Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченко

На правах рукопису

ВАДНЬОВ ДМИТРО ОЛЕКСАНДРОВИЧ

УДК 519.874:519.852:519.816

МЕТОДИ ФОРМАЛІЗАЦІЇ ПОДАННЯ НЕЧІТКИХ ВЕЛИЧИН НА ОСНОВІ СПЕЦІАЛЬНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Дисертація на здобуття наукового ступеню
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник:
Івохін Євген Вікторович,
доктор фізико-математических наук,
доцент

Київ – 2016

ЗМІСТ

Отформатировано: Основной шрифт абзаца;Знак Знак, Шрифт :14 пт

Отформатировано: Основной шрифт абзаца;Знак Знак, Шрифт :14 пт

ВСТУП

Актуальність теми. Одним з сучасних наукових напрямків досліджень, що швидко розвивається останнім часом, є математичне моделювання. Якщо у класичних наукових напрямках математичний апарат, що використовується при отриманні нових результатів, вже сформований, то теорія математичного моделювання як окремий новий напрямок знаходиться на стадії формування.

Під моделюванням розуміється заміна одних об'єктів (оригіналів) іншими об'єктами (моделями) і дослідження властивостей об'єктів за встановленими моделями. Теорія моделювання становить взаємно пов'язану сукупність положень, які є предметом теорії моделювання [1].

Поняття "модель" широко використовується і має різні застосування. Моделлю об`єкта зазвичай називають інший об`єкт, що імітує деякий набір властивостей об`єкта, що моделюється [2,3]. Основна мета моделювання – це можливість дослідження та аналізу кількісних та якісних характеристик реального об'єкту. Об`єкт реального світу має величезну кількість властивостей та характеристик, але при дослідженні необхідно виділити основні властивості та перенести їх на модель [1,4,5].

Всі моделі класифікуються за різними ознаками. Часто виділяють дві категорії: експериментальні моделі та теоретичні моделі. Особливу увагу приділяють математичним моделям. Основною перевагою математичної моделі є можливість досліджувати властивості та поведінку моделі у всіх чи багатьох ситуаціях, спираючись на розроблені формальні методи досліджень. Використовуючи розроблений математичний апарат, можна отримати якісно нові результати. Обчислювальні експерименти, проведені із використанням математичних моделей, дозволяють більш докладно та глибоко вивчити функціонування об`єктів.

Особливо важливим математичне моделювання стає тоді, коли об`єкт дослідження знаходиться у одиничному екземплярі, натурний експеримент проводити довго, або ціна безпосереднього експерименту занадто висока.

Класичні методи аналізу, вирішуючи багато завдань аналізу поведінки систем, не забезпечують повною мірою вирішення сучасних завдань дослідження функціонування об'єктів, зокрема в умовах невизначеності. Необхідна модернізація методів, що існують, і розробка нових методів аналізу складних об'єктів, що базуються на сучасних досягненнях математики, теорії систем і т.і.

Математичне моделювання різних реальних явищ містить два принципові етапи, що приводять до необхідності врахування складності та невизначеності систем. Перший з них об‘єктивно обумовлений невідомою точною поведінкою процесів, що моделюються. Це, в свою чергу, веде до неможливості сформулювати точний вигляд моделі фізичного процесу та до незручності використання обраних моделей на практиці, що пояснюється наявністю в них багатьох невизначеностей. Другий етап, пов‘язаний з проблемою адекватності математичного моделювання реальних систем, полягає в суб‘єктивній неспроможності оцінювати події процесів абсолютно точно. Неясність, нечіткість поведінки системи, відсутність достатньої інформації для моделювання процесів не дозволяють коректно описувати моделі в рамках традиційних підходів, що враховують невизначеність.

Для дослідження динаміки систем, які по своїй природі є достатньо складними і недостатньо визначеними, природно використовувати нечітких підхід, при якому неточність моделі описується в термінах теорії нечітких множин. Існує багато підходів до побудови та математичної обґрунтованості загальної теорії нечітких множин. Треба відмітити, що аксіоматика даної теорії досить повно вивчена, а область застосування нечітких множин постійно розширюється завдяки залученню основних принципів теорії до аналізу складних систем різного призначення (економічних, екологічних, соціальних, політичних та ін.).

Використання теорії нечітких множин дає можливість розв’язувати складні недостатньо формалізовані задачі на основі нових конструктивних підходів. Теоретичні та прикладні передумови проведеного в дисертації дослідження на основі нечітких множин сформовані на основі робіт Заде Л.А., Орловського С.А., Мартинюка А.А., Зайченка Ю.П., Волошина О.Ф. та інших.

Дослідженню різних прикладних задач з використанням теорії нечітких множин присвячені роботи Алтунина А.Е., Вострова Н.Н, Кучина Б.Л., Борщевича В.И., Ботнаря В.И., Ягера Р.Р. та інших.

Одним з напрямків досліджень є формування нечітких баз даних на основі побудови табличних представлень, в яких використовуються оцінки особи, що приймає рішення. Створення таких баз даних і методів їх актуалізації дасть можливість проведення оперативної обробки нечіткої проблемної інформації.

Задачі аналітичної обробки сукупності нечітко визначених даних потребують вирішення двох задач: кластеризації даних в відносно однорідні групи та вибору рішення в умовах невизначеності. Розробка програмного забезпечення для обробки інформації, поданої в узагальненому вигляді з врахуванням динаміки інформаційних процесів, дозволить ефективно вирішувати зазначені вище завдання.

Одними з найперспективніших підходів в області математичного моделювання динаміки систем є використання декомпозиції моделей. Багатозв'язність моделей дозволяє за допомогою спеціальних перетворень встановлювати необхідні властивості вихідних систем на основі наявності таких властивостей у окремих підсистем. Дослідницька область нечітких динамічних систем – це нова методика, що зв'язує теоретичні дослідження в області комп'ютерних наук і прикладну математику.

Практичне використання математичних і програмних засобів представлення і обробки нечіткої інформації вимагає створення прикладних автоматизованих систем обробки даних та підтримки прийняття рішень, що є особливо важливим для забезпечення функціонування складних технічних, технологічних і соціальних систем в умовах невизначеності. Існуючі системи мають, як правило, вузький спеціалізований варіант застосування, який не завжди підходить для роботи з недостатньо формалізованими управлінськими ситуаціями. Тому актуальною задачею залишається розробка і впровадження програмних засобів, що застосовують узагальнене подання нечітких величин та розширюють семантику традиційних операторів обробки даних.

Актуальність і перспективність досліджень в області формалізації невизначеності на основі використання теорії нечітких множин і нечітких чисел визначили вибір теми, мети і задач дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота є складовою частиною наукових робіт, що ведуться на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету кібернетики та в науково-дослідному підрозділі Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Дослідження виконувались в рамках науково-дослідної теми №11БФ015-06 "Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж" (державний номер реєстрації 0111U006680, строк виконання 2011-2015г.г., в рамках програми "Інформатизація суспільства") і науково-дослідної теми «Розробка і впровадження інформаційної та організаційної системи заходів по забезпеченню інноваційної спрямованості науково-дослідних робіт в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка», НДР № 08БП 013-01 (за напрямом Підпрограми "Інформаційні технології в науці та навчальному процесі").

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка конструктивної методики формалізації нечітких чисел, створення алгоритмів обробки нечітких даних та розробка математичного і програмного забезпечення для дослідження процесів обробки нечіткої інформації, результати якого можуть бути застосовані при розв'язанні актуальних прикладних задач в умовах невизначеності.

Досягнення мети пов'язано з розв'язанням наступних задач:

– узагальнення способу формалізації нечіткої інформації на основі нечітких та невизначених нечітких чисел трикутного вигляду;

– створення методики опису нечіткості з використанням послідовностей простих чисел;

– аналіз та вдосконалення алгоритмів обробки даних за допомогою спеціальних послідовностей простих чисел;

– розробка способів представлення нечітких баз даних та актуалізації нечіткої інформації;

– розробка методів та алгоритмів нечіткої кластеризації;

– створення програмних засобів для нечіткого моделювання;

– дослідження динаміки нечітких систем великої розмірності на основі декомпозиції та агрегування;

– застосування нечіткого підходу при розв'язанні прикладних задач фільтрації зображень в умовах невизначеності.

Об'єктом дослідження є моделі формалізації процесів, що функціонують в умовах невизначеності; моделі та технології моделювання процесів динаміки нечітких об'єктів і систем; методи та алгоритми обробки нечітких чисел. Предмет дослідження – процеси формалізації нечітко визначених даних та створення методів обробки нечіткої інформації.

Методи дослідження. Методологічну основу складає системний підхід до дослідження процесів формалізації та аналізу процесів у складних системах, що функціонують в умовах невизначеності. Методи, які використані у дисертації, грунтуються на застосуванні теорії чисел, теорії нечітких множин, теорії оптимізації, теорії прийняття рішень і теорії та технології програмування.

Для подання нечітких даних використано спосіб формалізації нечіткості у вигляді нечітких трикутних чисел та метод визначення носія нечітких чисел у формі інтервалу, який задається елементами спеціальної послідовності простих чисел.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати роботи:

- Розроблено нові способи формалізації нечітких цілих та дійсних чисел.
- Запропоновано оригінальні послідовності простих чисел, досліджено їх властивості та методику використання для опису функцій належності нечітких трикутних чисел.

- Запропоновано новий метод опису невизначеності у вигляді складених нечітких чисел.
- Запропоновано оригінальне розширення синтаксису та семантики мови програмування для реалізації засобів нечіткого моделювання.
- Вперше проведено дослідження та підвищення криптостійкості алгоритму шифрування даних з використанням послідовності простих чисел.
- Узагальнено спосіб представлення нечітких баз даних, який дав можливість описувати нечіткі дані у вигляді таблиць-представлень з врахуванням суб’єктивного характеру нечіткості.
- Розроблено нові конструктивні алгоритми кластеризації нечітко визначених даних, що описуються сукупністю складених нечітких чисел.
- Вперше досліджено та отримано умови адекватності динаміки лінійних багатомірних нечітких систем при їх структурному спрощенні.
- Запропоновано новий підхід для розв’язання задачі нечіткої фільтрації зображень.

Обґрунтованість та достовірність отриманих результатів підтверджується коректністю постановок задач, строгим доведенням теорем, узгодженістю отриманих аналітичних результатів з даними чисельного експерименту.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що в дисертаційній роботі розроблено новий підхід до формалізації невизначеності, досліджено та вирішено ряд практичних задач з нечіткими вхідними даними. Запропоновані методи та підходи створено на основі використання спеціальних послідовностей простих чисел. Використовуючи спеціально розроблену методику проведено дослідження процесів функціонування систем великої розмірності. Ці результати можуть бути використані при створенні ефективних програмних систем для аналізу моделювання процесів у багатомірних нечітких об’єктах, для підтримки прийняття рішень при дослідженні процесів і систем, що функціонують в умовах невизначеності. Результати дисертаційного дослідження використовувались у навчальному процесі на факультеті кібернетики Київського національного університету імені

Тараса Шевченка при підготовці лекційних та спеціальних курсів «Сучасні інформаційні технології», «Методи прийняття рішень в умовах нечіткості» та «Методи дослідження динамічних систем великої розмірності».

Особистий внесок здобувача. Визначення загального напряму досліджень та ідея застосування спеціальних послідовностей простих чисел для формалізації функцій належності нечітких та складених нечітких чисел належать науковому керівнику – Івохіну Є.В. Всі основні результати дисертації, що виносяться на захист, отримані здобувачем самостійно.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на наукових конференціях та семінарах: Міжнародних конференціях "Dynamic System Modeling and Stability Investigation" (Київ, травень, 2001); Міжнародній науково-практичній конференції, присвяченій 170-річчю КНУ імені Тараса Шевченка та 60-річчю Інституту міжнародних відносин "Моделювання міжнародних відносин" (Київ, 2004); Міжнародній науковій конференції "Інтелектуальні системи прийняття рішень та проблеми обчислювального інтелекту" (Євпаторія, Україна, вересень, 2013); Міжнародній науковій конференції "Обчислювальна та прикладна математика" (Київ, Україна, вересень, 2013, жовтень, 2014); III міжнародній науково-практичній конференції «Обчислювальний інтелект – 2015» (Черкаси, 2015); міжнародній школі-семінарі «Теорії прийняття рішень» (Ужгород, Україна, вересень, 2014); XXVII Міжнародній науковій конференції "Problems of Decision Making under Uncertainties" (PDMU-2016)], (Тбілісі-Батумі, Грузія, травень, 2016); на наукових семінарах факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

РОЗДІЛ 1.
НЕЧІТКІ МНОЖИНИ І НЕЧІТКІ СИСТЕМИ

1.1. Загальні підходи до формалізації нечіткості

Застосування традиційної теорії звичайних або чітких множин для математичного моделювання різноманітних систем, наприклад, таких, які описують фізичні процеси або події, що відбуваються в сфері людського суспільства, не завжди є коректним, а в деяких випадках навіть можливим, через наявність в них багатьох невизначеностей. Неможливість одержання істотних висновків про поведінку таких систем приводить до необхідності залучати до їх аналізу підходи, які є наближеними за своєю природою.

На сьогоднішній день існують кілька способів опису неточності й невизначеності вимірювань і спостережень. Якщо розглянути історію розвитку науки, то стане очевидно, що серед них лідирує теорія імовірності. Накопичений нею арсенал такий великий і досвід його використання настільки широкий, що складається враження, що засобів теорії імовірності досить для опису всіх проблем, пов’язаних з невизначеністю. В метрології, наприклад, оцінки похибок довірчих інтервалів, отримані за допомогою теорії імовірності, вважаються “істиною”, а оцінки отримані іншими методами, будуть неправомочними, поки не буде доведений їхній зв’язок з імовірнісними.

Успішне застосування імовірнісних методів у статистиці кінця XIX століття (при дослідженні масових і статистично однорідних демографічних процесів) зробило методи теорії ймовірностей широко розповсюдженими у всіх сферах життя, особливо з розвитком технічної кібернетики в другій половині XX століття. Використання ймовірностей при обліку випадковості, невизначеності, очікуваних подій носить ексклюзивний характер. Найбільш виправдане таке застосування виявилося там, де мова йшла про однорідні події масового характеру, а саме – у теорії масового обслуговування й у технічній теорії надійності.

З іншого боку, за час інтенсивного використання імовірності було виявлено кілька недоліків імовірнісного підходу, з яких відзначимо два:
1) складність визначення розподілів апріорних й умовних ймовірностей;
2) невиконання на практиці властивості адитивності, пов’язане з неадитивністю міри людського мислення [6].

Починаючи з 50-х років, в академічній науці з’явилися роботи, що ставлять під сумнів тотальну застосовність імовірнісної теорії до обліку невизначеності. Автори цих робіт закономірно відзначали, що класична ймовірність аксіоматично визначена як характеристика генеральної сукупності статистично однорідних випадкових подій. У тому випадку, якщо статистичної однорідності немає, то застосування класичних ймовірностей в аналізі виявляється незаконним.

Останнім часом дуже поширеною на практиці і в фундаментальних дослідженнях є теорія нечітких множин, що забезпечує можливість теоретико-множинного представлення неточних понять.

Існує багато підходів до побудови та математичної обґрунтованості загальної теорії нечітких множин. Основи математичного апарату теорії нечітких множин і відношень ввів Л.А. Заде [7-11]. Представлені означення, операції над нечіткими множинами, відображення нечітких множин і їх властивості складають математичну основу для опису систем, які враховують невизначеність.

Інший спосіб побудови аксіоматичної теорії опису нечіткості запропоновано Наміасом [12]. Математичний апарат формується на використанні так званого простору можливостей (Наміас називає його простором паттернів) [13].

Рівні представлення нечіткості (неточності, невизначеності) можуть бути узагальнені за допомогою нечітких множин довільного степеня ієрархії. Одним з таких представлень є поняття невизначених нечітких множин, яке вперше було запропоноване Пит’євим Ю.П. [14].

Ще одним альтернативним математичним засобом роботи з нечіткими поняттями (об'єктами) є теорія неточних множин, початок якої було покладено Павлаком [15]. Фундаментальне припущення теорії неточних множин полягає у тому, що будь-який об'єкт сприймається за тією інформацією, яка є про нього доступною. При цьому, така інформація може бути недостатньою, щоб точно характеризувати об'єкт, який розглядається. Одним з варіантів, що пропонується у даній ситуації – апроксимація наявної множини даних за допомогою інших множин. Неточно визначена множина може визначатися парою чітких множин, які називаються відповідно нижнім та верхнім наближеннями неточної множини.

1.2. Аксіоматика нечітких множин: основні поняття та означення

Поняття нечіткої множини ввів Л.А. Заде в роботі [7]. Впроваджене автором поняття застосовне для проблеми, що людський спосіб міркувань, який спирається на природну мову, не може бути описаний у рамках традиційних математичних формалізмів. Цим формалізмам присуща строга однозначність інтерпретації, а все що зв'язано з використанням природної мови, має багатозначну інтерпретацію. Тому звичайні кількісні методи аналізу неефективні при аналізі гуманістичних систем, тобто систем, у яких істотна роль належить судженням і знанням людини. Ідея Л. Заде складалася в побудові математичного апарата, в основі якого лежала б не класична теорія множин, а теорія нечітких множин. Послідовно проводячи ідею нечіткості, на думку Л. Заде, можна побудувати нечіткі аналоги основних математичних понять і створити необхідний формальний апарат для моделювання людських міркувань і людського способу рішення задач.

Техніка, яку розвивав Л. Заде, базується на використанні функцій належності. Ці функції дають суб'єктивне представлення експерта (дослідника) про особливість досліджуваної операції, про характер обмежень і цілей дослідника. Маючи у своєму розпорядженні функції належності, дослідник одержує в свої руки певний апарат, який дозволяє будувати оцінки для ряду альтернатив. Отже, в схемах аналізу, як і в традиційних методах дослідження операцій, будується деяка система гіпотез, яка формується в термінах “суб’єктивної” належності. В подальшому, подібно до звичайних задач з невизначеністю, результат аналізу отримується в нечіткій формі – в формі функції належності деякій множині. Таким чином, техніка Заде, подібно принципам Парето або принципу максимального гарантованого результату, дозволяє стиснути множину можливих альтернатив.

Пояснити суть нечіткого підходу у загальному випадку можна на основі застосування принципу, за яким проводиться аналіз будь-якої системи, що досліджується. Такий аналіз відбувається по частинах, тобто розглядаються деякі виділені підсистеми більш складної системи. Таке розбиття необхідно, оскільки неможливо достатньо точно і компактно математично описати і дослідити всі різноманітні властивості повної системи. Правила розбиття тієї або іншої складної системи на частини, визначаються цілями дослідження і знаннями про повноту даної системи.

Використання вищеописаного прийому розбиття повної системи на виділенні підсистеми приводить до необхідності врахування додаткового елементу системи – границь між підсистемами, котрих насправді не існує. Повна система є свого роду “континуум”, в котрому підсистеми в деякому розумінні проникають одна в одну. Перехід від однієї підсистеми до іншої відбувається не стрибкоподібно, через чітко виділену границю, а плавно, неперервно. Тому границь в звичайному розумінні між підсистемами насправді існувати не повинно. При аналізі виділеної підсистеми, потрібно враховувати її зв’язки з іншими частинами системи. В загальному випадку, не існує можливості і засобів точно описати всі зв’язки цих підсистем і дослідники використовують власне представлення про ці зв’язки, або звертаються за допомогою до експертів, які володіють цими представленнями володіють. Важливе те, що ці представлення або інформація про границі аналізуємої підсистеми частіш за все виражається, в поняттях які мають нечіткий зміст с точки зору класичної математики.

Розглянемо простий приклад – класифікація об’єктів за кольором. Нехай умови дослідження такі, щоб розрізняти лише червоні, жовті і зелені об’єкти із довільного кольорового різноманіття. В традиційній математиці класифікація – це розбиття заданої сукупності об’єктів на три непересічні підмножини, тобто введення чітких границь, що відокремлюють об’єкти одного кольору від об’єктів іншого кольору. Однак подібна класифікація мало відповідає даному представленню про колір об’єктів. Насправді, неможливо обґрунтуванно провести чітку границю між класами об’єктів, наприклад, червоних і жовтих. Перехід від червоного до жовтого в даному випадку повинен бути неперервним. Таким чином, робиться припущення, що деякі “граничні” об’єкти з тим чи іншим ступенем відносяться до різних класів одночасно, тобто границі між цими класами є нечіткими.

Нечіткі множини – це математична модель класів об’єктів з нечіткими або розмитими границями. Інакше кажучи, елемент може мати має деяку ступінь належності до множини, причому проміжну між повною належністю і повною неналежністю.

Традиційну теорію (звичайних) множин можна розглядати як частинний випадок теорії нечітких множин. В традиційній прикладній математиці під поняттям множини розуміється сукупність елементів (об’єктів), які мають деяку загальну властивість. Наприклад, множина чисел, величина яких не менше заданого числа, множина векторів, сума компонент кожного з яких не перевершує одиниці, і т. д.

Звичайну множину A, яка формується з елементів універсальної множини X, прийнято визначати як колецію елементів $x \in X$. Кожен окремий елемент може належати або не належати множині A такій, що $A \subset X$. Цю множину можна описати різними способами: можна перелічити ті елементи, що належать множині; можна описати множину аналітично, за допомогою рівнянь та нерівностей (обмежень); можна визначити елементи множини з використанням характеристичної функції $\chi_A : X \to \{0,1\}$:

$$\chi_A(x)=\begin{cases}0: & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}.$$

У багатьох випадках, однак, на питання о належності елемента множині відповісти непросто. Наприклад, для множин, які зв'язаніз поняттями «значний», «велике число», «подібний», «приблизно дорівнює 10». Множини такого вигляду не можуть бути інтерпретовані засобами класичної теорії множин або теорії ймовірності. Для роботи з об'єктами такого змісту використовують концепцію нечіткої множини Заде [7].

У відповідності до ідеї Заде, нечітка підмножина заданої множини X формується як непорожня підмножина $\{(x,\mu(x)):x\in X\}$ прямого добутку $X\times[0,1]$ з деякою функцією $\mu:X\to[0,1]$.

Наприклад [9], функція $\mu:R^1\to[0,1]$, де

$$\mu(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 1\\ \frac{1}{99}(x-1), & \text{якщо} \quad 1<x\le 100\\ 1, & \text{якщо} \quad 100<x\end{cases}$$

визначає нечітку підмножину на множині дійсних чисел.

У подальшому викладені будемо називати нечіткі підмножини заданої множини X "нечіткими множинами", а саму множину X – "універсальною множиною". Позначення звичайних множин будемо записувати великими латинськими літерами, а нечітких множин – великими літерами з хвилею.

Означення 1.1. Нечіткою множиною $\tilde{A}$ універсальної множини X, називається сукупність пар $A=\{(\mu_{\tilde{A}}(x),x)\}$, де $\mu_{\tilde{A}}:X\to[0,1]$ – відображення множини X в одиничний відрізок $[0,1]$ і називається функцією належності нечіткої множини A.

Значення функції належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ для елемента $x\in X$ називається ступенем належності. Інтерпретацією ступеня належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ є суб'єктивна міра того, наскільки елемент $x\in X$ відповідає поняттю, зміст якого формалізується нечіткою множиною A.

Факту належності також можна придати лінгвістичну форму. Нехай в одномірному арифметичному просторі R^1 задана деяка фізична величина, наприклад, температура води, котру можна вимірювати термометром в діапазоні від 0^0С до 100^0С. Будемо асоціювати з підмножиною A – діапазон зміни температури від 0^0С до 50^0С, а з підмножиною B – діапазон зміни температури від 50^0С до 100^0С. В лінгвістичній інтерпретації належність виміряної термометром температури до підмножини A буде відповідати лінгвістичній величині “холодна вода”, а підмножині B – “гаряча вода”. В цій інтерпретації неможливо виразити проміжні стани температури води “прохолодна”, “тепла” вода і т.д., так як функція належності приймає два значення 0 і 1, що припускає наявність різкої границі між двома підмножинами A та B. В класичній теорії множин належність елемента одній підмножині виключає одночасну належність його іншій підмножині.

Надалі розглянемо можливі операції над нечіткими множинами. Традиційні операції доповнення, перетину та об’єднання множин у випадку нечітких множин визначаються наступним чином:

– доповненням нечіткої множини $\tilde{A}$, що позначимо через $\tilde{A}^c$, є нечітка множина, для якої

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X. \tag{1.1}$$

– перетином двох нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ називають нечітку множину $\tilde{C}$, для якої

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X. \tag{1.2}$$

– об’єднанням нечітких множин $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ називають нечітку множину $\tilde{C}$, для якої

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X. \tag{1.3}$$

Нечітку множину $\tilde{A}$ називають порожньою, якщо $\mu_{\tilde{A}}(x) \equiv 0, \forall x \in X.$

Множинами α–рівня (α–зрізи), $\alpha \in [0,1]$ нечіткої множини $\tilde{A}$ називають звичайні множини

$$\bar{A}_\alpha = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]. \tag{1.4}$$

Означення 1.2. Нечітка множина $\widetilde{A}$ називається нормальною, якщо існує хоча б одна точка $x_0 \in X$, для якої $\mu_{\widetilde{A}}(x_0)=1$ і всі множини α–рівня A_α, $\alpha \in [0,1]$, є непорожніми підмножинами X.

Множину $\{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$ називають носієм нечіткої множини $\widetilde{A}$ і позначають через $\operatorname{supp}\widetilde{A}$.

Для довільної нечіткої множини $\widetilde{A}$ величина $h(\widetilde{A}) = \max\limits_{x\in X} \mu(x)$, $h(\widetilde{A}) \geq 0$ називається висотою нечіткої множини.

Для практичного застосування множини рівня досить часто вважають компактними і, якщо універсальна множина X є лінійним простором, також опуклими. Фактично, опуклість множини рівня нечіткої множини $\widetilde{A}$ еквівалентна нечіткій опуклості нечіткої множини. Ми будемо для поняття опуклості використовувати наступне означення.

Означення 1.3. Нечітка множина $\widetilde{A}$ називається опуклою, якщо

$$\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y)), \text{ для всіх } x, y \in X, \lambda \in [0,1]. \quad (1.5)$$

Розглянемо у якості універсальної множини X скінченновимірний простір над полем дійсних чисел R^m, тобто $X = R^m$.

Нехай A та B – дві множини з X і $\lambda \in R^1$. Додавання елементів множини A та B, а також множення на число λ визначаються у розумінні Мінковського:

$$\begin{gathered} A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} \\ \lambda A = \{\lambda a : a \in A\} \end{gathered}. \quad (1.6)$$

Припустимо, що x – деяка точка з X і A – непорожня множина. Відстань $d(x, A)$ від x до A визначається у вигляді:

$$\begin{aligned} & d(x,A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\} \\ & d(x,A) \geq 0 \\ & d(x,A) = 0, \ \forall x \in \overline{A} \end{aligned}. \quad (1.7)$$

де під $\|\cdot\|$ розуміється звичайна евклідова норма.

Для двох непорожніх множин A і B визначимо хаусдорфову відстань:

$$d_H(B,A)=\sup\{e(b,A):b\in B\} \tag{1.8}$$

Зрозуміло, що $d_H(B,A)\geq 0$ і $d_H(B,A)=0$ тоді і лише тоді, якщо $B\subseteq A$. Використовуючи (1.8), будемо задавати відстань між двома нечіткими множинами $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ універсальної множини X у вигляді:

$$d_H(\widetilde{A},\widetilde{B})=\sup_{0\leq\alpha\leq 1} d_H(A_\alpha,B_\alpha) \tag{1.9}$$

Зауваження. Зрозуміло, що нечіткі множини $\widetilde{A}$ і $\widetilde{B}$ характеризуються відповідними функціями належності $\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x), x\in X$. Тому надалі в деяких формулах величина d_H (1.9) позначається як $d_H(\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(x))$.

Відомо, що для довільних нечітких множин $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C}$ справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{aligned}
&1)\ d_H(\widetilde{A}+\widetilde{C},\widetilde{B}+\widetilde{C})=d_H(\widetilde{A},\widetilde{B});\\
&2)\ d_H(\widetilde{A},\widetilde{B})=d_H(\widetilde{B},\widetilde{A});\\
&3)\ d_H(\lambda\widetilde{A},\lambda\widetilde{B})=\lambda d_H(\widetilde{A},\widetilde{B}),\ \lambda\in R^1;\\
&4)\ d_H(\widetilde{A},\widetilde{B})\leq d_H(\widetilde{A},\widetilde{C})+d_H(\widetilde{C},\widetilde{B}).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Якщо простір всіх нечітких множин в X позначити через E^n, то визначення відстані (1.9) між нечіткими множинами задає в просторі E^n метрику, яка відома як метрика Хаусдорфа [16]. При цьому (E^n,d_H) – є повним метричним простором.

Отже, для нечіткої множини $\widetilde{A}$ з E^n справедливі властивості [17]:

1) $\mu_{\widetilde{A}}(x)\in[0,1], \forall x\in X$;

2) A_0 обмежена множина в X;

3) $A_\alpha, \alpha\in[0,1]$ – компактні множини в X;

4) $\widetilde{A}$ – опукла множина в розумінні (1.5).

Зауважимо, що, якщо $\widetilde{A}$ – опукла множина і $x,y \in A_\alpha$ для деякого $\alpha \in (0,1]$, то $\mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha$, $\mu_{\widetilde{A}}(y) \geq \alpha$, і, як наслідок, $\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq$ $\geq \min(\mu_{\widetilde{A}}(x), \mu_{\widetilde{A}}(y)) \geq \alpha$ для довільного $\alpha \in [0,1]$. Це означає, що точка $\lambda x + (1-\lambda)y \in A_\alpha$. В результаті отримуємо, що A_α є опуклою підмножиною універсальної множини X для довільного $\alpha \in (0,1]$.

Множина A_0 також опукла, що слідує з того, що $d_H(A_\alpha, A_0) \to 0$ при $\alpha \to 0$ і з повноти простору (E^n, d_H).

Лема 1.1. [17] Якщо $\widetilde{A}$ – нечітка опукла множина, то A_α, $\alpha \in [0,1]$ – опукла множина для кожного $\alpha \in [0,1]$.

Для довільної нечіткої множини $\widetilde{A}$ має місце представлення [18]:

$$\widetilde{A} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \widetilde{A}_\alpha , \tag{1.11}$$

де $\widetilde{A}_\alpha$ – нечітка множина з функцією належності $\mu_{\widetilde{A}_\alpha}(x) = \alpha$, $x \in X$.

Означення 1.4. [17] Нечітка множина $\widetilde{V}$ називається регулярною нечіткою множиною в X, якщо:

1) функція належності $\mu_{\widetilde{V}}(x) : X \to [0,1]$ напівнеперервна зверху;
2) множина $\widetilde{V}$ опукла, тобто $\forall x, y \in X, 0 \leq \lambda \leq 1$ $\mu_{\widetilde{V}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\widetilde{V}}(x), \mu_{\widetilde{V}}(y))$;
3) існує єдиний елемент $\bar{x} \in X$ такий, що $\mu_{\widetilde{V}}(\bar{x}) = 1$;
4) носій множини $\operatorname{supp}\widetilde{V} = \{x \in X : \mu_{\widetilde{V}}(x) > 0\}$ обмежений в X.

Означення 1.5. Нечітку множину $\widetilde{A}^H$ назвемо нормованою по відношенню до нечіткої множини $\widetilde{A}$, якщо для $\forall\, x \in X$: $\mu_{\widetilde{A}^H}(x) = \mu_{\widetilde{A}}(x) / h(\widetilde{A})$.

Очевидно, що частковим випадком нормованої нечіткої множини буде нечітка множина, для якої $h(\widetilde{A}) = 1$, або, іншими словами, нечітка множина, висота якої дорівнює одиниці, співпадає із своєю нормованою. Зрозуміло також, що регулярна нечітка множина буде нормованою, але не кожна нормована нечітка множина є регулярною.

Означення 1.6. Нечітка множину $\tilde{V}$ будемо називати нормовано регулярною в X, якщо

1) функція належності $\mu_{\tilde{V}}(x): X \to [0,1]$ неперервна зверху;
2) множина $\tilde{V}$ опукла;
3) існує єдиний елемент $\bar{x} \in X$ такий, що $\mu_{\tilde{V}H}(\bar{x}) = 1$;
4) носій множини $\operatorname{supp}\tilde{V}$ обмежений в X.

Означення 1.7. [18] Нечітким відображенням R з X у довільний скінченновимірний простір Y називається нечітка підмножина $\tilde{R}$ в $X \times Y$ з функцією належності:

$$\mu_{\tilde{R}}(x, y): X \times Y \to [0,1], x \in X, y \in Y. \quad (1.12)$$

Означення 1.8. Нечітке відображення $R: X \to Y$ будемо називати регулярним, якщо образом регулярної нечіткої множини в X при цьому відображенні є регулярна нечітка множина в Y.

1.3. Невизначені нечіткі множини як приклад узагальнення нечітких множин

Як було зазначено в роботі Орловського С.А. [18], рівні представлення нечіткості (неточності, невизначеності) можуть бути узагальнені за допомогою нечітких множин довільного ступіня ієрархії.

Одним з таких представлень є поняття невизначених нечітких множин, яке запропоноване Пит'євим Ю.П. [14] і базується на неможливості точної оцінки рівня належності елементів $x \in X$ до множини $\tilde{A}$.

Нехай $X = R^1$ – скінченновимірний нормований простір дійсних чисел.

Означення 1.9. Невизначеною нечіткою множиною (ННМ) $\tilde{\tilde{A}}$ в X будемо називати множину $\{(x, \mu(x)), \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x))\}$, в якій для кожного $x \in X$ значення функції $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \mu(x)) \in [0,1]$ визначає рівень достовірності того, що величина $\mu(x) \in [0,1]$ задає ступінь включення x до нечіткої множини $\tilde{A}$.

Наприклад, якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x))=1$, то “цілком достовірно”, що $\mu(x)$ задає степінь належності елемента $x \in X$ нечіткій множині $\tilde{A}$. Якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x))=0{,}5$, тоді “невідомо”, чи можна вважати, що $\mu(x)$ – рівень належності x до $\tilde{A}$, і, нарешті, якщо $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x))=0$, “зовсім неправдоподібно”, що $\mu(x)$ задає степінь включення x до $\tilde{A}$.

Розглянемо графічний приклад. Припустимо, що $X = [-1,1]$, $\mu(x) = 1 - x^2$, $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x)) = 1 - \mu(x) = x^2$. Тоді невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}$ буде представлена графіком функції $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x))$, наведеним на *рис.1.1*.

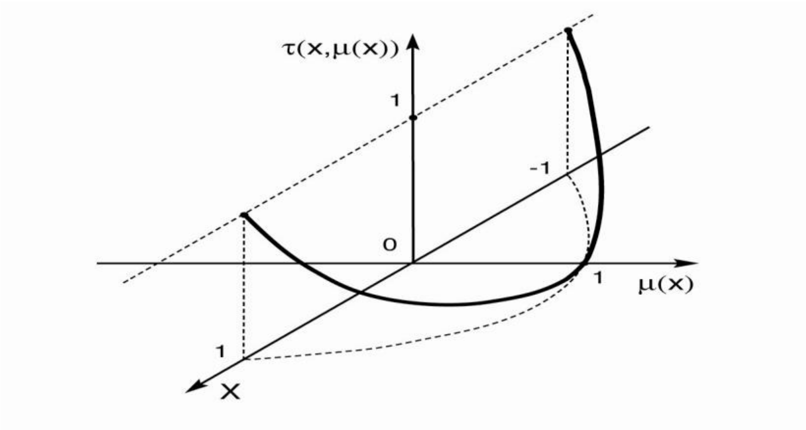


Рис. 1.1. Приклад ННМ, представленої графіком функції $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x))$.

