КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра дослідження операцій

Кваліфікаційна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

ЧАСТКОВІ ІЗОМЕТРІЇ ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗКЛАДИ ВОЛЬДА

Виконав студент 4 курсу
Андрушко Любомир Ярославович ____________
(підпис)

Науковий керівник:
професор
Проскурін Данило Павлович ____________
(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент ____________
(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри дослідження операцій

«_____»___________________202__р.

протокол №________

Завідувач катедри

Іксанов О.М. ____________
(підпис)

Київ – 2021

РЕФЕРАТ

Робота складається зі вступу, 2 розділів, висновків та переліку використаних джерел.

В першому розділі викладено основні поняття та результати теорії представлень *-алгебр, дано означення представлення скінченнопородженої *-алгебри, незвідного означення, унітарно-еквівалентних означень. Також в цьому розділі вводиться поняття ізометричного та частково ізометричного операторів та наведено теорему про розклад Вольда ізометричного оператора.

Основні результати зосереджені в розділі 2, а саме, в цьому розділі описано часткові ізометрії в сильному сенсі , вводиться означення центрованого оператора, вивчаються його властивості та наводиться опис незвідних центрованих операторів з точністю до унітарної еквівалентності (Теорема 4,5,6).Також в цьому розділі доведено теорему про узагальнений розклад Вольда центрованого оператора(Теорема 7).

ЗМІСТ

ВСТУП

Дипломна робота присвячена теорії зображень. Це розділ алгебри та теорії операторів, який вивчає реалізацію алгебр, заданих твірними та співвідношеннями, за допомогою лінійних операторів, що діють на просторах зі скалярним добутком (гільбертових просторах). Ця наука набула особливої важливості в середині минулого сторіччя, коли став зрозумілим її зв'язок з теоретичною фізикою, пізніше, наприкінці 20-го сторіччя, було встановлено зв’язки між теорією зображень та теорією ймовірностей, теорією квантових обчислень, тощо. Таким чином робота відностьcя до актуального напрямку сучасної математики.

Предметом вивчення роботи є сімейства центрованих операторів, що діють на гільбертовому просторі. Поняття центрованого оператора природним чином узагальнює поняття часткової ізометрії в сильному сенсі. Такі часткові ізометрії вивчались в роботах Валлена, Халмоша та інших. Метою роботи було описати незвідні пари T, T^*, де T – є обмеженим центрованим оператором, що діє на гільбертовому просторі та довести для таких пар аналог розкладу Вольда ізометричного та частково ізометричного оператора, , а також вивчення сильно комутуючих сімей часткових ізометрій.

РОЗДІЛ 1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПРЕДСТАВЛЕНЬ *-АЛГЕБР

1.1 *-Представлення

1. Представлення алгебри A на скінченновимірному гільбертовому (унітарному) просторі H є гомоморфізм π в A в алгебру $L(H)$ лінійних перетворень на H. *- представлення *- алгебри A є гомоморфізм π з алгебри в *- алгебру $L(H)$ обмежених операторів на сепарабельному гільбертовому просторі H. Розмірність представлення - це розмірність H.

Ми обмежимося розглядом тільки скінченновимірних представлень A, якщо A – алгебра без інволюції, і *-представлення обмежені операторами на сепарабельному гільбертовому просторі (dim $H \leq \infty$), якщо A є *-алгеброю.

2. В теорії представлення алгебр представлення вивчаються з точністю до деякої еквівалентності. Ми називаємо представлення A, π на H і $\tilde{\pi}$ на $\tilde{H}$ еквівалентними, якщо існує оборотний оператор $C: H \to \tilde{H}$ який переплітає уявлення π і $\tilde{\square}$, тобто

$$C\pi(x) = \tilde{\pi}(x)C, \qquad \forall x \in A.$$

В теорії представлення $*$ - алгебр представлення вивчаються з точністю до унітарної еквівалентності. Представлення A, π на H і $\tilde{\square}$ на $\tilde{H}$ називаються унітарно еквівалентними, якщо існує унітарний оператор U: $H \to \tilde{H}$ такий, що

$$U\pi(x) = \tilde{\pi}(x)U, \qquad \forall x \in A.$$

До кожної *-алгебри A можна пов'язати категорію *-Rep A, об'єкти якої є *-представленнями розглянутого з точністю до унітарної еквівалентності A, а її морфізми переплітаються операторами.

У нас є наступне просте твердження

Твердження 1.

