгою динамічною типізацією. Для розробки даного продукту була використана версія Python 3.9. Для даної мови було розроблено велику кількість бібліотек, серед яких бібліотеки для створення різноманітних моделей та графічного представлення даних. Тому дана мова програмування є однією з найпопулярніших мов для вирішення задач аналізу та моделювання. Середовищем розробки було обрано платформу Spyder.

В даній роботі були використані наступні бібліотеки з такими цілями:

- NumPy (Numerical Python) - бібліотека для роботи з числовими даними в Python. Вона надає підтримку для масивів великого розміру, векторизованих обчислень та різних математичних операцій.

- Pandas - бібліотека для обробки та аналізу даних. Вона надає структури даних, такі як DataFrame, для зручної маніпуляції та аналізу табличних даних. Pandas дозволяє завантажувати, обробляти та аналізувати дані з різних джерел.

- Matplotlib - бібліотека для візуалізації даних в Python. Вона надає розширені можливості для створення різних типів графіків, діаграм, гістограм та інших візуалізаційних представлень даних.

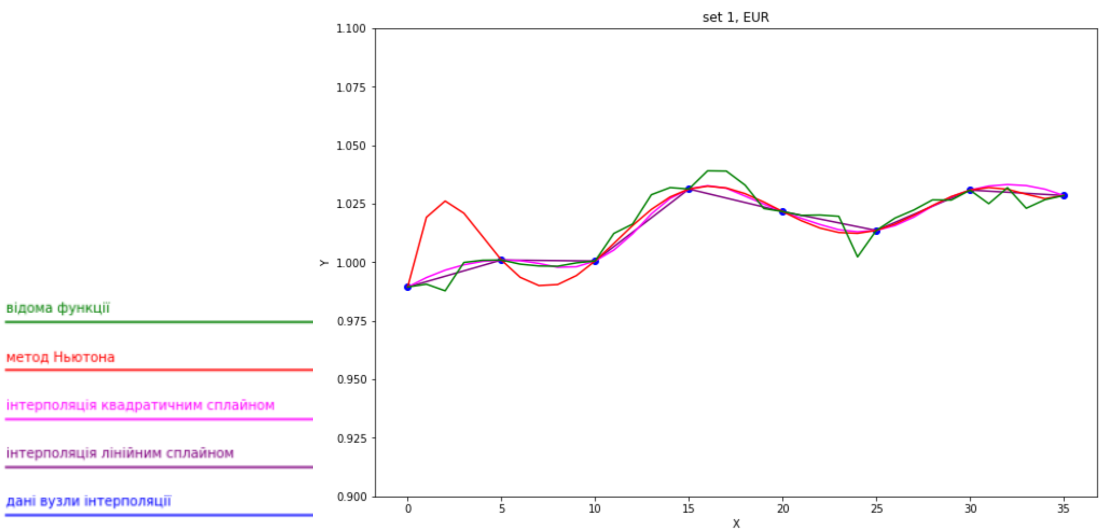
- SciPy (Scientific Python) - бібліотека для наукових обчислень у Python. Вона включає багато модулів для чисельних методів, оптимізації, інтерполяції, обробки сигналів, статистики та інших наукових обчислень.

- SymPy - бібліотека символьних обчислень у Python. Вона дозволяє працювати з символьними виразами, вирішувати рівняння, диференціювати та інтегрувати функції символьно, проводити алгебраїчні маніпуляції з математичними виразами.

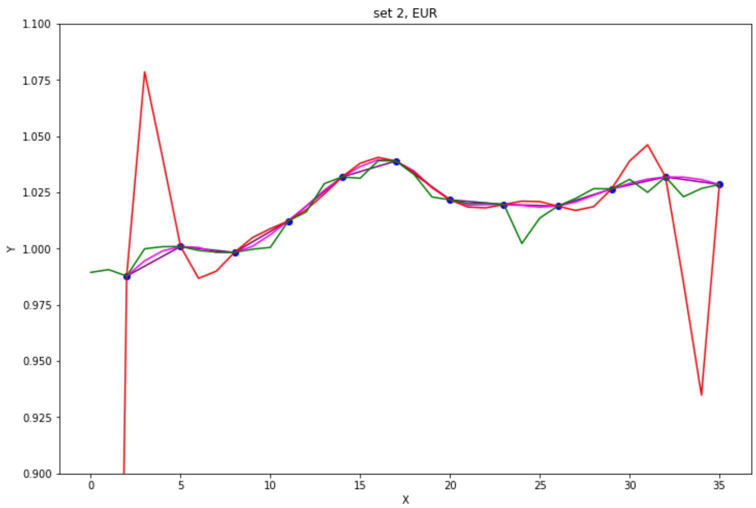
У роботі дані бібліотеки були використані для різних завдань, включаючи обробку даних, чисельні обчислення, візуалізацію та символьні обчислення.