При визначенні операцій над невизначеними нечіткими множинами потрібно звернути увагу на те, що формальне перенесення правил формування доповнення, перетину та об’єднання, які задаються в (1.1), (1.2) та (1.3), неможливе. Невизначені нечіткі множини мають, в загальному випадку, більш складну структуру, ніж у прикладі на *рис. 1.1*.

Для порівняння можна навести випадок невизначеної нечіткої множини “сфера у куті”:

$$x \in X = [0,1];\ \mu(x) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2};\ \tau(x,\mu(x)) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2},$$

яка графічно представлена своєю функцією достовірності $\tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\mu(x))$ на *рис. 1.2*.

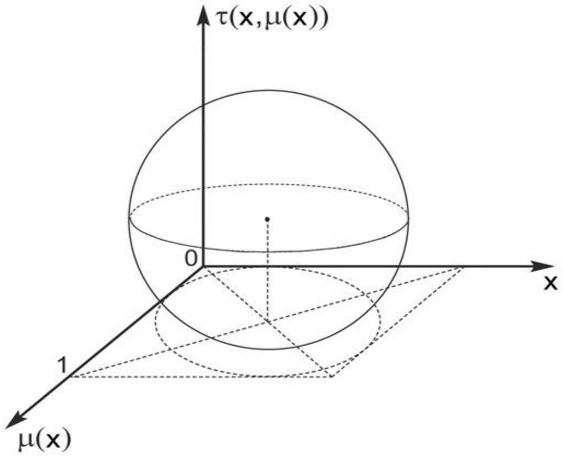


Рис. 1.2. Приклад невизначеної нечіткої множини "сфера у куті"

Для подальшого розгляду сформулюємо поняття спряжених невизначених нечітких множин [14].

Означення 1.10. Невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}^*$ називається верхньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$, якщо $\forall x \in X$, $\bar{\mu}(x) \in [0,1]$, $(x, \bar{\mu}(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \bar{\mu}(x))) \in \tilde{\tilde{A}}$

$$\tau_{\tilde{\tilde{A}}^*}(x,\bar{\mu}) = \sup_{\alpha \geq \bar{\mu}} \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\alpha). \tag{1.13}$$

Означення 1.11. Невизначена нечітка множина $\tilde{\tilde{A}}^*$ називається нижньою спряженою ННМ для заданої невизначеної нечіткої множини $\tilde{\tilde{A}}$, якщо $\forall x \in X$, $\bar{\mu}(x) \in [0,1]$, $(x, \bar{\mu}(x); \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x, \bar{\mu}(x))) \in \tilde{\tilde{A}}$

$$\tau_{\tilde{\tilde{A}}_*}(x,\bar{\mu}) = \sup_{\alpha \leq \bar{\mu}} \tau_{\tilde{\tilde{A}}}(x,\alpha). \tag{1.14}$$

Тоді для довільних невизначених нечітких множин $\overset{\approx}{A}$ і $\overset{\approx}{B}$ справедливі наступні твердження [19], що використовуються при визначені поняття об’єднання $\overset{\approx}{A} \cup \overset{\approx}{B}$.

Лема 1.2. Для двох невизначених нечітких множин $\overset{\approx}{A}$ і $\overset{\approx}{B}$

$$\tau_{(\overset{\approx}{A} \cup \overset{\approx}{B})^*} = \max\left\{\tau_{\overset{\approx}{A}^*}, \tau_{\overset{\approx}{B}^*}\right\}. \tag{1.15}$$

$$\tau_{(\overset{\approx}{A} \cup \overset{\approx}{B})_*} = \min\left\{\tau_{\overset{\approx}{A}_*}, \tau_{\overset{\approx}{B}_*}\right\}. \tag{1.16}$$

Лема 1.3. Для двох невизначених нечітких множин $\overset{\approx}{A}$ і $\overset{\approx}{B}$

$$\tau_{\overset{\approx}{A} \cup \overset{\approx}{B}}(x,\theta) = \sup_{\max(\alpha,\beta)=\theta} \min\left\{\tau_{\overset{\approx}{A}}(x,\alpha), \tau_{\overset{\approx}{B}}(x,\beta)\right\}. \tag{1.17}$$

Лема 1.4. Нехай $\overset{\approx}{A} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overset{\approx}{A}_\lambda$, тоді

$$\tau_{\overset{\approx}{A}_*}(x,\mu) = \inf_{\lambda\in\Lambda}\left(\tau_{\overset{\approx}{A}_{\lambda *}}(x,\mu)\right), \tag{1.18}$$

$$\tau_{\overset{\approx}{A}^*}(x,\mu) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\left(\tau_{\overset{\approx}{A}_\lambda^*}(x,\mu)\right), \tag{1.19}$$

$$\tau_{\overset{\approx}{A}}(x,\mu) = \inf_{\sup\alpha(\lambda)=\mu}\left\{\inf_{\lambda\in\Lambda} \tau_{\overset{\approx}{A}_\lambda}(x,\alpha(\lambda))\right\}. \tag{1.20}$$

1.4. Нечіткі величини і нечіткі числа

В останній час теорія нечітких множин перетворилась в детально вивчену область з широким спектром задач практичного характера. Термін «нечітка величина» вперше був використаний Кофманом у [20], а після цього з’явився в роботах [11] і [12].

Одним з способів опису нечітких величин є підхід, запропонований Наміасом [12] і в якому використовується поняття простору можливостей.

Означення 1.12. [13] Нечітка величина визначається як функція з простору можливостей $(\theta, \mathrm{P}(\theta), Pos)$ у множину дійсних чисел R^1, де θ - деяка непорожня множина, $Pos\{A\}$ - величина міри можливості для довільного $A \in \mathrm{P}(\theta)$, $\mathrm{P}(\theta)$- множина усіх підмножин для θ.

Нечіткі величини можуть бути визначені різними іншими способами. У прикладних задачах для формалізації нечіткої величини з метою збільшення конструктивності використовуються наступні означення, які еквівалентні класичному означенню нечіткої множини *1.1*.

Розглянемо, як і раніше, в якості універсальної множини X множину дійсних чисел, тобто $X = R^1$.

Означення 1.13. [21] Нечітким числом називається впорядкована пара функцій $(u(r), v(r))$, $r \in [0,1]$, які задовольняють наступним умовам:

1. $u(r)$ обмежена, неперервна зліва, неспадна функція на $[0,1]$;
2. $v(r)$ обмежена, неперервна зліва, незростаюча функція на $[0,1]$;
3. $u(r) \le v(r)$, $r \in [0,1]$.

При цьому, довільне чітке число a подається у вигляді нечіткого числа, у якого $u(r) = v(r) = a$, $r \in [0,1]$, і для будь-яких двох нечітких чисел $x = (u_1(r), v_1(r))$, $y = (u_2(r), v_2(r))$ і $\lambda \in R$ можна визначити арифметичні операції і відношення у вигляді

- $x = y$, якщо і $v_1(r) = v_2(r)$ $r \in [0,1]$;
- $x + y = (u_1(r) + u_2(r), v_1(r) + v_2(r))$, $r \in [0,1]$;
- $x - y = (u_1(r) - v_2(r), v_1(r) - u_2(r))$, $r \in [0,1]$;
- $\lambda x = \begin{cases} (\lambda u_1(r), \lambda v_1(r)), \lambda > 0, \\ (\lambda v_1(r), \lambda u_1(r)), \lambda < 0. \end{cases}$

Припустимо далі, що будь-яка множина, що належить сукупності нечітких множин $K_X(\widetilde{A})$ універсальної множини $X = R^1$, є нормальною і опуклою.

Означення 1.14. [21] Нечітким трапецеїдальним числом $\widetilde{A}$ називається впорядкована четвірка чисел (a, b, c, d), $a \le b \le c \le d$, що визначають функцію належності $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ вигляду:

1. $\mu_{\widetilde{A}}(x) = \dfrac{x-a}{b-a}, x \in [a,b]$;

2. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x \in [b, c]$; (1.21)

3. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{d - x}{d - c}, x \in [c, d]$;

4. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x \notin [a, d]$.

Якщо покласти $b = c$, то отримаємо нечітке число, яке називається трикутним нечітким числом (триплетом).

Означення 1.15. [21] Нечітким трикутним числом $\tilde{A}$ називається впорядкована трійка чисел *(a,b,c)*, $a \le b \le c$, що визначають функцію належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду:

1. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{x - a}{b - a}, x \in [a, b]$;

2. $\mu_{\tilde{A}}(x) = \dfrac{c - x}{c - b}, x \in [b, c]$; (1.22)

3. $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x \notin [a, c]$.

Відзначимо, що нечітке трикутне число *(a, b, c)* є нечітким числом з функціями $v(r) = \dfrac{c - rc}{c - b}$, $u(r) = \dfrac{cr - a}{b - a}$, $r \in [a/c, b/c]$ $r \in [b/c, 1]$.

Нечітке трикутне число вигляду *(a, b, b)*, що називається лівим нечітким трикутним числом, визначається функцією належності вигляду

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x < a; \ \ \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x - a}{b - a}, x \in [a, b]; \mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x > b, \qquad (1.23)$$

а нечітке трикутне число вигляду *(b, b, c)*, що називається правим нечітким трикутним числом, - функцією належності

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 1, x < b; \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c - x}{c - b}, x \in [b, c]; \ \mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x > c. \qquad (1.24)$$

Обробка нечітких величин пов'язана з побудовою і використанням бінарних відношень. Найчастіше використовується поняття нечіткого бінарного відношення з простору X у простір Y, сформульоване в означенні 1.7. Тому у подальшому викладенні даного дослідження під нечітким бінарним відношенням будемо розуміти нечітку множину $\tilde{R}$ на декартовому добутку

$X \times Y$ з функцією належності (1.12).

У випадку, коли множини X і Y співпадають, нечітку множину з функцією належності $\mu_{\tilde{R}} : X \times X \to [0,1]$ $\mu_{\tilde{R}} : X \times X \to [0,1]$ називають нечітким відношенням $\tilde{R}$ на множині X .

Відзначимо одну властивість множині рівня довільних нечітких трикутних чисел. Множина α–рівня для нечіткого трикутного числа $\tilde{A}$, поданого у вигляді триплету *(a, b, c)*, є відрізком вигляду $[a_\alpha, c_\alpha] \subseteq [a,c]$, де $a_\alpha : \mu_{\tilde{A}}(a_\alpha) = \alpha$ і $c_\alpha : \mu_{\tilde{A}}(c_\alpha) = \alpha$. При цьому, множина α–рівня для нечіткого лівого трикутного числа $\tilde{A}$ вигляду *(a, b, b)* задається відрізком $[a_\alpha, b]$, де $a_\alpha : \mu_{\tilde{A}}(a_\alpha) = \alpha$, а множина α–рівня для нечіткого правого трикутного числа $\tilde{A}$ вигляду *(b, b, c)* – відрізком вигляду $[b, c_\alpha]$, де $c_\alpha : \mu_{\tilde{A}}(c_\alpha) = \alpha$.

Чіткі значення a_α і c_α, отримані з множини заданого α–рівня для нечітких трикутних лівих і правих чисел $\tilde{A}$, залежать від величини діапазону носія і форми функції належності нечіткого числа $\tilde{A}$. При цьому, справедливі представлення $a_\alpha = a + \alpha(b-a)$ і $c_\alpha = c - \alpha(c-b)$ для $\forall \alpha \in [0,1]$.

1.5. Нечіткі системи як об’єкт дослідження

При моделюванні складних систем важливо знати відповіді на запитання, наскільки точними є результати того або іншого твердження, імовірність розвитку іншого сценарію поведінки системи, рівень довіри тим або іншим отриманим результатам, причому бажано, щоб ці відповіді мали місце для кожної окремої системи, а не класу систем.

Для опису неточності математичної моделі найбільш розповсюдженим є стохастичний підхід, згідно з яким на множині параметрів задається імовірнісний розподіл, який інтерпретується наступним чином: імовірність події дорівнює частоті її появи в (нескінченній) послідовності незалежних випробувань. Таким чином, для адекватного застосування стохастичних принципів при моделюванні систем необхідно, щоб величина, що спостерігається, була результатом усереднення незалежних випадкових величин. Якщо експеримент принципово не може бути повторений багато разів, при стохастичному підході зазвичай пропонується інтерпретація результатів моделювання шляхом "уявного експерименту", результати якого вже не зв'язані безпосередньо з реальними даними. Опис таких подій в термінах імовірностей вже є неприроднім. Неадекватність імовірнісних моделей проявляється при описі думки експерта: в різні моменти часу експерт може приймати різні рішення при одних і тих же умовах. Для таких систем природно використовувати нечітких підхід, при якому неточність задання параметрів моделі описується в термінах теорії нечітких множин.

Нехай $F(t,x)=\{f(t,x,b)\,|\,b\in B\}$, де B - непорожня множина значень параметра b, а підмножина B_α – більш вузька множина значень параметра b, яку можна отримати при накладанні додаткових вимог, що визначаються параметром $\alpha\in(0,1]$ на удосконалення об'єкта управління і на корегування його траєкторії. Природно вважати, що $A_\alpha\subset A_\beta$ при $\alpha>\beta$, тобто при збільшені витрат – невизначеність у системі може тільки зменшуватись. Таким чином, можна говорити про появу нечіткої множини у рівнянні (1.19) – параметра b з носієм B і з рівнями значимості $B_\alpha, \alpha\in(0,1]$. У цьому випадку, рівняння (1.19) зводиться до нечіткого рівняння:

$$y=F(t,x), \tag{1.20}$$

яке також можна розглядувати як сімейство включень

$$y\in F_\alpha(t,x), \alpha\in(0,1], \tag{1.21}$$

де $F_\alpha(t,x)=\{f(t,x,b)\,|\,b\in B_a\}$. Значення величини α (рівня значимості) при цьому можуть вибиратися за конкретними (реальними) критеріями. Зручність введення нечіткої множини – всі можливі невизначеності в умовах моделі об'єкта поглинаються змістом рівняння (1.20) і можна відокремити задачу по уточненню цих невизначеностей від розв'язання самого рівняння (1.21).

Одним з основних підходів, що використовуються при моделюванні динамічних систем, є опис еволюції станів системи шляхом задання початкових значень станів системи і рівнянь, що визначають зміну координат з часом. Якщо досліджується поведінка складних нелінійних систем, що формуються із набору підсистем, то, як правило, використовують "приблизний" опис цих систем. Тому математичне моделювання поведінки всієї системи шляхом задання станів кожної її складової частини приводить до великої розмірності моделі. Обчислення координат, які задають стан складної нелінійної системи, при достатньо великій кількості змінних принципово має неточності внаслідок приблизності обчислювальних алгоритмів, нестійкості системи і неможливості достатньо точного задання початкових даних і еволюційних рівнянь.

В загальному випадку, аналіз конкретної системи, що досліджується, відбувається по частинах, тобто розглядаються деякі виділені підсистеми більш складної системи. Таке розбиття необхідне, оскільки неможливо достатньо точно і компактно математично описати і дослідити всі різноманітні властивості повної системи. Правила розбиття тієї або іншої складної системи на частини визначаються цілями дослідження і знаннями про повноту даної системи.

Використання розбиття повної системи на підсистеми приводить до необхідності врахування додаткового елементу системи – границь переходу між підсистемами. Крім цього, при аналізі виділеної підсистеми, потрібно враховувати її зв'язки з іншими частинами системи. В загальному випадку не існує можливостей і засобів точно описати всі зв'язки цих підсистем. Тому дослідники використовують власні представлення про ці зв'язки або звертаються за допомогою до експертів, які цими представленнями володіють. Важливе те, що експертні уявлення та інформація про границі переходу підсистем, що аналізуються, частіш за все виражаються, в поняттях, які мають нечіткий зміст.

1.6. Математичні моделі нечітких систем

Математичне моделювання різних фізичних явищ містить два принципові етапи, що приводять до необхідності врахування складності та невизначеності систем. Перший з них об‘єктивно обумовлений невідомою точною поведінкою процесів, що моделюються. Це, в свою чергу, веде до неможливості сформулювати точний вигляд моделі фізичного процесу та до незручності використання обраних моделей на практиці, що пояснюється наявністю в них багатьох невизначеностей. Другий етап, пов‘язаний з проблемою адекватності математичного моделювання реальних систем, полягає в суб‘єктивній неспроможності оцінювати події процесів абсолютно точно. Неясність, нечіткість поведінки системи, відсутність достатньої інформації для моделювання процесів не дозволяють коректно описувати моделі в рамках традиційних підходів, що враховують невизначеність.

Формальні модельні представлення з реалізаціями невизначеностей на заданих допустимих множинах легко розповсюджуються на широко вжиті останнім часом нечіткі моделі, методи побудови і функціонування яких базується на принципах теорії нечітких множин і нечіткої логіки [6,22-25].

На цьому шляху можуть бути отримані узагальнення традиційних методів дослідження динаміки систем, теорії управління і оптимізації. У цьому випадку постановки задач відрізняються від класичних лише розширенням множини станів до поняття нечіткої множини.

Функціонування процесів та явищ нечітких систем описується нечіткими неперервними:

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{X}(t) \circ R, \tag{1.22}$$

нечіткими різницевими:

$$\tilde{X}(t+1) = \tilde{X}(t) \circ R \tag{1.23}$$

або нечіткими матричними диференціальними рівняннями:

$$\dot{\tilde{Y}} = F(\tilde{Y}, \tilde{X}), \tag{1.24}$$

де R – нечітке відображення з X в X з функцією належності $\mu_{\tilde{R}}(x,y)$, $x, y \in X$ [26].

Операція “o” означає максимальну композицію, яка для (1.22) і (1.23), відповідно, має вигляд:

$$\mu_{\tilde{X}(t)}(y) = \max_{x \in X}[\min(\mu_{\tilde{X}(t)}(x), \mu_{\tilde{R}}(x, y))], \tag{1.25}$$

$$\mu_{\tilde{X}_{t+1}}(y) = \max_{x \in X}[\min(\mu_{\tilde{X}(t)}(x), \mu_{\tilde{R}}(x, y))] \ . \tag{1.26}$$

Використання диференціального аналога при роботі з нечіткими множинами, в загальному випадку, має більш теоретичний характер. Тому основну увагу зосереджено на досліджені різницевих нечітких моделей вигляду (1.23) з неперевними та дискретними універсальними множинами X [27].

За означенням нечіткої множини функція належності $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$ ставить у відповідність кожному стану $x \in X$ число з інтервалу [0,1], що характеризує ступінь належності елемента x множині можливих ~~розв’язк~~ів $\tilde{A}$. Як правило, вимагається неперервність функції $\mu_A(x) \in [0,1]$, що формалізує інтуїтивне поняття про те, що, якщо два розв’язки на множині X мало (в деякому розумінні) відрізняються одне від іншого, то значення функцій належності для цих розв’язків також будуть близькими [28].

Конкретний вид функцій належності визначається на основі різних додаткових припущень про властивості цих функцій (симетричність, монотонність, неперервність першої похідної і т.д.) з урахуванням специфіки наявної невизначеності, реальної ситуації на об’єкті й числа ступенів свободи у функціональній залежності.

В процесах прийняття рішень, при побудові функцій належності основним є поняття відносної переваги одного стану системи перед іншим, тобто для двох станів x_1 і x_2 можна записати “$x_1 \pi x_2$” в тому випадку, коли режим x_2 кращим (за деякою сукупністю критеріїв) за x_1. Перевага одного стану перед іншим може бути визначена причинами технологічного, економічного, екологічного характеру й різних суб’єктивних причин, викликаних неформальними даними, якими володіє особа, що приймає рішення. Ряд авторів підкреслює суб’єктивність функції належності на відміну від об’єктивності ймовірності як характеристики [28, 29].

У багатьох практичних ситуаціях функція належності може бути оцінена, виходячи із часткової інформації про неї, тобто, значення, які вона приймає на скінченій множині «опорних» значень $x_1,...,x_n$. У цьому випадку говорять, що вона є частково визначеною.

Ягер Р.Р. [30] для оцінки функцій належності використовує поняття множини рівня. Цей метод дозволяє визначити ступінь належності елементів до нечіткої підмножини A з урахуванням відомих сукупностей елементів множини X для фіксованих α–рівнів.

На практиці застосовуються методи визначення характеристичних функцій (або побудови їх оцінок) за вибірками і на підставі апріорної інформації, у яку входять обмеження на ці функції [31, 32]. Якщо апріорної інформації про властивості характеристичних функцій недостатньо для побудови конкретних функцій, які були б “оптимальними” у деякому сенсі, доводиться використовувати евристичні методи знаходження цих функцій з наступною експериментальною перевіркою “якості” обраних функцій.

Нижче наведено основні види функцій належності, які застосовуються в теорії нечітких множин [20, 33-37]:

1) $$\mu_1(x,a,b,c) = \begin{cases} \mu_1(x,a,b), \text{ при } x < b; \\ 1, \text{ при } b \le x \le c; \\ 1 - \mu_1(x,c,c+b-a), \text{ при } x > c; \end{cases}$$

2) $$\mu_2(x,a,b) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le a; \\ 2(x-a)^2/(b-a)^2, \text{ при } a < x \le (a+b)/2; \\ 1 - 2(x-a)^2/(b-a)^2, \text{ при } (a+b)/2 < x < b; \\ 1, \text{ при } x \ge b; \end{cases}$$

3) $$\mu_3(x,a,b,c) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \le a; \\ x - a/c - a, \text{ при } a < x \le c; \\ b - x/b - c, \text{ при } c < x < b; \\ 0, \text{ при } x \ge b; \end{cases}$$

4) $$\mu_4(x,a,b,c) = \begin{cases} 1, \text{ при } x \le c; \\ \left(1 + \left(a(x-c)\right)^b\right)^{-1}, \text{ при } x > c; \end{cases}$$

5) $\mu_5(x,a,b)=\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right)$.

Серед групи методів побудови функції належності можна виділити прямі й непрямі [6, 33, 34]. У прямих методах експерт явно задає правила визначення функції належності (формулою, таблицею, прикладом). У непрямих методах функція належності вибирається так, щоб задовольняти деяким заздалегідь сформульованим умовам. Експертна інформація є вихідною інформацією для подальшої обробки. Для кожної групи методів можлива побудова функції належності як на основі думки одного експерта, так і на основі думок декількох експертів. Варто відзначити, що експерти використовують деякі формальні критерії (хоча сам вибір критеріїв є суб'єктивним).

Незважаючи на розглянуті проблеми, застосування теорії нечітких множин останнім часом дозволило отримати ряд змістовних практичних результатів. Серед них слід відзначити застосування так званих нечітких контролерів, моделі нечіткої логіки як засобу формалізації процесів побудови висновків, що впроваджені в системах штучного інтелекту й в автоматизованих засобах підтримки прийняття рішень.

Методи теорії нечітких множин починають застосовуватися в економіці. Треба відзначити монографію Кофмана А. і Хил Алуха Х. [38], у якій представлений широкий спектр можливих застосувань цієї теорії – від оцінки ефективності інвестицій до кадрових рішень і замін устаткування, приводяться відповідні математичні моделі.

Фундаментальні результати з використанням нечітких множин отримано у роботах Зайченко Ю.П. [39, 40]. Робота [39] присвячена системам з нечіткою логікою і нечітким нейронним мережам та їх використанню в різних практичних задачах. Запропоновано порівняно новий метод нечіткого моделювання, розглянуто приклади його використання в задачах прогнозування, системи логічного виводу з різними алгоритмами нечіткого виводу і нечіткі нейронні мережі, наведено практичні результати їх використання.

В роботі [40] розглянуто принципи і методи прийняття рішень в умовах

Отформатировано: По ширине, Отступ: Первая строка: 1,25 см, Междустр.интервал: 1,5 строки, Без запрета висячих строк визначеності, ризику і невизначеності. При цьому, основна увага приділяється систематизованому викладенню методів прийняття оптимальних рішень в задачах лінійного, нелінійного дискретного, динамічного і стохастичного програмування. Викладений апарат нечітких множин, відношень, а також математичні методи нечіткої оптимізації. Розглянуто нові задачі багато-критеріальної оптимізації в нечітких умовах.

На основі використання базових понять теорії нечітких множин розроблена теорія, яка має назву “теорія можливостей” і яку розглядають як альтернативу класичній теорії ймовірностей та математичної статистики. В монографії Пит’єва Ю.П. [14] показано, що теоретико-можливісні моделі дозволяють розв’язувати задачі аналізу й інтерпретації експерименту такі, наприклад, як задача оптимального оцінювання, прогнозування й т.і., не менш якісно, ніж істотно більш детальні, теоретико–імовірнісні моделі.

В багатьох роботах розглянуто нечіткі диференційні та різницеві рівняння та системи, визначено способи їх досліджень [17, 41, 42]. Для якісного аналізу розв’язків таких систем визначаються поняття, що узагальнюють класичну термінологію, формулюються критерії дослідження, що ґрунтуються на використанні спеціальних функцій для аналізу систем.

Розроблено наукові підходи для досліджень різних задач нечіткого математичного програмування. На відміну від класичних задач лінійного і нелінійного програмування модель "нечіткого математичного програмування" є неоднозначно визначеним типом моделі, при цьому можливі різноманітні варіанти її реалізації в залежності від пропозицій або особливостей реальної ситуації, котрі мають бути змодельовані. Крім цього, для формулювання задач активно залучається експертна інформація щодо конкретної проблеми.

Зрозуміло, що оптимальний розв’язок може бути знайдений шляхом розв’язання стандартної (чіткої) задачі математичного програмування з додатковою змінною і додатковим обмеженням по відношенню до нечіткої моделі. Ця схема дозволяє розглядати даний підхід як достатньо конструктивний алгоритмічно і ефективний з обчислювальної точки зору [43].

Нечіткі моделі задач математичного програмування можуть містити значення параметрів, які є випадковими величинами з відомими функціями розподілу. Такі задачі розв'язуються методами стохастичного програмування. Часто ці параметри невідомі і для них можливо визначити лише інтервал допустимих значень. Задачі такого типу називають задачами з множинними значеннями коефіцієнтів. У такій постановці не має сенсу говорити про максимізацію цільових функцій, тому що значення цих функцій – не числа, а множини чисел. Необхідно з'ясувати, яке відношення переваги на множині альтернатив породжує функція цілі, а потім визначити раціональний вибір на множині у розумінні даного відношення переваги [44].

Наступним етапом з точки зору деталізації і уточнення моделей математичного програмування є використання параметрів у вигляді нечітких множин [45, 46]. В модель вноситься додаткова інформація у вигляді функції належності заданих нечітких множин. Це можна розглядати як спосіб наближеного відбиття експертної інформації про наявність неформалізованого представлення про реальну величину кожного параметра. Значення функцій належності – це вагові коефіцієнти, що на основі експертних даних приписують різним можливим значенням кожного параметра.

1.7. Висновки до першого розділу

В першому розділі наведено огляд літератури зв'язаної з нечіткими множинами і нечіткими системами. В розділі коротко розглянуто результати досліджень на основі нечітких множин та систем. Наведено аксіоматику нечітких множин, основні поняття і визначення нечітких величин і нечітких чисел, описано узагальнення поняття нечітких множин у вигляді невизначених нечітких множин. Проведено огляд використання нечітких множин та математичні моделі нечітких систем. Відмічено, що перспективним напрямком формалізації нечіткості є використання трикутних нечітких величин, основною ідеєю визначення яких є побудова інтервалів можливих значень невизначеного (невідомого) параметра з застосуванням лінійної функції належності.

РОЗДІЛ 2.
ПОСЛІДОВНОСТІ ПРОСТИХ ЧИСЕЛ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ЗАДАЧАХ З НЕЧІТКИМИ ДАНИМИ

В історії науки є принаймні один розділ, що зв'язує в єдине ціле праці найбільших учених з часів античності і до наших днів. Розділ цей присвячений простим *числам* - *атомам* арифметики. За, здавалося б, негучною назвою цих чисел, які діляться тільки на одиницю і на самих себе, ховається одна з найскладніших проблем, що виникали перед дослідниками-математиками [47].

З часів Евкліда математики намагаються зрозуміти деяку закономірність в розподілі простих чисел на числовій осі. Якщо подивитися навіть на найменші прості числа, то навряд чи можна з’ясувати яку-небудь логіку в їх розташуванні на числовій осі. І така логіка стає все більш незрозумілою і надалі, поки ми продовжуємо заглиблюватися в числовий простір.

Розвиток теорії простих чисел в деякому розумінні відображає еволюцію методів математичного пізнання: від висунення емпіричних (інтуїтивних) гіпотез і такої ж емпіричної їх перевірки до надання доказового обгрунтування, що переводить твердження в ранг теорем. Принцип логічно обгрунтованого доказу тверджень, вперше відкритий в стародавній Греції, дозволяє перейти з області людської інтуїції в простір дійсного, об'єктивного знання, що відображає пристрій природи.

У 1640 році Ферма припустив, що формула

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

завжди дає прості числа, які отримали назву «чисел Ферма». Однак припущення Ферма є справедливим лише для $n = \overline{0,4}$, а 1732 році Ейлер з’ясував, що $F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417$. Потім у 1888 році Ландрі показав, що $F_6 = 2^{2^6} + 1 = 274177 \times 67280421310721$ (зараз відомо, що F_n є складеними числами для багатьох великих значень n, зокрема для n від 7 до 16 включно). Гіпотеза виявилась несправедливою.

У 1772 році Ейлером було відкрито поліном

$$f(n) = n^2 + n + 41 \ ,$$

який володіє властивістю, що він дає прості числа для усіх $n = \overline{0,39}$ і цей результат може бути розширений.

Щоб просунутися в розумінні простих чисел, було потрібно багато років і математичне чуття найбільших математиків історії. Одним з них є Карл Гаус, який, вивчаючи таблиці простих чисел в книзі з логарифмами, зумів розгледіти закономірність в розташуванні цих незвичайних чисел на числовій осі. Геніальність його здогадки полягає в тому, щоб не передбачати, чи є довільне натуральне число N простим, а *оцінити,* скільки в середньому простих чисел знаходяться на заданому відрізку. Слово "оцінити" в даній постановці питання принципово, оскільки знання реальної кількості простих чисел на відрізку $[2, K]$, яке позначають як $\pi(K)$, дозволяє точно сказати, чи є довільне ціле число N простим. Тому визначення точної залежності $\pi(K)$, яка має вигляд ступінчастої функції, завжди було бажаною метою для математиків. Методика оцінювання на основі запропонованого Гаусом підходу надала перше суттєве наближення до визначення цієї залежності.

Однак, незважаючи на отримані результати, відомо, що не існує поліноміальної формули $f(n)$, яка б давала просте число для довільного n. Більш того, справедлива така теорема.

Теорема. [48] Якщо $f(n) = P(n, 2^n, 3^n, ..., k^n)$ є поліномом з цілочисловими коефіцієнтами від своїх аргументів і $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, то значення $f(n)$ є складеним числом для нескінченної множини значень n.

Формула для n-го цілого простого числа може бути отримана за допомогою функції взяття максимального цілого, що не перевищує задане число («floor»), і «магічного» значення $a = 0.2030050007\,0001100001\,3...$. Така формула має вигляд

$$p(n) = \left\lfloor 10^{n^2+n/2} a \right\rfloor - 10^n \left\lfloor 10^{n^2-n/2} a \right\rfloor,$$

хоча зрозуміло, що вона містить трюк, який полягає у тому, що для отримання правильного результату потрібне знання коректного значення a.

C.P.Willans [49] запропонував таку формулу для n-го простого числа

$$p(n) = 1 + \sum_{m=1}^{2^n} \left[\sqrt[n]{n} \left(\sum_{j=1}^{m} [\cos^2(\pi(m) \frac{(j-1)!+1}{j})] \right)^{-1/n} \right],$$

де $\pi(m)$ - кількість простих чисел, що не перевищують m. Звідки випливає, що величина $\frac{(j-1)!+1}{j}$ буде цілою для простого j (або для $j=1$) і дробовою для усіх інших j.

Доведено, що для будь-якого $n \geq 1$ справедливе твердження про існування мінімум одного простого числа між n та $2n$. Отже, кількість простих чисел, що не перевищують 2^n, принаймні дорівнює n, тобто $\pi(2^n) \geq n$.

Відомі і інші формули для обчислення n-го простого числа, зокрема, рекурентна формула Виланса [49], формула Вормела [50], теорема Мілса [51] і т.д. Однак проблема визначення границь існування простого числа для довільного n залишається відкритою. Розглянемо альтернативні способи оцінювання і використання простих чисел.

2.1. Загальна характеристика послідовностей простих чисел

Послідовності простих чисел можна ефективно використовувати при рішенні багатьох прикладних задач із застосуванням обчислювальних схем [52]. Введемо окремі поняття і операції.

Означення 2.1. Послідовності невід'ємних простих чисел $P_j(a) \geq 0$, $j \in Z$, що належать інтервалу $[a,\infty)$ при $j \geq 0$ або інтервалу $[0,a)$ при $j < 0$ для заданого, необов'язково простого, цілого числа $a \geq 0$, називатимемо послідовностями простих чисел відносно числа a.

Нехай задані прості числа $P_j(a) \geq 0$ з порядковими номерами $j \in Z$ з послідовності простих чисел відносно числа $a \geq 0$. Неважко перевірити, що справедливі співвідношення, що характеризують властивості послідовності простих чисел:

1) $P_0(0)=0$, $P_0(1)=1$, $P_1(0)=1$;

2) $P_0(a)=a$, якщо число $a\ge 0$ - просте, інакше - $P_0(a)$ не існує;

3) $P_j(a)\le P_k(a)$, якщо $j\le k$, $P_j(a)<P_k(a)$ при $j<k$, $j\in Z$, $k\in Z$;

4) $P_j(a)=P_j(a+1)=...=P_j(a+l)$ для усіх $1\le l<P_{j+1}(a)-P_j(a)$, $j=0,1,2,...$, $a\ge 0$;

5) $P_j(a)=P_1(P_{j-1}(a))=P_1(P_1(P_{j-2}(a)))=P_2(P_{j-2}(a))=...=P_{j-1}(P_1(a))$, якщо число $a\ge 0$ - просте, $j\in Z$;

6) $P_j(a)\ge a$ для усіх $j=0,1,2,...$, якщо число $a\ge 0$ - просте, $P_j(a)>a$ для усіх $j=1,2,...$, якщо $a\ge 0$ - непросте;

7) $P_j(a)<a$ для усіх $j=-1,-2,...,j_0$, де номер $j_0<0$ визначається як найменший індекс простого числа з послідовності, для якого $0\le P_{j_0}(a)<a$.

Якщо $a>0$ - просте число, то існує число $P_0(a)$. Використовуючи вказані вище властивості, отримуємо співвідношення $P_j(a)/P_k(a)\le 1$, $P_j(a)/P_k(a)=$ $P_j(a)/P_1(P_{k-1}(a))=...=P_j(a)/P_j(P_{k-j}(a))=P_j(a)/P_{k-j}(P_j(a))$ для будь-яких $j,k\in Z$, $j\le k$.