*Будь-які два скінченновимірних *-представлення *-алгебри A еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони унітарно еквівалентні.*

Доведення. Потрібно тільки довести, що еквівалентність *-представлень π на H і □ на $\widetilde{H}$ має на увазі їх унітарну еквівалентність.

Нехай $C: H \to \widetilde{H}$ - оборотний оператор, такий, що

$$C\pi(x) = \tilde{\pi}(x)C, \qquad \forall x \in A. \quad (1.1)$$

Розглянемо полярний розклад оператора C, $C = UA$ де $A = (CC^*)^{1/2}$ оборотний позитивний оператор на H і U-унітарний оператор від H до $\widetilde{H}$ $(U^{-1} = U^*)$. Тоді з (1.1) випливає, що

$$\square(x) = A^{-1}U^{-1}\,\tilde{\pi}(x)UA, \qquad \forall x \in A. \quad (1.2)$$

Взявши примикання обох сторін, отримаємо

$$\tilde{\square}(x) = UA^{-1}\pi(x)AU^{-1}, \qquad \forall x \in A. \quad (1.3)$$

Отож,

$$A^2\pi(x) = AU^{-1}\tilde{\pi}(x)UA = AU^{-1}UA^{-1}\pi(x)AU^{-1}UA = \pi(x)A^2$$

Оскільки A є позитивним оператором, то маємо $A^2\pi(x) = \pi(x)A^2, x \in A,$ що означає, що $A\pi(x) = \pi(x)A$ для будь-якого $x \in A$. З цього ми отримуємо

$$U\pi(x)A = UA\pi(x) = \tilde{\pi}(x)UA,$$

і оскільки A оборотна,

$$U\pi(x) = \tilde{\pi}(x)U, \qquad \forall x \in A.$$

Отже, ми маємо унітарну еквівалентність представлень π на H і $\tilde{\square}$ на $\widetilde{H}$.■

3. У загальній теорії представлення розрізняють незвідні і нерозкладні представлення у множині всіх скінченновимірних представлень. Представлення $\square: A \to L(H)$ називається незвідним, якщо не існує нетривіального підпростору H, інваріантного щодо всіх операторів $\pi(x)$, $x \in A$. Представлення $\square: A \to L(H)$ називається нерозкладним, якщо не існує розкладання $H = H_1 + H_2$ в суму двох нетривіальних підпросторів, інваріантних щодо всіх операторів $\pi(x)$ $x \in A$ і $H_1 \cap H_2 = \{0\}$. Ясно, що будь-яке незвідне представлення нерозкладне. Таким чином множина незвідних представлень є підмножиною множини всіх нерозкладних представлень.

Розмір цієї підмножини у всій множині нерозкладних представлень залежить від структури A.

Опис всіх нерозкладних (особливо незвідних) представлень є одним з найважливіших завдань теорії представлення.

У випадку, коли A - є алгеброю з інволюцією, можна розглядати як незвідні *-представлення, так і нерозкладні *-представлення. Однак в даному випадку ці поняття збігаються. А саме, справедливе наступне твердження.

Твердження 2.

$*$-Представлення π нерозкладне тоді і тільки тоді, коли воно незвідне.

Доведення. Досить довести, що будь - яке нерозкладне *-представлення незвідне. Припустимо зворотнє, тобто нехай розкладається звідне представлення , тобто існує підпростір H_1 в H , інваріантний щодо всіх □(x), x ∈ A.

Лемма1.

Підпростір $H_1^{\perp} = \{y \in H : (y, f) = 0, \forall f \in H_1\}$ є нетривіальним та інваріантним щодо всіх □(x), $x \in A$.

Доведення. Якщо $y \in H_1^{\perp}$ тоді

$$(□(x)y, f) = (y, \pi(x^*)f) = 0$$

для всіх f з інваріантного підпростору H_1, тобто □$(x)y \in H_1^{\perp}$. ■

Протиріччя стосовно Твердження 2 безпосередньо випливає з леми. ■

4. Нехай H - сепарабельний (взагалі кажучи, нескінченновимірний) гільбертовий простір. Слідуючи загальній стратегії теорії представлення , ми приймаємо незвідні представлення за "найпростіші" серед всіх $*$-представлень. $*$-Представлення □$: A \to L(H)$ називається незвідним, якщо в H не існує нетривіального підпростору, інваріантного щодо всіх операторів □(x) (x ∈ A). Наступна форма леми Шура дає еквівалентну умову незвідності.