2.4 Результати та їх обговорення

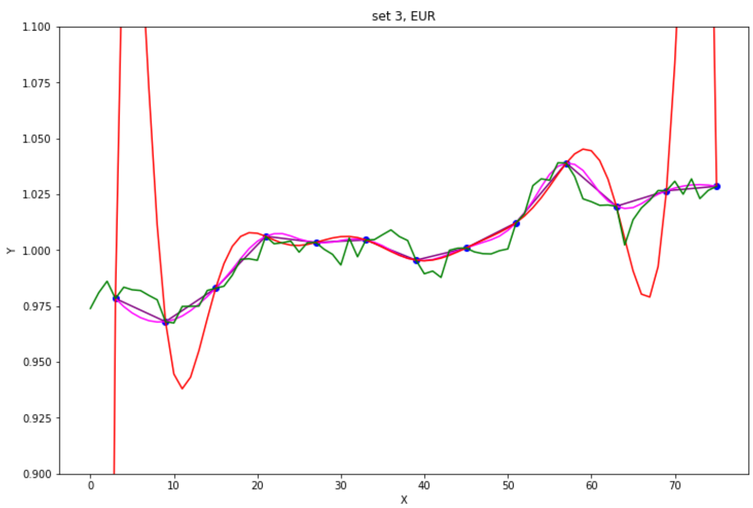
Результати представлені графіками функцій для кожного набору даних: для EUR – рисунок 2.3 та для CAD – рисунок 2.4. На рисунках криві позначені як



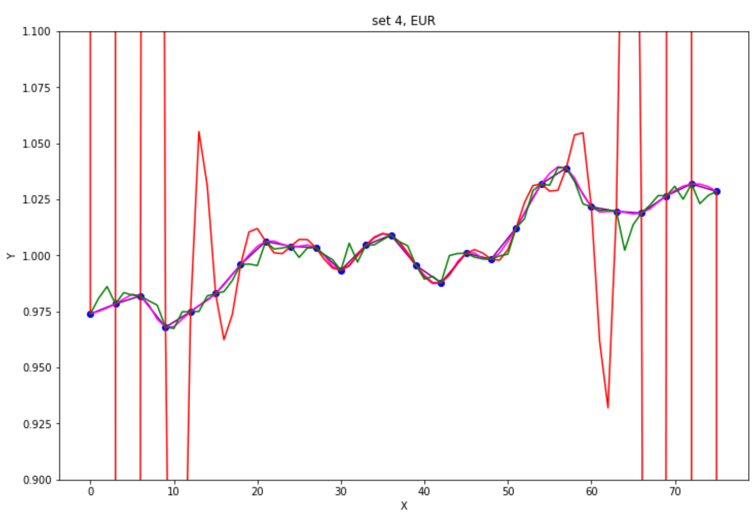
а)


set 2, EUR
1.100
1.075
1.050
1.025
1.000
0.975
0.950
0.925
0.900
Y
0
5
10
15
20
25
30
35
X

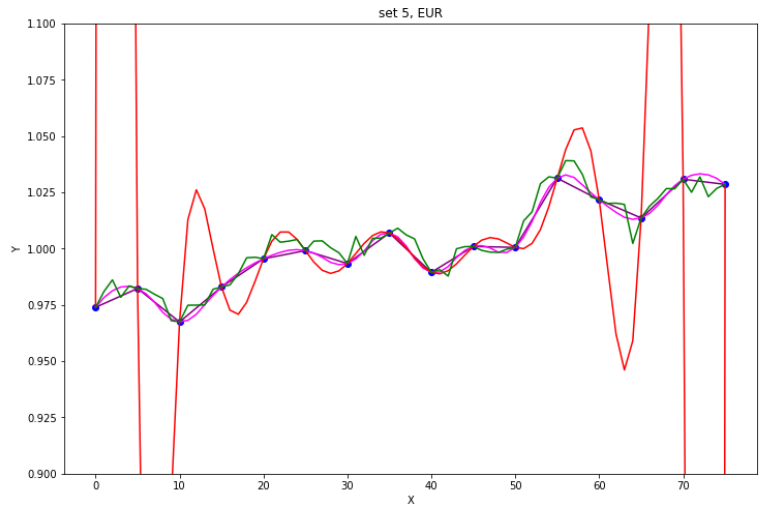
б)


set 3, EUR
1.100
1.075
1.050
1.025
1.000
0.975
0.950
0.925
0.900
Y
0
10
20
30
40
50
60
70
X

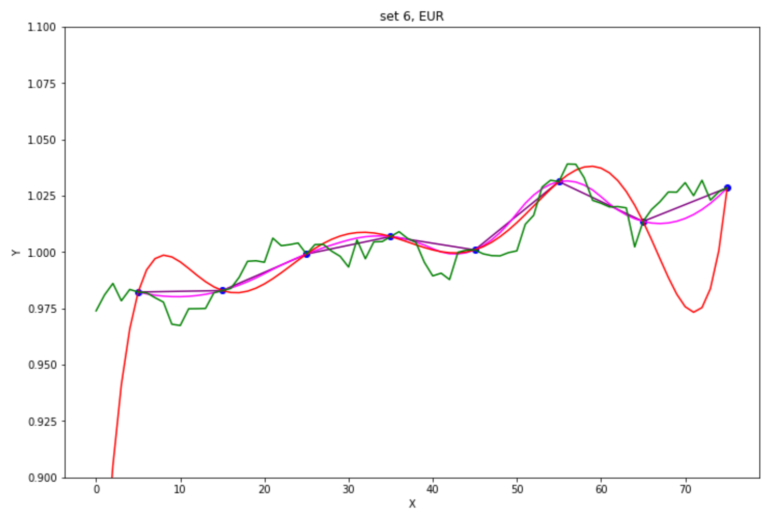
в)


set 4, EUR
1.100
1.075
1.050
1.025
1.000
0.975
0.950
0.925
0.900
Y
0
10
20
30
40
50
60
70
X