Окрім традиційних арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення простих чисел, для послідовностей $P_j(a)$, $j=0,1,2,...$, простих чисел відносно довільного $a\ge 0$ введемо операцію зсуву на $m, m\in Z$, $j+m\ge j_0$, простих чисел у вигляді

$$P_j(a)\oplus m=P_{j+m}(a)=P_m(P_j(a)), \qquad (2.1)$$

яка за визначенням не виводить за нижню межу заданої послідовності ($j+m\ge j_0$), і операцію n-кратної композиції ($n\in Z$) відношення двох чисел $P_j(a)$ і $P_k(a)$, $j,k\in Z$, $j\le k$, у вигляді

$$P_j(a)\Big/P_k(a)\circ n=P_j(a)\oplus n\Big/P_k(a)\oplus n=P_{j+n}(a)\Big/P_{k+n}(a)=P_n(P_j(a))\Big/P_n(P_k(a)). \qquad (2.2)$$

Припустимо, що розглядається довільне раціональне число r. Без обмеження загальності, вважатимемо, що число r невід'ємне, $r \geq 0$.

Лема 2.1. Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути подане у вигляді

$$r = \prod_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a_{k_i}) \Bigg/ \prod_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a_{n_j}) \ , \tag{2.3}$$

де s_p, s_q - кількість множників у представленнях $|p|$ і q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a_{k_i} \geq 0$, $a_{n_j} \geq 0$ - деякі цілі числа, $k_i, n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$.

Доведення. Відомо, що довільне раціональне число r подається у вигляді простого дробу $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$. Якщо при цьому обидва числа p і q є простими числами, то отримуємо твердження леми. У даному випадку $s_p = 1, s_q = 1$, $P_{k_1}(a_{k_1}) = p$, $P_{n_1}(a_{n_1}) = q$ для деяких $k_1 \in Z$, $n_1 \in Z$ и $a_{k_1} \geq 0$, $a_{n_1} \geq 0$.

Якщо чисельник або знаменник або числа p і q не є простими, то їх можна представити у вигляді добутку елементарних дільників, які є простими числами. При цьому елементарні дільники записуються у добутках стільки разів, яка їх кратність. Позначимо кількість множників у представленні чисел p і q у вигляді відповідних добутків через s_p, s_q, де кожен з множників є простим числом з деяких послідовностей простих чисел відносно чисел a_{k_i}, a_{n_j}, $k_i, n_j \in Z$, $i = \overline{1, s_p}$, $j = \overline{1, s_q}$. Подання (3) для довільного раціонального числа r доведено.

Наслідок 2.1. Довільне раціональне число $r = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$, може бути подане у вигляді

$$r = \prod_{i=1}^{s_p} P_{k_i}(a) \Bigg/ \prod_{j=1}^{s_q} P_{n_j}(a) \ , \tag{2.4}$$

де s_p, s_q - кількість множників у представленнях $|p|$ і q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $a \geq 0$ - деяке ціле число, $k_i \in Z$, $n_j \in Z$,

$i=\overline{1,s_p}$, $j=\overline{1,s_q}$.

Наслідок 2.2. Довільне раціональне число $r=p/q$, $p\in Z$, $q\in N$, може бути подане у вигляді

$$r=\prod_{i=1}^{s}P_{k_i}(0)\bigg/\prod_{j=1}^{s}P_{n_j}(0)\ , \tag{2.4'}$$

де s - максимальна кількість множників в представленні чисел $|p|$ та q у вигляді відповідних добутків елементарних дільників, $k_i,n_j\in N\cup\{0\}$, $i=\overline{1,s_p}$, $j=\overline{1,s_q}$.

Лема 2.2. Для довільного раціонального числа r і заданого $n\in N$ існують цілі числа $a\geq 0$, $b\geq 0$ і прості числа з номерами $i^*\in Z$ та $j^*\in Z$ з послідовностей простих чисел відносно a і b відповідно, такі, що для усіх $i,j\in N$, $i\leq n$, $j\leq n$, справедлива нерівність

$$\left|P_{i^*}(a)\big/P_{j^*}(b)-r\right|\leq\left|P_i(a)\big/P_j(b)-r\right|\ . \tag{2.5}$$

Доведення. Розглянемо зростаючу послідовність усіх простих чисел $p_i\geq 0$, $i\in N$, при чому, 0 і 1 також вважаємо простими числами. Припустимо, що задано раціональне число r і ціле $n\in N$.

Покажемо існування простих чисел з номерами $i^o\in N$, $j^o\in N$, для яких виконується співвідношення $\left|p_{i^o}\big/p_{j^o}-r\right|\leq\left|p_i\big/p_j-r\right|$, для усіх $i,j\in N$, $i\leq n$, $j\leq n$, на основі такого алгоритму:

0. Покладемо $i=0$, $j=1$.
1. Поки $i\leq n$ і $j\leq n$ повторюємо пункти 2-4.
2. Якщо $p_i\big/p_j=r$, то розв'язок знайдений, $i^o=i$, $j^o=j$. Переходимо до пункту 5.
3. Якщо $p_i\big/p_j<r$, то збільшуємо номер $i=i+1$ і обчислюємо нове просте число $p_i\geq 0$; інакше, збільшуємо номер $j=j+1$ і знаходимо просте число $p_j\geq 0$.

4. Якщо $\left|p_i / p_j - r\right| < \left|p_{i^o} / p_{j^o} - r\right|$, то фіксуємо $i^o = i$, $j^o = j$.

5. Значення i^o, j^o - розв'язок поставленої задачі.

Очевидно, що відповідні прості числа p_{i^o}, p_{j^o} можуть розглядатися в якості елементів послідовностей простих чисел відносно деяких $a \geq 0$, $b \geq 0$ з номерами $i^* \in Z$ та $j^* \in Z$, відповідно.

Далі покажемо, що значення i^*, j^*, знайдені за допомогою описаного вище алгоритму, є оптимальним розв'язком задачі.

Нехай, від супротивного, існують значення $i_0, j_0 \in N$, $i_0 \leq n$, $j_0 \leq n$, такі, що для відповідних елементів з послідовності простих чисел справедливо $\left|p_{i_0} / p_{j_0} - r\right| < \left|p_{i^o} / p_{j^o} - r\right|$. Зважаючи на те, що значення номерів i та j в алгоритмі монотонно зростають, то існує значення $i' \in N$, $i' \leq n$, таке, що на деякій ітерації алгоритму маємо $i = i'$, $j = j_o$. Аналогічно, існує значення $j' \in N$, $j' \leq n$, таке, що на деякій ітерації алгоритму $i = i_0$, $j = j'$. При цьому, або $i' \leq i_0$, або $j' \leq j_0$ (інакше алгоритм проходив би через значення $i = i'$, $j = j_0$ і $i = i_0$, $j = j'$, для яких $i' > i_0$ і $j' > j_0$).

Без обмеження загальності розглянемо випадок $i' \leq i_0$. Нехай $i^{\min} \in N$, $i^{\min} \leq i^o$– найменше значення номеру i таке, що $p_{i^{\min}} / p_{j_0} \geq r$.

Якщо $i^{\min} \geq i_0$, то на конкретному кроці алгоритм проходить через значення номерів $i = i_0, j = j_0$. Тоді маємо $\left|p_{i_0} / p_{j_0} - r\right| \geq \left|p_{i^o} / p_{j^o} - r\right|$, що суперечить припущенню. Таким чином, $i^{\min} < i_0$, і, як наслідок, отримуємо $p_{i^{\min}} / p_{j_0} < p_{i_0} / p_{j_0}$.

З отриманих співвідношень маємо $\left|p_{i^o} / p_{j^o} - r\right| \leq \left|p_{i^{\min}} / p_{j_0} - r\right| <$ $< \left|p_{i_0} / p_{j_0} - r\right|$, що знов суперечить припущенню.

Остаточно можна зробити висновок, що не існує номерів $i_0, j_0 \in N$, $i_0 \leq n$,

$j_0 \le n$, таких, що $\left| p_{i_0} / p_{j_0} - r \right| < \left| p_{i^o} / p_{j^o} - r \right|$. Лема доведена.

Наслідок 2.3. Для довільного раціонального числа r і заданого $n \in N$ існують прості числа з номерами $i^* \in N$ та $j^* \in N$ з послідовності простих чисел відносно числа $a=0$, такі, що для усех $i, j \in N$, $i \le n$, $j \le n$, справедлива нерівність

$$\left| P_{i^*}(0) / P_{j^*}(0) - r \right| \le \left| P_i(0) / P_j(0) - r \right| . \tag{2.5'}$$

Доведення. Нескладно помітити, що, якщо покласти $a = b = 0$, то повторюючи доведення леми, отримуємо справедливість співвідношення (2.5’).

Лема 2.3. Для довільних двох простих чисел $P_k(a)$, $P_n(a)$, $k \le n$, $k,n \in Z$, з послідовності простих чисел відносно числа a і довільного числа $T \ge 0$ справедливе співвідношення:

$$(P_k(a)+T)/(P_n(a)+T) \ge P_k(a)/P_n(a). \tag{2.6}$$

Доведення. Нескладно перевірити, що для будь-яких $k \le n$, $k,n \in Z$, має місце $(P_k(a)+T)/(P_n(a)+T) - P_k(a)/P_n(a) = T(P_n(a) - P_k(a))/((P_n(a)+T) * P_n(a))$.

Враховуючи властивість 3) для послідовностей простих чисел, отримуємо, що

$$(P_k(a)+T)/(P_n(a)+T) - P_k(a)/P_n(a) \ge 0,$$

звідки випливає нерівність (2.6). Лему доведено.

Розглянемо множину невід’ємних раціональних чисел $r(k,n)$, $k,n \in Z$, $0 \le r(k,n) \le 1$, які подаються у вигляді відношення двох простих чисел з послідовності відносно числа $a \ge 0$:

$$r(k,n) = P_k(a)/P_n(a),\ k \le n,\ k,n \in Z. \tag{2.7}$$

Без обмеження загальності покладемо $a = 0$. При цьому, раціональні числа $r(k,n)$ будуть подаватися у вигляді

$$r(k,n) = P_k(0)/P_n(0),\ k \le n,\ k,n \in N \cup \{0\}. \tag{2.8}$$

З урахуванням операції зсуву на m простих чисел у послідовності $P_j(0)$, $j \in Z$, отримуємо співвідношення

$$r(k+m,n+m)=r(k,n)\circ m,\ m\in N\cup\{0\}\ . \tag{2.9}$$

Введемо до розгляду інші числові сукупності.

Означення 2.2. Множина раціональних чисел $r_T(k,n)$, $T\geq 0$, $k\leq n$, $k,n\in N\cup\{0\}$, що мають вигляд

$$r_T(k,n)=(P_k(0)+T)/(P_n(0)+T),\ k\leq n\ ,\ k,n\in N\cup\{0\}\ , \tag{2.10}$$

назвемо T - послідовністю для множини чисел $r(k,n)$ і заданого $T\geq 0$.

Означення 2.3. Для заданої множини чисел $r(k,n)$, $k\leq n$, $k,n\in N\cup\{0\}$, множину чисел

$$r_*(k+m,n+m)=\frac{P_k(0)\oplus m_*}{P_n(0)\oplus m},k\leq n\ ,\ m\in Z\ ,\ \ k,n\in N\cup\{0\}, \tag{2.11}$$

де m_*: $0\leq m_*\leq m$при $m\in N\cup\{0\}$, і $m_*\leq m$ при $m<0$ - найбільше ціле число таке, що $P_k(0)\oplus m \big/ P_n(0)\oplus m \geq P_k(0)\oplus m_* \big/ P_n(0)\oplus m$, будемо називати нижньою спряженою множиною, а множину чисел

$$r^*(k+m,n+m)=\frac{P_k(0)\oplus m^*}{P_n(0)\oplus m},\ k\leq n\ ,\ m\in Z\ ,\ \ k,n\in N\cup\{0\}, \tag{2.12}$$

де m^*: $m^*\geq m$ при $m\in N\cup\{0\}$ і $m\leq m^*\leq 0$ при $m<0$ - найменше ціле число таке, що $P_k(0)\oplus m \big/ P_n(0)\oplus m \leq P_k(0)\oplus m^* \big/ P_n(0)\oplus m$, - верхньою спряженою множиною.

Лема 2.4. Справедливі співвідношення

$$r(k,n)\leq r_T(k,n), \tag{2.13}$$

$$r_*(k+m,n+m)\leq r(k+m,n+m), \tag{2.14}$$

$$r(k+m,n+m)\leq r^*(k+m,n+m)\ , \tag{2.15}$$

$$r_*(k+m,n+m)\leq r_T(k+m,n+m), \tag{2.16}$$

для довільних $T\geq 0$, $k,n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$, $m\in Z$.

Доведення. У відповідності до леми 2.3, для довільного числа $T\geq 0$ справедлива нерівність $r_T(k,n)=(P_k(0)+T)/(P_n(0)+T)\geq P_k(0)/P_n(0)=r(k,n)$, і виконуються співвідношення

$$r(k+m,n+m)=\frac{P_k(0)\oplus m}{P_n(0)\oplus m}\geq\frac{P_k(0)\oplus m_*}{P_n(0)\oplus m}=r_*(k+m,n+m)\ ,$$

$$r(k+m,n+m)=\frac{P_k(0)\oplus m}{P_n(0)\oplus m}\leq\frac{P_k(0)\oplus m}{P_n(0)\oplus m^*}=r^*(k+m,n+m),$$

для довільних значень $k,n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$, і будь-якого $m\in Z$. Таким чином, нерівності (2.13), (2.14), (2.15) доведено.

Нерівність (2.13) виконується для усіх $k,n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$. Тоді для будь-якого $m\in Z$ маємо $k+m\leq n+m$, звідки для довільного $T\geq 0$ буде справедливим співвідношення $r(k+m,n+m)\leq r_T(k+m,n+m)$. З урахуванням нерівності (2.14) остаточно отримуємо $r_*(k+m,n+m)\leq r_T(k+m,n+m)$, що відповідає нерівності (2.16).

Наслідок 2.4. Для довільних значень $T\geq 0$, $k\in N\cup\{0\}$, $n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$ справедливі співвідношення

$$r_*(k,n)\leq r(k,n), \tag{2.17}$$

$$r(k,n)\leq r^*(k,n), \tag{2.18}$$

$$r_*(k,n)\leq r_T(k,n). \tag{2.19}$$

Доведення. Справедливість нерівностей (2.17), (2.18), (2.19) є очевидною. Дійсно, покладемо $m=0$ у співвідношеннях (2.14), (2.15), (2.16). В результаті отримуємо нерівності (2.17), (2.18), (2.19) для довільних значень $T\geq 0$, $k\in N\cup\{0\}$, $n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$, що і треба було довести.

Очевидно, що властивість елементів сукупності $r(k,n)$ у вигляді $0\leq r(k,n)\leq 1$, зберігається для усіх членів T- послідовності з довільним значенням $T\geq 0$, і елементів нижньої та верхньої спряжених множин:

$$0\leq r_T(k,n)\leq 1,\ 0\leq r_*(k+m,n+m)\leq 1,\ 0\leq r^*(k+m,n+m)\leq 1, \tag{2.20}$$

для усіх $k\in N\cup\{0\}$, $n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$, і будь-якого $m\in N\cup\{0\}$.

З леми 2.4 та наслідка 2.4 можна зробити висновок, що існують співвідношення між відповідними елементами множин $r(k,n)$, $k\in N\cup\{0\}$, $n\in N\cup\{0\}$, $k\leq n$, і елементами T- послідовності з довільним значенням

$T \geq 0$, нижньої та верхньої спряжених множин. При цьому, на жаль, нічого не можна сказати про співвідношення чисел $r(k,n)$ и $r(k+m,n+m)$ для довільного $m \in N \cup \{0\}$.

Числові послідовності, побудовані на простих числах.

Розглянемо дві неспадні числові послідовності:

1) $g(n) = \max\{g(n-1), r(n)\}$, $n \in N$, $g(0) = 0$, (2.21)

де $r(n)$, $n \in N$, - відстань між двома найближчими до числа $n \in N$ простими числами $q_s(n), q_{s+1}(n)$, $s \in N$, такими, що $n \geq q_s(n)$, $n < q_{s+1}(n)$, тобто $r(n) = q_{s+1}(n) - q_s(n)$;

2) $p(n) = \max\{p(n-1), l(n)\}$, $n \in N$, $p(0) = 0$, (2.22)

де $l(n) = P_1(n) - P_{-1}(n)$, $n \in N$, $P_{-1}(n), P_1(n)$ - попереднє і наступне прості числа відносно числа $n \in N$.

Очевидно, що, якщо $n \in N$ - просте число з номером $s \in N$ з послідовності простих чисел, то $q_s(n) = n$ и $r(n) = q_{s+1}(n) - n$, $n \in N$. Значення $r(n)$ у цьому випадку співпадають з елементами числової послідовності $d(s) = q_{s+1} - q_s$, $s \in N$, q_s, q_{s+1} - два послідовних простих числа, $s \in N$. Дана послідовність, що складається з величин відстаней між парами послідовних простих чисел, часто використовується в дослідженнях сукупностей простих чисел [53]. В деяких випадках розглядається числова послідовність $f(n) = \max\{f(n-1), q(n)\}$, $f(0) = 0$, де $q(n), n \in N$, - відстань від числа n до найближчого простого числа, тобто $q(n) = q_s - n$ для деякого $s \in N$ [54].

Очевидно, що у випадку, коли $n \in N$ - просте число, існує $s \in N$ таке, що

$$l(n) = P_1(n) - P_{-1}(n) = (P_1(n) - n) + (n - P_{-1}(n)) = r(n) + r(n-1)) =$$

$$= r(n+1) + r(n-1)) = r(n) + r(n-2)) \ldots = r(n + d(s) - 1) - r(n - d(s-1)),$$

або, у більш загальній формі,

$l(n) = r(n+i-1) + r(n-j)$, для усіх $i = \overline{1, d(s)}$, $j = \overline{1, d(s-1)}$ і деякого числа $s \in N$.

Таким чином, остаточно отримуємо:

1. послідовності $g(n)$, $p(n)$ - неспадні, кусково-постійні з інтервалами сталості $[q_s(n), q_{s+1}(n))$, $s \in N$;
2. для усіх $n \in N$ справедливо $l(n) \geq r(n)$ і, як наслідок, $p(n) \geq g(n)$.

При побудові оцінок для простих чисел розглядають також послідовність $B(n)$, $n \in N$, $B(0) = 1$, елементами якої є цілі числа, що визначаються кількістю розрядів у двійковому представленні числа $n \in N$. Зауважимо, що для чисел $n = 2^k$, $k = 1,2,...$, справедливі співвідношення

$$B(n) = B(n-1) + 1 = B(n-2) + 1 = \ldots = B(n-m) + 1,\ m = 1,2,...,2^{k-1},\ k = 1,2,...,$$

$$B(1) = B(0)\ .$$

Властивості. Для елементів послідовностей, що розглядаються, виконуються такі співвідношення [55]:

1. Для усіх $n \geq 5$ справедлива нерівність $B(n) + 1 \leq p(n)$.
2. Для усіх $n \in N$ справедлива нерівність $g(n) < 2.3B(n)$.
3. Для усіх $n \geq 7$ справедлива нерівність $B(n) \leq {}^5\!/_6\, p(n)$.

Лема 2.5. Для усіх значень $n \in N$, $n \geq 7$, таких, що число $2n+1$ не є простим, справедлива нерівність

$$2p(n) > p(2n). \qquad (2.23)$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1) $n = 7$; $p(7) = 6$; $p(14) = 6$, $2p(7) > p(14)$;

2) Нехай нерівність (2.23) справедлива для усіх $n = \overline{7,m}$ за умови, що $2n+1$ - складене число. При $n = m$ маємо $2p(m) > p(2m)$ і число $2m+1$ не є простим.

Покажемо, що лема справедлива і для $n = m+1$, тобто $2p(m+1) > p(2m+2)$.

З означення послідовності $p(n)$, $n \in N$, запишемо

$$p(2m+2) = \max\{p(2m+1), l(2m+2)\},\ p(2m+1) = \max\{p(2m), l(2m+1)\}.$$

Якщо виконується співвідношення $p(2m) = p(2m+1) = p(2m+2)$, то,

враховуючи, що дана послідовність неспадна, отримуємо
$2p(m+1) \geq 2p(m) > p(2m) = p(2m+2)$.

У більш складному випадку припустимо, що $p(2m) < p(2m+2)$. Числа $2m$, $2m+2$ - парні і, відповідно, не є простими, а число $2m+1$ - складене за умовою леми, то, як наслідок, отримуємо $P_{-1}(2m) = P_{-1}(2m+1) = P_{-1}(2m+2)$, $P_1(2m) = P_1(2m+1) = P_1(2m+2)$ і $l(2m) = l(2m+1) = l(2m+2)$. Звідси $p(2m) = p(2m+1) = p(2m+2)$, що суперечить зробленому припущенню. Таким чином, остаточно отримуємо нерівність $2p(m+1) \geq 2p(m) > p(2m) =$ $= p(2m+2) = p(2(m+1))$.

Наслідок 2.5. Для усіх значень $n \in N$, $n \geq 7$, таких, що число $2n+1$ не є простим, справедливі нерівності

$$2p(n) > p(2n+1), \qquad (2.23')$$

$$2p(n) > p(2n+2). \qquad (2.23'')$$

Доведення. За умови, що число $2n+1$ є складеним, справедливі рівності $p(2n) = p(2n+1) = p(2n+2)$. Враховуючи нерівність (2.23), отримуємо співвідношення (2.23'), (2.23'').

Зауваження. Необхідно відмітити, що при заміні у співвідношеннях (2.23), (2.23'), (2.23'') строгих нерівностей на нестрогі можна отримати аналогічні співвідношення для усіх $n \in N$. В якості прикладів наведемо нерівності для $n < 7$:

$n = 1$; $p(1) = 2$; $p(2) = 2$, $p(3) = 3$; $2p(1) > p(2)$, $2p(1) > p(3)$, $2p(1) > p(4)$;

$n = 2$; $p(2) = 2$; $p(4) = 3$, $p(5) = 4$; $2p(2) > p(4)$, $2p(2) = p(5)$, $2p(2) = p(4)$;

$n = 3$; $p(3) = 3$; $p(6) = 4$, $p(7) = 6$; $2p(3) > p(6)$, $2p(3) = p(7)$, $2p(3) = p(8)$;

$n = 4$; $p(4) = 3$; $p(8) = 6$, $p(9) = 6$; $2p(4) = p(8)$, $2p(4) = p(9)$, $2p(4) = p(10)$;

$n = 5$; $p(5) = 4$; $p(10) = 6$, $p(11) = 6$; $2p(5) > p(10)$, $2p(5) > p(11)$, $2p(5) > p(12)$;

$n = 6$; $p(6) = 4$; $p(12) = 6$, $p(13) = 6$; $2p(6) > p(12)$, $2p(6) > p(13)$, $2p(6) > p(14) = 6$

Наслідок 2.6. Для усіх значень $n \in N$, $n \geq 5$, таких, що число $2n-1$ не є простим, справедливі нерівності

$$2p(n) > p(2n). \tag{2.24}$$

$$2p(n) > p(2n-1), \tag{2.24'}$$

$$2p(n) > p(2n-2). \tag{2.24''}$$

Доведення. Перевіримо справедливість твердження для $n=5$. Враховуючи, що $p(5)=4$, $p(10)=6$, $p(9)=6$, $p(8)=6$, безпосередньою підстановкою у співвідношення (2.24), (2.24’), (2.24’’) переконуємося в їх істинності. Припустимо далі, що справедлива лема 2.5, тобто для усіх $m \in N$, $m \geq 7$, таких, що число $2m+1$ є складеним, справедливі нерівності $2p(m) > p(2m)$, $2p(m) > p(2m+1)$, $2p(m) > p(2m+2)$. Зробивши заміну $m = n-1$, перепишемо отримані співвідношення відносно $n \in N$, $n \geq 8$. Маємо: число $2m+1 = 2n-2+1 = 2n-1$ - складене і справедливі нерівності $2p(n-1) > p(2n-2)$, $2p(n-1) > p(2n-1)$, $2p(n-1) > p(2n)$. Враховуючи, що послідовність $p(n)$ є неспадною, тобто $p(n-1) \leq p(n)$ для усіх $n \in N$, отримуємо співвідношення (2.24), (2.24’), (2.24’’). Для $n=6$ та $n=7$ числа $2n-1$ є простими і не задовольняють умові наслідку. Таким чином, остаточно отримуємо, що при виконанні умов для $n \in N$, $n \geq 5$, таких, що число $2n-1$ не є простим, справедливі нерівності (2.24), (2.24’), (2.24’’).

Лема 2.6. Для усіх значень $n \in N$, $n \geq 4$, таких, що число $2n+3$ є простим, справедлива нерівність

$$P_1(2n+3) < 2n+3+2p(n). \tag{2.25}$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції. Враховуючи нерівність для $n=4$, $p(4)=3$ за умови, що $2n+3=11$- просте число:

$$P_1(11) = 13 < 17 = 8+3+6 = 2*4+3+2p(4),$$

і припускаючи справедливість співвідношення (2.25) для усіх $n \in N$, $n = \overline{4,m}$, перевіримо істинність твердження для $n = m+1$.

За умовою леми число $2m+3$ просте, а число $2n+3 = 2m+5$ може бути простим або складеним. Маємо

1) $2m+5$ - не є простим. У цьому випадку отримуємо
$P_1(2m+5)=P_1(2m+3)<2m+3+2p(m)<2m+5+2p(m)\leq 2m+5+2p(m+1)$,
звідки $P_1(2m+5)=P_1(2(m+1)+3)<2m+5+2p(m+1)=2(m+1)+3+2p(m+1)$,
що і треба було довести.

2) $2m+5$ - є простим. Покладемо $k=m+1$. З (2.25) маємо $P_1(2m+5)=$
$=P_1(2k+3)<2k+3+p(k)=2(m+1)+3+p(m+1)$, і, як наслідок, справедливе твердження леми для $n=m+1$. Лему доведено.

Лема 2.7. Для усіх значень $n\in N$, $n\geq 4$, таки, що число $2n+3$ є простим, справедлива нерівність

$$P_{-1}(2n+3)>2n+3-2p(n). \qquad (2.26)$$

Доведення. Застосовуючи метод математичної індукції, при $n=4$, $p(4)=3$ та за умови, що $2n+3=11$- просте число, маємо очевидну нерівність:

$$P_{-1}(11)=7>5=8+3-6=2*4+3-2p(4),$$

Припустимо справедливість співвідношення (2.26) для усіх $n\in N$, $n=\overline{4,m}$. Перевіримо істинність твердження для $n=m+1$.

За умовою леми число $2m+3$ просте, а числа $2n+3=2m+5$, $2m+3-2p(m)$, $2m+5-2p(m)$ - непарні. Отримуємо $P_{-1}(2m+5)=2m+3>$ $>P_{-1}(2m+3)>2m+3-2p(m)$ і $P_{-1}(2m+3)\geq 2m+5-2p(m)$.

Враховуючи, що $p(m)\leq p(m+1)$, остаточно маємо $P_1(2m+5)>$ $>2(m+1)+3-2p(m+1)$, що і треба було отримати.

Отже, твердження леми залишається істинним для $n=m+1$. Лему доведено.

Твердження 2.1. Нехай для довільного значення $n\in N$ величина $p(n)=\overline{p}$. Тоді справедливі нерівності

$$2n-2\overline{p}+1\leq P_{-1}(2n), \qquad (2.27)$$

$$2n-2\overline{p}+3\leq P_{-1}(2n+1). \qquad (2.28)$$

Доведення. Застосуємо метод математичної індукції.

1) $n=1$; $p(1)=2$; $2-4+1\leq P_{-1}(2)=1$, $2-4+3\leq P_{-1}(3)=2$;

$n=2$; $p(2)=2$; $4-4+1 \le P_{-1}(4)=3$, $4-4+3 \le P_{-1}(5)=3$;

$n=3$; $p(3)=3$; $6-6+1 \le P_{-1}(6)=5$, $6-6+3 \le P_{-1}(7)=5$;

$n=4$; $p(4)=3$; $8-6+1 \le P_{-1}(8)=7$, $8-6+3 \le P_{-1}(9)=7$;

$n=5$; $p(5)=4$; $10-8+1 \le P_{-1}(10)=7$, $10-8+3 \le P_{-1}(11)=7$;

$n=6$; $p(6)=4$; $12-8+1 \le P_{-1}(12)=11$, $12-8+3 \le P_{-1}(13)=11$;

$n=7$; $p(7)=6$; $14-12+1 \le P_{-1}(14)=13$, $14-12+3 \le P_{-1}(15)=13$.

2) Припустимо, що твердження справедливе для усіх $n=\overline{1,m}$.

При $n=m$ маємо:

$$2m-2\bar{p}+1 \le P_{-1}(2m); \tag{2.27’}$$

$$2m-2\bar{p}+3 \le P_{-1}(2m+1). \tag{2.28’}$$

Покажемо, що дане твердження буде справедливим і для $n=m+1$. Для цього розглянемо різні випадки.

I. $p(m+1)=p(m)=\bar{p}$.

Оцінимо величину $P_{-1}(2(m+1))=P_{-1}(2m+2)$. Маємо $2(m+1)-2\bar{p}+1=$ $=2m-2\bar{p}+3$.

З урахуванням припущення (2.28’) звідси слідує, що найближче просте число, що не перевищує $2m+2$, або належить інтервалу $[2m-2\bar{p}+3, P_{-1}(2m+1)]$, або $P_{-1}(2m+2)=2m+1$. Остаточно маємо $2m-2\bar{p}+3=2(m+1)-2\bar{p}+1 \le P_{-1}(2(m+1))$, що доводить справедливість нерівності (2.27).

II. $p(m+1)=\hat{p}>\bar{p}$.

В цьому випадку, аналогічно, використовуючи співвідношення $P_{-1}(2m+1) \ge \ge 2m-2\bar{p}+3 > 2m-2\hat{p}+3$, отримуємо оцінку для $P_{-1}(2m+2)$: або $P_{-1}(2m+2) \in [2m-2\bar{p}+3, P_{-1}(2m+1)] \subseteq [2m-2\hat{p}+3, P_{-1}(2m+1)]$, або $P_{-1}(2m+2)=2m+1$. Звідки $2m-2\bar{p}+3=2(m+1)-2\bar{p}+1 \le P_{-1}(2(m+1))$. Справедливість нерівності (2.27) доведено.

Розглянемо далі співвідношення (2.28). Припускаючи справедливість (2.27’), (2.28’), оцінимо величину $P_{-1}(2(m+1)+1)=P_{-1}(2m+3)$.

Аналогічно попередньому проаналізуємо різні випадки.

I. $p(m+1)=p(m)=\overline{p}$.

Маємо $2(m+1)-2\overline{p}+3=2m-2\overline{p}+5$. З (2.27') випливає гарантована оцінка для найближчого простого числа, що не перевищує $2m+3$: $P_{-1}(2m+3)\geq 2m-2\overline{p}+3$. Виходячи з очевидного співвідношення $2m-2\overline{p}+3<2m-2\overline{p}+5$, покажемо, що число $2m-2\overline{p}+3$ не може бути найближчим простим.

Дійсно, припустимо, що інтервал $(2m-2\overline{p}+3, 2m+3)$ не містить простих чисел. Тоді найближчими простими числами у цьому випадку можуть бути $2m-2\overline{p}+3$ та $2m+3$. Звідси випливає, що відстань між ними дорівнює $2\overline{p}$.

З нерівності (2.26) леми 7 маємо

$$P_{-1}(2m+3)>2m+3-2p(m)=2m+3-2\overline{p}.$$

Отже, припущення про відсутність простих чисел на інтервалі $(2m-2\overline{p}+3, 2m+3)$ є невірним, звідки отримуємо $P_{-1}(2m+3)\geq 2m-2\overline{p}+5$.

II. $p(m+1)=\hat{p}>\overline{p}$.

Гарантована оцінка для найближчого простого числа, що не перевищує $2m+3$, буде мати вигляд $P_{-1}(2m+3)\geq 2m-2\overline{p}+3>2m-2\hat{p}+3$.

Проводячи аналогічні міркування, отримуємо, що число $2m-2\overline{p}+3$ не може бути найближчим простим числом, яке не перевищує $2m+3$. Отже, $P_{-1}(2m+3)\geq \quad \geq 2m-2\overline{p}+5>2m-2\hat{p}+5$, що свідчить про справедливість нерівності (2.28).

Твердження доведено.

Твердження 2.2. Нехай для довільного значення $n\in N$ величина $p(n)=\overline{p}$. Тоді справедливі нерівності

$$P_{1}(2n)\leq 2n+2\overline{p}-3, \tag{2.29}$$

$$P_{1}(2n+1)\leq 2n+2\overline{p}-1. \tag{2.30}$$

Доведення. Знов застосуємо метод математичної індукції.

1) $n=1$; $p(1)=2$; $P_{1}(2)=3\leq 2+4-3$, $P_{1}(3)=5\leq 2+4-1$;

$n=2$; $p(2)=2$; $P_1(4)=5\le 4+4-3$, $P_1(5)=7\le 4+4-1$;

$n=3$; $p(3)=3$; $P_1(6)=7\le 6+6-3$, $P_1(7)=11\le 6+6-1$;

$n=4$; $p(4)=3$; $P_1(8)=11\le 8+6-3$, $P_1(9)=11\le 8+6-1$;

$n=5$; $p(5)=4$; $P_1(10)=11\le 10+8-3$, $P_1(11)=13\le 10+8-1$;

$n=6$; $p(6)=4$; $P_1(12)=13\le 12+8-3$, $P_1(13)=17\le 12+8-1$;

$n=7$; $p(7)=6$; $P_1(14)=17\le 14+12-3$, $P_1(15)=17\le 14+12-1$.

2) Припустимо, що твердження справедливе для усіх $n=\overline{1,m}$. При $n=m$ маємо:

$$P_1(2m)\le 2m+2\overline{p}-3; \tag{2.29'}$$

$$P_1(2m+1)\le 2m+2\overline{p}-1. \tag{2.30'}$$

Покажемо, що дане твердження буде справедливим і для $n=m+1$. Оцінимо величину $P_1(2(m+1))=P_1(2m+2)$. Для цього розглянемо різні випадки.

I. $p(m+1)=p(m)=\overline{p}$.

У цьому випадку $2(m+1)+2\overline{p}-3=2m+2\overline{p}-1$, звідки з урахуванням припущення (2.30’) випливає, що найближче просте число, що перевищує $2m+2$, належить інтервалу $[P_1(2m+3),2m+2\overline{p}-1]$. Отже, $P_1(2(m+1))\le$ $\le 2m+2\overline{p}-1=2(m+1)+2\overline{p}-3$, що доводить справедливість нерівності (2.29).

II. $p(m+1)=\hat{p}>\overline{p}$.

Використовуючи співвідношення $P_1(2m+1)\le 2m+2\overline{p}-1<2m+2\hat{p}-1$, у цьому випадку отримуємо аналогічну оцінку для $P_1(2m+2)$:

або $P_1(2m+2)\in (P_1(2m+1),2m+2\overline{p}-1]\subseteq (P_1(2m+1),2m+2\hat{p}-1]$,

або $P_1(2(m+1))\le 2m+2\overline{p}-1$. Справедливість нерівності (2.29) доведено.