Твердження 3.

$*$-Представлення □$(\cdot)$ незвідне тоді і тільки тоді, коли будь-який обмежений оператор С $\in L(H)$ *такий, що*

$C\pi(x) = \pi(x)C, \qquad \forall x \in A.$

є кратним тотожності, тобто $C = cI$, з $c \in C$.

Доведення. Якщо $A = A^*$ комутує з □$(\cdot)$, тобто $A\pi(x) = \pi(x)A$, ∀x ∈ A, тоді

$$E_A(\Delta)\pi(x) = \pi(x)E_A(\Delta)$$

для всіх x $\in A$ і борелівських множин $\Delta \subset R^1$ (тут $E_A(\Delta)$ – спектральний проектор оператора А). У цьому випадку $H_\Delta = E_A(\Delta)H$ інваріантний підпростір у Н.

Якщо представлення π незвідне, тоді всі такі H_Δ є або $\{0\}$ або H, тобто спектральна міра $E_A(\cdot)$ зосереджена в одній точці $a \in R^1$, і $A = aI$.

Якщо $C = A + iB(A = A^*, B = B^* \in L(H)$ комутує з незвідним представленням □$(\cdot)$ $*$-алгебри A, то оператори A, B також комутують з □$(\cdot)$, отже, $C = aI + ibI = (a + ib)I; a, b \in R$.

І навпаки, якщо уявлення □$(\cdot)$ є звідним і H_1 є підпростором, інваріантним щодо □$(x), x \in A$, то за лемою, $H_1^\perp$ є також інваріантним. Потім оператор

$$C = \left(c_1 I_{H_1}\ 0\ 0\ c_2 I_{H_1^\perp}\right), \qquad c_1 \neq c_2, \qquad c_1, c_2 \in C,$$

комутує з представленням і не є кратним ідентифікатору. ■

Зауваження 1. Поняття нерозкладного представлення можна визначити в тому випадку, коли H-сепарабельний гільбертовий простір (dim $H = \infty$) і доведено аналог попередніх пропозицій. Однак тут ми цього робити не будемо.

Незвідні представлення і їх переплетені форми операторів утворюють повну підкатегорію, $*$-Irrep A, в категорії $*$-Rep A. Умова повноти підкатегорії означає, що функтор вкладення F з $*$-Irrep A в $*$-Rep A є ізоморфізмом на відповідному морфізмі.

1.2 *-Представлення генераторів та співвідношень

1. До будь-якого *-представлення скінченно породженої *-алгебри $B = C\langle x_1, \dots, x_n, x_1^*, \dots, x_n^* \mid P_j(x_1, \dots, x_n, x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, j = 1, \dots, m\rangle$ обмеженим операторам відповідає сімейство обмежених операторів $\{X_i = \pi(x_i), X_i^* = \pi(x_i)^* = \pi(x_i^*)\}_{i=1}^n$ таке, що

$$P_j(X_1, \dots, X_n, X_1^*, \dots, X_n^*) = 0, \qquad j = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

І навпаки, сімейство обмежених операторів $\{X_i, X_i^*\}_{i=1}^n$, що задовольняє (1.4), може бути однозначно поширене на представлення цілої $*$-алгебри B. Для будь-якої скінченно представленої $*$-алгебри можна вибрати самоспряжені генератори $a_i = a_i^*, i = 1, \dots, l$ (їх число може бути більше n), пов'язані самостійними відносинами $Q_j(a_1, \dots, a_l) = Q_j^*(a_1, \dots, a_l), l = 1, \dots, r$ (їх кількість також може збільшуватися); тому, будь-яке представлення π алгебри $B = C\langle a_1, \dots, a_l \mid a_i = a_i^*, i = 1, \dots, l; Q_j(a_1, \dots, a_l) = 0, j = 1, \dots, r\rangle$ є однозначно визначено сімейством самоспряжених операторів $A_i = A_i^* = \pi(a_i), i = 1, \dots, l$, таким, що

$$Q_j(A_1, \dots, A_l) = 0, \qquad j = 1, \dots, r \qquad (1.5)$$

2. Оскільки властивості представлення алгебри (незвідність, тощо) повністю визначаються представленням його генераторів, далі ми будемо використовувати еквівалентну мову представлення відношення (1.5) обмеженими самоспряженими операторами.

