

УДК 517.9

MSC 35R11, 35B99

ANALYSIS OF THE CONSTRUCTION OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE RICHARDS–KLUTE EQUATION

V. A. KOLESNYKOV

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine, E-mail: valera.kolesnikov.1997@gmail.com

АНАЛІЗ ПОБУДОВИ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯННЯ РІЧАРДСА–КЛЮТА

В. А. КОЛЕСНИКОВ

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, Київський національний університет імені
Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: andriyhul@gmail.com, tokar.kostya@gmail.com

ABSTRACT. In the work numerical methods for solving the Richards–Klute equation and methods of their construction are considered. A new method of constructing an adaptive grid in space is also proposed and numerical methods using it are constructed. A comparative analysis of the data of numerical methods in the conditions of a problem with a known analytical solution was carried out.

KEYWORDS: mathematical simulation, numerical methods, Richards–Klute equation, comparative analysis.

АНОТАЦІЯ. В роботі розглянуті чисельні методи розв'язання рівняння Річардса–Клюта та способи їх побудови. Також запропоновано новий метод побудови адаптивної сітки за простором та побудовані чисельні методи з його використанням. Проведений порівняльний аналіз даних чисельних методів в умовах задачі з відомим аналітичним розв'язком.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математичне моделювання, чисельні методи, рівняння Річардса–Клюта, порівняльний аналіз.

ВСТУП

Задача масопереносу у пористому середовищі з межею насичення є однією з важливих задач математичної фізики. За допомогою неї моделюють

процеси зрошення та осушення, розповсюдження корисних речовин у ґрунті, її також активно використовують у гідрології та при побудові іригаційних систем. Зазвичай її моделюють за допомогою рівняння Річардса–Клюта. За своєю природою воно є нелінійним еліптико-параболічним рівнянням. Через це основним інструментом розв’язання рівняння Річардса–Клюта, а тим самим і моделювання масопереносу, є різноманітні чисельні методи. За рахунок обмеженої кількості відомих аналітичних розв’язків рівняння Річардса–Клюта, процес дослідження ефективності цих методів дещо ускладнений, проте за рахунок порівняльного аналізу та додаткових оцінок, що пов’язані з фізичною інтерпретацією рівняння, можна визначити переваги та недоліки тих чи інших алгоритмів.

Мета статті: описати та порівняти основні методи чисельного моделювання розв’язків рівняння Річардса–Клюта. Дана стаття містить опис основних алгоритмів чисельного моделювання (розділ 2). У розділі 3 пропонується чисельний метод з адаптивним кроком по простору в залежності від другої похідної наближеного розв’язку на попередньому кроці. Розділ 4 містить порівняльний аналіз алгоритмів на частковому випадку рівняння Річардса–Клюта, для якого відомий аналітичний розв’язок. Також у статті описані деякі модифікації основних методів, що були свого часу запропоновані для підвищення ефективності процесу моделювання.

1. ПРОБЛЕМАТИКА

Маємо рівняння Річардса–Клюта

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (K \nabla (h + z)) + s \quad (1)$$

в області Ω з початково-крайовими умовами

$$\begin{aligned} h(\omega, t) &= a(\omega, t), \quad \omega \in \Gamma_1, \quad t > 0, \\ K \frac{\partial (h(\omega, t) + z)}{\partial n} &= b(\omega, t), \quad \omega \in \Gamma_2, \quad t > 0, \\ c_1(\omega, t)h(\omega, t) + c_2(\omega, t)K \frac{\partial (h(\omega, t) + z)}{\partial n} &= c_3(\omega, t), \quad \omega \in \Gamma_3, \quad t > 0, \\ h(\omega, 0) &= h_0(\omega), \quad \omega \in \Omega, \end{aligned}$$

де $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = \partial\Omega$.

Також початково-крайові умови можуть бути задані у вигляді рівнянь відносно θ .

Стосовно результатів відносно існування, єдності та інших властивостей розв’язків даного рівняння можна звернутися до робіт [1–4]. Надалі вважатимемо, що розв’язок рівняння Річардса–Клюта існує та єдиний.