Розглянемо далі співвідношення (2.30). Припускаючи справедливість (2.29’), (2.30’), оцінимо величину $P_1(2(m+1)+1)=P_1(2m+3)$. Аналогічно доведенню твердження 2.1 проаналізуємо різні випадки.

I. $p(m+1)=p(m)=\overline{p}$.

Маємо $2(m+1)+2\overline{p}-1=2m+2\overline{p}+1$. З (2.30’) випливає гарантована оцінка для найближчого простого числа, що перевищує $2m+3$: $P_1(2m+3)\le 2m+2\overline{p}-1$. Якщо число $2m+3$ не є простим, то $P_1(2m+1)=P_1(2m+2)=P_1(2m+3)\le 2m+2\overline{p}-1<2m+2\overline{p}+1$ и нерівність (2.30) доведено.

Нехай $2m+3$ - просте число. Виходячи з очевидного співвідношення $2m+2\overline{p}-1< \ <2m+2\overline{p}+1<2m+2\overline{p}+3$, покажемо, що число $2m+2\overline{p}+3$ не може бути найближчим к $2m+3$ простим числом.

Дійсно, припустимо від супротивного, що інтервал $(2m+3, 2m+2\overline{p}+3)$ не містить простих чисел. Тоді найближчими простими числами у цьому випадку можуть бути $2m+3$ і $2m+2\overline{p}+3$. Це означає, що відстань між ними дорівнює $2\overline{p}$.

З нерівності (2.25) леми 2.6 маємо $P_1(2m+3)<2m+3+2p(m)=$ $=2m+3+2\overline{p}$, що суперечить припущенню про відсутність простих чисел на інтервалі $(2m+3, 2m+2\overline{p}+3)$. Звідси отримуємо $P_1(2m+3)\le 2m+2\overline{p}+1=$ $=2(m+1)+2\overline{p}-1$. Таким чином, справедливість нерівності (2.30) у цьому випадку доведено.

II. $p(m+1)=\hat{p}>\overline{p}$.

Гарантована оцінка для найближчого простого числа, що перевищує $2m+3$, буде мати вигляд $P_1(2m+3)\le 2m+2\overline{p}-1<2m+2\overline{p}+1\le 2m+2\hat{p}-1$. Якщо число $2m+3$ не є простим, то $P_1(2m+1)=P_1(2m+2)=P_1(2m+3)\le$ $\le 2m+2\overline{p}-1<2m+2\overline{p}+1=2(m+1)+2\overline{p}-1$ і нерівність (2.30) у цьому випадку доведено.

Нехай $2m+3$ - просте число. Проводячи міркування, аналогічні пункту I, отримуємо, що число $2m+2\overline{p}+3$ не може бути найближчим простим числом, яке перевищує $2m+3$.

Отже, маємо $P_{-1}(2m+3)\ge 2m-2\overline{p}+5>2m-2\hat{p}+5$, що свідчить про справедливість нерівності (2.30). Твердження доведено.

Запропоноване подання невід'ємних раціональних чисел $r(k,n)$, $k,n \in Z$, $0 \le r(k,n) \le 1$, введені операції на послідовностях простих чисел спеціального вигляду і отримані оцінки для інтервалів, що містять найближчі прості числа, дають можливість обгрунтувати методику формалізації та дослідження величин міри належності нечітких множин, яку викладено у [56].

2.1.1. Методика представлення цілих та дійсних нечітких чисел

При проведенні різних досліджень за умов невизначеності або неточності параметрів важливо коректно формалізувати процеси, що відбуваються в об'єкті дослідження. Дуже часто формалізація пов'язана з використанням "наближеного" характера параметрів процесів, що можна зробити, наприклад, за допомогою нечіткого представлення довільних чисел.

Проблема представлення нечіткого числа $\tilde{b}$ у вигляді множини пар

$$\tilde{b} = \{(b_i, \mu(b_i)) \mid b_i \in [a,c],\ i \in I,\ a \le b \le c,\ \mu(b_i) \in [0,1],\ i \in I,\ \mu(b) = 1\}, \quad (2.31)$$

де $\mu : R \to [0,1]$ - відображення, яке визначає міру належності елемента $x \in R$ нечіткій множині $\tilde{b}$, передбачає вирішення двох складних задач: визначення діапазону представлення $[a,c]$ нечіткого числа та обчислення значень функції належності для проміжних величин $b_i \in [a,c],\ i \in I$. Як правило, вирішення цих задач носить суб'єктивний характер, що може впливати на результати задач дослідження, в яких розглядається нечітке формулювання вхідних даних.

Розглянемо способи подання цілих та дійсних чисел на основі застосування спеціальних множин простих чисел.

<u>*Схема формалізації нечітких цілих чисел.*</u>

Означення 2.4. Нечітким цілим числом $\tilde{n}$ будемо називати впорядковану трійку чисел *(k, n, l)*, $k \le n \le l$, $k,n,l \in Z$, де

$$k = \begin{cases} P_{-1}(n), n \ge 0, \\ -P_1(-n), n < 0, \end{cases} \quad l = \begin{cases} P_1(n), n \ge 0, \\ -P_{-1}(-n), n < 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

а $P_1(\cdot), P_{-1}(\cdot)$ - попереднє і наступне прості числа відносно n, $n \geq 0$, и $-n$, $n < 0$.

Іншими словами, довільне ціле число $\tilde{n}$ може бути формалізовано у вигляді триплету, ліве (k) і праве (l) значення якого є найближчими простими числами.

Такий підхід дозволяє для кожного значення $n \in Z$ визначити нечітке ціле число $\tilde{n}$ = *(k, n, l)*, не вказуючи діапазон подання нечіткого числа $[k, l]$: можна покласти k та l у вигляді (2.32) і використати лінійну функцію належності

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \frac{x-k}{n-k}, x \in [k, n]; \quad \mu_{\tilde{n}}(x) = \frac{l-x}{l-n}, x \in [n, l]; \quad \mu_{\tilde{n}}(x) = 0, x \notin [k, l]. \qquad (2.33)$$

Запропоноване означення нечіткого цілого числа спрощує виконання традиційних арифметичних операцій додавання, віднімання, множення і ділення над нечіткими цілими числами. Для двох нечітких цілих $\tilde{n}$ та $\tilde{m}$, заданих у вигляді нечітких трикутних чисел (k_n, n, l_n) і (k_m, m, l_m) відповідно, маємо

1. $\tilde{n} + \tilde{m} = (k_+, n+m, l_+)$, (2.34)

де $k_+ = \begin{cases} P_{-1}(n+m), n+m \geq 0, \\ -P_1(-n-m), n+m < 0, \end{cases}$ $l_+ = \begin{cases} P_1(n+m), n+m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n-m), n+m < 0, \end{cases}$

2 $\tilde{n} - \tilde{m} = (k_-, n-m, l_-)$, (2.35)

де $k_- = \begin{cases} P_{-1}(n-m), n-m \geq 0, \\ -P_1(-n+m), n-m < 0, \end{cases}$ $l_- = \begin{cases} P_1(n-m), n-m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n+m), n-m < 0, \end{cases}$

3. $\tilde{n} * \tilde{m} = (k_*, n*m, l_*)$, (2.36)

де $k_* = \begin{cases} P_{-1}(n*m), n*m \geq 0, \\ -P_1(-n*m), n*m < 0, \end{cases}$ $l_* = \begin{cases} P_1(n*m), n*m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n*m), n*m < 0, \end{cases}$

4. $\tilde{n} / \tilde{m} = (k_{div}, n/m, l_{div})$, $m \neq 0$, (2.37)

де $k_{div} = \begin{cases} P_{-1}(n/m), n/m \geq 0, \\ -P_1(-n/m), n/m < 0, \end{cases}$ $l_{div} = \begin{cases} P_1(n/m), n/m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n/m), n/m < 0, \end{cases}$

5. $\tilde{n}$ % $\tilde{m} = (k_{\mathrm{mod}}, n\%m, l_{\mathrm{mod}})$, $n \geq 0$, $m > 0$, (2.38)

де $k_{\mathrm{mod}} = \begin{cases} P_{-1}(n\%m), n\%m \geq 0, \\ -P_1(-n\%m), n\%m < 0, \end{cases}$ $l_{\mathrm{mod}} = \begin{cases} P_1(n\%m), n\%m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n\%m), n\%m < 0, \end{cases}$

і при цьому результати не залежать від початкових інтервалів $[k_n, l_n]$ і $[k_m, l_m]$ подання нечітких цілих чисел $\tilde{n}$ та $\tilde{m}$.

Необхідно звернути увагу ще на одну важливу деталь. Обчислення простих чисел з великими номерами відносно довільного $a \geq 0$ є досить ресурсоємким процесом. В той же час, знаходження простих чисел $P_1(a)$ і $P_{-1}(a)$ для довільного $a \geq 0$ відбувається дуже швидко і не потребує суттєвих обчислювальних витрат.

Як було зазначено раніше, подання довільного нечіткого цілого числа $\tilde{n}$ залежить від самого числа n і характеризується параметрами функції належності. Тому, якщо невідомий діапазон подання нечіткої величини $\tilde{n}$, то можна розглядати трикутні нечіткі числа з лінійними функціями належності у вигляді множини трійок $\tilde{n} = \langle n_1, n, n_2 \rangle$, $n \in Z$, n_1, n_2 - прості числа, які обчислюються за формулами

$$n_1 = P_{-1}(n), \quad n_2 = P_1(n), \tag{2.39}$$

а функції належності мають вигляд (2.33). Іншими словами, будь-яке нечітке ціле число $\tilde{n}$ можна задавати у вигляді нечіткого трикутного цілого числа $\tilde{n} = \langle n_1, n, n_2 \rangle$, ліва і права границі якого визначаються найближчими простими числами.

Схема формалізації нечітких дійсних чисел.

Запропонований вище підхід вирішує проблему обчислення діапазону $[n_1, n_2]$ представлення нечіткого трикутного числа $\tilde{n}$ та спосіб розрахунку мір належності проміжних значень на основі лінійних функцій. Це дозволяє зробити непотрібним суб'єктивне представлення діапазону $[n_1, n_2]$ і визначати нові нечіткі поняття, що базуються на використанні цілих чисел.

Однак застосування лише цілих чисел суттєво обмежує сферу використання нечітких величин, обробка яких потрібна в реальних задачах.

Використаємо послідовності простих чисел для комп'ютерного моделювання нечітких дійсних чисел, базуючись на представленні довільних дійсних чисел у форматі IEEE 754 [57].

Припустимо, що для подання дійсних чисел використовуються n-байтні двійкові представлення. Це означає, що будь-яке дійсне число $x \in R$ може бути подане у двійковому вигляді

$$x = \left[\underset{1\,bit}{s} \,|\, \underset{p\,bit}{characteristic} \,|\, \underset{q\,bit}{mantissa} \right], \tag{2.40}$$

де $s = \begin{cases} 0, x \geq 0 \\ 1, x < 0 \end{cases}$ - знак числа x, $characteristic = k + BIAS$, k - порядок числа x за основою 2 (степінь, до якої необхідно піднести число 2, щоб виконувалась умова $m = |x| * 2^k \in [1,2)$), $BIAS > 0$ - деяка константа, величина якої обчислюється за формулою $BIAS = 2^{p-1} - 1$, $mantissa = m - 1$ - мантиса числа x без уявної одиниці, p та q - відповідно кількості розрядів для представлення характеристики та мантиси числа x, $(p + q + 1)/8 = n$.

Зауважимо, що у представленні (2.40) характеристика та мантиса визначаються полями двійкових цифр, які є записами деяких цілих чисел. Використаємо поняття нечіткого цілого числа для знаходження діапазону представлення нечіткого трикутного дійсного числа.

Розглянемо довільне дійсне число b. Припустимо, що мантиса числа b дорівнює m, порядок числа за основою 2 рівний k. Представимо нечітке дійсне число $\tilde{b}$ у вигляді трійки *(a, b, c)*, де діапазон представлення $[a, c]$ визначається за допомогою дійсних чисел a та c, які можна отримані, виходячи з формату (2.40). Для цього визначимо нечітке ціле число $\tilde{m}$ у вигляді впорядкованої трійки цілих чисел (m_a, m, m_c), де m_a та m_c обчислюються за формулами (2.32). Розглядаючи далі величини m_a та m_c як мантиси деяких дійсних чисел заданого порядку k за основою 2 обчислимо два числа a та c, що визначатимуть діапазон представлення $[a, c]$.

Значення m_a та m_c дозволяють також провести дискретизацію інтервалу $[a, c]$ множиною проміжних чисел $b_i \in [a, c]$, $i \in I$, що будуть використовуватися для формалізації нечіткого дійсного числа $\tilde{b}$. Множина індексів у цьому випадку задається діапазоном $I = \overline{0, m_c - m_a}$, а величини мір належності проміжних значень визначаються на основі лінійних функцій (2.33).

Таким чином, двійкове представлення чисел у форматі (2.40) надають можливість конструктивно визначати нечіткі дійсні числа. Однак, є випадок, що потребує більш детальної уваги. Якщо число b є степенем числа 2 зі знаком плюс або мінус, то мантиса у представленні (2.40) для такого числа дорівнює 0. У цьому випадку нечітке представлення дійсного числа у вигляді трійки чисел *(a, b, c)* може бути записане як ліве нечітке трикутне число (a,b,b) для від'ємного b, або як праве нечітке трикутне число (b,b,c) для додатного b.

В якості практичного застосування введеного представлення нечіткого дійсного числа можна навести різні приклади. Головною рисою при цьому є те, що даний підхід дає можливість моделювати нечітке подання довільного числа, не визначаючи діапазону представлення. Запропоноване нечітке представлення враховує точність заданого числа, з урахуванням якої формується множина проміжних значень. Все це дозволяє формалізувати неточне подання цілих та дійсних числових даних, що характеризує конструктивність і ефективність запропонованого алгоритму.

Зауважимо, що у випадках, коли діапазон представлення не задовольняє дослідника, можна використати суб'єктивне представлення діапазону нечіткого дійсного числа з відповідними функціями належності.

Приклад 2.1. Для демонстрації методики представлення нечітких дійсних чисел у вигляді трійок $\tilde{b} = (a,b,c)$ з лінійною функцією належності (2.33) розглянемо два дійсних числа 10567.18 та -0.63147. У цьому випадку з точністю 10 знаків після коми маємо відповідно:

$\widetilde{10567.18} = (10567.1748046875, 10567.18, 10567.2138671875)$, $m = 2432184$, $m_a = 2432179$, $m_c = 2432219$;

$-0.\tilde{63147} = \langle -0.6314701438, -0.63147, -0.6314679980 \rangle$, $m = 2205701$, $m_a = 2205667$, $m_c = 2205703$.

2.1.2. Підхід до формалізації процесу динаміки функцій належності

При вирішенні різних прикладних задач можна запропонувати ефективні обчислювальні схеми та підходи, що базуються на використанні простих чисел.

Запропоноване у (2.7) подання множини раціональних чисел $r(k,n)$, $k \le n$, $k \in Z$, $n \in Z$, та введені операції на послідовностях простих чисел у вигляді (2.1), (2.2) зручно використовувати при формалізації та дослідженні динаміки величин міри належності нечітких множин [58].

Будемо вважати, що деякий об'єкт у будь-який момент часу може знаходитися у станах $X = \{x_1,...,x_n\}$ з різними рівнями належності, що задається відповідними нечіткими множинами $\tilde{X}_s$, $s = 0,1,2,...$, універсальної множини X з деякою функцією належності $\mu_{\tilde{X}_s}(x_i) = \mu_s(x_i)$, $i = \overline{1,n}$, $s = 0,1,2,...$.

Динаміку процесів зміни станів системи опишемо у вигляді нечіткої дискретної моделі:

$$\mu_{s+1}(x) = A_s \circ \mu_s(x),\ s = 0,1,2,.... \qquad (2.41)$$

де $A_s, s = 0,1,2,...$ – неперервні оператори, що визначають зміну значень функцій належності, $\mu_s(x) = (\mu_s(x_1),...,\mu_s(x_n))^T$, $\mu_{s+1}(x) = (\mu_{s+1}(x_1),...,\mu_{s+1}(x_n))^T$ – вектор-функції належності нечітких множин $\tilde{X}(t)$ у моменти часу t_s, t_{s+1} відповідно, "о" - операція композиції.

За лемою 2.2 для довільного раціонального числа r існують номери k та n елементів з послідовностей простих чисел такі, що величина $r(k,n) = = P_k(a)/P_n(a)$ наближає число r з будь-якою точністю. Таким чином, за допомогою відношення значень $P_k(a)/P_n(a)$ з відповідними номерами k та n,

$k \in Z$, $n \in Z$, можна визначити величину міри належності елементів $x_1,...,x_n$ до нечіткої множини $\tilde{X}_s$, $s = 0,1,2,...$ у вигляді:

$$\mu_s(x_i) = P_{k_i}^s(a)/P_{n_i}^s(a),\ k_i \in Z,\ n_i \in Z,\ k_i \le n_i,\ i = \overline{1,n},\ s = 0,1,2,.... \quad (2.42)$$

Використовуючи операцію кратної композиції відношення простих чисел (2.2), можна запропонувати схему модифікації величин міри належності. Дійсно, якщо модель динаміки має вигляд (2.41), то, розглядаючи в якості A_s, $s = 0,1,2,...$, векторні $A_s = \{a_i^s\}_{i=\overline{1,n}}$ або скалярні $A_s = \{a_0^s\}$, $s = 0,1,2,...$ цілочислові величини, що визначають збільшення ($a_i^s > 0$, $i = \overline{0,n}$), зменшення ($a_i^s < 0$, $i = \overline{0,n}$) або незмінність ($a_i^s = 0$, $i = \overline{0,n}$) рівнів належності станів системи, динамічний процес можна формалізувати у вигляді $\mu_{s+1}(x_i) = \mu_s(x_i) \circ a_i^s = P_{k_i}^s(a)/P_{n_i}^s(a) \circ a_i^s$, $k_i + a_i^s \ge j_0^i$, $i = \overline{1,n}$, $s = 0,1,2,...$, у випадку векторного представлення коефіцієнтів $A_s = \{a_i^s\}_{i=\overline{1,n}}$, $s = 0,1,2,...$, та $\mu_{s+1}(x_i) =$ $\mu_s(x_i) \circ a_0^s = P_{k_i}^s(a)/P_{n_i}^s(a) \circ a_0^s$, $k_i + a_0^s \ge j_0^i$, $i = \overline{1,n}$, $s = 0,1,2,...$, у випадку скалярного представлення $A_s = \{a_0^s\}$, $s = 0,1,2,...$, а величини j_0^i, $i = \overline{1,n}$, - найменші відповідні значення індексів у послідовностях простих чисел, для яких справедлива властивість 7).

Потрібно відмітити конструктивність даного підходу для формалізації та обробки величин мір належності нечітких множин, що знайшло застосування при вирішенні ряду прикладних задач.

2.2. Алгоритм шифрування на основі задачі про рюкзак

Одним з перших алгоритмів для узагальненого шифрування з відкритим ключем є алгоритм рюкзака, розроблений Ральфом Мерклом та Мартином Хелманом [59]. Даний алгоритм, що отримав назву алгоритму Меркла-Хелмана, спочатку використовувся лише для шифрування, але пізніше Аді Шамір [60] адаптував криптосистему для створення цифрового підпису.

Безпека алгоритму рюкзака зпирається на проблему вирішення задачі про рюкзак, яка є NP-повною проблемою.

У задачі про рюкзак припускається, що задано множину предметів різної ваги. Необхідно визначити, як можна покласти деякі з цих предметів у рюкзак таким чином, щоб вага рюкзака стала рівною наперед заданому значенню. Більш формально, для заданого набору значень M_1, M_2, ..., M_n (n - потужність заданої множини) та величини S потрібно визначити значення b_i, $i=\overline{1,n}$, такі що

$$S = b_1 M_1 + b_2 M_2 + ... + b_n M_n, \tag{2.43}$$

де b_i, $i=\overline{1,n}$, може бути або нулем, або одиницею. Одиниця показує, що предмет кладуть в рюкзак, а ноль - що не кладуть.

Наприклад, ваги предметів мають значення 1, 5, 6, 11, 14 та 20. Можна наповнити рюкзак таким чином, щоб його вага стала рівною 22, використавши величини 5, 6 і 11. З іншої сторони, неможливо упакувати рюкзак так, щоб його вага була рівною 24. У загальному випадку час, необхідний для вирішення цієї проблеми, з ростом кількості предметів в наборі росте експоненційно.

В основі алгоритму Меркла-Хелмана лежить ідея шифрувати повідомлення на основі ключа - послідовності ваг задачі про рюкзак (відкритий ключ). Предмети з набору обираються за допомогою блоку відкритого тексту, рівного за довжиною кількості предметів в наборі (біти відкритого тексту відповідають значенням b_i, $i=\overline{1,n}$), а шифротекст є отриманою сумою. Приклад шифротексту, отриманого за допомогою задачі про рюкзак, наведено у табл.2.1.

Таблиця 2.1.

Відкритий текст	111001	010110	000000	011000
Рюкзак	1 5 6 11 14 20	1 5 6 11 14 20	1 5 6 11 14 20	1 5 6 11 14 20
Шифротекст	1+5+6+20=32	5+11+14=30	0=0	5+6=11

Однак, виявилось, що ця схема є криптографічно нестабільною і, як наслідок, не набула популярності.

В якості суттєвого покращення базового алгоритму Меркла-Хелмана було запропоновано створення закритого ключа, який є перетвореною послідовністю ваг задачі про рюкзак спеціального вигляду. Даний варіант використовувався у двох модифікаціях: однотапній та багатоетапній. Але запропоновані вдосконалення не забезпечили криптостійскості алгоритму. Вперше про його небезпеку було повідомлено у роботі [60]. Більш того, схема алгоритму дозволяє визначити вхідну послідовність без використання будь-якого закритого ключа [61]. Тому зрозуміло, що практично одразу після створення розпочався пошук модифікацій запропонованого алгоритму, що забезпечують підвищений захист від зламу. Для подолання недоліків базової схеми Родні Гудман та Ентоні Маколі [62] розробили процедуру, що базується на модульних рюкзаках. Надалі з’ясувалось, що ця схема також небезпечна. Окрім використання модульних рюкзаків були запропоновані схеми використання інших видів рюкзака. У 1986 році Харальд Нідерайтер [63], опублікував рюкзачну криптосистему на основі алгебраїчної теорії кодування, яка також була зламана, а у 1988 році Масакацу Морії та Масао Касахара [64] розробили криптосистему з використанням мультиплікативного рюкзака. Ця ідея виявилась вдалою і поки система на мультиплікативних рюкзаках не зламана. Також вдалою виявилась ідея Хусейна Алі Хусейна, Джафара Ваді Абдули Сада та М. Каліфа [65], які у 1991 році запропонували багатоетапну рюкзачну криптосистему. У ній фіксується рюкзачний вектор на кожному етапі, а вихід (зашифроване повідомлення) після кожної стадії алгоритму використовується у якості вхідних даних (тексту) на наступному етапі. Вдалої атаки на дану схему на поточний час невідомо. Продовжилися покращення і класичного алгоритма Меркла-Хелмана.

Підсумовуючи короткий огляд, можна зробити висновок, що, незважаючи на небезпеку алгоритму, варто вивчити його функціонування, тому що на прикладі цього алгоритму можна продемонструвати можливість застосування NP-повної проблеми в криптографії з відкритими та закритими ключами.

Проблеми шифрування на основі задачі про рюкзак

Розглядаючи зміст задачі про рюкзак, можна відмітити, що існує дві різні задачі, одна з яких вирішується за лінійний час, а інша, як вважається, - ні. Просту задачу можна перетворити у складну. Відкритий ключ представляє собою складну (важку) проблему, яку дуже просто можна використати для шифрування, але неможливо для дешифрування повідомлень. Закритий ключ є простою (легкою) проблемою, що надає простий спосіб дешифрування повідомлення. Тим, хто не знає закритий ключ, потрібно спробувати вирішити складну задачу про рюкзак.

Надзростаючі рюкзаки.

Означення 2.2. Надзростаючою послідовністю називається послідовність, кожний член якої більше суми усіх попередніх членів.

Наприклад, послідовність {1,3,6,13,27,52} є надзростаючою, а послідовність {1,3,4,9,15,25} - ні. В даному контексті варто згадати і добре відому послідовність чисел Фібоначчі, яка, незважаючи на швидке зростання елементів, не є надзростаючою.

Розглянемо просту проблему рюкзака. Якщо перелік ваг предметів у наборі є надзростаючою послідовністю, то отриману проблему рюкзака можна нескладно вирішити. Розв’язок надзростаючого рюкзака знаходиться наступним чином. Необхідно взяти повну вагу і порівняти його з найбільшим числом послідовності. Якщо повна вага менше цього числа, то його не кладуть у рюкзак. Якщо повна вага більше або рівна цього числа, то воно кладеться у рюкзак. Зменшимо вагу рюкзака на це значення і перейдемо до наступного за величиною числа послідовності. Будемо повторювати ці дії, доки процес не завершиться. Якщо повна вага зменшується до нуля, то розв’язок знайдено. У протилежному випадку - ні.

Покладемо для прикладу, повна вага рюкзака має бути 70, а надзростаюча послідовність ваг {2,3,6,13,27,52}. Найбільша вага - 52, яка менше 70, тому 52 кладуть у рюкзак. Віднімаючи 52 від 70, отримуємо 18. Наступна вага - 27, більше 18, тому число 27 у рюкзак не кладуть. Наступну вагу 13, яка менше 18, кладуть у рюкзак. Віднімаємо 13 з 18 і отримуємо 5. Чергова вага - 6, більша за 5, не кладеться у рюкзак. Продовжуючи цей процес, отримаємо, що ваги 3 і 2 кладуть у рюкзак, і повна вага зменшується до 0, що свідчить про знайдений розв'язок. Якщо розглядати цю процедуру як блок шифрування методом рюкзака Меркла-Хелмана, відкритий текст, отриманий із значення шифротексту 70, був би рівний 110101.

Пошук заповнення нормальних рюкзаків, які не є надзростаючими, представляють собою складну проблему. Швидкого алгоритму для вирішення даної задачі в реальному часу поки не знайдено. Єдиним відомим способом визначити, які предмети упаковано у рюкзаку, є методична перевірка можливих розв'язків до знаходження вірного. Найбільш швидкий алгоритм, приймаючи до уваги різні евристики, має експоненційну залежність від кількості можливих предметів. Тому, якщо додати до послідовності ваг лише один елемент, знаходження розв'язку задачі вдвічі ускладнюється. Це набагато важче надзростаючого рюкзака, в якому, якщо додати один предмет до послідовності, складність пошуку розв'язку зростає на одну операцію.

Алгоритм Меркла-Хелмана базується на цій властивості. Закритий ключ є послідовністю ваг задачі надзростаючого рюкзака. Відкритий ключ - це послідовність ваг проблеми нормального рюкзака з тим самим розв'язком. Р.Меркл і М.Хелман [59], застосовуючи цілочислову арифметику, розробили спосіб перетворення проблеми надзростаючого рюкзака в проблему нормального рюкзака.

<u>Створення відкритого ключа з закритого.</u>

Розглянемо роботу алгоритму, не заглиблюючись в теорію чисел. Для отримання нормальної послідовності рюкзака візьмемо надзростаючу послідовність рюкзака, наприклад наведену раніше $K=\{2,3,6,13,27,52\}$, і домножимо всі значення на число T за модулем N. Значення модуля має бути більше суми всіх чисел послідовности, тобто утворювати з заданою послідовністю надзростаючу послідовність. Оберемо, наприклад, N =105. Множник T повинен бути взаємно простим числом з модулем N, тобто НСД (N,T) =1. Покладемо, наприклад, T =31. Нормальною послідовністю рюкзака у цьому випадку буде {62,93,81,88,102,37}, де 62=2*31 mod 105; 93=3*31 mod 105; 81=6*31 mod 105; 88=13*31 mod 105; 102=27*31 mod 105; 37=52*31 mod 105.

Надзростаюча послідовність рюкзака разом з числами N та T {2,3,6,13,27,52; 105, 31} є закритим ключем, а нормальна послідовність рюкзака {62,93,81,88,102,37} – відкритим.

Шифрування

Для шифрування повідомлення розбивається на блоки, що за довжиною дорівнюють кількості елементів послідовності рюкзака. Далі, вважаючи, що одиниця відповідає присутності члена послідовності, а ноль - його відсутності, обчислюємо повні ваги рюкзаків - по одному для кожного блоку повідомлень.

Якщо припустити, що повідомлення у бінарному вигляді подається як 011000110101101110, то шифрування, яке використовує попередню послідовність рюкзака, буде здійснюватися таким чином:

Вхідне повідомлення у блочному вигляді = 011000 110101 101110, звідки

011000 відповідає числу 93 + 81 = 174;

110101 відповідає числу 62 + 93 + 88 + 37 = 280;

101110 відповідає числу 62 + 81 + 88 + 102 = 333.

У результаті шифротекстом повідомлення 011000110101101110 є числова послідовність 174,280,333.

Дешифрування

Законний отримувач даного повідомлення знає закритий ключ: оригінальну надзростаючу послідовність, а також значення N та T, які використовувалися для перетворення її в нормальну послідовність рюкзака.

Теорема 2.1 [66] Якщо N та T - взаємно прості числа, то існує ціле число $1 \le S \le N$ таке, що $TS \equiv 1 \pmod N$.

Таким чином, S являє собою обернене мультиплікативне за модулем N по відношенню до T.

Отже, для дешифрування повідомлення отримувач визначає обенене мультиплікативне $S = T^{-1}$, таке що $T*(T^{-1}) = 1 \ (mod \ N)$. Кожне значення шифротексту домножується на $T^{-1} \ mod \ N$, а потім розгортається в суму за допомогою закритого ключа, щоб отримати значення відкритого тексту.

У нашому прикладі надзростаюча послідовність {2,3,6,13,27,52}, N = 105, T = 31. Шифротекстом є послідовність 174,280,333. У цьому випадку T^{-1} дорівнює 61 (31*61 mod 105=1891 mod 105=1), тому значення шифротексту домножуються на величину 61 mod 105.

Маємо 174*61 mod 105 = 9 = 3 + 6, що відповідає 011000;

280*61 mod 105 = 70 = 2 + 3 + 13 + 52, що відповідає 110101;

333*61 mod 105 = 48 = 2 + 6 + 13 + 27, що відповідає 101110.

Розшифрованим відкритим текстом є бінарні послідовності 011000 110101 101110, що повністю відповідає вхідному повідомленню.

Підвищення крипостійкості алгоритму шифрування

Сучасні дослідження по вдосконаленню алгоритму здійснюються за двома основними напрямками. Перший з них об'єднує роботи, що спрямовано на використання різних варіантів задачі про рюкзак. Інший напрямок досліджує застосування різних додаткових схем та процедур, що підвищують захищеність алгоритму.

Запропонуємо модифікацію базової схеми на основі нечіткого підходу та послідовностей невід'ємних простих чисел $P_j(a) \ge 0$, $j \in Z$ відносно числа a (озн. 2.1).

Числа, що входять до відкритого ключа $K = r_1, \ldots, r_n$, є довільними цілими числами. Традиційне поняття нечіткості [7], яке визначає міру належності конкретного числового значення до нечіткої множини, в даному випадку може інтерпретуватися як рівень складності кодування кожного числа $r_j \in K, j = \overline{1,n}$.

Для визначення величини складності доповнимо відкритий ключ двома довільними значеннями k та l, $k \le l$, $k = 0,1,2,...$, $l = 1,2,3,...$, за якими з послідовності простих чисел визначаються величини $s = P_k(a)$, $q = P_l(a)$ для деякого числа $a \ge 0$. За таких умов отримуємо, що $0 \le s/q \le 1$. Ця величина може служити показником складності кодування, а за допомогою значень s та q можна змінити ваги відкритого ключа K та величини N та T, наприклад, за наступною схемою:

- для чисел T та N, які є взаємно простими числами, обчислюються числа $P_s(T)$ та $P_q(N)$ відповідно, де $s = P_k(a)$, $q = P_l(a)$;
- для цілих чисел $r_j \in K, j = \overline{1,n}$, які входять до ключа K, обчислюються величини $u_j = P_s(r_j) - r_j$ та $v_j = P_q(r_j)$, $j = \overline{1,n}$, $s = P_k(a)$, $q = P_l(a)$;
- формується вектор пар елементів $\overline{K} = \{(u_1, v_1),...,(u_n, v_n)\}$, який буде новим значенням відкритого ключа *K*. Величини $P_s(T)$, $P_q(N)$ та вектор $\overline{K}$ передаються отримувачу разом з зашифрованим за допомогою елементів v_j, $j = \overline{1,n}$, повідомленням.

Зрозуміло, що дана схема допускає різні модифікації. В якості основних можна розглядати:

- схему з кодуванням лише чисел N та T,
- паралельне кодування чисел N, T та чисел ключа K,
- послідовне кодування чисел N та T у числа $P_s(T)$ та $P_q(N)$, відповідно, з подальшим перетворенням елементів ключа $K = \{r_1,...,r_n\}$ за традиційною процедурою $r_j * P_s(T) \bmod P_q(N)$, $j = \overline{1,n}$, $s = P_k(a)$, $q = P_l(a)$ і кодуванням отриманих значень вектором пар елементів $\overline{K} = \{(u_1, v_1),...,(u_n, v_n)\}$.

Іншою важливою рисою запропонованої схеми є можливість динамічно змінювати значення $s = P_k(a)$ і $q = P_l(a)$. Використовуючи операцію зсуву для зміни чисел s та q, у вхідній ключовій послідовності задається величина зсуву m, $m \in N \cup \{0\}$, яка дозволяє обчислити нові прості числа $P_k(a) \oplus m$ та $P_l(a) \oplus m$ за формулою (2.1). Отримані значення можна розглядати як нові параметри процедур шифрування та дешифрування текстових повідомлень.

Приклад 2.2. Для демонстрації дії розробленої схеми повернемося до наведеного вище прикладу. Покладемо $a=1$. Припустимо, що $k=4$, $l=7$. Відповідні прості числа $s=7$, $q=17$. Для елементів відкритого ключа K= ={62,93,81,88,102,37} та величин $N=105$, $T=31$ обчислимо відповідні значення $u_1=35, v_1=149, u_2=34, v_2=179, u_3=28, v_3=167, u_4=25, v_4=173$, $u_5=35$, $v_5=191$, $u_6=30$, $v_6=109, P_7(31)=61, P_{17}(105)=193$. Тоді новим відкритим ключем буде множина пар значень $\overline{K} = \{(35,149),(34,179),(28,167),(25,173),(35,191),(30,109)\}$. Величини $P_s(T)=61$ та $P_q(N)=193$ є зашифрованими значеннями $T=31$, $N=105$. При цьому необхідно відмітити, що усі отримані значення нескладно дешифруються у попередній стан за допомогою простих чисел $s=7$, $q=17$.

Зашифровані елементи вхідного повідомлення 011000 110101 101110 з новим відкритим ключем будуть мати вигляд:

011000 задається числом 179 + 167 = 346;

110101 задається числом 149 + 179 + 173 + 109 = 610;

101110 задається числом 149 + 167 + 173 + 191 = 680,

а шифротекстом вхідного повідомлення є числова послідовність 346,610,680.