г)

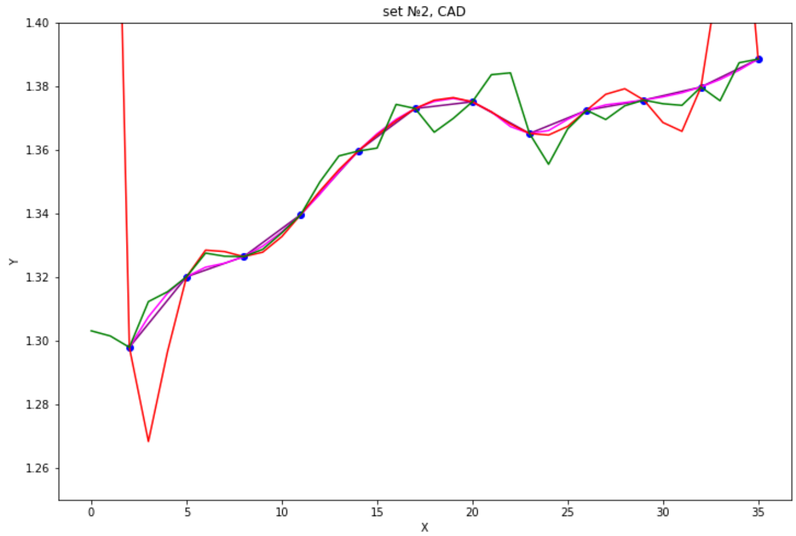


д)

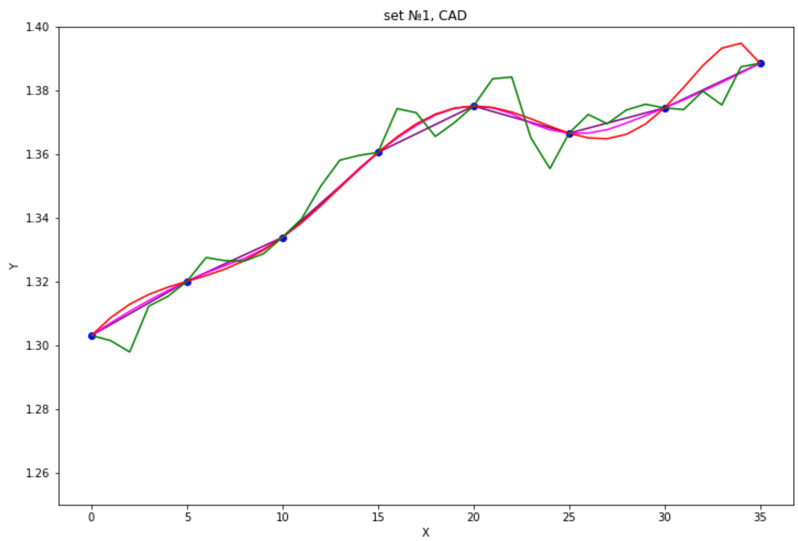


е)

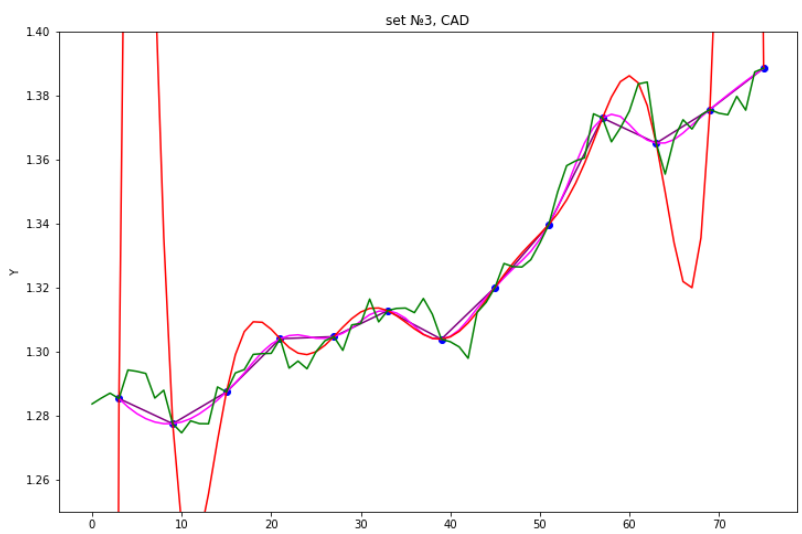
Рис. 2.3. Результати розрахунків, набір даних відповідає вказаним в таблиці 2.1 для валюти EUR: 1-а), 2-б), 3-в), 4-г), 5-д), 6-е).