Дане рівняння має фізичну інтерпретацію, у якій змінні мають наступний сенс: θ — коефіцієнт насиченості (або вологості) [безрозмірний], h — потенціал напору (або тиску) [м], K — коефіцієнт вологопроникності середовища [м/с], s — потужність джерел (або стоків) рідини [1/с], z направлена вертикально вгору [м]. Таким чином рівняння Річардса–Клюта описує процес масо- або вологопереносу з максимальним рівнем насичення.

Рівняння (1) містить три змінні θ , h і K , пов'язані двома наперед заданими (в загальному випадку нелінійними) залежностями, які зазвичай надаються у вже розв'язаному відносно двох з цих змінних вигляді.

За рахунок добутку $K\nabla h$ у правій частині (1), рівняння Річардса–Клюта не має властивості лінійності, тому його аналітичні розв'язки відомі лише для дуже вузького кола часткових випадків значень параметрів рівняння. Звідси випливає, що основним інструментом для моделювання розв'язків рівняння (1) є чисельні методи.

Ефективність процесу моделювання напряму залежить від якості чисельного методу, тому важливо знати переваги та недоліки тих чи інших параметрів, що фігурують у його побудові.

2. Побудова чисельного методу

У цьому пункті розглядаються три параметри побудови чисельного методу для моделювання розв'язку рівняння Річардса–Клюта: форма рівняння, метод дискретизації часу та метод дискретизації простору.

А) Форма рівняння.

Як було згадано вище, рівняння Річардса–Клюта містить три пов'язані між собою змінні θ , h і K . Кожну з них можна обрати як основну і переписати рівняння відносно неї. Так, якщо ми оберемо за основну змінну θ , то отримаємо рівняння Річардса–Клюта у такій формі:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla \theta) + \frac{\partial K(\theta)}{\partial z} + s. \quad (2)$$

Тут D — гідравлічна дифузивність середовища [$\text{м}^2/\text{с}$]. Якщо ж у якості основної змінної обрати h , то маємо рівняння Річардса–Клюта у так званій напорній (або головній, або h -) формі:

$$C \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot (K\nabla h) + \frac{\partial K}{\partial z} + s, \quad (3)$$

де $C = \partial \theta / \partial h$ — вологоємність середовища [$1/\text{м}$].

Ці дві форми найчастіше використовуються для подальшої дискретизації та моделювання розв'язків, проте іноді рівняння Річардса–Клюта записують і відносно параметру K . Так, у роботі [5] саме через зведення рівняння (1) до рівняння від змінної K і подальшого аналізу отримується аналітичний розв'язок.

Також інколи вигляд рівняння (1) не змінюють перед подальшими діями. Тоді кажуть, що рівняння Річардса–Клюта записане у змішаній (або h - θ -) формі.

Також для спрощення рівняння (1) застосовують перетворення Кірхгофа

$$\psi(h) = \int_{-\infty}^h K(s) ds, \quad (4)$$

та отримують рівняння відносно нової змінної ψ . Іноді ця процедура може суттєво полегшити подальше розв'язання рівняння Річардса–Клюта. Так, у роботі [6] застосовується перетворення Кірхгофа до рівняння (1) з відомими залежностями $C(h)$ і $\theta(h)$, що описані у [7]. У результаті перетворення

отримується лінійне відносно ψ рівняння

$$C \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot (K_s \nabla \psi) + \nabla \cdot (D\psi) + \nabla \cdot G, \quad (5)$$

де C , K_s , D , G — кусково-сталі функції. Початково-крайові умови змінюються аналогічним чином і рівняння у такому вигляді розв'язується чисельно.

Таким чином, маємо декілька еквівалентних форм запису рівняння Річардса–Клюта, кожен з яких можна використовувати як відправну точку для подальшої дискретизації часу та простору.

Б) Дискретизація часу.