Таким чином, даний підхід дозволяє ускладнити процедуру шифрування/ дешифрування вхідних повідомлень, що збільшує криптостійкість алгоритму Меркла-Хелмана.

2.3. Нечіткі бази даних

Сучасну інформаційну систем важко представити без використання баз або сховищ даних. Під цими поняттями, як правило, розуміють «набір структурованих даних, що підтримуються системою управління баз даних (СУБД), яка забезпечує різним додаткам потрібні дані у заданому вигляді» [67].

Отформатировано: Основной шрифт абзаца;Знак Знак, Шрифт :14 пт , полужирный

Отформатировано: Основной шрифт абзаца;Знак Знак, Шрифт :14 пт , полужирный

Однак, дане визначення є недостатньо конструктивним і слабо формалізованим. З іншого боку, зауважимо, що кожна програмна система, яка призначається для накопичення та обробки (актуалізації) даних, використовує інформаційну модель предметної області. У загальному випадку характерними категоріями, що формують таку модель, є об'єкти та відношення між ними. Такий підхід дозволяє визначити базу даних (БД) як об'єктно-орієнтований опис моделі, що базується на поняттях об'єктів та відношень, з повним або частковим фізичним розташуванням змістовних даних предметної області на комп'ютерних носіях.

Використання моделі даних при роботі з БД дає можливість відображати особливості предметної області. За час існування розробок інформаційних систем запропоновано багато різних моделей з власними перевагами та недоліками.

Найбільш популярною є реляційна модель предметної області. В реляційній моделі вважається, що всі дані БД інформаційної системи представлені у вигляді таблиць [68]. Рядок кожної таблиці представляє собою кортеж неструктурованих одиниць даних або атрибутів. Набір кортежів, що складає таблицю, задає відношення: таким чином, модель даних визначається множиною таблиць–відношень (*R*-таблиць) або «реляцій».

Значення атрибутів кортежів і таблиць-відношень визначаються заданими разом з таблицями областями визначення (доменами). Множини значень різних стовбців в одній і тій самій таблиці або в різних таблицях можуть задаватися одним доменом, а можуть – і різними. При чому, значення атрибутів в таблиці-відношенні мають лише один конкретний вигляд функціональної залежності один від іншого. Іншими словами, всі значення в довільному кортежі повинні окремо залежати лише від значення стовпця або групи стовбців – одних для всього відношення. Такий стовбець або група стовбців називається ключовими, а значення атрибутів в них – ключами.

В реляційній теорії визначений список операцій, які можна здійснювати над *R*-таблицями, отримуючи результат у вигляді *R*-таблиці. До таких операцій над базою даних відносять:

1) базові операції: обмеження; проекція; декартовий добуток двох таблиць; об'єднання; різниця; присвоювання (іменованій таблиці присвоюється значення виразу над *R*-таблицями).

2) похідні операції: з'єднання таблиць за деяким правилом; перетин таблиць; розширення таблиць новими стовбцями; сумування (зменшення рядків в таблиці за рахунок агрегування вихідних даних).

Крім постійних таблиць, що визначені в моделі інформаційної системи, операції над *R*-таблицями дозволяють отримувати таблиці-представлення, що дають можливість динамічно формувати набори кортежів з додатково заданими правилами їх формування.

Таким чином, констатуємо, що будь-яка прикладна проблемна область описується в термінах таблиць достатньо просто, що дозволяє суттєво спростити розробку інформаційних систем. Реляційна концепція баз даних може бути легко формалізована, базуючись на математичній моделі відношень. Якщо задано n множин $D_1, D_2, \ldots, D_n$, тоді реляція R є множиною впорядкованих наборів виду $\langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$, де d_1 - елемент з D_1, ..., d_n - елемент з D_n. При цьому набори вигляду $\langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$ визначають кортежі, а множини $D_1, D_2, \ldots, D_n$ - домени.

Ідея реляційних баз даних стала популярною і серед розробників СУБД. Виходячи з того, що більша частина даних, які обробляються в інформаційних системах, носять кількісний характер, зросла зацікавленість в створенні способів та механізмів отримання конкретних даних. Універсальним засобом доступу до сховищ даних є мова запитів SQL, яка дозволяє зручно маніпулювати інформацією в різних реалізаціях моделей баз даних.

Мова SQL використовується для опису запитів до БД в спеціальних термінах. Припустимо, що потрібно отримати відомості про договори з усіма фірмами заданого регіону, в яких сума кошторисів складає приблизно 900000 гривень. Перелік можна отримати за допомогою наступного запиту мовою SQL:

Select AgreementID from Agreements

Where Agreement.Sum>=900000 and Agreement.FirmRegion=1.

Запити до БД формулюються у вигляді чітких вимог до шуканих даних. Чіткі вимоги дозволяють отримувати конкретні результати пошуку в БД. Однак в запитах, що формулює користувач, досить часто присутні неточності та невизначеності. Якщо повернутися до наведеного прикладу, то договори з сумою 899000 гривень не попадають в результат виконання запиту, хоча їх характеристики є дуже близькими до вимог пошуку. Для забезпечення включення таких договорів в результат пошуку у запиті потрібно змінювати величини сум укладених договорів.

Зрозуміло, що в загальному випадку, коли з бази даних необхідно вибрати лінгвістично задану інформацію («молодий», «приблизно» «висока ефективність» і т.і.), реалізація такого запиту можлива лише за умов формалізації понять, які відносяться до категорії неточних, невизначених даних. Такі запити неможливо виконати стандартними засобами SQL.

Останнім часом багато уваги приділяється реалізації нечітких запитів. При цьому, сховища чітких даних з підтримкою чітких запитів були виділені групу так званих Crisp DataBases. В той же час, в реляційних базах даних з підтримкою нечітких запитів широко вживаються терміни «нечіткі бази даних» (Fuzzy DataBases). В БД з підтримкою механізмів нечітких запитів використовується підхід, що базується на ідеях нечітких множин Заде [7] і нечітких відносин з підтримкою формул нечіткої логіки.

Виходячи з традиційних понять та операцій з нечіткими множинами, в існуючих варіантах нечітких баз даних реалізується підтримка виконання нечітких запитів до чітких даних сховища. У випадку нечітких баз знань продукційні правила формулюються на основі реалізації відомих формул нечіткої логіки, а база даних про проблемну область подається у вигляді типового чіткого сховища інформації.

В роботі [69] запропоновано узагальнення поняття нечітких баз даних. В багатьох сучасних інформаційних системах, окрім нечітких запитів, приходиться мати справу з неточною, нечіткою інформацією. Це можуть бути дані про результати експериментальних досліджень на основі вимірювань з різними величинами точності (похибками); такими є дані для систем підтримки прийняття рішень, в яких зберігається і ведеться інформація, наприклад, про рівні компетентності експертів, важливість критеріїв, тощо. Нарешті, це можуть бути дані з чітких таблиць БД, що оформлюються у вигляді представлення, яке доповнюється полями величин відповідності значень кожного поля усіх кортежів деяким динамічним критеріям. Наприклад, для запиту про договори можна сформувати таблицю-представлення з полем «сума договору» (A), до якого занести значення міри відповідності суми категорії «приблизно» 900000. В термінах нечітких множин, ці значення є величинами міри належності конкретних числових даних $x, x \in A$ до нечіткої множини $\tilde{Y} = \{(x, \mu_{\tilde{Y}}(x))\}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{Y}}(x) \in [0,1]$ для заданого числового значення суми. Формування нового представлення у цьому випадку можна записати, наприклад, у вигляді послідовності операторів мовою Linq [70], які потім транлюються у відповідну послідовність SQL-запитів.

Іншими словами, для довільної чіткої бази даних може бути побудоване нечітке представлення (нечітка БД, НБД), в якому інформація про характеристики (поля) об’єктів проблемної області подаються парою стовбців: в першому – конкретні значення показника з таблиці чіткої бази даних (вік, показання вимірювального приладу, номер зайнятого місця, значення критерію якості і т.і.), в другому – значення відповідності даних першого стовпця деякому правилу (нечіткому поняттю). Ця процедура має назву фазифікації чітко визначених даних.

Зрозуміло, що результат процесу фазифікації чіткого відношення $R=\{<d_1, d_2,..., d_n>$, де d_1 - елемент з D_1, d_2 - елемент з D_2, ..., d_n - елемент з $D_n\}$ за i-тим атрибутом, $i = \overline{1,n}$, можна виразити у вигляді R-таблиці. Це нове нечітке відношення

$$\overline{R} = \{<d_1, d_2,..., d_i \mid \mu_{\tilde{A}_i}(d_i), ..., d_n>\}, \qquad (2.44)$$

що формується як множина кортежів з $n+1$ елемента, в яких величини $\mu_{\tilde{A}_i}(d_i)$ задають міру належності значень елементів d_i деякій нечіткій множині $\tilde{A}_i = \{(d, \mu_{\tilde{A}_i}(d)), d \in D_i\}$. Таким чином, список базових та похідних операцій над *R*-таблицями може бути розширений операцією фазифікації як різновидом операції розширення.

Потрібно зауважити, що відношення $\overline{R}$, сформоване за *i*-м атрибутом, $i = \overline{1,n}$, буде представлятися у вигляді таблиці з *p* додатковими стовбцями, якщо на *i*-й атрибут накладено *p* нечітких понять. Наприклад, для наведеного вище випадку, крім нечіткої формалізації поняття «приблизно» аналогічно будується представлення нечіткого поняття «суттєво більше» і т.і. Таким чином, відношення $\overline{R}$ за *i*-м атрибутом можна представити у вигляді таблиці з $n+p$ стовбцями

$$\overline{R} = \{<d_1, d_2, ..., d_i \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i) \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^2}(d_i) \,|\, ... \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^p}(d_i), ..., d_n>\}. \quad (2.45)$$

Частина доменів, що не потребує фазифікації, тобто є чіткими множинами з функцією належності у вигляді характеристичної функції $\chi_A(x) = \begin{cases} 0: & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$, у відношенні $\overline{R}$ може бути представлена у вигляді

$$\overline{R} = \{< d_1 \,|\, 1, d_2 \,|\, 1, ..., d_i \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i) \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^2}(d_i) \,|\, ... \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^p}(d_i), ..., d_n \,|\, 1 >\}. \quad (2.46)$$

Означення 2.3. Нечітку множину

$$\overline{R} = \{< d_1 \,|\, \mu_{\tilde{A}_1^1}(d_1) \,|\, ... \,|\, \mu_{\tilde{A}_1^{p_1}}(d_1),\, d_2 \,|\, \mu_{\tilde{A}_2^1}(d_2) \,|\, ... \,|\, \mu_{\tilde{A}_2^{p_2}}(d_2), ...,$$

$$d_i \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i) \,|\, ... \,|\, \mu_{\tilde{A}_i^{p_i}}(d_i), ..., d_n \,|\, \mu_{\tilde{A}_n^1}(d_n) \,|\, ... \,|\, \mu_{\tilde{A}_n^{p_n}}(d_n) >\}, \quad (2.47)$$

назвемо нечітким табличним відношенням в універсальному просторі $D_1 \times \ldots \times D_i \ldots \times D_n$.

Означення 2.4. [69] Базу даних інформаційної системи будемо називати нечіткою (НБД), якщо для формалізації даних предметної області використовується хоча б одне нечітке відношення $\overline{R}$ (2.47) у вигляді *R*-таблиці або *R*-представлення.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що у НБД нечітке відношення $\overline{R}$ представлено у вигляді сукупності кортежів $\overline{R} = \{<d_1 \mid \mu_{\tilde{A}_1^1}(d_1)$, $d_2 \mid \mu_{\tilde{A}_2^1}(d_2)$, ..., $d_i \mid \mu_{\tilde{A}_i^1}(d_i), ..., d_n \mid \mu_{\tilde{A}_n^1}(d_n)>\}$, $d_i \in D_i \subset R_+^1$, $i = \overline{1,n}$. З практичної точки зору постає важливе питання про формування запитів та реалізацію механізмів отримання даних з НБД.

Для його розв'язання пропонується підхід на основі використання нечітких трикутних чисел для визначення діапазону значень, що реалізує задане нечітке поняття. У наведеному вище випадку відбір договорів з нечітким атрибутом «приблизно» може бути здійснений за допомогою SQL-оператора

Select AgreementID from Agreements

Where Agreement.FirmRegion=1 and Agreement.Sum between Amin and Amax,

де *Amin* та *Amax* – мінімальне та максимальне значення інтервалу представлення суми як нечіткого числа. Методику подання деякої величини в умовах невизначеності з допомогою її нечіткого представлення на основі нечітких трикутних чисел наведено у підрозділі 2.1.1. При цьому, слід зазначити, що у випадках, коли діапазон представлення не задовольняє користувача, відбір кортежів можна здійснювати на основі суб'єктивного визначення нечіткого трикутного числа.

Наведений підхід до використання нечітко визначених даних на основі формування нечітких представлень і формалізації нечітких операцій вибору за кількісними атрибутами надає можливість створення та обробки слабоформалізованої інформації, визначає спосіб пошуку кортежів нечіткого відношення нечіткої бази даних, які формують результати реалізації SQL-запитів до нечітких даних.

2.4. Розширення синтаксису та семантики мови С для реалізації засобів нечіткого моделювання

Змістовно мова програмування - це засіб спілкування між людиною (програмістом) та комп'ютером (виконавцем). Розглядаючи довільну знакову систему (в тому числі й мову програмування), зазвичай виділяють *синтаксис* - правила побудови повідомлень у цій системі, *семантику* - правила трактування повідомлень тими, кому їх адресовано, а також *прагматику*, яка співставляє повідомлення призначенням того, що від них очікується.

Будь-яку мову програмування можна визначити як множину речень, тобто деяку множину ланцюгів або кінцевих послідовностей елементарних одиниць з деякої непорожньої скінченної множини символів, що називається словником (або алфавітом) мови. Зрозуміло, що при такому розгляді мови програмування фіксується лише множина символів, які можна використовувати для запису програм, а також клас допустимих (або, як прийнято казати, синтаксично коректних) програм, не співставляючи жодного сенсу цим синтаксично правильним програмам.

Очевидно, що задавати множину допустимих програм вичерпним їх переліченням небажано і навіть неможливо. Традиційно опис мови має бути скінченним, хоча мова, яка описується, може бути і нескінченною. Звичайний підхід, що задовольняє цій вимозі, базується на тому, що твердження мови записуються за конкретними правилами, які у сукупності складають поняття *граматики* мови. Граматичні правила приписують твердженням мови деяку синтаксичну структуру, яка застосовується у подальшому для смислового визначення речень.

Граматику мови можна описати різними способами. Наприклад, її можна задавати у вигляді породжуючої системи, тобто набору правил, застосуванням яких можна визначити усі твердження мови і лише їх. Цей спосіб формалізації мови програмування орієнтується на людину, тому що людина використовує мову програмування безпосередньо для створення програм, що вирішують поставлені задачі.

Правила надання сенсу синтаксично коректним програмам утворюють семантику мови програмування. Ці правила визначають послідовність дій обчислювальної машини, яку вона повинна виконати, працюючи за даною програмою.

Іншими словами, семантика мови визначає логіку дій, яка закладається в кожну конструкцію мови. Семантичний аналіз - це перевірка смислової правильності конструкцій. Наприклад, якщо у виразі використовується змінна, то вона повинна бути визначена раніше у тексті програми, а з цього означення може бути отриманий її тип. Виходячи з типу змінної, можна говорити про допустимість операції над даною змінною.

Єдиного загальноприйнятого формального методу опису семантики мов програмування на сьогоднішній день не існує. Опис мови, як правило, складається з формального опису синтаксису і неформального опису семантики мови. До них відносяться, наприклад, означення мови Алгол-68, яке запропоновано на формальній мові W-граматик. Потреба у строгій, формальній мові опису семантики мов програмування обумовлена необхідністю виключити ймовірність появи неоднозначних трактувань окремих конструкцій і механізмів мови, необхідністю стандартизувати мову, зменшити відмінності між різними реалізаціями мови й тим самим підвищити мобільність програм.

Синтаксис і семантика мови програмування повинні відповідати прикладній області. Відсутність такої відповідності в універсальних мовах потребує додаткових програмних дій.

Запропонуємо розширення мови С для запису програм нечіткого моделювання та реалізації м’яких обчислень, для проведення яких необхідні спеціальні засоби розробки програм, що реалізуються відповідно до синтаксису і семантики мови.

Спочатку розглянемо структурні та лексичні одиниці мови С, в яких можливе використання нечітких реалізацій мовних конструкцій, після чого буде запропоновано відповідні розширення мови з їх синтаксичними та семантичними визначеннями.

Стандартна программа, що записується мовою С, складається з функцій та змінних. Одна з функцій (можливо, єдина) має бути головною функцією з назвою *main*. У цьому випадку програма починає виконання саме з функції main. Кожна програма С з main функцією може викликати інші функції, котрі допомогають виконувати однотипові дії, що оформлюються у вигляді відповідної програмної одиниці з конкретно визначеним іменем та параметрами. Програміст може записати деякі з цих функцій, а інші функції викликаються з стандартних бібліотек, що приєднуються до програми на етапі компіляції. Доступ до бібліотек здійснюється за допомогою директив препроцессора *#include*.

Головна функція стандартно завершується оператором *return 0*, який дозволяє визначити код завершення, що повертається з *main* функції системному планувальнику завдань. Значення 0 вказує на успішне завершення виконання програми.

Керуючі структури стандарту мови С.

Складені оператори.

Складені оператори в С мають вигляд послідовності операторів, оточених фігурними дужками { … } і застосовуються в якості опису послідовності з декількох дій, що виконуються в одному блоці. Окремим застосуванням складених операторів є опис тіла функції.

Функції.

Кожна функція мови С складається з заголовка та тіла. Заголовок формується з типу повертаємого значення (*void* – для функцій процедурного типу), імені, списку параметрів, що задаються у круглих дужках (дужки обов'язково мають бути присутні, якщо навіть параметрів немає). Тілом функції називається послідовність операторів, що використовуються для обчислення значення функції. За синтаксисом тіло функції еквівалентне складеному оператору. Загальний вигляд означення функції:

ТИП Ім'я (СПИСОК ПАРАМЕТРІВ)

{ }

Оператор визначення змінної.

Твердження вигляду: ТИП Перелік_змінних;

є виразом визначення. Якщо вираз відсутній, то таке твердження називається порожнім оператором.

Оператор вибору та умовний.

Мова С має три види операторів для розгалуження дій у програмі: оператор вибору *switch* і два умовних оператори *if* .

Два види умовного оператора *if*:

```
if (УМОВА)  { оператор;  }
```

або

```
if (УМОВА)  { оператор1; }
else { оператор2; }
```

В операторі *if* обчислюється значення виразу, заданого в дужках (позначено як УМОВА). Якщо вираз в дужках не дорівнює нулю або має логічне значення «істина», то управління передається оператору, який слідує за *if*. Якщо в операторі присутня частина *else*, то контроль перейде до наступного за *else* набору дій, якщо значення виразу УМОВА в дужках дорівнює нулю або має логічне значення «хибність».

Оператор вибору *switch* записується у вигляді

```
switch (ВИРАЗ)  {
      case  ЗНАЧЕННЯ1:   оператор1;  break;
      case  ЗНАЧЕННЯ2:   оператор2;  break;
      …
      default :  операторN;
 }
```

Тіло оператора вибору містить декілька значень (розділи *case*), які визначають перелік можливих значень ВИРАЗу в дужках. В цьому випадку для залучення потрібної послідовності операторів необхідно обчислити значення ВИРАЗу, після чого воно аналізується і обирається той блок дій, що відповідає отриманому значенню. Усі значення, що задаються константами ЗНАЧЕННЯ1, ЗНАЧЕННЯ2, … , мають бути унікальними (не повторюватися). Кожен блок операторів повинен завершуватися оператором виходу *break*. В операторі *switch* також не може бути більше однієї мітки *default*, управління до якої передається, якщо жодне з константних значень не співпало з значенням ВИРАЗу в дужках після *switch*.

Повторення (цикли).

Мова С має три форми операторів циклу:

do { оператор; } while (УМОВА);

while (УМОВА) { оператор; }

for (E1; E2; E3) { оператор; }

В операторах *while* та *do ... while*, тіло виконується багатократно, поки значення виразу УМОВА залишається ненульовим або «істиною». Для *while* перевірка значення УМОВА відбувається кожен раз перед початком ітерації циклу; для *do ... while* перевірка значення УМОВА відбувається після виконання кожної ітерації тіла циклу.

В операторі *for*(E1; E2; E3) блок E1 використовується для ініціалізації змінних, блок E2 – для перевірки можливості виконання ітерації циклу, блок E3 – для виконання дій з змінними при переході з однієї ітерації до іншої. Якщо усі три вирази E1; E2; E3 присутні в операторі

for (E1; E2; E3) { оператор; }

то це еквівалентно такій послідовності дій з використанням операторів *while* :

E1; while (E2) { оператор; E3; }

Будь-який з трьох виразів E1; E2; E3 в операторі циклу *for* можуть бути пропущений. Відсутність другого виразу E2 робить умову виконання циклу *while* завжди ненульовою, створюючи нескінченний цикл.

Оператори продовження continue та переривання break послідовності дій.

Оператор *continue* може застосовуватися тільки в межах повторення циклу і примушує пропустити оператори, що залишилися до кінця циклу, і перейти до наступної ітерації циклу.

Оператор *break* використовується для виходу з циклів *for* , *while, do*, та оператору вибору *switch*. Управління передається оператору, що слідує за тим, в якому було здійснено переривання дій.

Оператори та операції призначені для опису та обробки даних, що характеризуються чотирма головними властивостями: тип (для визначення діапазонів значень, які можуть бути присвоєні даному), ім'я (для найменування даного за допомогою ідентифікаторів), клас пам'яті (для визначення способу розміщення, існування та знищення даних в оперативній пам'яті) та визначеність/невизначеність.

Основні (скалярні) типи даних у мові С: char, unsigned char, signed char, int, short int, long int, float, double, long double. Діапазони значень типів даних визначено у табл. 2.2. Діапазони *float, double* та *long double* типів визначаються стандартом IEEE 754.

Таблиця 2.2. Діапазони значень основних (скалярних) типів даних

назва типу	**діапазон значень**
char	-127..127 или 0..255
unsigned char	0..255
signed char	-127..127
int	-32767..32767
short int	-32767..32767
long int	-2147483647..2147483647
float	стандарт IEEE 754
double	стандарт IEEE 754
long double	стандарт IEEE 754

Масиви.

Крім скалярних типів у мові С використовуються складені (масиви, структури, об'єднання та перерахування) та спеціальні типи даних (покажчики). Не вдаючись у суть останніх чотирьох типів, зосередемо увагу на масивах – впорядкованих скінченних послідовностях даних одного типу. Якщо означення змінної містить разом з ідентифікатором запис квадратних дужок (наприклад, a[5]), то вважається, що визначено массив (у цьому випадку, з 5 елементів). Масив масивів забезпечує можливість створення та використання багатовимірного масиву (у найпростішому випадку, матриці).

Розширення стандарту мови С.

Для опису нечітких числових даних та запису дій для реалізації м'ягких обчислень та нечіткого моделювання необхідне розширення синтаксису та семантики мови С.

Послідовно розглянемо структури стандарту мови, в яких можливе узагальнення для роботи з нечіткими числами. Почнемо з типів даних, після чого буде запропоновано розширення керуючих структур мови С.

Використовуючи наведені вище підходи для подання нечітких цілих та дійсних значень, опис типів для позначення нечітких чисел розширимо новими типами, що утворюються на основі використання лексем для стандартних типів, перед якими записується ключове слово *fuzzy* (наприклад, *fuzzy int*). При цьому, якщо деяка змінна ініціалізується значенням відповідного стандартного (скалярного) типу, то описана з префіксом *fuzzy* змінна передбачає подання даного значення у вигляді нечіткого трикутного числа з носієм, що задається у формі інтервалу, побудованому на основі найближчих простих чисел (у цілочисловому випадку – для самого числа, а у випадку дійсних чисел – для мантиси числа) і з урахування граничних значень відповідних діапазонів.

Приклад визначення нечіткої змінної:

fuzzy int x; // невизначена (неініціалізована) змінна *x*

x=25; // ініціалізація змінної *x* значенням 25: у цьому випадку значення *x*

// є трикутним нечітким число, заданим на інтервалі [23,29];

// величини функції належності $\mu(23)=\mu(29)=0$, $\mu(25)=1$.

Для запису дій з нечіткими змінними мають застосовуватися арифметичні операції та операції порівняння, умовний оператор *if*, оператор-перемикач *switch*, оператори циклу *for* та *while*. Пропонується семантика розширення у вигляді наступних правил:

1. Виконання арифметичних операцій відбувається за правилами (2.34)-(2.38).

2. Виконання операцій порівняння і визначення результатів обчислення умовних виразів з нечіткими числами в операторах *if* , *switch*, *while* може бути описане на основі нечітких відношень, заданих для двох нечітких трикутних чисел (див. Означення 1.7). Нечіткий результат порівняння двох заданих нечітких чисел визначається у вигляді меншої величини у розумінні нечіткого відношення переваги “<”. Для визначення «меншого», як правило, користуються нечіткими відношеннями переваги, введеними Орловським [18]. В рамках даного підходу вважається, що нечітке відношення переваги $g(a,b)$ для довільних нечітких елементів $a\in\widetilde{A}, b\in\widetilde{B}$ за умови $\mu_g(a,b)=$ $=\min\{\mu_{\widetilde{A}}(a),\mu_{\widetilde{B}}(b),\mu_{\widetilde{A}\times\widetilde{B}}(a,b)\}>0$ визначає співвідношення у вигляді $a<b$ із ступенем $g(a,b)=\mu_g(a,b)$.

Вираз $g(a,b)$ визначає ступінь того, наскільки $a\in\widetilde{A}$ «менше», ніж $b\in\widetilde{B}$. Результат виконання операції порівняння у розумінні нечіткого відношення переваги “>” для заданих нечітких значень $a\in\widetilde{A}, b\in\widetilde{B}$ відповідає результату порівняння у розумінні нечіткого відношення переваги “<” для чисел $b\in\widetilde{B}$ і $a\in\widetilde{A}$. Порівняння у розумінні відношення “=” приводить до необхідності пошуку перетину інтервально заданих носіїв обох заданих нечітких трикутних значень $a\in\widetilde{A}, b\in\widetilde{B}$. В усіх випадках, коли існує числова множина, на якій функція належності операції порівняння відмінна від 0, результат вважається істинним, інакше – хибним.

3. Послідовність дій в операторах *if*, *switch*, *while* з умовними ВИРАЗами, що

оперують з нечіткими числами, використовують результати операцій порівняння, а оператор повторень визначеної кількості ітерацій *for* може мати декілька інтерпретацій. Розглянемо послідовно різні варіанти семантики використання оператора *for* з блоками E1, E2, E3, що містять нечіткі числа.

Позначимо результат роботи оператора for (int i=1; i<=n; i++) як $Rfor(n)$. Тоді при роботі з нечіткими числами оператор циклу *for* може записуватися як:

- оператор *for* з змінною циклу *fuzzy int.*

Для оператора *for (fuzzy int i=1; i<=n; i++)* передбачається, що змінна *i* пробігає значення від *0* до *n*, при цьому *n* вважається нечітким трикутним числом з інтервалом представлення носія у формі $[P_{-1}(n), P_{+1}(n)]$, де $P_{-1}(\cdot)$, $P_{+1}(\cdot)$- попереднє та наступне відносно заданого цілого числа прості числа. Результатом виконання такого оператора вважається нечітке трикутне значення з лінійною трикутною функцією належності, яке визначено на інтервалі, що містить послідовні значення, отримані відповідно для різних інтервалів змінної циклу $i \in [1, P_{-1}(n)]$, …, $i \in [1, n]$, …, $i \in [1, P_{+1}(n)]$. Формально цей інтервал можна записати у вигляді

$$[\min(Rfor(P_{-1}(n)),..., Rfor(P_{+1}(n))), \max(Rfor(P_{-1}(n)),..., Rfor(P_{+1}(n)))]. \qquad (2.48)$$

У цьому випадку значення функції належності визначаються відповідними величинами функції належності числових елементів нечіткої величини *n*.

- оператор *fuzzy for* з змінною циклу *int.*

Семантика оператора *fuzzy for (int i=1; i<=n; i++)* передбачає, що змінна *i* пробігає значення від *0* до *n*, а результатом виконання такого оператора буде нечітке трикутне значення з лінійною трикутною функцією належності, яке визначено на інтервалі $[P_{-1}(Rfor(n)), P_{+1}(Rfor(n))]$. Значення функції належності розраховуються, виходячи з її лінійності та додаткових умов $\mu(Rfor(n)) = 1$, $\mu(P_{-1}(Rfor(n))) = 0$, $\mu(P_{+1}(Rfor(n))) = 0$.

- оператор *fuzzy for* з змінною циклу *fuzzy int.*

Оператор *fuzzy for (fuzzy int i=1; i<=n; i++)* передбачає, що змінна i пробігає значення від 0 до n, яке вважається нечітким трикутним числом з інтервалом представлення $[P_{-1}(n), P_{+1}(n)]$. Результатом виконання такого оператора буде нечітке трикутне значення з лінійною трикутною функцією належності, яке визначено на інтервалі $[P_{-1}(\min_{s\in S(n)}(s)); P_{+1}(\max_{s\in S(n)}(s))]$, де множина $S(n)=\{Rfor(P_{-1}(n)),..., Rfor(P_{+1}(n))\}$, а відповідні значення функції належності визначаються з урахуванням її лінійності та умов $\mu(P_{-1}(\min_{s\in S(n)}(s)))=0$, $\mu(P_{+1}(\max_{s\in S(n)}(s)))=0$ і $\mu(Rfor(n))=1$.

Приклади використання описаних нечітких операторів при створенні програм обробки нечітких даних наведено у додатку А.

2.5. Висновки до другого розділу

У розділі розглянуто спеціальні послідовності простих чисел, їх властивості, введено операції на даних послідовностях. Запропоновано алгоритм для наближення довільного раціонального числа за допомогою елементів введених послідовностей простих чисел. Розглянуто множину невід’ємних раціональних чисел, які представляються у вигляді відношення двох елементів з розглянутих послідовностей. Для цієї множини отримано нижню і верхню спряжені множини, доведено твердження для оцінок інтервалів розміщення найближчих до заданого цілого простих чисел. Викладено методику подання цілих та дійсних нечітких чисел. Розроблено спосіб формалізації процесу динаміки функцій належності станів нечіткої дискретної системи. Запропоновано модифікацію базової схеми алгоритму Меркла-Хелмана шифрування повідомлень на основі нечіткого підходу, що сприяє підвищенню криптостійскості алгоритму. На основі формування нечітких представлень і формалізації нечітких операцій вибору за кількісними атрибутами узагальнено поняття нечітких баз даних для обробки слабо-формалізованої інформації. Сформульовано розширення синтаксису та семантики мови С для реалізації програмних засобів нечіткого моделювання. Отримані результати дозволили обгрунтувати методику застосування трикутних нечітких чисел у вигляді інтервалів, межі яких вибираються з елементів спеціальних послідовностей простих чисел.

РОЗДІЛ 3.
СКЛАДЕНІ НЕЧІТКІ ЧИСЛА ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1. Аксіоматика складених нечітких чисел

Традиційно в якості універсальної множини X розглядається довільна підмножина скінченновимірного простору R^N: $X \subseteq R^N$, $x = (x_1,..., x_N) \in R^N$. У випадку $X \subseteq R^1$ нечітка множина $\tilde{A}$ містить сукупність пар, що складаються з двох скалярних значень $x \in R^1$ та $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

Нехай задано сукупність нечітких множин $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$, що визначені у відповідних універсальних множинах $X_1, \ldots, X_m$, де $X_i \subseteq R^1, i = \overline{1,m}$. Тоді можна говорити, що задано множину нечітких чисел. Будемо вважати, що кожне з них має трикутний вигляд, тобто $\tilde{A}_i = \{(a_i, b_i, c_i)\}$, $a_i \le b_i \le c_i$, $i = \overline{1,m}$, з лінійними функціями належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ вигляду (1.22).

Розглянемо універсальну множину X у вигляді декартового добутку $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$. Сформуємо множину

$$\tilde{A}^m = \{(x^1, \mu_{\tilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2)), ..., (x^m, \mu_{\tilde{A}_m}(x^m))\}, \tag{3.1}$$

де $x^i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$.

Означення 3.1. Множину $\tilde{A}^m$ назвемо складеним нечітким числом в універсальній множині $\mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$.

Скінченний набір складених нечітких чисел $\tilde{A}^m$ у множині $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$ позначимо $K(\tilde{A}^m)$, $|K(\tilde{A}^m)| = k$.

Означення 3.2. Множину

$$L_0^m = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) > 0, \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) > 0, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) > 0\}, \quad (3.2)$$

$$L_0^m \subseteq X_1 \times X_2 \times ... \times X_m \ ,$$

будемо називати носієм складеного нечіткого числа $\tilde{A}^m$.

Означення 3.3. Множину

$$L^m(\alpha) = \{x^1 \in X_1, x^2 \in X_2, ..., x^m \in X_m : \mu_{\tilde{A}_1}(x^1) \geq \alpha, \ \mu_{\tilde{A}_2}(x^2) \geq \alpha, ..., \mu_{\tilde{A}_m}(x^m) \geq \alpha\} \quad (3.3)$$

назвемо множиною рівня $\alpha \in (0,1]$ складеного нечіткого числа $\tilde{A}^m$.

Тоді множини $L_{0_i} = \{x \in X_i : \mu_{\tilde{A}_i}(x) > 0\}, i = \overline{1,m}$, будуть носіями відповідних нечітких чисел $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$, множини $L_i(\alpha) = \{x \in X_i : \mu_{\tilde{A}_i}(x) \geq \alpha\}$, $i = \overline{1,m}$, - множинами рівня $\alpha \in (0,1]$ нечітких чисел $\tilde{A}_i, i = \overline{1,m}$, і справедливі такі рівності:

$$L_0^m = L_{0_1} \times L_{0_2} \times ... \times L_{0_m}, \quad (3.4)$$

$$L^m(\alpha) = L_1(\alpha) \times L_2(\alpha) \times ... \times L_m(\alpha). \quad (3.5)$$

Таким чином, складене нечітке число є нечіткою множиною з обмеженим носієм, якщо всі нечіткі числа $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_m$ мають обмежений носій, або, іншими словами, всі множини $L_{0_1}, \ldots, L_{0_m}$ - обмежені.

Складене нечітке число $\tilde{A}^m$ може буде порожнім: $\tilde{A}^m = \varnothing \Leftrightarrow \tilde{A}^m = \{(x^1, 0), (x^2, 0), ..., (x^m, 0)\}$, $\forall x^i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$. Це має місце у випадку, якщо вона складається з елементів $x^i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$, що гарантовано не належать усім нечітким множинам $\tilde{A}_i, i = \overline{1,m}$.

Означення 3.4. Нечіткі числа $\widetilde{A}_i$, $i=\overline{1,m}$, будемо називати нечіткими проекціями складених нечітких чисел, що належать $K(\widetilde{A}^m)$.