При вивченні сімейств самоспряжених операторів $A_1, \dots, A_n$, зазвичай, роль найпростіших сімей операторів виконують незвідні сімейства. Сімейство самоспряжених операторів $A_k = \int_R \lambda_k dE_k(\lambda_k), k = 1, \dots, n$ незвідне, якщо немає нетривіального (відмінного від H і $\{0\}$) підпростіру в H інваріантний щодо всіх операторів $E_k(\Delta), k = 1, \dots, n; \Delta \in B(R^1)$. Якщо оператори сімейства обмежені, то незвідність сімейства означає, що в

H немає нетривіального підпростору, інваріантного щодо всіх операторів сімейства $(A_k)_{k=1}^{n}$.

Наступна умова еквівалентна незвідності: сукупність самоспряжених операторів $(A_k)_{k=1}^{n}$ незвідна, якщо будь-який обмежений оператор C, комутуючий з усіма $A_k, k = 1, \dots, n$ (тобто з усіма їх спектральними проекціями), є кратним оператору тотожності.

3. Для одного обмеженого самоспряженого оператора $A = A^*$ його незвідність означає, що dim H = 1, і цей оператор є помножений на константу A = λ, λ ∈ R, а спектральна теорема для обмеженого самоспряженого оператора дає його розклад $A = \int_{-||A||}^{||A||} \lambda dE_A(\lambda)$, де $E_A(\cdot)$ - спектральна міра оператора A.

4. Незвідні представлення пари обмежених самоспряжених операторів існують в гільбертовому просторі довільної розмірності.

Нехай dim H = $n, e_1, \dots, e_n$ - ортонормований базис в H. Візьмемо оператори A і B такі, що в базисі $(e_k)_{k=1}^{n}$, вони задаються матрицями

$$A = (\lambda_1 \ \ 0 \ \ \ddots \ \ 0 \ \ \Box_n\ ), \quad B = \left(b_{ij}\right), \qquad b_{ij} = \underline{b_{ij}}, \lambda_j \in R,$$

де $\Box_i \neq \lambda_j, i \neq j$, і $\forall i$ існує $j, i \neq j$, таке, що $b_{ij} \neq 0$.

Пара самоспряжених операторів A, B незвідна. Дійсно, якщо $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$ - матриця комутуюча з операторами A і B, тоді умова $[A, C] = 0$ дає

$$C = (c_{11} \ \ 0 \ \ \ddots \ \ 0 \ \ c_{nn}\ ),$$

а $[C, B] = 0$ має на увазі $c_{11} = \cdots = c_{nn} = c$, тобто C = cI, і тому пара A, B незвідна.

Тепер нехай H - сепарабельний нескінченновимірний гільбертовий простір, і нехай $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ - ортонормованний базис в H. Пара обмежених самоспряжених операторів, що мають наступне матричне представлення

$$A = (\lambda_1 \ \ 0 \ \ \Box_n \ \ 0 \ \ \ddots\ ), \quad B = \left(b_{ij}\right),$$

де

$\square_i \neq \lambda_j, i \neq j; |\lambda_k| \leq C < \infty, k = 1, 2, \ldots; b_{ij} = \underline{b_{ij}}, i, j = 1, 2, \ldots; \forall i \neq j\ \exists b_{ij} \neq 0;$

$\sum_{j=1}^{\infty} \quad |b_{ij}|^2 \leq K < \infty\ \forall i = 1, 2, \ldots,$ є незвідним .

5. У загальному випадку немає необхідності, щоб незвідні пари, пов'язані співвідношенням (1.5), існували в кожному вимірі.

Пари комутуючих обмежених самоспряжених операторів $A = A^*, B = B^*, AB = BA$ мають тільки одновимірні незвідні представлення, dim $H = 1$ $A = \lambda_1, B = \lambda_2, (\lambda_1, \lambda_2) \in R_2$. Спільна спектральна міра $E_{(A_1, A_2)}(\cdot, \cdot) = E_{(A_1)}(\cdot) \otimes E_{(A_2)}(\cdot)$ на площині R^2 дає розкладання пари $A_1 = \int_{R^2} \quad \lambda_1 dE_{(A_1, A_2)}(\lambda_1, \lambda_2), A_2 = \int_{R^2} \quad \lambda_2 dE_{(A_1, A_2)}(\lambda_1, \lambda_2)$ в незвідні.

6. Може трапитися так, що не існує пар обмежених самоспряжених операторів *A*, *B*, пов'язаних співвідношенням (1.5) взагалі.