Зазвичай крок по часу Δt обирається сталим, а у якості схеми обирається двокроковий неявний метод Ейлера. Проте за рахунок наявності добутку $K \nabla h$ у правій частині (1), а також добутку

$$C \frac{\partial h}{\partial t}$$

у лівій частині (3), значення розв'язку на наступному кроці за часом задається як розв'язок системи нелінійних рівнянь. Для запобігання цьому та отриманні лінійних систем використовується модифікація методу Ейлера з ітерацією Пікара, як це робиться, наприклад, у роботі [8].

Рідше використовують тришарові схеми. Серед них можна, наприклад виділити апроксимацію похідної з роботи [9]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{3h^{n+1} - 4h^n + h^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (6)$$

Також можна зустріти чисельні методи з адаптивним кроком по часу. Серед робіт, які досліджували такі методи, можна зазначити [10, 11].

В) Дискретизація простору.

Серед методів дискретизації простору найчастіше вживаними є метод скінченних різниць (FDM) [10], метод скінченних елементів (FEM) [12] та метод скінченних об'ємів (FVM) [13] зі сталими кроками за простором Δz у випадку одновимірної задачі.

Для дво- та тривимірних випадків методи скінченних елементів та скінченних об'ємів зазвичай використовують розбиття простору, побудоване за допомогою тріангуляції області, досить ефективним у цьому плані є розбиття, що отримується з тріангуляції Делоне.

Якщо ж область має просту форму, як, наприклад, прямокутних чи прямокутних паралелепіпед, то у якості вибору вузлів та базисних функцій для методу скінченних елементів інколи обираються відповідно рівномірна сітка та добуток базисних функцій, які фігурують в одновимірному випадку.

Також використовуються адаптивні кроки за простором, проте зустрічаються на практиці такі схеми досить рідко і вони ще не досить досліджені. Серед основних робіт, присвячених цій темі, можна виділити [14–16].

Додаткову інформацію стосовно методів дискретизації часу і простору та огляду чисельних методів розв'язання рівняння Річардса–Клюта можна знайти у роботах [8, 17–19].

3. МОДИФІКАЦІЯ АДАПТИВНОГО КРОКУ ПО ПРОСТОРУ ДЛЯ
ОДНОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ

В даному розділі описаний новий метод побудови адаптивної сітки по простору для обчислень на наступному часовому шарі у випадку одновимірного рівняння Річардса–Клюта. Дані ідеї та формули можна також видозмінити для дво- та тривимірних випадків. Основна ідея полягає в тому, що, апроксимуючи розв’язок рівняння Річардса–Клюта лінійними сплайнами з вершинами у вузлах сітки, ми витрачаємо багато ресурсів на представлення розв’язку на частині області Ω , де похідна функції стала, адже на цьому проміжку розв’язок є просто відрізком задавати його можна більш розрідженою сіткою.

Проте просте відкидання проміжних вузлів може негативно вплинути на якісне представлення зміни функції розв’язку, коли при достатньо великому значенні змінної часу похідна на цьому проміжку все ж почне зазнавати змін. Тому було вирішено зміщувати вузли, в яких буде обчислюватися значення розв’язку на наступному кроці по часу в залежності від характеристик розв’язку на поточному кроці. З вищенаведених міркувань було б бажано, щоб сітка була більш розрідженою в частинах області, де похідна стала, а тому більш щільною там, де ця похідна сильно змінюється. Величину цих змін можна характеризувати за допомогою другої похідної розв’язку на поточному кроці. Звісно, оскільки на будь-якому кроці наближений розв’язок задається кусково-лінійною функцією, замість точного значення похідної буде використовуватися її чисельна апроксимація відносно вузлів сітки на поточному кроці.

Розглянемо умовний графік модулю другої похідної для деякого розв’язку одновимірного рівняння (1) на кроці t . Даний графік має точки локального максимуму, де сітка по простору для наступного кроку повинна бути більш щільною.