Означення 3.5. Складене нечітке число $\widetilde{A}^{m-1}$ декартового добутку універсальних множин $X_1 \times \ldots \times X_{k-1} \times X_{k+1} \times \ldots \times X_m$, назвемо перерізом сукупності складених нечітких чисел $K(\widetilde{A}^m)$ за k-ою компонентою, $k=\overline{1,m}$.

Розглянемо два довільних складених нечітких числа

$$\widetilde{U}^m = \{(x^1, \mu^U_{\widetilde{A}_1}(x^1)), (x^2, \mu^U_{\widetilde{A}_2}(x^2)), \ldots, (x^m, \mu^U_{\widetilde{A}_m}(x^m))\},$$

$$\widetilde{V}^m = \{(y^1, \mu^V_{\widetilde{A}_1}(y^1)), (y^2, \mu^V_{\widetilde{A}_2}(y^2)), \ldots, (y^m, \mu^V_{\widetilde{A}_m}(y^m))\}.$$

Обчислимо величину $\gamma = \min\limits_{i=\overline{1,m}} \min \left\{ \mu^U_{\widetilde{A}_i}(x^i), \mu^V_{\widetilde{A}_i}(y^i) \right\}$, яка є мінімальним значенням серед значень мір належності окремих елементів обох множин $\widetilde{U}^m, \widetilde{V}^m$. Це значення дозволяє побудувати дві множини рівня γ у вигляді звичайних множин $L^m_{\widetilde{U}}(\gamma), L^m_{\widetilde{V}}(\gamma)$, що визначають точки універсальної множини $X = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m} X_i$, між якими може бути обчислена евклідова відстань $d = \left\| L^m_{\widetilde{U}}(\gamma) - L^m_{\widetilde{V}}(\gamma) \right\|$.

Означення 3.6. Нечітка множина точок за Уонгом

$$\widetilde{D}(\widetilde{A}^m) = \{(d,\gamma) : d = \left\| L^m_{\widetilde{A}}(\gamma) \right\|,\ \gamma = \min_{i=\overline{1,m}} \mu_{\widetilde{A}_i}(x^i) \in (0,1]\}, \qquad (3.6)$$

де $\|\cdot\|$ - евклідова норма простору R^m, визначає метрику на множині $K(\widetilde{A}^m)$.

Таким чином, кожна складене нечітке число $\widetilde{A}^m$ «вимірюється» за допомогою нечіткої величини $\widetilde{D}(\widetilde{A}^m)$, а для знаходження нечіткої відстані $\rho(\widetilde{U}^m, \widetilde{V}^m)$ між довільними складеними нечіткими числами $\widetilde{U}^m, \widetilde{V}^m$ можна використати нечітку величину

$$\rho(\widetilde{U}^m, \widetilde{V}^m) = \{(d,\gamma) : d = \left\| L^m_{\widetilde{U}}(\gamma) - L^m_{\widetilde{V}}(\gamma) \right\|, \gamma = \min_{Z \in \{U,V\}, i=\overline{1,m}} \mu^Z_{\widetilde{A}_i}(x^i)\}, \qquad (3.7)$$

де $L^m_{\widetilde{U}}(\gamma)$, $L^m_{\widetilde{V}}(\gamma)$ - множини рівня $\gamma \in (0,1]$ складених нечітких чисел $\widetilde{U}^m, \widetilde{V}^m$ відповідно.

3.2. Порівняння відстаней між складеними нечіткими числами

Враховуючи введене поняття відстані на множині $K(\tilde{A}^m)$, для порівняння відстаней між двома довільними парами складених нечітких чисел використаємо нечітке відношення переваги.

Нечітке відношення переваги для традиційних нечітких множин [18] формулюється на основі порівняння відстаней нечітких множин до деякої наперед заданої чіткої множини і знаходженні компромісного значення в процесі вибору найменшої з них. Розширемо цей підхід на випадок складених нечітких чисел.

Нехай $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}_1^m, \tilde{V}_1^m)$, $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}_2^m, \tilde{V}_2^m)$ - нечіткі відстані між складеними нечіткими числами $\tilde{U}_1^m, \tilde{V}_1^m$ та $\tilde{U}_2^m, \tilde{V}_2^m$ відповідно. Визначимо ту нечітку відстань з двох заданих, яка є меншою у розумінні нечіткого відношення переваги “<”. Для визначення «найменшої» відстані, як правило, користуються нечіткими відношеннями переваги, введеними Орловським [18]. В рамках даного підходу вважається, що нечітке відношення переваги $g(a,b)$ для довільних нечітких елементів $a \in \tilde{A}, b \in \tilde{B}$ за умови $\mu_g(a,b) = \min\{\mu_{\tilde{A}}(a), \mu_{\tilde{B}}(b), \mu_{\tilde{A}\times\tilde{B}}(a,b)\} > 0$ визначає співвідношення у вигляді $a < b$ із ступенем $g(a,b) = \mu_g(a,b)$.

За його допомогою можна порівняти відстані $\tilde{\rho}_1 = \rho(\tilde{U}_1^m, \tilde{V}_1^m)$ та $\tilde{\rho}_2 = \rho(\tilde{U}_2^m, \tilde{V}_2^m)$: вираз $g(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2)$ визначає ступінь того, наскільки $\tilde{\rho}_1$ «менше», ніж $\tilde{\rho}_2$. Це також надає можливість визначити “найближчий” до заданого складеного нечіткого числа $\tilde{Z}^0$ елемент $\tilde{Z}^*$, де $\tilde{Z}^*$ - складене нечітке число на декартовому добутку $X = \times_{i=1}^{m} X_i$, значення функцій належності якого для кожного $x^i \in X_i$, $i = \overline{1,m}$, визначаються з співвідношень

$$\mu_{\tilde{A}_i}^{Z^*}(x_i) = \min_{x \in X_i}(1 - \mu_T(x_i, x)) = 1 - \max_{x \in X_i} \mu_T(x_i, x),\ i = \overline{1, m},$$

де через T позначено нечітке відношення строгої переваги, що відповідає $g(a,b)$, $a, b \in X_i$, $i = \overline{1, m}$

$$\mu_T(a,b) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \mu_g(a,b) < \mu_g(b,a) \\ \mu_g(a,b) - \mu_g(b,a), \text{ інакше} \end{cases}.$$

3.3. Методи кластеризації даних, заданих у формі складених нечітких чисел

Традиційна задача групування даних у відносно однорідні групи, що виникає в самих різних сферах науки, економіки, соціуму та ін., включає в себе проблему виділення кластерів та задачу знаходження еталонних вузлів. В реалізації методів кластеризації важливу роль грають показники належності даних до групи, способи обчислення відстаней між елементами, вагові коефіцієнти, що залежать від конкретної предметної області та спостережень в рамках цієї області. Методи мають різну обчислювальну складність та різний ступінь ефективності при вирішенні конкретних прикладних задач.

Для проведення процесу кластеризації існує багато підходів, більшість з яких є евристичними методами, що базуються на певних алгоритмах дій дослідника і не вимагають складних статистичних розрахунків. Однак, їх використання у випадку обробки інформації нечіткого характеру суттєво ускладнюється або взагалі стає неможливим через специфічне представлення нечіткості.

Розробка конструктивного алгоритму для кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю складених нечітких чисел з $K(\widetilde{A}^m)$, включає в себе формалізацію способів пошуку кластерного центру множини даних та реалізацію процедури групування нечітких чисел в межах заданої кількості кластерів.

У літературі, присвяченій проблемам кластеризації [71-73], найчастіше розглядаються три алгоритми: C-means, пікового групування та різницевого групування. Ці методи представляють собою кардинально різні підходи до вирішення проблеми кластеризації. Як правило, перший з них потребує від дослідника точного знання кількості кластерів, на базі чого будується алгоритм. Другий метод вимагає багато часу для виконання, бо має багато нетривіальних умов для перевірки щодо належності елемента до кластеру та побудови самого кластеру. Третій – найбільш оптимальний, але для його застосування необхідне детальне знання специфічних залежностей в системі для встановлення значень важливих параметрів, без яких метод не дає бажаного результату.

Задачу кластеризації нечітких даних, представлених сукупністю нечітких множин, за допомогою алгоритму нечіткого групування C-means було розглянуто в роботі [74].

На основі введеного поняття відстані між складеними нечіткими числами та способу їх порівняння можна сформулювати алгоритми нечіткого групування даних, поданих у вигляді сукупності складених нечітких чисел $\{\tilde{A}^{m(j)}, j=\overline{1,p}\}$ з $K(\tilde{A}^m)$. Будемо вважати, що цю сукупність можна згрупувати в k кластерів.

На початку процесу задається величина $\gamma \in (0,1]$, яка буде визначати рівень нечіткості даних, що розглядаються. Припустимо, що складені нечіткі числа $\tilde{A}^{m(j)}$, $j=\overline{1,q}$, $q \le p$, мають непорожні множини рівня $L^m(\gamma)$. Будемо розглядати їх як звичайні вектори $S(\tilde{A}^{m(j)}) = \{x^{1(j)}, x^{2(j)}, ..., x^{m(j)}\}$, $j=\overline{1,q}$.

Алгоритм пікового групування. У алгоритмі пікового групування, який був запропонований Р. Єгером та Д. Фільовим [75], розглянуто міру щільності розміщення векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, для чого генеруються так звані пікові функції. При застосуванні p вхідних векторів створюється сітка, що рівномірно накриває простір векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$. Вузли цієї сітки розглядаються як потенційні нечіткі центри

$$\tilde{C}^{m(i)} = \{(x^{1(i)}, \mu_{\tilde{A}_1}(x^{1(i)})), (x^{2(i)}, \mu_{\tilde{A}_2}(x^{2(i)})), ..., (x^{m(i)}, \mu_{\tilde{A}_m}(x^{m(i)}))\},\ i=\overline{1,k},$$

і для кожного з них розраховується пікова функція $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$,

$$M(S(\tilde{C}^{m(i)})) = \sum_{j=1}^{p} \exp\left(-\left\| S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)}) \right\|^{2b} \Big/ 2\sigma^2 \right), \tag{3.8}$$

де $\left\| S(\tilde{C}^{m(i)}), S(\tilde{A}^{m(j)}) \right\|$, $i=\overline{1,k}, j=\overline{1,p}$ - це евклідові відстані між парами векторів, що визначають центри $\tilde{C}^{m(i)}, i=\overline{1,k}$ та складені нечіткі числа $\tilde{A}^{m(j)}$, $j=\overline{1,p}$, відповідно, коефіцієнт σ – це константа, що індивідуально підбирається для кожної конкретної задачі, а b – показник ступеню узагальненої функції Гауса.

Величина функції $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, розглядається як оцінка висоти пікової функції. Вона пропорційна кількості векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, що знаходяться в околі потенційного центра $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$. Мале значення $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, свідчить про те, що центр $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$, розташований в області, в якій зосереджено невелику кількість векторів $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$. Слід звернути увагу на те, що коефіцієнт σ має незначний вплив на кінцеві пропорції між $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, для різних значень $S(\tilde{C}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$, тому підбір його величини не є критичним.

Після обрахунку значень $M(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$ для усіх потенціальних центрів відбираються перші k_1 точки, що мають найбільше значення $M(S(\tilde{C}_1^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k_1}$. Для вибору наступних центрів необхідно, перш за все, виключити k_1 центрів та вузли, що розташовані в безпосередній близькості від них. Це можна зробити шляхом перевизначення пікової функції за рахунок відсікання від неї значень функції Гауса з центрами в точках $S(\tilde{C}_1^{m(l)})$, $l=\overline{1,k_1}$. Якщо цю знов визначену функцію позначити як $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, то

$$M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))=M(S(\tilde{C}^{m(i)}))-M(S(\tilde{C}_1^{m(l)}))\exp\left(-\left\|S(\tilde{C}_1^{m(l)}),S(\tilde{C}^{m(i)})\right\|^{2b}\Big/2\sigma^2\right). \quad (3.9)$$

Необхідно звернути увагу на те, що функція $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, набуває нульового значення в точках $S(\tilde{C}_1^{m(l)})$, $l=\overline{1,k_1}$. Звідси зрозуміло, що послідовне відсікання центрів (з максимальним значенням пікової функції) дозволяє виявляти та усувати наступні центри.

Процес знаходження наступних центрів $S(\tilde{C}_2^{m(l)})$, $l=\overline{k_1+1,k_2}$, $S(\tilde{C}_3^{m(l)})$, $l=\overline{k_2+1,k_3}$, …, здійснюється послідовно на модифікованих значеннях функції $M_{new}(S(\tilde{C}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, що отримуються при видаленні близького оточення центру, виявленого на попередньому етапі. Він завершується в момент локалізації усіх центрів, що використовуються в моделі. Метод пікового групування ефективний, якщо розмірність вектора $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$ невелика. В іншому випадку (за великої кількості компонент $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$), кількість потенційних центрів зростає досить швидко, і процес розрахунку чергових пікових функції стає довготривалим, а процедура малоефективною.

Алгоритм різницевого групування даних [75] – це модифікація алгоритму пікового групування, в якій усі навчальні вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, розглядаються в якості k потенційних центрів, $k=q$. Пікова функція $D(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, у цьому алгоритмі задається у вигляді

$$D(S(\tilde{A}^{m(i)}))=\sum_{j=1}^{p}\exp\left(-\left\|S(\tilde{A}^{m(i)}),S(\tilde{A}^{m(j)})\right\|^{2b}\Big/\left(\frac{r_a}{2}\right)^{2}\right),\ i=\overline{1,k}. \quad (3.10)$$

Значення коефіцієнта r_a визначає сферу сусідства. На значення $D(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, істотно впливають лише ті вектори $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$, що розташовані в межах цієї сфери. При великій щільності точок в околі $S(\tilde{A}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$, (потенційного центра) значення функції $D(S(\tilde{A}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, велике. Навпаки, її мале значення свідчить про те, що в околі $S(\tilde{A}^{m(i)})$, $i=\overline{1,k}$, незначна кількість даних. Така точка вважається «невдалим» кандидатом в центри. Після розрахунку значень пікової функції для кожної точки $S(\tilde{A}^{m(j)})$, $j=\overline{1,q}$ відбирається вектор $S(\tilde{A}^{m})$, для якого міра щільності $D(S(\tilde{A}^{m}))$ виявилась найбільшою. Саме ця точка стає першим відібраним центром $S(\tilde{C}_1^{m})$. Вибір наступного центра можливий після виключення попереднього центру і всіх точок, що лежать в його околі. Так само, як і в методі пікового групування, пікова функція перевизначається у вигляді

$$D_{new}(S(\tilde{A}^{m(i)}))=D(S(\tilde{A}^{m(i)}))-D(S(\tilde{C}_1^{m}))\exp\left(-\left\|S(\tilde{A}^{m(i)}),S(\tilde{C}_1^{m})\right\|^{2b}\Big/\left(\frac{r_a}{2}\right)^{2}\right), \quad (3.11)$$

$i=\overline{1,k}$.

При новому визначенні функції $D(S(\widetilde{A}^m))$ коефіцієнт r_b задає нове значення константи, яка окреслює сферу сусідства чергового центра. Зазвичай дотримується умова $r_b \geq r_a$. Пікова функція $D_{new}(S(\widetilde{A}^{m(i)}))$, $i=\overline{1,k}$, приймає нульове значення при $S(\widetilde{A}^{m(i)})=S(\widetilde{C}_1^{\,m})$, $i=\overline{1,k}$, і близька до нуля в найближчому околі цієї точки.

Після модифікацій значень пікової функції знаходиться наступна точка $S(\widetilde{A}^m)$**,** для якої величина $D_{new}(S(\widetilde{A}^m))$ максимальна. Ця точка стає наступним центром $S(\widetilde{C}_2^{\,m})$. Процес пошуку чергового центра поновлюється після видалення компонентів, відповідних вже отриманим точкам.

Кожен з методів має свої власні особливості та уточнення в залежності від умов застосування та його структурно-концептуальної реалізації. Головним чинником, звичайно, виступає показник конструктивності метода, що на практиці суттєво залежить від умов конкретної задачі. Результати практичного застосуван-ня методів кластеризації на заданій сітці двомірних складених нечітких чисел дозволив зробити ряд висновків.

Якщо у методі C-means необхідно обирати початкові коефіцієнти [74], що показують ступінь належності кластеру, виключно випадково, то в алгоритмі пікового групування головну роль грає покриття площини рівномірною сіткою з розмірами комірок, залежними від максимального та мінімального значень двомірних даних по-координатно. Вузли цієї сітки будуть виступати як претенденти в центри майбутніх кластерів і виявляється, що обрати розміри комірок цієї сітки також є задачею, залежною від конкретної ситуації. Дану задачу можна вирішувати за правилом Рунге, яке полягає в знаходженні такого розбиття області, при якому величина $\Delta_{2n} \approx \Theta|I_{2n}-I_n|$, (тут I_n - результат розрахунку, отриманого при використанні n вузлів по кожній координаті сітки), досягає своєї наперед заданої точності. В обчислювальних експериментах для знаходження результатів вважалось $\Theta = 1/3$. Точність правила Рунге задається користувачем в залежності від умов прикладної області.

Параметри b та σ, що використовуються у методі, також підбираються індивідуально для кожної задачі. При обрахунку експоненціального виразу для оцінки згущення точок навколо кандидата, виникає проблема нульового значення виразу для деяких претендентів (через обмеженість розміру чисел в машинній інтерпретації), тому перед тим, як підставляти отримані в перетвореннях значення в показник експоненти, їх бажано поділити на константу (в обчислювальних прикладах, що розглядалися було використано значення 1000). Крім цього, при реалізації виникає проблема врахування близькості вузла сітки – кандидата в центри кластера, що робить значення суми експоненціальних виразів дуже великим, навіть без урахування значення цієї функції для інших точок. Тому вважається за потрібне ввести обмеження на ступінь близькості можливого кандидата у центри кластера до інших точок. Як варіант, пропонується визначати мінімально допустиму відстань за правилом Рунге.

Алгоритм різницевого групування представляє собою спрощену, але більш ефективну модифікацію алгоритму пікового групування. Усі зауваження, зроблені для метода пікового групування, у цьому випадку несуттєві. Єдиним невирішеним питанням залишається значення коефіцієнта r_a, що визначає сферу сусідства. При практичному використанні це значення може також визначатися за правилом Рунге з заданою точністю. Головним же плюсом алгоритму є те, що кандидатами в центри кластерів виступають самі нечіткі вхідні дані.

Приклади результатів розв’язання задачі кластеризації станів нечіткої системи, що функціонує у двовимірному просторі [76], наведено у додатку Б.

3.4. Моделювання динаміки нечітких систем великої розмірності

Використання нечітких і складених нечітких чисел для опису ситуацій з невизначеністю знаходить широке застосування у різних прикладних галузях. Однак, слід зазначити, що в основному розглядаються системи, розмірність яких невелика. Дослідження багатовимірних систем ускладнюється не лише проблемами, пов'язаними з розмірністю, а й з відсутністю специфічних операцій декомпозиції та агрегування нечітких множин.

Розглянемо одну з можливих реалізацій процедур декомпозиції нечітких систем на підсистеми та агрегування окремих нечітких підсистем у загальну систему на основі запропонованої операції над нечіткими множинами.

Розглянемо нечітку динамічну систему S, множина станів якої описується сукупністю складених нечітких чисел $\tilde{A}_S = \{(x, \mu_S(x)), x \in X\}$, де $X \subset R^1$ - деяка універсальна множина. Припустимо, що в системі виділено дві підсистеми S_1, S_2, стани яких також мають бути представлені у вигляді нечітких чисел $\tilde{A}_{S_1} = \{(x^1, \mu_{S_1}(x^1)), x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{A}_{S_2} = \{(x^2, \mu_{S_2}(x^2)), x^2 \in X_2\}$ універсальних множин X_1, X_2 відповідно, $X_1 \cup X_2 = X$.

Для визначення функцій належності $\mu_{S_1}(x^1): X_1 \to [0,1]$ та $\mu_{S_2}(x^2): X_2 \to [0,1]$ нечітких множин $\tilde{A}_{S_1}$ та $\tilde{A}_{S_2}$ використаємо підхід з теорії корисності. Ототожнюючи $\mu_{S_1}(x^1)$ та $\mu_{S_2}(x^2)$ з корисністю підсистем S_1, S_2, будемо представляти величини міри належності $\mu_S(x)$ у вигляді

$$\begin{aligned} \mu_S(x^1) &= [\mu_{S_1}(x^1)]^{\alpha}, x^1 \in X_1, \\ \mu_S(x^2) &= [\mu_{S_2}(x^2)]^{\beta}\, x^2 \in X_2, \end{aligned} \tag{3.12}$$

де $\alpha, \beta \geq 0$.

Знаходження величин α, β можна провести на основі методики прийняття рішення в багатокритеріальній ситуації з урахуванням важливості критеріїв [77].

Нехай елементи квадратної матриці $P = \{p_{ij}\}_{i,j=\overline{1,2}}$, $p_{ii} = 1$, $p_{ij} \geq 0,\ i, j = \overline{1,2}, i \neq j$ визначають важливості підсистем S_1, S_2. Матриця з невід'ємними елементами називається *M*-матрицею (позитивною матрицею). За теоремою Перрона-Фробеніуса [78] вона має максимальне дійсне число $\lambda(P) \geq 0$ та невід'ємний власний вектор $v(P) = (v_1, v_2)$, що відповідає власному числу $\lambda(P)$. Обираючи $\alpha = v_1, \beta = v_2$, отримуємо показники степенів в (3.12). Після цього, знаходження функцій $\mu_{S_1}(x^1), x^1 \in X_1$ та $\mu_{S_2}(x^2), x^2 \in X_2$ зводиться до розв'язання нелінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned} [\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha &= \mu_S(x^1), \\ [\mu_{S_2}(x^2)]^\beta &= \mu_S(x^2), \end{aligned} \tag{3.13}$$

з обмеженнями $\mu_{S_1}(x^1) \leq 1, x^1 \in X_1, \mu_{S_2}(x^2) \leq 1, x^2 \in X_2$.

Процедура агрегування нечітких множин проводиться за аналогічним принципом. Припустимо, що є дві нечіткі множини $\tilde{A}_{S_1}$ та $\tilde{A}_{S_2}$, що описують стани нечітких систем S_1, S_2 розмірностей m_1 та m_2 відповідно. Функції $\mu_{S_1}(x^1)$ та $\mu_{S_2}(x^2)$ є значеннями мір належності елементів $x^1, x^1 \in X_1$ та $x^2, x^2 \in X_2$ відповідним нечітким множинам, X_1, X_2 - універсальні множини значень станів систем, $X_1 \cap X_2 = \varnothing$.

Розглянемо універсальний простір $X_1 \cup X_2 = X$ розмірності $m = m_1 + m_2$, який містить значення станів нечіткої системи S, складеної з підсистем S_1, S_2. Визначимо правило побудови значень функції належності $\mu(x)$ на основі величин функцій належності $\mu_{S_1}(x_1)$ та $\mu_{S_2}(x_2)$ як мір належності станів підсистем S_1, S_2. Для кожного $x = (x^1, x^2) \in X$ значення міри належності визначимо за допомогою співвідношень (3.12) $\mu_S(x^1) = [\mu_{S_1}(x^1)]^\alpha, x^1 \in X_1$, $\mu_S(x^2) = [\mu_{S_2}(x^2)]^\beta,\ \ x^2 \in X_2$, де $\alpha, \beta \geq 0$. Величини α, β визначимо на основі наведеної вище методики прийняття рішення в багатокритеріальній ситуації з урахуванням важливості критеріїв. Визначаючи власний вектор $v(P) = (v_1, v_2)$ позитивної матриці P, елементи якої задають рівні важливості підсистем, отримаємо $\alpha = v_1, \beta = v_2$ та обчислюємо значення функції належності $\mu(x)$ для заданого $x \in X$.

Запропоновані процедури декомпозиції та агрегування дозволяють вирішити задачу дослідження динаміки багатомірних нечітких систем наступного вигляду

$$\tilde{X}_{k+1} = R_k \circ \tilde{X}_k \tag{3.14}$$

де $\tilde{X}_k = \tilde{X}(t_k)$ - складні нечіткі числа, що використовуються для опису станів системи, $\tilde{X}_0 = \tilde{X}(t_0)$ - складне нечітке число, що визначає початковий стан системи, $R_k = R(t_k)$ - оператори переходу, що визначають динаміку системи, $t_k = k$, $k = 0,1,...,$ - моменти часу, о - операція композиції.

Для дослідження системи (3.14) застосуємо підхід, який часто використову-ється для аналізу систем великої розмірності. Вважатимемо, що система складається з двох підсистем. При цьому система (3.14) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{X}^{(1)}_{k+1} &= \mathrm{R}^{(1)}_k \circ \tilde{X}^{(1)}_k + F^{(1)}_k \circ \tilde{X}^{(2)}_k, \\ \tilde{X}^{(2)}_{k+1} &= \mathrm{R}^{(2)}_k \circ \tilde{X}^{(2)}_k + F^{(2)}_k \circ \tilde{X}^{(1)}_k, \end{aligned} \tag{3.15}$$

де $R^{(1)}_{\mathrm{k}}, R^{(2)}_{\mathrm{k}}$ – нечіткі відображення з X_i в X_i, $i = 1,2$, відповідно, що визначають переходи станів підсистем, $k = 0,1,2,...$, а $F^{(1)}_{\mathrm{k}}, F^{(2)}_{\mathrm{k}}$, $k = 0,1,2,...$, - визначають взаємний вплив підсистем.

Нехай нечіткі відображення $R^{(1)}_{\mathrm{k}}, R^{(2)}_{\mathrm{k}}$, $k = 0,1,2,...$, задаються однорідними операторами, а дію операторів $F^{(1)}_{\mathrm{k}}(\cdot), F^{(2)}_{\mathrm{k}}(\cdot)$ можна записати у вигляді $F^{(1)}_{\mathrm{k}} \circ \tilde{X}^{(2)}_k = f^{(1)}_{\mathrm{k}}(\tilde{X}^{(2)}_k), F^{(2)}_{\mathrm{k}} \circ \tilde{X}^{(1)}_k = f^{(2)}_{\mathrm{k}}(\tilde{X}^{(1)}_k)$, $k = 0,1,2,...$, відповідно, де $f^{(i)}_k(\cdot)$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2$, - неперервні оператори.

Припустимо, що ізольовані підсистеми

$$\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)} = R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)},$$
$$\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(2)} = R_k^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(2)}, \tag{3.16}$$

з початковими значеннями

$$\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)} = \{(x^1, \mu_0^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}, \quad \tilde{\tilde{X}}_0^{(2)} = \{(x^2, \mu_0^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$$

мають розв'язки у вигляді складених нечітких чисел $\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)} = \{(x^1, \bar{\mu}_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{\tilde{X}}_k^{(2)} = \{(x^2, \bar{\mu}_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$,

Розглянемо динаміку системи (3.15) з початковими даними $\tilde{X}_0^{(1)} = \tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}$, $\tilde{X}_0^{(2)} = \tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}$. Для $k = 0$ маємо

$$\tilde{X}_1^{(1)} = R_0^{(1)} \circ \tilde{X}_0^{(1)} + f_0^{(1)}(\tilde{X}_0^{(2)}) = R_0^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_0^{(1)} + f_0^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}) = \tilde{\tilde{X}}_1^{(1)} + f_0^{(1)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(2)}),$$

$$\tilde{X}_1^{(2)} = R_0^{(2)} \circ \tilde{X}_0^{(2)} + f_0^{(2)}(\tilde{X}_0^{(1)}) = R_0^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_0^{(2)} + f_0^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}) = \tilde{\tilde{X}}_1^{(2)} + f_0^{(2)}(\tilde{\tilde{X}}_0^{(1)}),$$

Використаємо це представлення для знаходження наступного значення. Отримуємо

$$\tilde{X}_2^{(1)} = R_1^{(1)} \circ \tilde{X}_1^{(1)} + f_1^{(1)}(\tilde{X}_1^{(2)}) = R_1^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_1^{(1)} + R_1^{(1)} \circ f_0^{(1)}(\tilde{X}_0^{(2)}) + f_1^{(1)}(\tilde{X}_1^{(2)}) =$$

$$= \tilde{\tilde{X}}_2^{(1)} + R_1^{(1)} \circ f_0^{(1)}(\tilde{X}_0^{(2)}) + f_1^{(1)}(\tilde{X}_1^{(2)}),$$

$$\tilde{X}_2^{(2)} = R_1^{(2)} \circ \tilde{X}_1^{(2)} + f_1^{(2)}(\tilde{X}_1^{(1)}) = R_1^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_1^{(2)} + R_1^{(2)} \circ f_0^{(2)}(\tilde{X}_0^{(1)}) + f_1^{(2)}(\tilde{X}_1^{(1)}) =$$

$$= \tilde{\tilde{X}}_2^{(2)} + R_1^{(2)} \circ f_0^{(2)}(\tilde{X}_0^{(1)}) + f_1^{(2)}(\tilde{X}_1^{(1)}).$$

Продовжуючи цей процес далі, маємо

$$\tilde{X}_{k+1}^{(i)} = \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)} + z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \tilde{X}_k^{(3-i)}), \ k = 0,1,2,..., \tag{3.17}$$

де $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \tilde{X}_k^{(3-i)}) = \sum_{j=1}^{k} R_k^{(i)} \circ R_{k-1}^{(i)} \circ ... \circ R_{k-j+1}^{(i)} \circ f_{k-j}^{(i)}(\tilde{X}_{k-j}^{(3-i)}) + f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})$, $i = 1,2$.

Таким чином, відхилення розв'язків $\tilde{X}_k^{(1)} = \{(x^1, \mu_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$ та $\tilde{X}_k^{(2)} = \{(x^2, \mu_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$ системи (3.15) від відповідних розв'язків $\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)} = \{(x^1, \bar{\mu}_k^{(1)}(x^1)) : x^1 \in X_1\}$, $\tilde{\tilde{X}}_k^{(2)} = \{(x^2, \bar{\mu}_k^{(2)}(x^2)) : x^2 \in X_2\}$ ізольованих підсистем (3.16) для кожного $k = 0,1,2,...$ визначається нечіткими величинами $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)},..., \tilde{X}_k^{(3-i)})$.

Неважко перевірити, що зміну нечітких величин $z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)},..., \tilde{X}_k^{(3-i)})$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2$, можна описати у вигляді різницевих рівнянь

$$z_{k+1}^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)},..., \tilde{X}_k^{(3-i)}, \tilde{X}_{k+1}^{(3-i)}) = R_{k+1}^{(i)} \circ z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)},..., \tilde{X}_k^{(3-i)}) + f_{k+1}^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)}),$$
$$z_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}) = f_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}),\ k = 0,1,2,...,\ i = 1,2. \tag{3.18}$$

Використовуючи визначення відстані $\rho(\tilde{U}^m, \tilde{V}^m)$ між двома довільними складеними нечіткими числами $\tilde{U}^m, \tilde{V}^m$ у вигляді (3.7), отримуємо наступне твердження.

Твердження 3.1. Припустимо, що у системі (3.15) оператори $R_k^{(1)}, R_k^{(2)}$, $k = 0,1,2,...$, є стискаючими і для $\forall k = 0,1,2,...$,

$$\rho(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)}, f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})) \le g^{(i)}(\rho(\tilde{\tilde{X}}_k^{(i)}, \tilde{X}_k^{(i)})), \tag{3.19}$$

де $g^{(i)}(w_k^{(i)})$, $i = 1,2$, $k = 0,1,2,...$, – неперервні додатні функції на області визначення.

Позначимо через $r_k^{(i)}(w_0^{(i)})$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2$, – максимальні розв'язки скалярних різницевих рівнянь:

$$w_{k+1}^{(i)} = \lambda_k^{(i)} w_k^{(i)} + g^{(i)}(w_k^{(i)}),\ w_0^{(i)} \ge 0,\ 0 < \lambda_k^{(i)} \le 1, k = 0,1,2,..., i = 1,2. \tag{3.20}$$

Тоді для кожного $i = 1,2$, $k = 0,1,2,...$, маємо

$$\rho(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)}, f_k^{(i)}(\tilde{X}_k^{(3-i)})) \le r_k^{(i)}(w_0^{(i)}), \tag{3.21}$$
$$\rho(\tilde{\tilde{X}}_1^{(i)}, f_0^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)})) \le w_0^{(i)}.$$

Доведення. Умови твердження для кожної підсистеми аналогічні, тому їх можна отримати окремо. Оберемо для визначеності $i = 1$. Позначимо $m_k^{(1)} = \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)}\right)$. Оцінемо величину $m_{k+1}^{(1)}$. Маємо

$$m_{k+1}^{(1)} = \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)}, \tilde{X}_{k+1}^{(1)}\right) \le \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)}, \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)} + z_k^{(1)}\right) \le \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)}, z_k^{(1)}\right) = \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, z_k^{(1)}\right) =$$

$$= \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ z_{k-1}^{(1)} + f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})\right) \le \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ z_{k-1}^{(1)}\right) + \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})\right) =$$

$$= \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{(1)}\right) + \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, f_k^{1}(\tilde{X}_k^{(2)})\right).$$

Для стискаючих операторів $R_k^{(1)}$, $k = 0,1,2,...$, справедливі співвідношення

$$\rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{1}, R_k^{(1)} \circ \tilde{X}_k^{1}\right) \le \lambda_k^{(1)} \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_k^{1}, \tilde{X}_k^{1}\right), \ k = 0,1,2,... ,$$

де $0 < \lambda_k^{(1)} \le 1$ - величини норм відповідних операторів $R_k^{(1)}$, $k = 0,1,2,...$.

Враховуючи цю нерівність та припущення (3.19), отримуємо:

$$m_{k+1}^{(1)} \le \lambda_k^{(1)} \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)}\right) + \rho\left(R_k^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, f_k^{(1)}(\tilde{X}_k^{(2)})\right) \le \lambda_k^{(1)} \rho\left(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)}\right) + g^{(1)}(\rho(\tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \tilde{X}_k^{(1)})) =$$

$$= \lambda_k^{(1)} m_k + g^{(1)}(m_k),$$

або
$$m_{k+1} \le \lambda_k^{(1)} m_k + g^{(1)}(m_k), \ k = 0,1,2,....$$

Для другої підсистеми доведення твердження проводиться аналогічно.

Таким чином, якщо виконуються умови твердження 3.1, взаємний вплив підсистем може бути обмежений деякою послідовністю $r_k^{(i)}(w_0^{(i)}) \ge 0, \ k = 0,1,2,..., \ i = 1,2$.

Отже, для нечіткої багатовимірної системи (3.14) дослідження поведінки її розв’язків може бути проведене на основі декомпозиції системи на дві підсистеми з подальшим аналізом динаміки розв’язків ізольованих підсистем.

У випадку, коли система (3.14) є автономною, тобто $\tilde{X}_{k+1} = R \circ \tilde{X}_k$, $k = 0,1,2,...$, і, відповідно, $R_k^{(i)} = R^{(i)}$, $F_k^{(i)} = F^{(i)}$, $f_k^{(i)}(\cdot) = f^{(i)}(\cdot)$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2$, ізольовані підсистеми мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(1)} &= R^{(1)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(1)}, \\ \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(2)} &= R^{(2)} \circ \tilde{\tilde{X}}_k^{(2)}, \end{aligned} \qquad (3.22)$$

а динаміку станів системи можна записати у вигляді

$$\tilde{X}_{k+1}^{(i)} = \tilde{\tilde{X}}_{k+1}^{(i)} + z_k^{(i)}(\tilde{X}_0^{(3-i)}, \tilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \tilde{X}_k^{(3-i)}), \ k = 0,1,2,..., \ i = 1,2, \qquad (3.23)$$

де $z_k^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_k^{(3-i)}) = \sum_{j=1}^{k} \left(\mathop{\mathrm{o}}_{s=1}^{j} R^{(i)} \right) \mathrm{o}\, f^{(i)}(\widetilde{X}_{k-j}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\widetilde{X}_k^{(3-i)})$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2$.