Наприклад, не існує обмежених пар самоспряжених операторів *A*, *B* (зокрема, немає незвідних пар), пов'язаних канонічними комутаційними відносинами (ККВ), [*A*,*B*] = *iI*. Дійсно, в іншому випадку, ми мали б

$$A^n B - BA^n = inA^{n-1},$$

і

$$n\left||A^{n-1}|\right| = n\ ||A||^{n-1} \leq 2\ ||A||^n\ \left||B|\right|.$$

Оскільки $\left||A|\right| \neq 0$, останнє передбачає $\left||A|\right|\left||B|\right| \geq n/2$ для всіх n, що суперечить припущенню про те, що *A* і *B* обмежені.

Той факт, що пари операторів, що задовольняють ККВ, відіграють вирішальну роль у моделях математичної фізики підкреслює необхідність вивчення як обмежених, так і необмежених сімейств операторів, що задовольняють співвідношення.

7. Як прийнято в теорії представлень, набори операторів вивчаються з точністю до унітарної еквівалентності. Дві колекції, $(A_k)_{k=1}^n$ на

гільбертовому просторі H, і $(\widetilde{A_k})_{k=1}^{n}$ на гільбертовому просторі $\widetilde{H}$,унітарно еквівалентні, якщо існує унітарний оператор $U\colon H \to \widetilde{H}$ такий, що діаграми

$$H\ A_k \to\ H\ \uparrow U\ \ \downarrow U\ \widetilde{H}\ \leftarrow \tilde{A}_k\ \widetilde{H}$$

є комутативними для всіх k = 1,. . . , n, тобто $UA_k = \tilde{A}_k$U.

Опис обмежених представлень ∗-алгебри B з точністю до унітарної еквівалентності збігається з описом обмежених представлень утворених з точністю до унітарної еквівалентності.(?)

1.3 Ізометричні оператори та часткові ізометрії

Нехай X та Y – метричні простори з метриками d_X та d_Y. Функцію f:$X \to Y$ називають ізометрією, якщо $\forall a, b \in X,$ виконується:

$$d_Y\big(f(a), f(b)\big) = d_X(a, b)$$

Нехай H – гільбертовий простір , *S(H)* – простір обмежених лінійних операторів простору H. Тут, оператор $D \in$ *S(H)* буде називатись оператором ортогонального проектування, за умови, що:

$$D = D^2 = D^*$$

Оператор *C* зветься частковою ізометрією, за умови:

$$C: H \to H, \text{де } H = KerC \oplus (KerC)^{\perp} \text{ і } \forall a, b \in (KerC)^{\perp} \text{ буде виконуватись}$$
$$(C_a, C_b) = (a, b).$$

Твердження 4.

Якщо $C \in S(H)$, *де C – часткова ізометрія*

C^*C *– ортогональний проектор* $\leftrightarrow$ CC^**- ортогональний проектор.*

Теорема 1.

Нехай $P: H \to H, P$ *−часткова ізометрія,за умови, якщо виконуються наступні умови:*

1) $C^*C = D_1, CC^* = D_2 -$ *є операторами ортогонального проектування.*

2) Один із C^*C, CC^* *−є оператором ортогонального проектування.*

3) $C^*CC^* = C^* \leftrightarrow CC^*C = C.$

Нагадаємо важливий структурний результат про будову ізометричного оператора , відомий як розклад Вольда:

Теорема 2.

Нехай $C: H \to H$ *– це ізометрія на гільбертовому просторі H. Тоді має місце розклад простору H в пряму суму двох взаємно ортогональних підпросторів*

$$H = H_1 \oplus H_2,$$

таке, що:

а) H_1 та H_2 *є звуженням до C.*

б) Звуження C на H_1 *є унітарно еквівалентне однобічному зсуву;*

в) Звуження C на H_2 є унітарним оператором.

РОЗДІЛ 2 ЦЕНТРОВАНІ ОПЕРАТОРИ

2.1 Опис часткових в сильному сенсі ізометрій

Теорема 3.

Будь-яка незвідна центрована часткова ізометрія є однією з наступних:

1. *одновимірний унітарний оператор*

$$U = \alpha, |\alpha| = 1;$$

2. *оператор одностороннього зсуву в* l_2,

$$Ue_k = e_{k+1};$$

3. *комутуючий з оператором одностороннього зсуву в* l_2,

$$Ue_k = e_{k-1}, k > 1, Ue_1 = 0;$$

4. *скінченномірний оператор в* C^n*виду*

$$Ue_k = e_{k+1}, k = 1, \dots, n-1, Ue_n = 0, \text{для деяких } n = 1,2, \dots.$$

Доведення. Почнемо з простого факту.