Таким чином, в одновимірному випадку для кожного вузла поточної сітки треба знайти напрямок до найближчого максимуму другої похідної та змістити цей вузол у цьому напрямку. Проте цей метод має очевидну проблему: при збільшенні номеру кроку по часу вузли сітки поступово будуть наближатися до точок максимуму другої похідної, сітка буде ставати більш і більш щільною поблизу даних точок і в результаті це негативно вплине на якість апроксимації.

Для того щоб уникнути цього, у якості поточної сітки, яку треба змістити, буде обиратися рівномірна сітка по простору, а модулі зміщення вузлів повинні бути обмеженими. Таку адаптивну сітку можна отримати, якщо на кожному кроці за часом зміщувати кожен вузол рівномірної сітки за формулою

$$\bar{z}_i = z_i + \delta_i \cdot \frac{\Delta z}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \arctan \left| 100 \cdot \frac{\Delta^2 h_{i+\delta_i}}{\Delta z^2} \right|,$$

$$\bar{z}_0 = z_0, \quad \bar{z}_1 = z_1, \quad \bar{z}_N = z_N, \quad \bar{z}_{N-1} = z_{N-1},$$

тут z_i ($i = \overline{0, N}$) — вузли рівномірної сітки, Δz — крок по простору при рівномірній сітці, $\delta_i = \pm 1$ в залежності від того, в якому напрямку відносно

на числовій осі знаходиться найближчий локальний максимум другої похідної, $\frac{\Delta^2 h_{i+\delta_i}}{\Delta z^2}$ — наближене значення другої похідної побудованої на попередньому кроці по часу функції h , обчислене у вузлі $i + \delta_i$, 100 — коефіцієнт зміщення, потрібний для того, щоб контролювати величину зсувів.

Легко бачити, що за таких умов вузли сітки не будуть зміщуватися настільки, щоб відстань між ними стала нульовою.

Процес пошуку напрямку та модулю зміщення для вузлів на кожному кроці має складність O (кількість вузлів у рівномірній сітці), що є порівняним з процесом розв'язання утвореного СЛАР для знаходження значень функції у вузлах на наступному кроці, тому дана процедура не сильно впливає на продуктивність алгоритму. Варто зазначити, що дану процедуру адаптації сітки можна використовувати для всіх вищеописаних методів побудови СЛАР для значень розв'язку на наступному кроці.

4. ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Щоб порівняти якість чисельних методів, побудованих за допомогою вибору параметрів з попереднього пункту, проведемо обчислювальний експеримент. Для більшої наочності у якості параметрів одновимірного рівняння (1) оберемо такі, які використовувалися у роботі [1], а саме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h) \frac{\partial}{\partial z} (h + z) \right), \quad z \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ K(h) &= K_s e^{\alpha h}, \quad \theta(h) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h}, \\ h(0, t) &= h_0, \\ K(h(z, t)) \frac{\partial}{\partial z} (h(z, t) + z) \Big|_{z=L} &= q_B, \\ h(z, 0) &= \frac{1}{\alpha} \cdot \ln q_A - (q_A - e^{\alpha h_0}) e^{-\alpha z}, \\ L = 100, \quad K_s = 1, \quad \alpha = 0.1, \quad \theta_s = 0.40, \\ \theta_r = 0.06, \quad q_A = 0.1, \quad q_B = 0.9, \quad h_0 = 0. \end{aligned}$$

За таких параметрів, як було показано в цій роботі, рівняння Річардса-Клюта можна звести до рівняння від K і розв'язати аналітично. Тоді розв'язок має вигляд

$$K = q_B - (q_B - e^{\alpha h_0}) e^{-z} - 4(q_B - q_A) e^{\frac{L-z}{2}} e^{-\frac{z}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_n L) e^{-\lambda_n^2 t}}{1 + (L/2) + 2\lambda_n^2 L}, \quad (7)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ — розв'язки відповідної задачі Штурма-Ліувіля.