Формула (3.18), яка визначає динаміку змін нечітких величин відхилень $z_k^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_k^{(3-i)})$ розв’язків системи (3.15) від розв’язків ізольованих підсистем (3.16), буде мати вигляд

$$z_{k+1}^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_k^{(3-i)}, \widetilde{X}_{k+1}^{(3-i)}) = R^{(i)}\, \mathrm{o}\, z_k^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_k^{(3-i)}) + f^{(i)}(\widetilde{X}_k^{(3-i)}) =$$

$$= R^{(i)}\, \mathrm{o} R^{(i)}\, \mathrm{o} z_{k-1}^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_{k-1}^{(3-i)}) + R^{(i)}\, \mathrm{o}\, f^{(i)}(\widetilde{X}_{k-1}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\widetilde{X}_k^{(3-i)}) = ... =$$

$$= \left(\mathop{\mathrm{o}}_{j=1}^{k+1} R^{(i)} \right) \mathrm{o}\, z_0^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}) + \sum_{j=1}^{k} \left(\mathop{\mathrm{o}}_{s=1}^{j} R^{(i)} \right) \mathrm{o}\, f^{(i)}(\widetilde{X}_{k-j+1}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\widetilde{X}_{k+1}^{(3-i)}),$$

(3.24)

$$z_0^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}) = f^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}), \quad k = 0,1,2,..., \ i = 1,2,$$

а скалярні різницеві рівняння (3.20) запишуться у вигляді

$$w_{k+1}^{(i)} = \lambda^{(i)} w_k^{(i)} + g^{(i)}(w_k^{(i)}),\ w_0^{(i)} \geq 0,\ 0 < \lambda^{(i)} \leq 1, k = 0,1,2,..., i = 1,2. \qquad (3.25)$$

Якщо у випадку автономної системи (3.22) дію кожного з операторів підсистем $R^{(i)}$, $i = 1,2$, формалізувати у вигляді матрично-векторних операцій з діагональними квадратними матрицями $D^{(i)}$, $i = 1,2$, відповідно, можна записати співвідношення, аналогічні (3.22)- (3.24):

$$\begin{aligned} \widetilde{\widetilde{X}}_{k+1}^{(1)} &= D^{(1)}\, \mathrm{o}\, \widetilde{\widetilde{X}}_k^{(1)}, \\ \widetilde{\widetilde{X}}_{k+1}^{(2)} &= D^{(2)}\, \mathrm{o}\, \widetilde{\widetilde{X}}_k^{(2)}, \end{aligned} \qquad (3.26)$$

$$\widetilde{X}_{k+1}^{(i)} = \widetilde{\widetilde{X}}_{k+1}^{(i)} + z_k^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_k^{(3-i)}), \ k = 0,1,2,..., \ i = 1,2,$$

де $z_k^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, ..., \widetilde{X}_k^{(3-i)}) = \sum_{j=1}^{k} \left(D^{(i)}\right)^j f^{(i)}(\widetilde{X}_{k-j}^{(3-i)}) + f^{(i)}(\widetilde{X}_k^{(3-i)})$, $k = 0,1,2,...$, $i = 1,2$.

$$z_{k+1}^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}, \widetilde{X}_1^{(3-i)}, \ldots, \widetilde{X}_k^{(3-i)}, \widetilde{X}_{k+1}^{(3-i)}) = \left[\text{Þ}^{(i)}\right]^{\overline{k+1}} z_0^{(i)}(\widetilde{X}_0^{(3-i)}) + \sum_{j=1}^{k} \left[\text{Þ}^{(i)}\right]^{\overline{j}} \circ f^{(i)}(\widetilde{X}_j^{(3-i)}) + f^{(i)}(\widetilde{X}_k^{(3-i)}),$$

$k = 0,1,2,\ldots,\ i = 1,2$.

а скалярні різницеві рівняння, що визначаються твердженням 3.1, як і раніше, будуть мати вигляд (3.25).

Таким чином, дослідження процесів у складних нечітких системах, що функціонують в умовах невизначеності і опис станів в яких подається у формі складених нечітких трикутних чисел, може бути проведене у вигляді послідовного виконання двох етапів: представлення системи (3.14) у вигляді сукупності окремих підсистем та їх подальше дослідження.

3.5. Висновки до третього розділу

Третій розділ присвячено визначенню та застосуванню складених нечітких чисел трикутного вигляду. В розділі визначено поняття складених нечітких чисел, досліджено їх властивості, сформульовано поняття відстані між довільними складеними нечіткими числами на основі побудови множин рівня спеціального вигляду, розроблено схему для порівняння відстаней, вирішено задачу класте-ризації за умов подання даних у формі складених нечітких чисел, запропоновано математично обгрунтований декомпозиційний підхід для дослідження поведінки нечітких багатомірних систем, що функціонують в умовах невизначеності.

Послідовно розглянуто моделі, властивості розв’язків та непererервність розв’язків нечітких різницевих систем, стани яких описуються за допомогою складених нечітких чисел. Запропоновано підхід, що базується на декомпозиції систем на підсистеми. Сформульовано і доведено твердження про адекватність поведінки розв’язків вихідної системи та отриманих нечітких підсистем.

РОЗДІЛ 4.
ЗАСТОСУВАННЯ НЕЧІТКОГО ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛОКАЛЬНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

Даний розділ присвячений розгляду ряду алгоритмів, об'єднаних загальною ідеєю локальної фільтрації ковзаючим вікном, або апертурою. Термін «локальна фільтрація» підкреслює той факт, що розміри вікна по обох осях менше відповідних розмірів фільтрованого зображення.

Цілі локальної фільтрації зазвичай полягають в поліпшенні якості зображення; найчастіше це усунення перешкод або підвищення різкості, підкреслення контурів [79, 80]. Локальна фільтрація надає для цих цілей достатньо широкий арсенал засобів обробки, від алгоритмів усереднення за околом (інтегрування) до операцій локального диференціювання і підкреслення контурів. Розглянемо деякі, найбільш вживані алгоритми фільтрації.

4.1. Принципи локальної фільтрації

Фільтрація зображень має багато спільного з добре відомою фільтрацією сигналів у радіотехніці [81]. Відмінність полягає в тому, що замість «одновимірного» фільтру, призначеного для фільтрації зашумленого сигналу однієї змінної (зазвичай - часу), для фільтрації зображень застосовуються двовимірні фільтри, що відповідають двовимірній природі самого зображення.

Такий двовимірний фільтр влаштований таким чином. Береться невелика, зазвичай прямокутна, ділянка площини і на ній визначається деяка функція. Згадана ділянка називається апертурою, або вікном, а задана на нім функція — ваговою функцією, або функцією вікна. Таким чином, кожному елементу апертури відповідає (призначається користувачем) певне число, яке називається ваговим множником. Сукупність всіх вагових множників і складає вагову функцію. Апертура разом із заданою на ній ваговою функцією часто називається *маскою* [82]. Важливою властивістю маски є її стислість.

Апертура зазвичай має невеликий розмір (наприклад 3 x 3 або 5 x 7 елементів), але при цьому лінійні розміри апертури зазвичай беруться непарними, щоб можна було однозначно вказати її центральний елемент.

Відзначимо, що іноді застосовують «одновимірну» апертуру, розмір якої по одному з напрямів рівний 1. «Одновимірна» апертура, розташування якої не відповідає осям координат, може бути сформована завданням відповідній ваговій функції на звичайній, прямокутній апертурі.

Фільтрація здійснюється переміщенням апертури фільтру по зображенню. У кожному положенні апертури виконуються однотипні дії, які і визначають *відгук* фільтру. Вагова функція в процесі переміщення вікна також залишається незмінною (стаціонарний фільтр). Тому фільтрацію ковзаючим вікном відносять до просторово-інваріантних операцій [80].

Характерним прикладом служить алгоритм лінійної фільтрації, що полягає у загальних рисах в наступному. При кожному положенні апертури вагова функція по-елементно множиться на значення відповідних пікселів початкового зображення; добутки підсумовуються. Сума ділиться на нормуючий коефіцієнт, і отримана величина, що є відгуком фільтру, присвоюється тому пікселю нового (профільтрованого) зображення, який відповідає положенню центру апертури. Центр тут вибирається тому, що в іншому випадку фільтрація супроводжується небажаним зрушенням профільтрованого зображення щодо початкового. Згаданий вище нормуючий коефіцієнт зазвичай береться рівним сумі всіх елементів вагової функції (вагових множників). Іноді використовують такі вагові функції, які дають нульову суму. У таких випадках нормуючий коефіцієнт приймається рівним одиниці.

Разом з лінійними фільтрами існують і нелінійні. Характер фільтру залежить від операцій, що виконуються в кожному положенні вікна.

У лінійних фільтрах відгук є лінійною функцією багатьох змінних, роль яких грають пікселі, що потрапили у вікно. Вагові множники — це коефіцієнти згаданої лінійної функції. Фільтри, в яких відгук не може бути виражений лінійною функцією від значень елементів зображення, є за визначенням нелінійними.

Залежно від того, куди (у яке поле) записується відгук фільтру, розрізняють прості і рекурсивні фільтри. Якщо у простих фільтрах відгук записується у вихідне зображення, то у рекурсивних він записується назад в початкове зображення, змінюючи значення пікселів безпосередньо в процесі фільтрації. Тому в рекурсивних фільтрах вже оброблені пікселі впливають на результат фільтрації подальших етапів.

Іноді виявляється корисним багатократне повторення процедури фільтрації; у цих випадках говорять про ітеративне застосування фільтрів (що не потрібно плутати з рекурсивними фільтрами).

4.2. Особливості руху вікна

Фільтрація вимагає переміщення апертури по зображенню, що обробляється. Стандартно використовується єдиний тип руху, аналогічний прогресивній телевізійній розгортці. Апертура переміщається уздовж рядка зліва направо з кроком в 1 піксель; дійшовши до кінця одного рядка, переходить до початку наступного. Це найбільш звичний, але не єдиний тип руху. Траєкторія переміщення вікна може бути будь-якою, потрібний лише, щоб центр вікна відвідав по одному разу всі пікселі.

З точки зору результатів фільтрації при програмуванні простих (тобто нерекурсивних) алгоритмів байдуже, який тип руху і яку траєкторію переміщення вікна вибрати — результати від цього не залежать. Тип руху може впливати на інші, характеристики, наприклад на швидкодію алгоритму.

При вирішенні питання про спосіб руху необхідно враховувати не тільки особливості алгоритму фільтрації, що реалізовується, але і специфіку вирішуваної задачі в цілому. Наприклад, в [83] описаний алгоритм, в якому зигзагоподібне переміщення вікна органічно пов'язане з рекурентним характером обчислень, що дозволяє підвищити швидкодію. В даному прикладі тип руху вікна визначений внутрішньою структурою використаного алгоритму аналізу.

Розглянемо інший аспект переміщення вікна, який рідко згадується в літературі. Мова іде про так званий граничний (крайовий) ефект і про способи обробки пікселів, що знаходяться поблизу границь поля.

Вплив крайових ефектів особливий відчутно на невеликих зображеннях. Якщо розмір зображення набагато більше розміру вікна, то частка площі профільтрованого поля, на якій помітні крайові ефекти, мала. В цьому випадку крайовими ефектами можна нехтувати і вибирати алгоритм обробки з інших міркувань, наприклад по максимуму швидкодії.

Питання про крайові ефекти навряд чи можна назвати принциповим, проте при програмуванні його потрібно вирішувати. В зв'язку з цим розрізняють 3 схеми обробки, які позначають латинськими буквами *P, S, T* [84]. При фільтрації центральної зони, в якій вікно цілком поміщається на зображенні, всі три схеми дають однакові результати. Вибір схеми обробки граничних областей в принципі ніяк не пов'язаний з типом руху вікна, хоча складність отриманої програми може залежати від їх поєднання.

Розглянемо названі три схеми докладніше.

P-схема обробки відповідає випадку, коли вікно (жоден його елемент) не може виходити за межі фільтрованого поля.

S-схема обробки дозволяє вихід країв вікна за межі поля, потрібно лише, щоб центр вікна завжди знаходився усередині поля.

T-схема обробки відповідає фільтрації на тороїдальній поверхні.

P-схема обробки обмежується фільтрацією центральної зони, залишаючи краї зображення необробленими. Оскільки результат фільтрації записується в елемент вихідного поля, що відповідає центру вікна, то ширина необробленої зони дорівнює половині розміру вікна (по відповідній координаті) мінус одиниця. Таким чином, фільтрація по *P*-схемі приводить до зменшення фактичних розмірів зображення на ширину необробленої кайми. Перевага *P*-схеми — простота програмування.

S-схема обробки усуває вказаний недолік ціною не якого ускладнення алгоритму обробки. Оскільки при цьому центр вікна пробігає всі пікселі початкового поля, то і на профільтрованому зображенні не залишається незаповнених елементів. Елементи апертури, що виходять за межі поля, в обробці не беруть участь, тому відгук фільтру формується на основі меншого числа пікселів, чим в центральній зоні. Іншими словами, поблизу країв зображення фактичний розмір вікна зменшується. Крайовий ефект зберігається, хоч і в істотно ослабленому вигляді. Алгоритм, реалізуючий *S*-схему, складніше і швидкодія його гірша, ніж у *P*-схеми.

Для повноти викладення необхідно згадати про інший різновид *S*-схемы. У описаному варіанті при виході частини елементів вікна за межі зображення здійснюється «усікання» вікна. Але ж можна не усікати вікно, а розширити зображення, додатково визначивши його за межами своїх границь. Вважається, що зображення поза своїх меж тотожно рівним нулю. Можливо, кращі результати, могло дати використання екстраполяції.

Третя, *T*-схема обробки отримується за припущенням, що зображення визначене не на площині, а на тороїдальній поверхні.

Припукається, що зображення скручується в трубку, так, що його правий край примикає до лівого. Як правило, правий край зрушений вниз щодо лівого на один піксель, так що кінець першого рядка примикає не до її початку, а до початку другого рядка і т.д. Далі з'єднують верхній край трубки, що утворилася, з нижним, так щоб за останнім пікселем останнього рядка йшов перший піксель першого рядка. В результаті отримується тор, на який спірально намотаний одновимірний вигляд зображення. Замість тора можна представити нескінченну площину, на якій задане зображення періодично повторюється.

Тороїдальна інтерпретація помітно спрощує програмування, оскільки переміщення центру вікна по рядках зображення замінюється його просуванням за позицією одновимірного масиву, що містить зображення. *T*-схема обробки є однією з найбільш швидких, проте і вона не вільна від крайових ефектів, хоч і іншого типу, ніж в *P*- і *S*-схемах. Крайовий ефект тут полягає в тому, що об'єкти, що знаходяться на одному краю зображення, впливають на обробку і залишають свій слід на протилежному краю, що може показатися неприродним.

4.3. Лінійні фільтри

Як слідує з назви, відгук лінійного фільтру лінійним чином залежить від зображення, що обробляється. Розглянемо фільтри, в яких для кожного положення апертури здійснюється по-елементне множення вагової функції на значення відповідних елементів зображення, сумування добутків і нормування отриманої суми.

Введемо необхідні позначення. Нехай апертура має розмір M_pxM_q елементів; поточний елемент апертури позначимо через (p,q), де p = 1, 2, …, M_p - номер поточного рядка; q = 1, 2, ..., M_p - номер поточного стовпця.

Визначимо спосіб, за допомогою якого вказується положення апертури на зображенні. Виділяється деяка опорна точка апертури (як правило, це центр, іноді - один з кутових елементів). Тепер достатньо задати положення цієї опорної точки в системі координат зображення, щоб тим самим визначити положення всієї апертури.

Згадану опорну точку називатимемо умовним центром апертури; координати умовного центру позначимо через (p_m,q_m) (у системі координат апертури).

Умовний центр може співпадати з справжнім, геометричним центром апертури. Взагалі кажучи, в якості умовного центру можна взяти будь-яку точку апертури; більш того, умовний центр не повинен навіть знаходитися усередині неї — можна, наприклад, задати p_m = 0, q_m = 0. Проте, найбільш ефективним визначенням умовного центру є таке положення, щоб при непарних розмірах апертури він співпадав з її центральним пікселем:

$$p_m = \left[{M_p + 1}/{2} \right]; \;\; q_m = \left[{M_q + 1}/{2} \right],$$

де квадратні дужки позначають цілу частина числа.

Поточне положення умовного центру на початковому зображенні F позначимо через (i, j). Відгук фільтру присвоюється тій же точці (i, j) нового, профільтрованого поля Q.

Позначимо через $H(p,q)$ функцію вікна. Зміст Q вихідного зображення формується шляхом дискретної згортки вхідного поля F і функції вікна $H(p,q)$:

$$Q\ (i, j) = \sum_{p=1}^{M_p}\sum_{q=1}^{M_q} F(i - p_m + p, j - q_m + q)H(p,q)\,. \tag{4.1}$$

Насправді, формула справедлива лише за умови, що функція вікна не виходить за межі початкового зображення, тобто виконуються умови, відповідні P-схемі руху вікна:

$$p_m \le i \le N_i - M_p + p_m,$$

$$q_m \le j \le N_j - M_q + q_m,$$

де N_i, N_j — розміри зображення.

На випадок S- і T-схем руху вікна, коли умовний центр переміщається по всьому зображенню і виконуються нерівності

$$1 \le i \le N_i,$$

$$1 \le j \le N_j,$$

формула (4.1) має ряд обмежень. Ці обмеження стосуються способу розрахунку відгуку фільтру в тих положеннях вікна, коли деякі його елементи виходять за межі зображення. Так, у S-схемі необхідно або проводити сумування тільки за тими елементами вікна, які знаходяться на зображенні, або довизначити зображення поза його межами. У T-схемі треба «завертати» вікна, що виходять за межі поля частини, на протилежний край поля.

Різні види лінійних фільтрів відрізняються своїми ваговими функціями і нормуючими коефіцієнтами.

Як вже було сказано, зазвичай використовуються апертури з непарним лінійними розмірами. Збільшення розмірів апертури істотно збільшує об'єм обчислень, тоді як якість обробки поліпшується ненабагато [79, 83]. Втім, із зростанням продуктивності процесорів ЕОМ обчислювальні витрати все менше обмежують розмір використаних апертур, і останнім часом у вживання входять апертури різних розмірів.

Розглянемо декілька конкретних прикладів лінійних фільтрів. Наведемо окремі найбільш вживані маски і проаналізуємо результати фільтрації (для випадку розміру апертури 3х3 елементи).

Одне з найбільш поширених застосувань лінійних фільтрів - згладжування шумів. Для цього застосовуються вагові функції наступного вигляду [79, стор. 332]:

$$H = \frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4.2}$$

$$H = \frac{1}{10}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4.3}$$

Для підкреслення ліній конкретного напрямку використовуються вагові функції вигляду

$$H = \frac{1}{16}\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix};\ H = \frac{1}{16}\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{Vmatrix}. \tag{4.4}$$

Перша з них більшою вагою підкреслює вертикальні та горизонтальні лінії, друга – діагональні лінії. Фільтри, що підкреслюють границі, використовують такі вагові функції

$$H = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4.5}$$

Для виділення перепадів конкретної орієнтації використовуються вагові функції, які називаються курсовими градієнтними масками [79]

$$\begin{array}{cccc} \text{«північ»} & \text{«схід»} & \text{«захід»} & \text{«південь»} \end{array}$$

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}; H = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}; H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}; H = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix};$$

«північний схід» «північний захід» «південний схід» «південний захід» (4.6)

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Для виділення перепадів без задання орієнтації використовуються вагові функції

$$H = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{Vmatrix};\ H = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (4.7)$$

що дозволяють проводити операцію двовимірного диференціювання [5].

4.4. Рекурсивні лінійні фільтри

Фільтр, в якому відгук визначається тільки через вхідні значення, називається простим, або нерекурсивним. Саме такими є більшість лінійних фільтрів.

Рекурсивним називається фільтр, в якому відгук визначається не тільки через вхідні значення, але і через вихідні [83, 85].

У рекурсивних фільтрах можуть використовуватися ті ж вагові функції, що і в нерекурсивних.

Означення 4.1. Рекурсивним фільтром 1-го роду називається фільтр, у якого відгук в кожному положенні вікна формується як у простого фільтру, але записується на вхідне зображення, яке одночасно грає роль вихідного:

$$F'(i, j) = \sum_{p=1}^{M_p}\sum_{q=1}^{M_q} F(i - p_m + p, j - q_m + q) H(p,q). \qquad (4.8)$$

Означення 4.2. Рекурсивним фільтром 2-го роду називається комбінований фільтр, у якого відгук формується як зважена сума відгуків нерекурсивного фільтру і рекурсивного фільтру 1-го роду:

$$R(i, j) = kQ(i, j) + (1-k)F'(i, j), \tag{4.8}$$

де $Q(i, j)$ визначається з (4.1), $F'(i, j)$ - з (4.8), k - коефіцієнт, що визначає внески кожного з двох згаданих фільтрів.

Варіюючи величиной k від 0 до 1, можна плавно міняти характер фільтру; k = 0 відповідає простому фільтру, k = 1 — рекурсивному фільтру 1-го роду.

Для рекурсивних фільтрів 1-го роду немає необхідності писати спеціальні програми - ці фільтри реалізуються за допомогою програм простих, нерекурсивних лінійних фільтрів.

4.5. Нелінійні фільтри

Основні поняття теорії локальної фільтрації справедливі і для локальної нелінійної фільтрації. Маються на увазі поняття процесу фільтрації, апертури (двовимірною і «лінійною»), способи і алгоритми переміщення апертури по зображенню; вагова функція застосовується не завжди. Головна відмінність полягає в тому, що вихід нелінійного фільтру формується нелінійним чином від даних початкового зображення.

Розглянемо два класи нелінійних фільтрів, що використовуються для досягнення в деякому розумінні протилежних цілей. Це медіанні фільтри, що застосовуються для згладжування зображень, і фільтри, що підкреслюють перепади яскравості. До останніх відносяться фільтри Робертса і Собела.

У алгоритмі медіанного фільтру відгук дорівнює медіані даних, що знаходяться в апертурі. Медіана є центральним елементом у варіаційному ряду, отриманому з даних, що знаходяться в межах апертури. Через те, що при виконанні операції знаходження медіани не виконується одна з аксіом лінійності, медіанний фільтр є нелінійним [79].

Медіанні фільтри застосовуються для згладжування зображень і для зменшення шуму. Медіанні фільтри за своїми властивостями відрізняються від лінійних: по-перше, медіанні фільтри зберігають різкі перепади, тоді як лінійні низькочастотні фільтри їх змазують. По-друге, медіанні фільтри дуже ефективні при згладжуванні імпульсного шуму, але можуть приводити до повного зникнення дрібних деталей зображення при неадекватному виборі параметрів фільтру. Медіанні фільтри використовуються також для виявлення меж і виділення об'єктів [86].

Для формування апертур довільної форми (хрестоподібних, кільцеподібних і т.д.) використовується бінарна вагова функція, що приймає значення 0 або 1.

Медіанні фільтри нерідко застосовуються ітеративно, причому фільтрація повторюється до тих пір, поки на профільтрованому зображенні не перестають фіксуватися зміни. У іншому варіанті ітеративного застосування від кроку до кроку ітерації міняється апертура фільтру. У так званому роздільному медіанному фільтрі одновимірний медіанний фільтр застосовується спочатку до кожного рядка, а потім - до кожного стовпця зображення.

Різновидом медіанного фільтру є зважено-медіанний фільтр [86]. У такому фільтрі використовується вагова функція, але інтерпретується вона інакше, ніж в лінійних фільтрах. Тут вагові коефіцієнти показують, скільки разів слід враховувати пікселі зображення, що потрапили в апертуру.

Якщо виходу фільтру присвоювати не значення медіани даних, що знаходяться в апертурі, а значення будь-якої r-ї ($r = 1,2, ..., n$, де n - загальне число елементів апертури) порядкової статистики, то можна отримати n фільтрів, які називаються процентільними [86]. Вони як узагальнення медіанного фільтру також є нелінійними.

Фільтрацію бінарних зображень зазвичай відносять до нелінійних операцій [87]. Запропонований вище загальний метод придатний і для бінарних зображень, проте для них доцільно використовувати інше, спрощене правило формування відгуку, що не вимагає побудови варіаційного ряду. Це правило полягає в наступному. Якщо на ділянці поля, що потрапило в апертуру, кількість одиниць перевищує кількість нулів, то відгук фільтру вважається рівним одиниці, інакше - нулю.

Дане правило допускає узагальнення на випадок бінарного процентільного фільтру. У такому фільтрі відгук вважається рівним одиниці, якщо в межах апертури знаходиться принаймні r одиниць ($r = 1,2, ..., n$, де n - загальне число елементів апертури).

Вище розглядалися лінійні методи (і відповідно лінійні фільтри) підкреслення перепадів яскравості і виділення контурів. Відомі і нелінійні методи контрастування. Один з таких методів запропонований Робертсом [79] і полягає у використанні операції двовимірного дискретного диференціювання

$$G_R(i, j) = \sqrt{U^2 + V^2}\,, \tag{4.10}$$

де $U = F(i, j) - F(i+1, j+1)$, $V = F(i, j+1) - F(i+1, j)$.

Схожі результати дає інший аналогічний оператор, що потребує меншого об'єму обчислень:

$$GA(i, j) = |U| + |V| \tag{4.11}$$

З формул (4.10) і (4.11) видно, що у методі Робертса застосовується квадратна апертура розміром 2 x 2 . Вагова функція не задається (вважається, що вона тотожно дорівнює одиниці).

Інший нелінійний оператор контрастування, що використовує апертуру розміром 3х3, запропонований Собелом [79], має вигляд:

$$G_S(i, j) = \sqrt{X^2 + Y^2}\,, \tag{4.12}$$

де

$X = [F(i-1, j+1) + 2F(i, j+1) + F(i+1, j+1] - [F(i-1, j-1) + 2F(i, j-1) + F(i+1, j-1)]$,

$Y = [F(i-1, j-1) + 2F(i-1, j) + F(i-1, j+1] - [F(i+1, j-1) + 2F(i+1, j) + F(i+1, j+1)]$.

По аналогії з (4.11) існує спрощений варіант, що не вимагає операцій піднесення до квадрату і обчислення кореня:

$$G_T(i, j) = |X| + |Y|. \tag{4.13}$$

Методи нелінійної обробки дуже різноманітні. В якості останнього прикладу приведемо алгоритм, який виявляє локальні максимуми, що є на зображенні (вершини).

У цьому випадку по зображенню переміщається вікно заданого розміру. Пікселі, що потрапили у вікно, порівнюються за величиною з пікселем, що відповідає центру вікна. Якщо центральний піксель більше або рівний своєму оточенню, то він без зміни переноситься у вихідне зображення. Якщо хоча б один піксель у вікні перевищує центральний, у вихідне поле записується нуль.

Розглянуті підходи легко можуть бути узагальнені на випадок процентільного фільтру. При такому узагальненні слід врахувати, що в *S*-схемі переміщення вікна довжина варіаційного ряду не є постійною. Задавати номер порядкової статистики при змінній кількості членів варіаційного ряду не є ефектиним. Зручніше задати частку процентільності, тобто відносний рівень, визначений у відсотках від кількості членів варіаційного ряду. Частка процентільності, що дорівнює 50, відповідає медіанному фільтру.

Потрібно зауважити, що все сказане вище про линійну рекурсивну фільтрацію залишається справедливим і для нелінійної рекурсивної фільтрації. Окрім цього, схеми фильтрации за Робертсом і Собелом також можуть бути застосовані в якості рекурсивних фільтрів 1-го рода, однако посилань у літературі про рекурсивні версії цих фільтрів немає.

4.6. Задача розпізнавання об’єктів на основі методу «Pyramid Resolution»

Головним завданням, що розглядається, є задача розпізнавання об'єкту на заданому зображенні (фотографії). Передбачається, що фотографія може бути зроблена з різної відстані і може мати різний масштаб, у тому числі і того об'єкту, який розпізнається. Потрібно розпізнати об'єкт максимально швидко, знайти відстань, з якої була зроблена фотографія, і оцінити точність певної відстані до об'єкту. Основним критерієм ефективності роботи алгоритму є мінімізація часу обчислень.

На одному з перших етапів розв'язання поставленої задачі (внутрішнім завданням) є вирішення задачі розпізнавання всіх об'єктів на зображенні за допомогою апертур з інтервально заданими розмірами. При цьому необхідно забезпечити оптимальний вибір розмірів апертур, заданих інтервалами.

Процес вирішення проблеми розпізнавання об'єктів та відстані до них характеризується сукупністю вхідних даних у вигляді цифрового зображення високої якості та бази зразків зображення об'єкту, який розпізнається. Усі зображення можуть бути задані у довільному графічному форматі,

Процес виділення об'єктів максимального розміру на заданому зображенні можна проводити двома способами:

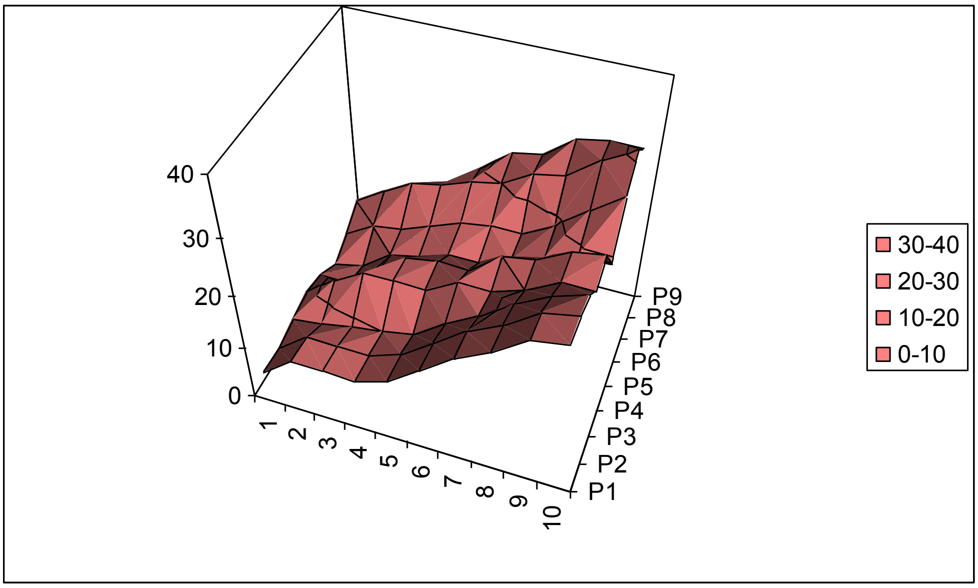
1. фотографувати об'єкт на відповідній зразку відстані і програмно його розпізнавати;
2. будувати зменшене або збільшене зображення об'єкту шляхом графічних перетворень (обчислень) і розпізнавати об'єкт на отриманих копіях.

Спочатку передбачається, що зображення зменшується / збільшується з кроком в 1 піксель. Для всіх отримуваних проміжних рівнів відбувається виділення об'єкту з використанням алгоритмів лінійної фільтрації і групування отриманих даних (див. далі П.1).

Для реалізації процесу розпізнавання будуються проекції зображення у вигляді піраміди («Pyramid resolution», PR [88]) і для кожної проекції застосовується алгоритм розпізнавання об'єкту.

Отримано залежність кількості розпізнаних об'єктів від номерів проміжних рівнів, на яких було розпізнано об'єкт, та кількості проміжних рівнів, розрахованих для початкового зображення (див. мал. 4.1). На наведеному малюнку на вертикальній вісі відкладено кількість зображень об'єкту, розпізнаних на певному рівні еталонної стопки PR (для кожного рівня, отриманого програмно з початкового зображення із заданим кроком змін), на горизонтальній вісі - номери рівнів PR, на яких об'єкт був розпізнаний, а на вісі

P - кількість проміжних рівнів, розрахованих для початкового зображення (стандартно їх 10).



Мал. 4.1. Приклад залежності кількості розпізнаних об’єктів від парамерів PR.

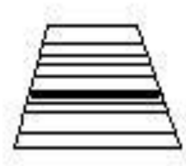
Процедура розв’язання задачі розпізнавання об’єктів складається з 2 етапів.

П.1. Апертура з чітко заданими розмірами переміщається по екрану. На основі алгоритму лінійної фільтрації в кожній позиції апертури маємо відгук у вигляді 0 або 1 (розпізнавання об'єкту). В результаті маємо набір 0 і 1 по всіх точках зображення.

Використовується алгоритм групування на підставі результатів фільтрації на кожному проміжному рівні, в результаті якого отримується набір з відфільтрованими відгуками, який остаточно кваліфікується як розпізнане або нерозпізнане зображення об'єкту (зразка).

Умова роботи алгоритму фільтрації на базі апертур: розмір об'єкту і розміри апертури повинні бути узгоджені (об'єкт з розмірами більше розмірів апертури не розпізнається, тобто його розмір не повинен перевищувати розміру апертури).

П.2. У реальному випадку зображення може знаходитися на різній відстані від місця фотографування. Для емуляції відстаней до об'єкту використовується методика «Pyramid Resolution» - граничне стискання або (і) розтягування отриманого зображення, в результаті якого виходить стопка проміжних зображень, схематично поданих у вигляді наступного малюнку:



Тут розмір верхнього рівня не менший за розміри об'єкту (який обов’язково не перевищує розмірів апертури);

розмір середнього рівня (товста лінія) співпадає з розміром проміжного зображення;

розмір нижнього рівня – не регламентований (може бути будь-яким).

В процесі застосування алгоритму зроблено такі висновки:

- деякі проміжні відстані PR, отримані в результаті графічних перетворень, не дають поліпшення розпізнавання об'єкту і можуть бути виключені з розгляду в процесі розпізнавання. Це дозволяє суттєво скоротити час обчислень і зменшити інші витрати, пов'язані з процесом ідентифікації об'єкту. При цьому вдається зберегти точність оцінювання відстані до об'єкту, що в сукупності із зменшенням обчислювальних витрат визначає ефективність даного підходу.

- збільшення відстані між проміжними (розрахованими) рівнями на значну величину приводить до помилок у визначенні відстані до зображення (практичні розрахунки показали, що зміна 0,5-1,2 пікселі – дає одну й ту ж якість розпізнавання, зміна кроку на 2 пікселі практично не впливає на результат розпізнавання у порівнянні з кроком в 1 піксель, а перехід на крок у 3 пікселі приводить до збільшення негативних результатів розпізнавання);

- стандартне використання відстані у 1 піксель між проміжними рівнями потребує значних обчислювальних ресурсів, що призводить до необхідності розробки оптимізаційних підходів для процедури розпізнавання.