Твердження 5.

Оператори $U^k(U^*)^k, U^l(U^*)^l, k, l = 1,2, \dots,$ *є проекціями*

Доведення. Так як $UU^*U = U$ і оператори U^*U і $U^{k-1}(U^*)^{k-1}$ комутують, завдяки індукції ми маємо, що

$$U^k(U^*)^kU^k(U^*)^k = UU^{k-1}(U^*)^{k-1}U^*UU^{k-1}(U^*)^{k-1}U^* =$$
$$= UU^*UU^{k-1}(U^*)^{k-1}U^{k-1}(U^*)^{k-1}U^* =$$
$$= UU^{k-1}(U^*)^{k-1}U^* = U^k(U^*)^k.$$

Аналогічно, оскільки $U^*UU^* = U^*$ і UU^* і $(U^*)^{k-1}U^{k-1}$ комутують, ми отримуємо, що $(U^*)^kU^k$ є проекцією. ■

Позначимо ці проекції через $P_k = (U^*)^kU^k, P_{-k} = U^k(U^*)^k$,

$$k = 1,2, \dots, ; P_0 = I.$$

Твердження 6.

Для всіх $k \in Z$, *виконуються наступне співвідношення*

$$P_kU = UP_{k+1}. \qquad (2.1)$$

Доведення. Дійсно, для k > 0, ми маємо

$$P_kU = (U^*)^kU^kU = (U^*)^kU^kUU^*U = UU^*(U^*)^kU^kU =$$

$$= U(U^*)^{k+1}U^{k+1} = UP_{k+1},$$
$$P_{-k}U = U^k(U^*)^kU = UU^{k-1}(U^*)^{k-1}U^*U =$$
$$= UU^*UU^{k-1}(U^*)^{k-1} = UU^{k-1}(U^*)^{k-1} = UP_{-k+1}$$
і$P_{-1}U =$ $(UU^*)U = UI = UP_0, P_0U = IU = U(U^*U) = UP_1.$

■

Розглянемо випадок коли унітарний та тривіальний. Припустимо, що оператор U^*має нетривіальне ядро (випадок нетривіального ядра U аналогічний). Нехай $f\ \in ker\ U^*$. Для кожного k = 1,2,…, розглянемо вектор $(U^*)^kU^kf$. Можуть виникнути такі ситуації:

а) $(U^*)^kU^kf\ = f$ для всіх $k = 1,2, \dots$. Тоді вектор $f_0 = f$ є сумісним власним вектором комутуючого сімейства (P_k).

б) для деякого k > 0, виконуються наступні умови:

$$(U^*)^lU^lf = f, \qquad l = 1, \dots, k-1,$$
$$(U^*)^kU^kf \neq f.$$

Покладемо $f_0 = f - (U^*)^kU^kf \neq 0$. Тоді $(U^*)^kU^kf_0 = 0$, з чого випливає, що $U^kf_0 = 0, U^{k+1}f_0 = 0$ і т. д. і f_0 є сумісним власним вектором комутуючого сімейства (P_k).

В обох випадках , зі співвідношення (2.1) випливає, що $f_0, Uf_0, U^2f_0, \dots,$ є ортогональними сумісними власними просторами сімейства (P_k) і може бути обраний в якості основи простору. Інші докази очевидні. ■

2.2 Незвідні центровані оператори

Оператор T називається центрованим, якщо оператори $T^k(T^*)^k, (T^*)^kT^k$ утворюють комутативне сімейство, тобто для всіх $k, j \in N$

$$[T^k(T^*)^k, T^j(T^*)^j] = [T^k(T^*)^k, (T^*)^jT^j] = [(T^*)^kT^k, (T^*)^jT^j] = 0 \quad (2.2)$$

Перепишемо співвідношення (2.1) у формі, що дозволяє побудувати комутативну модель для центрованих операторів, і покажемо, що проблема унітарної класифікації центрованих операторів не є серйозною(wild?). Ми описуємо центровані оператори, такі, що ker $T \neq \{0\}$ або ker $\tilde{T} \neq \{0\}$. Ми також описуємо, аж до унітарної еквівалентності, всі скінченновимірні незвідні центровані оператори.