Для оцінки чисельних розв'язків використовувалися абсолютні (α) та відносні (δ) похибки для значень θ і h відносно їх значень при аналітичному розв'язку, а також оцінка, що іменується балансом маси і задається формулою

$$MB(n) = \frac{\sum_{i \in I} (\theta_i^n - \theta_i^0) \Delta z}{\sum_{j=1}^n (q_N^j - q_0^j) \Delta t},$$

де θ_i^j — значення коефіцієнту насиченості у вузлі i на кроці по часу j , q_0^j, q_N^j — значення потоків через ліву та праву границі на кроці по часу j .

Значення такої оцінки, що близькі до 1, свідчать про коректність чисельного методу для розв’язання задачі масо переносу. При підрахунку абсолютних та відносних похибок аналітичних розв’язок задавався частковою сумою ряду (7) при $N = 6$. За такого значення N залишок ряду, а з ним і похибку у обчисленні K, θ і h можна оцінити у 10^{-20} .

Табл. 1 містить значення вищезгаданих оцінок для деяких чисельних методів. Всюди, де не зазначено інше, крок по часу Δt був сталим та рівним 0.1, крок по простору Δz був сталим та дорівнював 2, кількість ітерацій Пікара $N = 5$. Значення похибок обчислені при значенні $T = 5$.

Значення чисельного наближення θ , яке використовувалося для підрахунку відповідних абсолютних та відносних похибок, у випадку методів, що розв’язували рівняння Річардса–Клюта у h -формі, було обчислене за формулами, що задають залежності між змінними, і навпаки.

Метод	Форма рівняння	α_h	δ_h	α_θ	δ_θ	MB(%)
FDM	h -форма	0.5817	9.115e-4	1.078e-3	9.063e-5	98.75
FEM	h	8.0191	7.451e-3	1.551e-2	1.551e-2	97.57
FVM	h	7.9183	7.450e-3	1.533e-2	7.608e-4	97.37
FDM	θ -форма	0.3526	6.629e-4	6.902e-4	6.618e-5	98.83
FEM	θ	4.9128	4.564e-3	9.485e-3	4.612e-4	98.01
FVM	θ	4.9002	4.499e-3	9.476e-3	4.601e-4	98.03
FEM	h - θ -форма	5.1130	4.751e-3	9.691e-3	4.712e-4	97.93
FVM	h - θ	5.0021	4.593e-3	9.623e-3	4.672e-4	97.95
FEM	Kirchhoff ¹	4.9118	4.564e-3	9.483e-3	4.611e-4	98.01
FVM	Kirchhoff ¹	4.9696	4.676e-3	9.614e-3	4.772e-4	97.35
FEM ²	h	0.3627	3.337e-4	7.104e-4	3.454e-5	98.31
FVM ²	h	0.2761	2.598e-4	5.549e-4	2.754e-5	97.69
FEM ³	h	0.7224	6.708e-4	1.434e-3	6.977e-5	98.59
FEM ³	θ	4.8820	4.481e-3	9.037e-3	4.394e-4	98.11
FEM ⁴	h	10.81	1.004e-2	2.106e-2	1.024e-3	99.72
FVM ⁴	θ	0.1371	1.273e-4	2.694e-4	1.310e-5	98.36
FEM ⁵	θ	23.12	2.149e-2	4.601e-2	2.237e-3	93.85

Варто зазначити, що хоч метод скінчених різниць і дає кращі оцінки, ніж метод скінчених елементів та метод скінчених об’ємів, його незручно

¹Рівняння Річардса–Клюта лінеаризовано за допомогою перетворення Кірхгофа та зведено до (5).

²Похідна по часу апроксимується за формулою (6).

³Наближений розв’язок рівняння шукається у вузлах адаптивної сітки, запропонованій у розділі 3.

⁴Адаптивна сітка + формула (6).

⁵Наближений розв’язок рівняння шукається у вузлах адаптивної сітки, запропонованій у розділі 3, проте коефіцієнт зміщення збільшений до 10000.

використовувати для областей довільної форми, на яких досліджується рівняння Річардса–Клюта.