set №2, CAD
1.40
1.38
1.36
1.34
1.32
1.30
1.28
1.26
Y
0
5
10
15
20
25
30
35
X

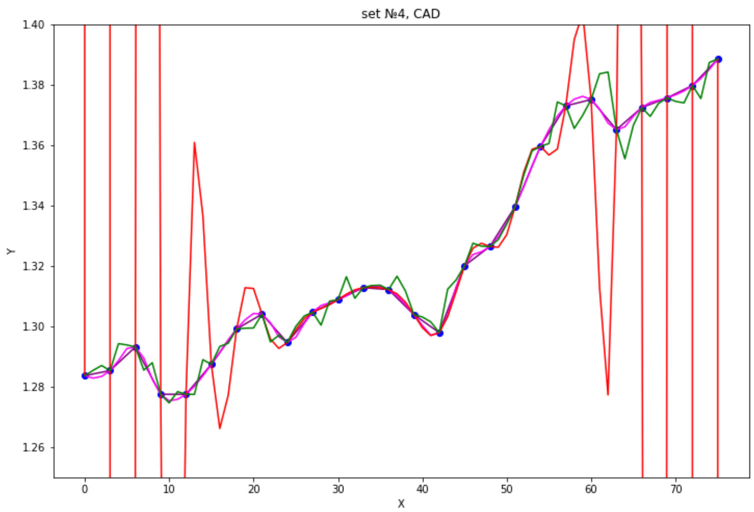
а)


set №1, CAD
1.40
1.38
1.36
1.34
1.32
1.30
1.28
1.26
Y
0
5
10
15
20
25
30
35
X

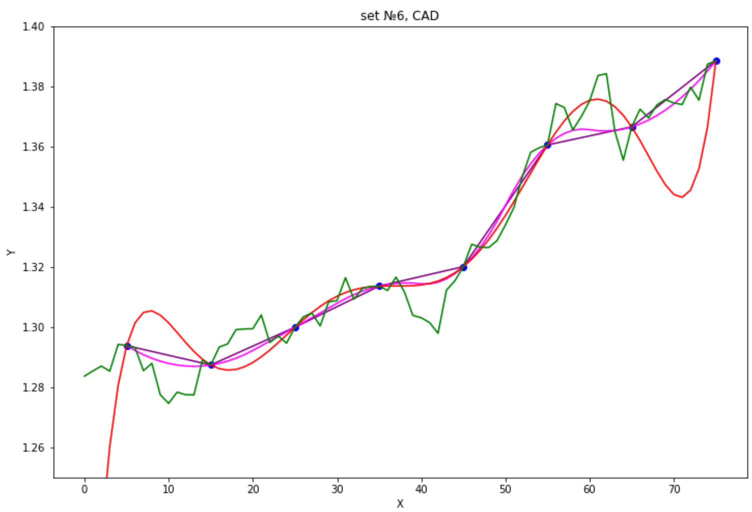
б)


set №3, CAD
1.40
1.38
1.36
1.34
1.32
1.30
1.28
1.26
Y
0
10
20
30
40
50
60
70
X

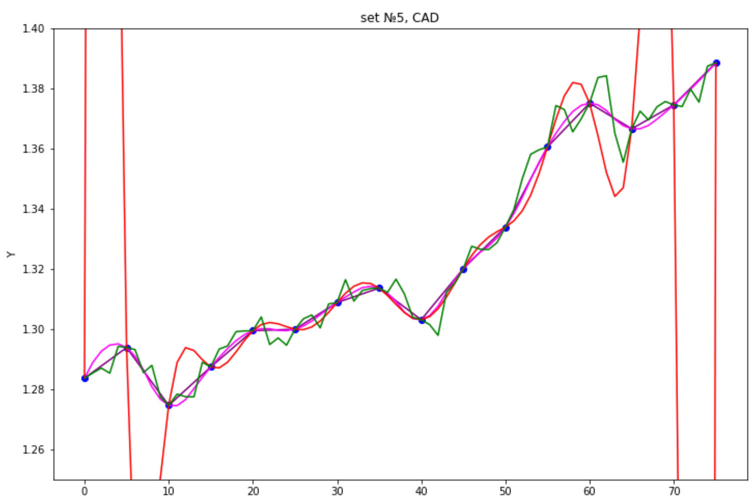
в)



г)



д)



е)

Рис. 2.4. Результати розрахунків, набір даних відповідає вказаним в таблиці 2.1 для валюти CAD: 1-а), 2-б), 3-в), 4-г), 5-д), 6-е).

Також для кожного набору було обрано 4 та 5 точок відповідно (які не входять до жодного з наборів точок для побудови інтерполяції), в яких було «передбачено» значення кожним з методів, які можна порівняти з відомими значеннями (Таблиця 2.2 для EUR та Таблиця 2.3 для CAD відповідно).

Таблиця 2.2.

Відоме значення	Лінійний сплайн	Квадратичний сплайн	Метод Ньютона	Номер точки та значення x
SET1, EUR				
0.978378	0.996343	0.998937	1.020954	1 (x = 3)
0.983868	1.029354	1.032722	1.032508	2 (x = 16)
1.004037	1.015215	1.013003	1.012338	3 (x = 24)
1.004551	1.029447	1.032759	1.029073	4 (x = 33)
SET2, EUR				
0.978378	0.992177	0.994580	1.078631	1 (x = 3)
0.983868	1.036607	1.039569	1.040576	2 (x = 16)
1.004037	1.019379	0.191887	1.021095	3 (x = 24)
1.004551	1.030754	1.031788	0.984883	4 (x = 33)
SET3, EUR				
0.979765	0.971457	0.968451	1.072829	1 (x = 7)
1.002844	1.005740	1.007342	1.004523	2 (x = 22)
1.004307	0.997026	0.996330	0.996364	3 (x = 38)
0.999741	1.008527	1.006284	1.007926	4 (x = 49)
1.025022	1.027228	1.028650	1.160370	5 (x = 71)
SET4, EUR				
0.979765	0.977285	0.977931	2.970498	1 (x = 7)