1. Ми перепишемо співвідношення (2.2) у формі, яка дозволить нам дослідити відносини, використовуючи формалізм динамічних систем. Ми покажемо, що незвідні (або факторні) представлення відносин розділяються на два випадки: випадок, коли ker T ∪ ker $\tilde{T}$ = $\{0\}$ і вироджені випадки (аналогічно до розкладу ізометрій Вольда).

Нехай $T = UC$ - полярний розклад оператора T. Ми також вводимо комутуючі самоспряжені оператори $A_k = T^k(T^*)^k, B_k = (T^*)^kT^k, k \geq 1$, і позначимо спільну роздільну здатність тотожності комутативного самоспряженого сімейства $(A_{k,}B_k)_{k\in N}$ через $E_{A,B}(\cdot,\cdot)$.

Твердження 7.

Співвідношення (2.2) еквівалентні наступним:

$$E_{A,B}(\Delta)U = UE\big(F^{-1}(\Delta)\big), \qquad \Delta \in B(R^n \times R^n), \qquad (2.3)$$

де відображення $F^{-1}(\cdot)$ *визначене*

$$F^{-1}(x,y) = F^{-1}\big((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)\big)$$

$$= \{(\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots\right), (x_1, y_1x_1, y_2x_1, \dots))\ x_1 \neq 0, ((0,0,\dots), (0,0,\dots)), \qquad x_1 = 0.$$

Фаза U оператора T є центрованим оператором.

Доведення. Для будь-якого $k \in N$

$$A_kUC = T^k(T^*)^kT = TA_{k-1}B_1 = UCA_{k-1}B_1 = UA_{k-1}B_1C.$$

Позначимо через P проекцію на $(\ker C)^{\perp}$. Тоді, оскільки $\ker C = \ker U$ і $UP = U$, ми маємо $A_k U = U A_{k-1} B_1$. Аналогічно можна отримати рівності $A_1 U = U B_1$ і $B_k A_1 U = U B_{k+1}$.

Можна показати, що для будь-якої множини Бореля $\Delta \subset R^n$ виконується наступне співвідношення :

$$E_{B_1,A}(R \times \Delta)U = U E_{B_1,A}(F_1^{-1}(R \times \Delta)) \qquad (2.4)$$

де

$$F_1^{-1}(y_1, x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots\right).$$

Права частина (2.4) може бути визначена навіть для $x_1 = 0$. Дійсно, оскільки $E_{B_1,A}$ $(\{0\} \times R \times R \times \cdots)$ є проекцією на $\ker B_1 = \ker U$, весь вираз дорівнює нулю. Таким чином, для зручності ми можемо встановити

$$F_1^{-1}(y_1, 0, x_2, x_3, \dots) = (0,0,0, \dots).$$

Аналогічним чином можна легко вивести з рівняння $B_k A_1 U = U B_{k+1}$. Рівність

$$E_{B_1,A}(R \times \Delta)U^* = U^* E_{B_1,A}\left(F_2^{-1}(R \times \Delta)\right) \qquad (2.5)$$

з

$$F_2^{-1}(x_1, y_1, y_2, y_3, \dots) = \left(y_1, \frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \dots\right).$$

Перейшовши до спряжених операторів в (2.5) і об'єднавши його з (2.4) отримуємо співвідношення (2.3).

Той факт, що U центрований, безпосередньо випливає з (2.3).

Доказ того, що сукупність невід'ємних самоспряжених операторів (A_k, B_k) і центрованого U (який є частковою ізометрією), задовільняє співвідношенням (2.3), породжує центрований оператор, є прямим обчисленням.

■

Твердження 8.

Нехай T-центрований оператор у гільбертовому просторі H. Простір H може бути розкладений на пряму суму двох інваріантів щодо підпросторів $T, T^*; H = H_0 \oplus H_1$ *так, що ker T ∪ ker* T^* *= {0} в* H_1*, а* H_0 *породжений ker T ∪ ker* T^*.

Вироджені представлення можуть бути повністю описані з точністю до унітарної еквівалентності . Структура представлень в H_1 складніша.

Теорема 4.