Також можна оцінити новий метод побудови адаптивної сітки. Для рівняння Річардса–Клюта у h -формі похибки при методі скінченних елементів наближаються до похибок при методі скінченних різниць при рівномірній сітці, що свідчить про суттєве підвищення ефективності процесу моделювання розв'язку. Проте для θ -форми такого покращення не спостерігається, хоча значення оцінок все ж дещо кращі за відповідні при використанні методу скінченних елементів на рівномірній сітці. Остання строка Табл. 1 містить значення похибок при збільшеному коефіцієнту зміщення вузлів адаптивної сітки. З результатів можна бачити, що за рахунок невеликого підбору коефіцієнту зміщення можна погіршити точність наближеного розв'язку. Подальший аналіз запропонованого методу може дати оцінку оптимального коефіцієнту зміщення та характер його залежності від параметрів рівняння Річардса–Клюта.

Що стосується апроксимації похідної по часу за формулою (6), то можна відзначити, що в цілому використання такого наближення покращує точність у більшості випадків, проте у комбінації з адаптивною сіткою для рівняння у h -формі виникає ситуація, коли коефіцієнт балансу маси суттєво покращується, проте інші похибки збільшуються. Але, варто зазначити, величини цих похибок ненабагато більші за відповідні похибки при використанні звичайного методу скінченних елементів, що робить цю комбінацію актуальним варіантом у випадках, коли баланс маси є пріоритетною оцінкою.

Також нижче наведені рис. 1 з графіками аналітичного та деяких чисельних розв'язків при значеннях $T = 5, T = 10, T = 15$.

На рис. 2 зображені масштабовані графіки поблизу точки мінімуму аналітичного розв'язку при $T = 5$.

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

За рахунок нелінійності рівняння Річардса–Клюта, чисельне моделювання є основним інструментом отримання та аналізу його розв'язків. Побудові та аналізу алгоритмів чисельного моделювання присвячено багато робіт, проте найпопулярнішими методами залишаються методи скінченних різниць та скінченних елементів з неявною схемою Ейлера з рівномірними кроками по часу і простору. Така ситуація виникла через те, що модифікації цих алгоритмів, що реалізуються за допомогою вибору адаптивних кроків по часу чи простору, або ж через лінеаризацію рівняння Річардса–Клюта за допомогою перетворення Кірхгофа, не дають настільки суттєвого покращення точності наближених розв'язків, щоб використовувати їх замість інтуїтивних та простіших у реалізації стандартних методів. Але це не означає, що процес пошуку нових чисельних алгоритмів та модифікації старих не має сенсу.

Запропонований у даній статті новий алгоритм побудови адаптивної сітки за простором у випадку рівняння Річардса–Клюта у напорній формі