1.002844	1.005479	1.006359	1.001122	2 (x = 22)
1.004307	1.000033	1.000568	1.001213	3 (x = 38)
0.999741	1.002978	1.000931	0.997864	4 (x = 49)
1.025022	1.030100	1.030904	20.62153	5 (x = 71)
SET5, EUR				
0.979765	0.976328	0.976271	0.717661	1 (x = 7)
1.002844	0.996926	0.998310	1.007355	2 (x = 22)
1.004307	0.996424	0.995487	0.995946	3 (x = 38)
0.999741	1.000621	0.998292	1.002467	4 (x = 49)
1.025022	1.030359	1.032567	0.417720	5 (x = 71)
SET6, EUR				
0.979765	0.982401	0.980872	0.9970930	1 (x = 7)
1.002844	0.994250	0.994187	0.9908078	2 (x = 22)
1.004307	1.005127	1.004501	1.0032370	3 (x = 38)
0.999741	1.013080	1.012563	1.0097551	4 (x = 49)
1.025022	1.022561	1.016660	0.9732850	5 (x = 71)

Таблиця 2.3.

Для валюти CAD

Відоме значення	Лінійний сплайн	Квадратичний сплайн	Метод Ньютона	Номер точки та значення x
SET1, CAD				
1.285321	1.313273	1.314061	1.315953	1 (x = 3)
1.293318	1.363457	1.365054	1.365424	2 (x = 16)
1.294623	1.368267	1.367609	1.368729	3 (x = 24)
1.312793	1.382921	1.382546	1.393277	4 (x = 33)
SET2, CAD				
1.285321	1.305287	1.307473	1.268275	1 (x = 3)
1.293318	1.368526	1.369603	1.369172	2 (x = 16)
1.294623	1.367570	1.366066	1.364656	3 (x = 24)
1.312793	1.382684	1.382124	1.417844	4 (x = 33)
SET3, CAD				
1.285471	1.280081	1.277986	1.418649	1 (x = 7)
1.294823	1.304122	1.304989	1.301286	2 (x = 22)
1.311671	1.305360	1.304090	1.304166	3 (x = 38)
1.328710	1.333139	1.331322	1.333808	4 (x = 49)
1.373996	1.379945	1.380213	1.538732	5 (x = 71)
SET4, CAD				
1.285471	1.287924	1.289469	3.374437	1 (x = 7)
1.294823	1.300883	1.301174	1.295767	2 (x = 22)
1.311671	1.306635	1.307186	1.307960	3 (x = 38)
1.328710	1.330836	1.329601	1.326189	4 (x = 49)

1.373996	1.378387	1.377948	23.05629	5 (x = 71)
SET5, CAD				
1.285471	1.286133	1.286462	1.199155	1 (x = 7)
1.294823	1.299629	1.300075	1.302149	2 (x = 22)
1.311671	1.307285	1.305581	1.305485	3 (x = 38)
1.328710	1.331121	1.377053	1.332336	4 (x = 49)
1.373996	1.377304	1.032567	1.124148	5 (x = 71)
SET6, CAD				
1.285471	1.292525	1.290802	1.304849	1 (x = 7)
1.294823	1.296161	1.295275	1.292322	2 (x = 22)
1.311671	1.315539	1.314661	1.313651	3 (x = 38)
1.328710	1.336260	1.335166	1.332880	4 (x = 49)
1.373996	1.379747	1.376524	1.343126	5 (x = 71)

Обчислено розмах кожної функції:

Знайдено найбільше та найменше значення функцій на обраному інтервалі та обчислено їхню різницю:

для EUR, розмах = 0.07166099999999997

для CAD, розмах = 0.11392500000000005

У таблиці 2.4, відповідно, наведені найбільша та найменша похибки, отримані у результаті побудови інтерполяції кожним з методів для кожного з наборів даних для валют EUR та CAD.

Таблиця 2.4

Найбільша досягнута похибка	Метод, при використанні якого була досягнута найбільша похибка серед усіх точок	Найменша досягнута похибка	Метод, при використанні якого була досягнута найменша похибка серед усіх точок	Метод, яким було найточніше спрогнозовано значення в точках	Номер набору даних, валюта
0.048852	Quadratic spline	0.008302	Linear spline	**Linear spline,** Newton`s method	SET1, EUR
0.100253	Newton`s polynomial	0.013799	Linear spline	Linear spline	SET2, EUR
0.135348	Newton`s polynomial	0.001679	Linear spline	**Linear spline**, Quadratic spline	SET3, EUR
19.59651	Newton`s polynomial	0.001190	Linear spline	Quadratic spline	SET4, EUR
0.607300	Newton`s polynomial	0.000880	Linear spline	Linear spline	SET5, EUR
0.051737	Newton`s polynomial	0.000194	Newton`s method	Quadratic spline	SET6, EUR
0.080484	Newton`s polynomial	0.027951	Quadratic spline	Linear spline, **Quadratic spline**	SET1, CAD
0.105051	Newton`s polynomial	0.017046	Linear spline	Newton`s method	SET2, CAD
0.164736	Newton`s polynomial	0.002612	Newton`s method	Linear spline	SET3, CAD
21.68229	Newton`s polynomial	0.000891	Quadratic spline	**Quadratic spline**, Newton`s method	SET4, CAD
0.249848	Newton`s polynomial	0.000662	Linear spline	Linear spline	SET5, CAD
0.030870	Newton`s polynomial	0.000452	Quadratic spline	Quadratic spline	SET6, CAD