Нехай T - центрований оператор з нульовим ядром і щільним зображенням. Тоді це може бути реалізовано в просторі $L_2(R_+^\infty \times R_+^\infty, H, d\mu)$ *векторнозначних квадратично інтегрованих функцій, що мають свої значення в деякому гільбертовому просторі H за формулою*

$$(Tf)(x,y) = x_1^{\frac{1}{2}} u(x,y) \left(d\mu(F(x,y))/(d\mu(x,y))^{\frac{1}{2}} f \right) F(x,y), \qquad (2.6)$$

де $F(\cdot,\cdot)$ *введено вище,* $\mu(\cdot,\cdot)$ *є* $F(\cdot,\cdot)$*- квазіінваріантна імовірнісна міра Бореля і* $u(\cdot,\cdot)$ *є унітарною вимірною операторною функцією.*

І навпаки, будь-яка колекція H, $\mu(\cdot,\cdot)$*, і* $u(\cdot,\cdot)$*, що володіє зазначеними властивостями, генерує центрований оператор по наведеній вище формулі.*

Представлення з ненульовим ядром можуть бути повністю класифіковані.

Теорема 5.

Всі незвідні представлення (2.2), для яких ker T ∪ ker $T^* \neq$ *{0} відносяться до наступних класів:*

(i) *кінцевомірні представдення в* C^n

$$Te_j = \lambda_j e_{j+1}, \qquad j = 1, \dots, n-1, \lambda_j > 0,$$
$$Te_n = 0;$$

(ii) *нескінченномірний в* l_2

$$Te_j = \lambda_j e_{j+1}, \qquad j = 1,2,\dots, \lambda_j > 0;$$

(iii) *нескінченномірний в* l_2

$$Te_j = 0, \quad Te_j = \lambda_j e_{j-1}, \qquad j = 1,2,\dots, \lambda_j > 0;$$

Доведення. Дійсно, фаза U оператора T є центрованою частковою ізометрією (неунітарною); Використовуємо теорему 3 для представлення оператора U; Решта доказів випливає безпосередньо з (2.3). ■

3. Нарешті, ми наводимо повний список скінченновимірних незвідних центрованих операторів. Насправді, існують деякі незвідні скінченновимірні представлення з невиродженим T.

Теорема 6.

Всі незвідні скінченномірні представлення (2.1) є або скінченномірними представленнями, що описуються в Теоремі 5 або представлення виду:

$$Te_j = \lambda_j e_{j+1}, \qquad j = 1, \dots, n-1,$$
$$Te_n = \alpha\lambda_n e_1, \qquad \lambda_j > 0, \lambda_j \neq \lambda_k \text{ для } j \neq k \ |\alpha| = 1.$$

Доведення. Дійсно, легко побачити, що преставлення (2.6) є незвідним лише тоді, коли міра □(·) зосереджена на періодичній орбіті $F(\cdot)$. Незвідність в цьому випадку має на увазі, що спектр оператора B_1 простий. Переходячи до унітарно еквівалентної реалізації, ми отримуємо необхідні формули. ■

Наслідок.

Будь-який фактор, породжений центрованим оператором, гіперкінцевий.

Доведення. Дійсно, (2.4) має на увазі, що відповідна алгебра фон Неймана або відноситься до типу I, якщо уявлення вироджено, або є схрещеним продуктом комутативної алгебри групою Z. ■

2.3 Розклад Вольда для центрованого оператора

Важливим наслідком доведених нами теорем, є наступний результат, що виступає аналогом відомої теореми про розклад Вольда ізометричного оператора.

Теорема 7.(Розклад Вольда для центрованого оператора)

Нехай T-центрований оператор у гільбертовому просторі H. Простір H може бути розкладений на пряму суму двох інваріантів щодо підпросторів T, T^*; $H = H_0 \oplus H_1$ *так, що* $ker\ T \cup ker\ T^*$ *= {0} в* H_1*, а* H_0 *породжений* $ker\ T \cup ker\ T^*$.

Вироджені представлення можуть бути повністю описані з точністю до унітарної еквівалентності . Структура представлень в H_1 складніша.

ВИСНОВКИ

В роботі вивчались пари T,T^* , де T – обмежений центрований оператор, що діє на гільбертовому просторі H . Основними результатами є теореми 4,5,6 в яких надано опис всіх незвідних пар таких операторів з точністю до унітарної еквівалентності, а також Теорема 7, що є аналогом розкладу Вольда центрованого оператора.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман., 1966.
2. Representation and index theory for C∗-algebras generated by commuting isometries / C. A. Berger, L. A. Coburn, A. Lebow., 1978.
3. Operators and representation theory / P.E.T. Jorgensen., 1987.
4. Functional Analysis / Y. M. Berezansky, Z. G. Sheftel, G. F. Us., 1996.
5. A Hilbert space problem book / Halmos., 1982.