4.7. Застосування нечіткого подання розмірів апертури для оптимізації процесу фільтрації

У процесі розв’язування конкретных прикладных задач обробки зображень спільною проблемою усіх схем і методик є вибір розмірів апертури. Часто збільшення розмірів уповільнює процес обробки, не забезпечуючи значне покращення кінцевого результату. Розміри апертури можуть бути задані неточно, або визначаються як надто великими, або взагалі не задані. Побудову діапазону допустимих змін розмірів апертури, в межах яких можна розглядати неточно формалізовані або незадані значення, можна провести на основі простої схеми, що застосовує поняття простых чисел. Іншими словами, задача вибору розмірів апертури може бути розв’язана на основі методики подання цілого числа k у нечіткого цілого, за якою кожну невизначену величину k можна формалізувати як нечітке ціле число $\tilde{k}$ у вигляді триплету $\tilde{k} = (k_1, k, k_2)$.

В якості підходу пропонується вважати лінійні розміри вікна невідомими, але такими, що можуть бути обраними з деяких діапазонів $k_x \in [k_{x1}, k_{x2}]$, $k_y \in [k_{y1}, k_{y2}]$ с заданими або розрахованими значеннями k_{x1}, k_{x2}, k_{y1}, k_{y2}.

Використання простих чисел для моделювання процесів у нечітких умовах запропоновано у роботі [89]. У методиці розглянуто ефективні обчислювальні схеми, які дозволяють отримати значення функцій належності для елементів нечітких множин, котрі застосовуються для опису невизначеності параметрів функціонування різних процесів.

У підрозділі 2.1 запропоновано схему формалізації нечітких цілих чисел, за якою нечітким цілим числом $\tilde{n}$ називають впорядковану трійку чисел *(k, n, l)*, $k \le n \le l$, $k, n, l \in Z$, де k та l визначено у (2.32), а $P_1(\cdot), P_{-1}(\cdot)$ - попереднє і наступне прості числа відносно n, $n \ge 0$, та $-n$, $n < 0$.

Отже, довільне ціле число $\tilde{n}$ може бути представлено у вигляді триплету, ліва (k) та права (l) границі якого є найближчими простими числами до цілого n.

Такой підхід дозволяє для будь-якого значення $n \in Z$ задати нечітке ціле число $\tilde{n}$ = *(k, n, l)*, не визначаючи діапазон подання нечіткого числа: можна покласти k та l у вигляді (2.32) і використати лінійну функцію належності

$$\mu_{\tilde{n}}(x)=\frac{x-k}{n-k}, x\in [k,n]; \quad \mu_{\tilde{n}}(x)=\frac{l-x}{l-n}, x\in [n,l]; \quad \mu_{\tilde{n}}(x)=0, x\notin [k,l]. \tag{4.14}$$

Завдяки запропонованому підходу до формалізації нечітких цілих чисел стає можливим визначення діапазонів подання розмірів апертури $(k_x \times k_y)$ у вигляді інтервалів $k_x \in [k_{x1}, k_{x2}]$, $k_y \in [k_{y1}, k_{y2}]$, ліві та праві значення яких є найближчими простими числами до заданих цілих k_x, k_y.

Для перевірки ефективності застосування даної методики проведено експеримент, в якому проведено фільтрацію 50 різних зображень. При цьому, використання апертури фіксованого розміру (5х7 точок) дозволило правильно розпізнати 45 зображень за 1хв 12 сек. При нечіткому поданні розміру апертури правильно розпізнано 49 зображень за 1 хв 41 сек.

4.8. Висновки до четвертого розділу

У розділі розглянуто задачу локальної фільтрації зображень, яка полягає у поліпшенні вихідного зображення. Розглянуто лінійні та нелінійні фільтри, різні схеми обробки граничних областей. Досліджено властивості вагових функцій і нормуючих коефіцієнтів процедури побудови відгуку фільтру. За умов, що збільшення розмірів апертури істотно збільшує об'єм обчислень, тоді як якість обробки поліпшується ненабагато, запропоновано модифікацію методики на основі алгоритмів лінійної фільтрації сукупності проекцій зображення у вигляді піраміди. Для покращення результатів фільтрації проекцій пропонується застосувати нечітке подання розмірів апертури за допомогою інтервального представлення нечітких трикутних цілих чисел наведеного у попередніх розділах вигляду. Отримане при цьому підвищення обчислювальної складності компенсується покращенням якості отриманих відгуків реальних зображень. Отримано чисельні результати, що підтверджують ефективність та конструктивність запропонованої методики.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці конструктивної методики формалізації нечітких чисел, створення алгоритмів обробки нечітких даних, розробки математичного та програмного забезпечення для дослідження процесів обробки нечіткої інформації, результати якого можуть бути застосовані при розв’язанні актуальних прикладних задач в умовах невизначеності.

Проведено огляд результатів досліджень на основі нечітких множин та систем. Наведено аксіоматику нечітких множин, основні поняття і визначення нечітких величин і нечітких чисел, описано узагальнення поняття нечітких множин у вигляді невизначених нечітких множин. Проведено огляд використання нечітких множин та математичні моделі нечітких систем. Відмічено, що перспективним напрямком формалізації нечіткості є використання трикутних нечітких величин, основною ідеєю визначення яких є побудова інтервалів можливих значень невизначеного (невідомого) параметра з застосуванням лінійної функції належності.

В роботі розглянуто та детально вивчено спеціальні послідовності простих чисел, їх властивості, введено операції на даних послідовностях. Запропоновано алгоритм для наближення довільного раціонального числа за допомогою елементів введених послідовностей простих чисел. Розглянуто множину невід’ємних раціональних чисел, які представляються у вигляді відношення двох елементів з розглянутих послідовностей. Для цієї множини отримано нижню і верхню спряжені множини, доведено твердження для оцінок інтервалів розміщення найближчих до заданого цілого простих чисел. Викладено методику подання цілих та дійсних нечітких чисел. Розроблено спосіб формалізації процесу динаміки функцій належності станів нечіткої дискретної системи. Запропоновано модифікацію базової схеми алгоритму Меркла-Хелмана шифрування повідомлень на основі нечіткого підходу, що сприяє підвищенню криптостійкості алгоритму. На основі формування нечітких представлень і формалізації нечітких операцій вибору за кількісними атрибутами узагальнено поняття нечітких баз даних для обробки слабоформалізованої інформації. Сформульовано розширення синтаксису та семантики мови С для реалізації програмних засобів нечіткого моделювання. Отримані результати дозволили обгрунтувати методику застосування трикутних нечітких чисел у вигляді інтервалів, межі яких вибираються з елементів спеціальних послідовностей простих чисел.

Запропоновано поняття складених нечітких чисел трикутного вигляду, що узагальнюють застосування нечітких чисел. Досліджено їх властивості, сформульовано поняття відстані між довільними складеними нечіткими числами на основі побудови множин рівня спеціального вигляду, розроблено схему для порівняння відстаней, розв’язано задачу кластеризації за умов подання даних у формі складених нечітких чисел, запропоновано математично обгрунтований декомпозиційний підхід для дослідження поведінки нечітких багатомірних систем, що функціонують в умовах невизначеності.

Послідовно розглянуто моделі, властивості розв’язків та неперерервність розв’язків нечітких різницевих систем, стани яких описуються за допомогою складених нечітких чисел. Запропоновано підхід, що базується на декомпозиції систем на підсистеми. Сформульовано і доведено твердження про адекватність поведінки розв’язків вихідної системи та отриманих нечітких підсистем.

Отримані результати були використані для розв’язання задачі фільтрації зображень, зміст якої полягає у поліпшенні якості вихідного зображення. Запропоновано модифікацію методики на основі алгоритмів лінійної фільтрації сукупності проекцій зображення у вигляді піраміди. Для покращення результатів фільтрації проекцій пропонується застосувати нечітке подання розмірів апертури за допомогою інтервального представлення нечітких трикутних цілих чисел. Отримане при цьому підвищення обчислювальної складності методів фільтрації компенсується покращенням якості отриманих відгуків реальних зображень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андреев Ю.Н. Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами / Ю.Н. Андреев. //Автоматика и телемеханика. – 1977. – №3. – С.5–50.

2. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления. / В.Н.Афанасьев, В.В.Колмановский, В.Р.Носов - М., Высшая школа, 1989. - 447с.

3. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики / А.И Чуличков. – М: Физматлит, 2000. – 294с.

4. Моисеев Н.Н. Элементы теории оптимальных систем /Н.Н. Моисеев. – М.:Наука, 1975. – 273 с.

5. Кухтенко А.И. Основные задачи теории управления сложными системами/ А.И. Кухтенко. // Сложные системы управления. – 1968. – Вып. 1. – С. 3–10.

6. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта: [зб.наук.праць / наук.ред. Д.А. Поспелов]. – М.: Наука, 1986. – 254 с.

7. Zadeh L.A. Fuzzy sets / L.A.Zadeh. // Inf. Contr. – 1965. – V.8. – P. 308–353.

8. Zadeh L.A. Fuzzy orderings / L.K.Zadeh. // Inf. Sci. – 1971. – V.3. – P. 177–200.

9. Zadeh L.A. Shadows of fuzzy sets / L.A.Zadeh. // Prob. in Trans. of Informat. – 1966. – V.2. – P.37–44.

10. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решения / Л.А.Заде. // Математика сегодня. – М.: Знание. – 1974. – С. 4–49.

11. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А.Заде – М.: Мир, 1976. – 175с.

12. Nahmias S. Fuzzy variables / S.Nahmias // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – №. 1. – P.97-110.

13. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования / Б. Лю. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 416 с.

14. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения / Ю.П.Пытьев – М.: Эдаториал УРСС, 2000. – 128с.

15. Pawlak Z. Vaguenes and uncertainty: a Rough set perspective / Z. Pawlak // Computational Intelligence. – May 1995. – Vol.11 (Issue 2). – P. 227-232.
16. Hausdorff F. Set Theory / F.Haesdorff. – Chelsea, New York, 1957. –154p.
17. Lakshmikantham V. Theory of fuzzy differential equations and inclusions /V. Lakshmikantham, R.N.Mohapatra – London, New York: Taylor & Francis, 2003. – 178 p.
18. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации / С.А.Орловский – М.: Наука, 1981. – 206с.
19. Астровский А.И., Корженевич С.К. Применение теории нечётких множеств для исследования задач апостериорного оценивания в линейных дискретных системах/ А.И. Астровский, С.К. Корженевич// Дифференциальные уравнения. – 1995. – Т.31. – №6. – С. 1678–1682.
20. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А.Кофман. — М.: Радио и связь, 1982. — 432 с.
21. Bablu Jana, Tapan Kumar Roy. Multi-Objective Fuzzy Linear Programming and Its Application in Transportation Model// Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 2005. - 21(2). - P.243-268.
22. Алиев Р.А., Церковный А.Э., Мамедова Г.А. Управление производством при нечеткой исходной информации /Р.А. Алиев, А.Э.Церковный, Г.А. Мамедова – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 157с.
23. Захаров В.Н. Современная информационная технология в системах управления/ В.Н.Захаров // Известия РАН. Теория систем управления. – 2000. – №1. – С.65–73.
24. Захаров В.Н., Ульянов С.В. Нечеткие модели интеллектуальных промышленных регуляторов и систем управления. III. Методология проектирования/ В.Н.Захаров, С.В.Ульянов // Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1993. – №5. – С.84–93.
25. Ульянов С.В. Нечеткие модели интеллектуальных систем управления: теоретические и прикладные аспекты /С.В.Ульянов// Известия РАН. Техническая кибернетика. – 1991. – №3. – С.56–81.

26. Кудинов Ю.Н. Нечеткие системы управления/ Ю.Н.Кудинов // Изв.РАН. Техническая кибернетика, 1990, №5, стр. 196-206.
27. Івохін Є.В. Про стійкоподібні властивості розв’язків нечітких різницевих систем / Є.В. Івохін // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. – 2006. – №7. – С. 23 – 31.
28. Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности /А.Ф. Кононенко, А.Д. Халезов, В.В. Чумаков. – М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 243 с.
29. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации /С. Осовский. – М.: Финансы и статистика, 2002.– 344с.
30. Ягер Р.Р. Множества уровня для оценки принадлежности нечетких подмножеств/ Р.Р.Ягер. // Нечеткие множества и теория возможностей: сб.науч.работ. – М: Радио и связь, 1986. – С.71–78.
31. Гусев Л.А. Размытые множества. Теория и приложения /Л.А. Гусев, И.М. Смирнова. // Автоматика и телемеханика. – 1973. – № 5. – С.66–85.
32. Bellman R. Abstraction and pattern classification /R. Bellman, K.Kalaba, L.A. Zadeh. // J.Math. Anal. and Appl. – 1966. – V.13. – №1. – P.17–29.
33. Норвич А.М. Построение функций принадлежности/ А.М. Норвич, И.Б.Турксен // Нечеткие множества и теория возможностей: сб.науч.работ. – М: Радио и связь, 1986. – С.64–71.
34. Борисов А.Н. Модели принятия решений на основе лингвистической переменной/ А.Н. Борисов и др. – Рига: Зинатне, 1982. – 256с.
35. Заде Л.А. Размытые множества и их применение в распознавании образов и кластер–анализе / Л.А.Заде. //Классификация и кластер: сб. науч. работ. – М: Мир, 1980. – С.208–247.
36. Gorzalczany M.B. Interval–Valued Decisional Rule in Signal Transmission Problems /M.B. Gorzalczany. //Arhiwum automatyki i telemechaniki. – 1985. – V. XXX. – №2.– P.159–168.
37. Zimmermann H.J., Zysno P. Quantifying vagueness in decision models / H.J. Zimmermann, P.Zysno.// European Journal of Operational Reseach. 1985. – №22. –

P.148–158.
38. Кофман А. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятииями/ А. Кофман, Хил Алуха Х. – Минск, Вышейшая школа, 1992. – 183 с.
39. Зайченко Ю.П. Нечеткие модели и методы в интеллектуальных системах /Ю.П. Зайченко. – Киев: Слово, 2008. – 344с.
40. Зайченко Ю.П. Исследование операций / Ю.П. Зайченко. – Киев: Слово, 2003. – 688с.
41. Le Van Huen. A note on the asymptotic stability of fuzzy differential equations/ Le Van Huen // Ukrainian Mathematical Journal. – 2005. – V.57. – №7. – P.904–911.
42. Jeong J.U. Stability of periodic solution for fuzzy differential equations/ J.U.Jeong. // Journal of Applied Mathematics and Computing. – 2003. – V.13. – №1–2. – P.217–222.
43. Zimmermann, H.J. Fuzzy Set Theory and its application. Boston: Kluwer. 1992. – 399 p.
44. Dubois D. Linear programming with fuzzy data / D. Dubois // Analysis of Fuzzy Information / J. C. Bezdek (ed.). Boca Raton : CRC Press, 1987. – Vol. 3 : Applications in Engineering and Science. – P. 241-263.
45. Zimmermman, H. J. Application of Fuzzy Set Theory To Mathematical Programming// Information Sciences. – 1985. – 36. – P. 25-58.
46. Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila, M. A. A General Model For Fuzzy Linear Programming// Fuzzy Sets and Systems. – 1989. – 29. – P. 21-29.
47. Нестеренко Ю. В. Алгоритмические проблемы теории чисел // Введение в криптографию/ Под редакцией В. В. Ященко. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 288 с.
48. Hardy G.H., Wright E.M. An Introduction to the Theory of Numbers / G.H. Hardy, E.M.Wright – Oxford University Press, 1960. – 288с.
49. Willans C.P. On Formulae for the n-th Prime Number /C.P.Willans // The Mathematical Gazette. – 1964. – 48. – P.413-415.
50. Wormell C.P. Formulae for Primes /C.P. Wormell // The Mathematical Gazette. – 1967. – 51. – P.36-38.

51. Ribenboim P. The little Book of Big Primes / P. Ribenboim. – Springer-Verlag, 1994.

52. Крэндалл Р., Померанс К. Простые числа. Криптографические и вычислительные аспекты. – М.: Либроком, 2011. – 664 с.

53. Генри С. Уоррен, мл. Алгоритмические трюки для программистов. — М.: «Вильямс», 2007. — 288 с.

54. Iwaniec H. On the error term in the linear sieve// ACTA Arithmetica. – 1971. – No.XIX. – P. 1–30.

55. Василенко О. Н. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. – М.: МЦНМО, 2003. – 328 с.

56. Івохін Є.В. Про застосування спеціальних множин простих чисел для визначення міри належності нечітких множин// Журнал обчислювальної та прикл. математики. – 2013. – №4. – С.1-8.

57. Стандарт IEEE754 представлення чисел з плаваючою крапкою [електронний ресурс]. Режим доступу: http://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html

58. Івохін Є.В. Дослідження однієї задачі динаміки нечітких дискретних систем / С.О.Волчков, Є.В. Івохін // Вісник Київського університету. Серія: фіз.–мат. науки. – 2002. – Вип.3. – С. 179 – 182.

59. Merkle R. Hiding information and signatures in trapdoor knapsacks/ R. Merkle, M. Hellman // IEEE Trans. Information Theory. – 1978. – V.24(5) – P.525-530.

60. Shamir A. A polynomial time algorithm for breaking the basic Merkle-Hellman cryptosystem/ A. Shamir // CRYPTO-1982. – P.279-288.

61. Ernest F. Brickell. Breaking iterated knapsacks/ G. R. Blakley, David C. Chaum. Advances in cryptology// Lecture Notes in Computer Science. CRYPTO-1984. – Springer, Berlin, 1985. – V. 196. – P. 342-358.

62. Goodman R.M.F. New trapdoor-knapsack public-key crypto-system / R.M.F. Goodman, A.J.McAuley// IEE Proceedings, 1985. – V.132, Pt.E. – № 6. – P.289-292.

63. Niederreiter H. Knapsack-type cryptosystems and algebraic coding theory/ H. Niederreiter// Problems of Control and Information Theory, 1986. – V.15. – P.159-166.

64. Masakatu Morii. New public key cryptosystem using discrete logarithm over GF(p)/ Masakatu Morii, Masao Kasahara // IEICE Transactions, 1988. - V. J71-D. – № 02. – P. 448-453.

65. Hussain Ali Hussain. New multistage knapsack public-key cryptosystem/ Hussain Ali Hussain, Jafar Wadi Abdul Sada, Saad M. Kalipha // International Journal of Systems Science, 1991. – V. 22. – №11. – P. 2313-2320.

66. Уоррен Г.С. Алгоритмические трюки для программистов. – М.: Вільямс, 2003. – 284с.

67. Pascal F. Understanding Relational Databases with Examples in SQL-92 / F.Pascal. – John Wiley & Sons, 1993.

68. Codd E. F. An Evaluation Scheme for Database Management Systems that are Claimed to be Relational/ E.F.Codd // Proc. IEEE CS International Conference, №2 on Data Engineering, Los Angeles, February, 1986.

69. Івохін Є.В. Про підхід до реалізації нечітких баз даних / Є.В. Івохін, К.О. Косинський // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: ФМН. – 2008. – Вип.2. – С. 83 – 87.

70. Marguerie F. LINQ in Action / F.Marguerie, S.Eichert, J.Wooley. – Manning Publ., 2008. – 600 p.

71. Jamba M. Hierarchical cluster analysis and compliance/ M.Jamba. - Moscow: Finance and Statistics, 1988. – 345 p.

72. Durand B. Cluster analysis/ B.Durand, P.Odell. – M: Статистика, 1977. – 128 p.

73. Viattchenin D.A. Fuzzy methods of automatic classification/ D.A.Viattchenin. - Minsk: Tehnoprint, 2004. – 219 c.

74. Івохін Є.В. Один метод кластеризації складених нечітких множин / Є.В.Івохін, К.О.Косинський // Журнал обчислювальної та прикл. математики. – 2007.– № 2.– С. 54– 58.

75. Осовский С. Нейронные сети для обработки информации / С.Осовский. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 343 с.

76. Shumetov V.G. Cluster analysis: an approach to the use of computers / V.G. Shumetov, L.Shumetova. – Orel: OrelGTU, 2000. – 118 c.

77. Борисов А.Н. Принятия решений на основе нечетких моделей /А.Н. Борисов. – Рига: Зинатне, 1990. – 184с.

78. Воеводин В.В. Матрицы и вычисления /В.В. Воеводин, Ю.А.Кузнецов. – М.: Наука, 1984. - 318с.

79. Прэтт У. Цифровая обработка изображений/ У.Прэтт. – М.: Мир, 1982. – 312с.

80. Розенфельд А. Распознавание и обработка изображений с помощью вычислительных машин /А. Розенфельд. – М.: Мир, 1972. – 232с.

81. Горяинов В.Т. Примеры и задачи по статистической радиотехнике /В.Т. Горяинов, А.Г.Журавлев, В.И.Тихонов. – М.: Советское радио, 1970. – 600с.

82. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработки изображений /Т.Павлидис. – М.: Радио и связь, 1986. – 400с.

83. Ярославський Л.П. Введение в цифровую обработку изображений /Л.П.Ярославский. – М.: Советское радио, 1979. – 312с.

84. Яншин В.В. Обработка изображений на языке Си для IBM PC: Алгоритмы и программы / В.В,Яншин, Г.А.Калинин. – М.: Мир, 1994. – 241с.

85. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры / Р.В.Хемминг. – М.: Советское радио, 1980. – 224с.

86. Хуанг Т.С. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке зображений. Преобразования и медианные фильтры. /Т.С. Хуанг, Дж.О. Эклунд и др. – М.: Радио и связь, 1984. – 224с.

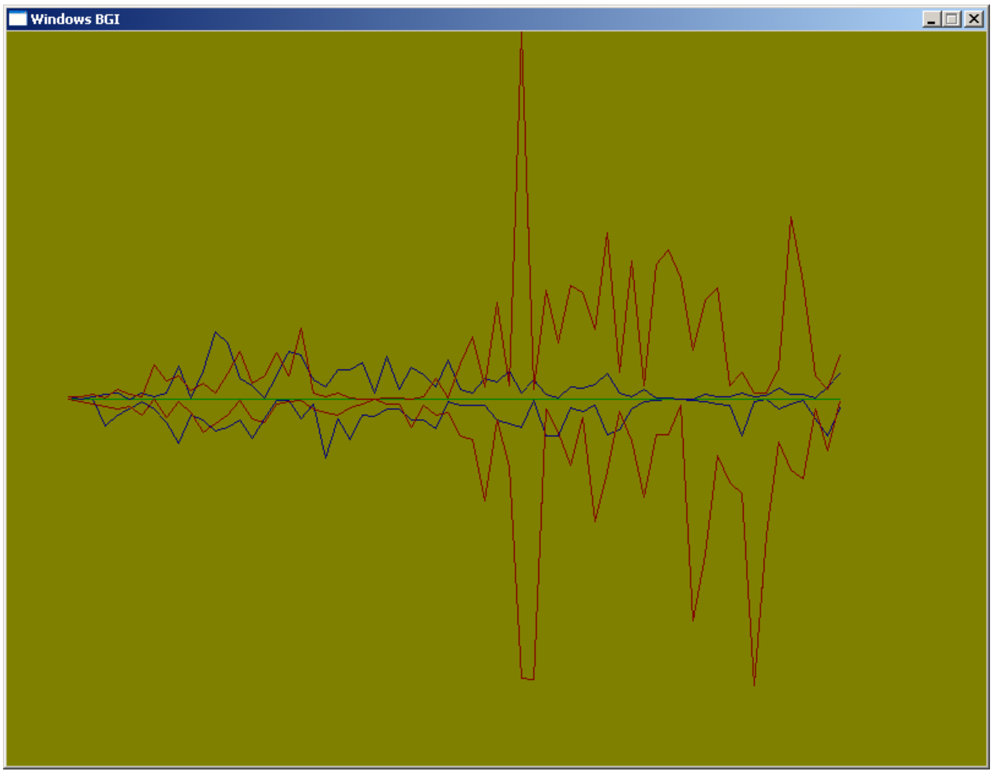
87. Пушкин А.В. Корреляционные функции выходных сигналов медианных и процентильных фильтров бинарных изображений // А.В.Пушкин, В.В.Яншин. – Вопросы радиоэлектроники. – Сер. ОВР. – 1991. – В.12. – С.147-155.

88. Adelson E.H. Pyramid methods in image processing // E.H.Adelson, C.H. Anderson, J.R.Bergen, P.J.Burt, J.M.Ogden. – RCA Engineer. – 1984. – №.29-6. – С.33-41.

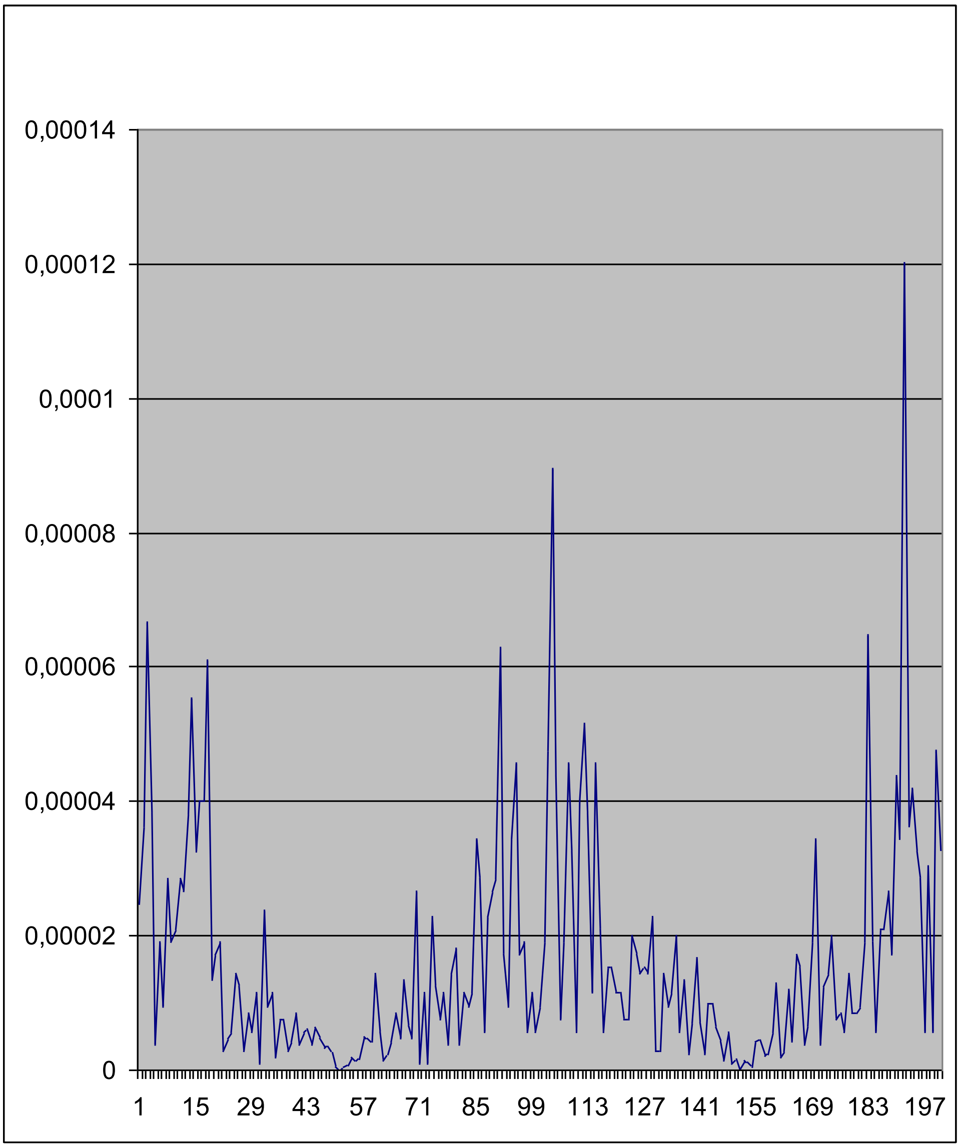
89. Івохін Є.В. Про застосування спеціальних множин простих чисел для визначення міри належності нечітких множин/ Є.В.Івохін // Журнал обчислювальної та прикл. математики. – №4. – 2013. – С.87-94.

ДОДАТКИ.

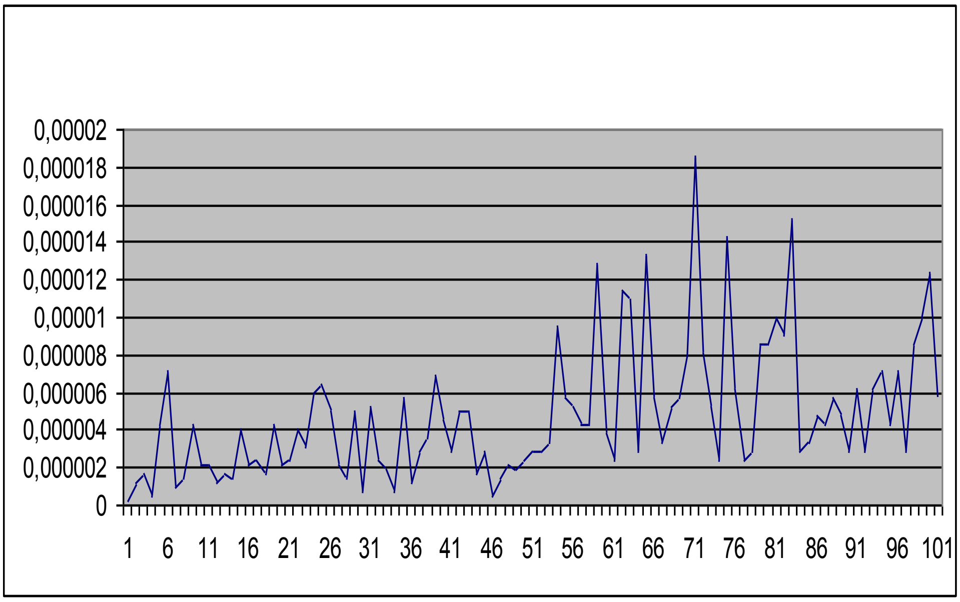
Додаток А. Приклади розрахунків нечітких трикутних значень функцій та операторів.



Мал.А.1. Графіки відхилень нечітких трикутних значень функції *sin(x)* від *y=sin(x)* на проміжку [0,2π] (синя крива; min = $1.967*10^{-6}$, max = $2.265*10^{-6}$) та відхилень значень функції *sin(x)* від *y=sin(x)* при нечіткому трикутному поданні значень аргументу $xl <= x <= xr$ (червона крива; min = $9.537*10^{-6}$, max = $1.222*10^{-5}$)

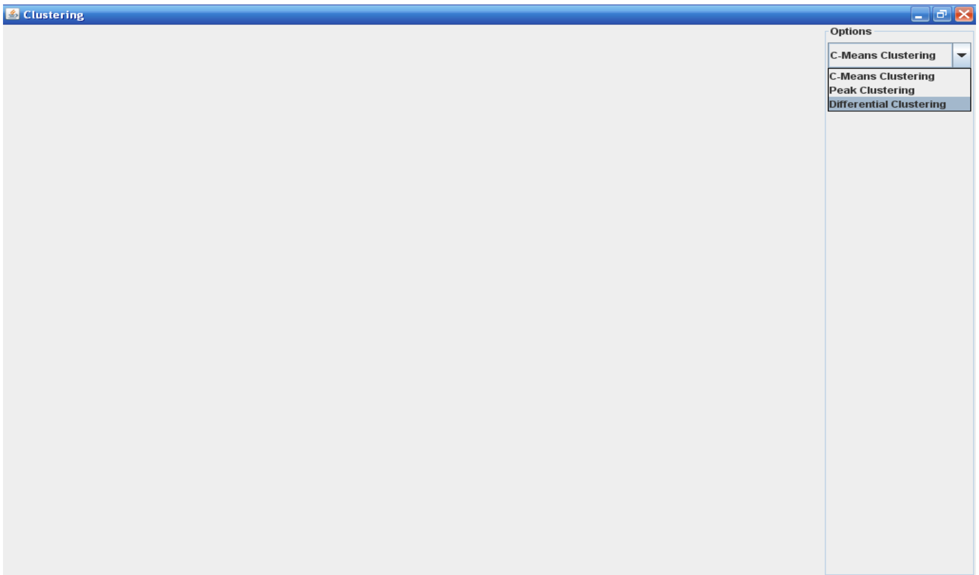


Мал.А.2. Графік величин інтервалів нечітких трикутних значень функції *cos(x)* на проміжку [0,2π] (min = $5.558*10^{-9}$, max = $1.202*10^{-4}$)

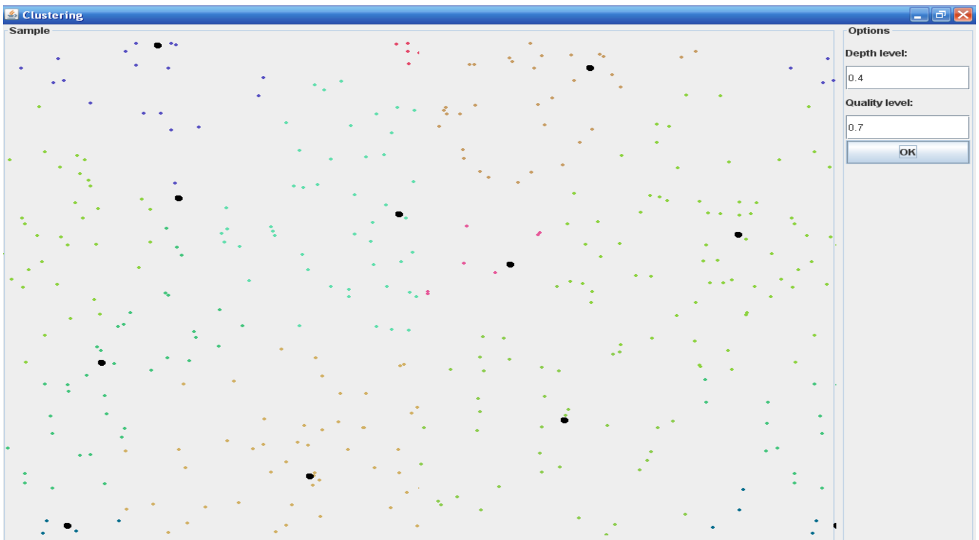


Мал.А.3. Графік величин інтервалів нечітких трикутних значень функції *sqrt(1+x)* на проміжку [0,100] (min = $2.384*10^{-7}$, max = $1.859*10^{-5}$)

Додаток Б. Результати розв’язання задачі кластеризації станів нечіткої системи, що функціонує у двовимірному просторі.



Мал. Б.1. Вибір методу кластеризації.



Мал. Б.2. Центри кластерів для заданих випадковим чином вхідних даних, що подаються складеними нечіткими множинами.

Точки, які не задовольняють умові γ-рівня на результуючому екрані не відображаються.

Показники робота алгоритму Пікового групування:

Кількість точок	Кількість отриманих кластерів	Час роботи програми (с)
3	3	0.5
7	5	0.6
13	9	1.3
19	10	2.4
27	12	3.6
35	14	4.8
50	14	8.5
90	15	19
170	18	40.3
250	20	70.9
400	20	110.6

Показники робота алгоритму Різницевого групування:

Кількість точок	Кількість отриманих кластерів	Час роботи програми (с)
3	3	0.1
7	6	0.15
13	7	0.15
19	9	0.2
27	11	0.3
35	10	0.5
50	12	0.6
90	14	0.7
170	15	0.9
250	17	1.1
400	18	1.5