З отриманих таблиць можна зробити висновок, що на жодному з обраних наборів даних не досягнуто найкращого можливого результату. Отже, для кожного з обраних методів інтерполяції можна знайти оптимальний набір даних, тобто, обрати такий крок за часом, аби отримані дані найточніше збігалися з відомими спостереженнями. Для оцінки точності отриманих спостережень використаємо декілька значень: середню абсолютну похибку (MAE), середньоквадратичну похибку (середньоквадратичне відхилення, MSE), а також перевіримо для якого з методів на усіх наборах даних похибка для кожної точки буде найменшою. Для обрахунку середньої абсолютної похибки та середньоквадратичної похибки використаємо наступні формули:

$$\text{MAE} = \frac{\sum_i^n (x_i - x)}{n}. \quad (2.1)$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_i^n (x_i - x)^2}{n}. \quad (2.2)$$

Переберемо усі можливі набори даних. На початку оберемо кожну другу дату з усіх відомих дат (тобто, *x = 0, 2, 4,…72, 74*) і будемо поступово збільшувати крок, поки не залишиться принаймні 3 вузли інтерполяції (*x = 0, 37, 74*). Таким чином, всього буде отримано 36 наборів, в яких вузли інтерполяції розташовані рівновіддалено.

Для кожного з наборів застосуємо обрані методи, потім за відомими формулами (2.1) та (2.2) обрахуємо середню абсолютну похибку та середньоквадратичну похибку. Ці метрики можуть бути використані для порівняння результатів, отриманих за допомогою різних інтерполяційних методів. Отже, найкращі значення (найменші, а отже, і найточніші), було отримано при побудові інтерполяції лінійним сплайном, використовуючи наступний набір даних:

x = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74], при цьому, MAE = 0.002968, MSE = $0.1544783{\cdot}10^{-4}$, що є найменшими значеннями з усіх отриманих.

При використанні методу інтерполяції квадратичним сплайном найкращими значеннями середньої абсолютної похибки та середньоквадратичної похибки є відповідно:

MAE = 0.003486 при x = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74]

MSE = $0.901654{\cdot}10^{-4}$, при x = [0, 37, 74]

Відповідно, при використанні інтерполяційного поліному Ньютона значеннями середньої абсолютної похибки та середньоквадратичної похибки є. відповідно:

MAE = 0.007441 при x = [0, 37, 74]

MSE = $0.200156{\cdot}10^{-4}$ при x = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74]

Також, для порівняння отриманих результатів знайдемо для кожного з обраних методів інтерполяції такий набір даних, щоб серед усіх наборів максимальна можлива поточкова похибка була найменшою. Для цього знайдемо для кожного набору даних таку точку, в якій при побудові інтерполяції заданим методом похибка є найбільшою. Наступним кроком оцінимо та порівняємо усі отримані значення і оберемо такий набір даних, де значення похибки буде найменшим.

У результаті отримано:

Найкращим набором даних при використанні методу інтерполяції лінійним сплайном виявився набір x = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74], при якому найбільше відхилення від відомого значення серед усіх точок дорівнює $\sigma = 0.010199999999999987$.

Найкращим набором даних при застосуванні методу інтерполяції квадратичним сплайном виявився набір x = [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75], при якому найбільше відхилення від відомого значення серед усіх точок дорівнює $\sigma = 0.010716577174806341$.

Найкращим набором даних при при побудові інтерполяції поліномом Ньютона виявився набір x = [0, 37, 74], при якому найбільше відхилення від відомого значення серед усіх точок дорівнює $\sigma = 0.0217718787436085$.

Перевіримо, чи існують ще такі набори даних, для яких при використанні кожного з обраних методів максимальна можлива похибка для всіх точок не буде відрізнятися від обраного найкращого більше, ніж на задане $\Delta\sigma$. Це допоможе зробити більш точні висновки при аналізі результатів. Наприклад, при використанні полінома Ньютона з розділеними різницями прогнозовані значення при більшій кількості вузлів інтерполяції можуть бути значно точнішими, ніж при отриманому у результаті обчислення похибки набору даних. Це пов’язано з тим, що при збільшенні кількості вузлів інтерполяції на краях інтерпольованого відрізку виникає так званий феномен Рунге, який полягає в тому, що отримані значення на кінцях відрізку інтерполяції дуже відрізняються від правдивих значень. Отже, похибка, обчислена для точок на краях всього інтерпольованого проміжку значно «псує» статистику.

Для методів інтерполяції лінійним сплайном та поліномом Ньютона при значенні $\Delta\sigma = 0.001$ не виявлено таких наборів даних, для яких би виконувалася умова $\sigma_{\mathrm{i}} - \sigma_{\mathrm{min}} \leq \Delta\sigma$. Для методу інтерполяції квадратичним сплайном знайдено ще один набір даних x = [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74], для якого $\sigma = 0.011346$.

Збільшимо $\Delta\sigma$ до 0.002. Тоді отримаємо два нових набора даних з трьох вузлів при інтерполяції поліномом Ньютона: x = [0, 33, 66] та x = [0, 34, 68], де σ приймає значення 0.022819 та 0.022842, відповідно.

Для інших методів не виявлено нових наборів даних, які б задовольняли умову $\sigma_{\mathrm{i}} - \sigma_{\mathrm{min}} \leq \Delta\sigma$.

При збільшенні можливої похибки для методів до $\Delta\sigma = 0.003$ для інтерполяції лінійним сплайном з'являються нові набори даних x = [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72], x = [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75], для яких σ дорівнює 0.012495 та 0.012929 відповідно. Також виявлено новий набір даних для інтерполяції поліномом Ньютона, а саме x = [0, 17, 34, 51, 68], для якого $\sigma = 0.024529$.

Також, при більш жорстких обмеженнях для кількості вузлів інтерполяції (наприклад, $36 > n > 3$) можливо отримати більше інформації щодо точності обраних методів.

ВИСНОВКИ

За наявними результатами можна зробити наступні висновки:

- Інтерполяція лінійними сплайнами та інтерполяція квадратичними сплайнами працюють більш точно на одному й тому саму проміжку, коли кількість вузлів інтерполяції більша, в той час, як поліном Ньютона дає точніші результати при меншій кількості вузлів інтерполяції.
- При застосуванні поліному Ньютона з розділеними різницями для великої кількості вузлів інтерполяції на краях інтерпольованого відрізку виникає так званий феномен Рунге, який полягає в тому, що отримані значення на кінцях відрізку інтерполяції дуже відрізняються від правдивих значень. Дійсно, для великої кількісті вузлів інтерполяції отриманий за допомогою полінома Ньютона з розділеними різницями поліном має дуже великий степінь, тоді спостерігається поява великих коливань (осциляцій) між вузлами на краях інтервалу. Це явище відбувається через властивості високостепеневих поліномів, які намагаються "підганяти" точки дуже близько одна до одної, що може призводити до значних похибок в областях поза вузлами. Збільшення кількості вузлів може погіршити ситуацію, оскільки поліном високого ступеня набуває більшої "гнучкості" для "підганяння" точок.
- Хоча за допомогою інтерполяції поліномом Ньютона з розділеними різницями не було досягнуто найбільш точних результатів на жодному з обраних наборів даних, цей метод може використовуватися і давати досить точні значення при правильно обраній оптимальній (не дуже великій та не дуже малій для заданого відрізка) кількості вузлів інтерполяції.
- Часовий проміжок грає важливу роль при побудові інтерполяції для функцій часових рядів. Різні методи інтерполяції можуть впливати на точність та

гладкість відтворення функції залежно від часового проміжку та характеру даних.

- На основі інформації про похибки при використанні обраних методів для побудови інтерполяції не завжди можна зробити точні висновки щодо доцільності використання цих методів для конкретного набору даних. Також при виборі оптимального набору даних для прогнозування проміжних значень не можна спиратися тільки на значення похибок. Наприклад, очевидно, що поліном вищого степеня, утворений при побудові інтерполяції поліномом Ньютона з розділеними різницями, на середніх інтервалах буде давати більш точний результат при тому, що на крайніх інтервалах прогнозовані значення сильно відрізнятимуться від реальних, в той час як поліном третього степеням буде давати помірний результат для всіх точок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. D. Kahaner, C. Moler, S. Nash. Numerical Methods and Software. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989, 495 pp.

2. Meijering, Erik. A Chronology of Interpolation: From Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing // Proceedings of the IEEE. vol. 90, No 3, pp. 319-342 (2002).

3. T. Mills, Historical Notes, Join the Dots and See the World. La Trobe University, Bendigo, Australia.

4. Najzar, Karel. Základy teorie splinů, Praha: Karolinum, 2006, 380 c. ISBN 80-246-1287-9.

5. A. Kaw, M. Keteltas. History of interpolation // Textbook notes on the history of Interpolation and its current uses in the HNMI, 2009. Електронний ресурс. http://numericalmethods.eng.usf.edu.

6. Шелевицький І.В. Сплайни в цифровій обробці даних і сигналів. / Шелевицький І.В. Шутко М.О., Шутко В.М., Колганова О.О. // Кривий Ріг: Видавничий дім, 2008, 232 стор.

7. K. B. Reddy, P. Venkatramana. Comparison of Different Spatial Interpolation Techniques of Field Measurements to Construct Radio Environment Map // International Journal of Future Generation Communication and Networking, vol. 11, No. 3, pp. 21-32 (2018).

8. K. Jangid. Advance Mathematics; Chapter 1. Interpolation. Електронний ресурс. https://www.youtube.com/channel/UCk9ICMqdkO0GREITx-2UaEw.

9. Г.М. Зражевський. Чисельні методи в задачах механіки. Частина I. Теоретична та прикладна механіка. Навчально методичний посібник. К.: 2020. Електронна версія. 135 стор. http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/Zrazhevsky_Calculus_Final.pdf.

10. A. Kaw, M. Keteltas. Spline Method of Interpolation // Textbook notes on the spline method of interpolation, 2009. Електронний ресурс. http://numericalmethods.eng.usf.edu.

11. Parcha Kalyani, P.S. Rama Chandra Rao. Cubic Spline Interpolation with New Conditions on M_0 and M_n. // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT), Vol. 2 Is. 12, pp. 1300 – 1311 (2013).

12. Applied Mathematics. Numerical Methods. Approximation Theory. Interpolation. Cubic Spline. Електронний ресурс. https://mathworld.wolfram.com/CubicSpline.html.

13. Linear and cubic splines. Електронний ресурс. https://dmpeli.math.mcmaster.ca/Matlab/CLLsoftware/NumMethods/Lecture2-3.html.

14. J. Lambers. Linear Interpolating Splines. Lecture. Електронний ресурс. https://www.math.usm.edu/lambers/mat772/fall10/lecture17.pdf.

15. K. Vandebogert. Method of quadratic interpolation. Електронний ресурс. https://people.math.sc.edu/kellerlv/Quadratic_Interpolation.pdf.

16. Surendra Singh Rana. Quadratic Spline Interpolation. // J. Approx. Theory, vol. 57, pp. 300 - 305 (1989).

17. M.J. Marsden. Quadratic spline interpolation // Bulletin of the american mathematical society, vol. 80, No 5, pp. 903 – 906 (1974).

18. 14. W.J. Kammerer, G.W. Reddien, R.S. Varga. Quadratic interpolatory splines // Numer. Math., Vol. 22, pp. 241 – 259 (1974).

19. Інтерполяційна формула Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу. Електронний ресурс. https://www.mathros.net.ua/interpoljacijna-formula-njutona-dlja-nerivnoviddalenyh-znachen-argumentu.html.

20. Newton's Divided Difference Interpolation Formula. Електронний ресурс. https://www.geeksforgeeks.org/newtons-divided-difference-interpolation-formula/

21. Global Exchange Rates (Monthly Update). Електронний ресурс. https://www.kaggle.com/datasets/cvengr/us-dollar-exchange-rates

ВІДГУК
на випускну кваліфікаційну роботу бакалавра
«Прогнозування курсу валют в найближчому майбутньому за допомогою чисельної інтерполяції на основі відомих показників»
студентки 4-го курсу кафедри обчислювальної математики
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Овсієнко Богдани Вячеславівни

У кваліфікаційній роботі розглянуто методи чисельної інтерполяції за наявними даними: лінійна інтерполяція, квадратична інтерполяція та за допомогою полінома Ньютона з розділеними різницями. Додатково на основі актуальних даних розглянуто питання сезонності, тенденції та волатильності, наявність аномалій та важливих подій.

Для реалізації обраних алгоритмів побудови інтерполяції була обрана мова програмування Python та її бібліотеки NumPy, Pandas, Matplotlib, SciPy, SymPy. Наочність забезпечується великою кількістю графіків, на яких видно наближення та його проблеми.

Робота виконана самостійно, для уточнення результатів підходи застосовувались до кількох наборів даних. Роботу можу оцінити на 90 балів, студентка заслуговує на присвоєння відповідного освітньо-кваліфікаційного рівня.

Асистент кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор філософії

Андрій ТИМОШЕНКО

РЕЦЕНЗІЯ

на випускну кваліфікаційну роботу бакалавра
«Прогнозування курсу валют в найближчому майбутньому за допомогою чисельної інтерполяції на основі відомих показників»
студентки 4-го курсу кафедри обчислювальної математики
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Овсієнко Богдани Вячеславівни

У роботі виконано аналіз курсу валют методом інтерполяції. Інтерполяція проведена трьома методами, а саме: з використанням лінійних сплайнів, квадратичних сплайнів, методом Ньютона з розділеними різницями. Для демонстрації та прогнозування обрано курс євро та канадського долара відносно долара США.

Розглянуто теоретичні основи чисельної інтерполяції та проведено експериментальний аналіз з використанням наявних методів побудови інтерполяції для функції валютного курсу.

Робота відображає чисельні підходи до моделювання та аналізу, використовує актуальні дані. Вважаю, що вона заслуговує на оцінку 90 балів, а також на присвоєння кваліфікації бакалавра.

Професор кафедри обчислювальної математики факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
доктор фізико-математичних наук

Дмитро КЛЮШИН

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр

UNICHECK

Ім'я користувача:
Оноцький В'ячеслав ФКомпНаук

ID перевірки:
1015610592

Дата перевірки:
15.06.2023 11:18:22 EEST

Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:
15.06.2023 11:19:51 EEST

ID користувача:
100002816

Назва документа: **ОвсієнкоБогданаВячеславівна**

Кількість сторінок: **41** Кількість слів: **6144** Кількість символів: **41738** Розмір файлу: **791.05 KB** ID файлу: **1015258416**

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

10.1%
Схожість

Найбільша схожість: **2.93%** з джерелом з Бібліотеки (ID файлу: **1000114961**)

9.59% Джерела з Інтернету | 251 .... Сторінка 43

7.7% Джерела з Бібліотеки | 341 .... Сторінка 46

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%
Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи | 6

Підозріле форматування | 8 сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником :

Робота студенки 4-го курсу Овсієнко Богдани Вячеславівни «Прогнозування курсу валют в найближчому майбутньому за допомогою чисельної інтерполяції на основі відомих показників» виконана самостійно, при цьому цитування та запозичення становить 10.1% та не перевищують норму.

Науковий керівник: (підпис) Тимошенко А.А. (ПІБ)

Оператор: (підпис) Оноцький В.В. (ПІБ)