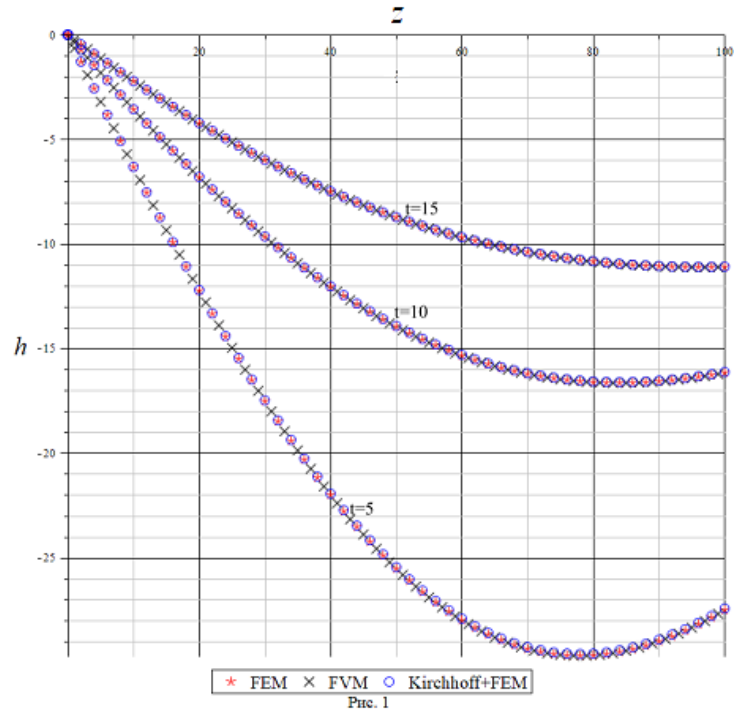


Рис. 1. Наближення аналітичного розв'язку деякими методами

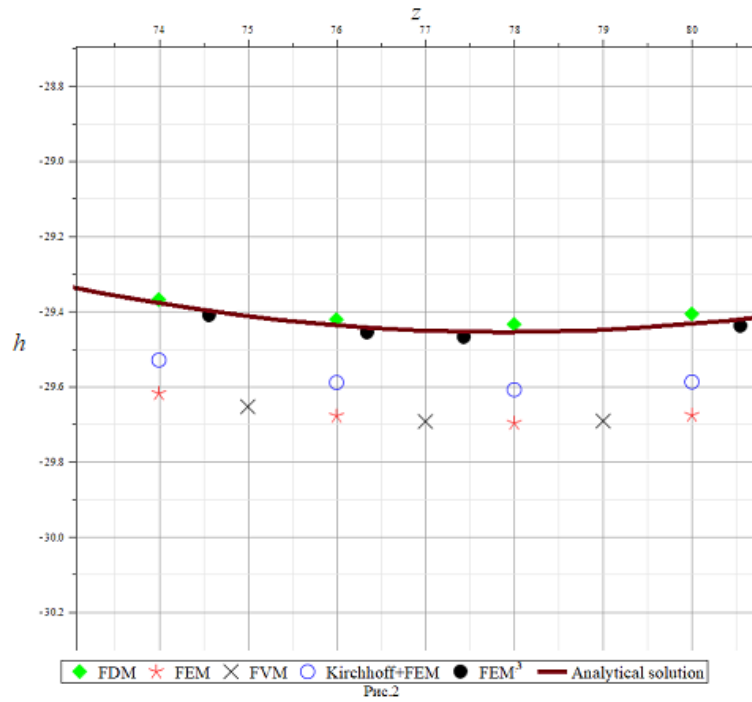


Рис. 2. Точний та наближені розв'язки поблизу точки екстремуму

для методу скінченних елементів на порядок підвищує точність апроксимації розв'язку в порівнянні з рівномірною сіткою за тих самих параметрів. Тому цей новий метод є перспективним для подальшого аналізу.

Виявлення сильних та слабких сторін чисельних методів та вибір найбільш ефективних з них для конкретних параметрів рівняння Річардса-Клюта є важливим питанням і може призвести до суттєвого покращення ефективності процесу моделювання в задачах масопересносу.

ЛІТЕРАТУРА

1. Alt H. W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.* 1983. Vol. 183. No. 1. P. 311–341.
2. Van Duyn C. J. Nonstationary filtration in partially saturated porous media: continuity of the free boundary. *Arch. Rational Mech. Anal.* 1982. Vol. 79. No. 3. P. 261–265.
3. Chen X., Friedman A., Kimura T. Nonstationary filtration in partially saturated porous media. *Eur. J. Appl. Math.* 1994. Vol. 5. No. 3. P. 405–429.
4. Degtyarev S. P. Elliptic-parabolic equation and the corresponding free boundary problem I: Elliptic problem with a parameter. *Ukr. Math. Vystnyk.* 2014. Vol. 11. No. 1. P. 15–48. (in Russian)
5. Srivastava R., Jim Yeh T.-C. Analytical Solutions for One-Dimensional, Transient Infiltration Toward the Water Table in Homogeneous and Layered Soil. *Water Resources Research.* 1991. Vol. 27. No. 5, P. 753–762. <https://doi.org/10.1029/90WR02772>
6. Suk H., Park E. Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. *Journal of Hydrology.* 2019. Vol. 579.124213. 17 p. doi:10.1016/j.jhydrol.2019.124213
7. Gardner, W. R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Science.* 1958. Vol. 85(4). P. 228–232. doi:10.1097/00010694-195804000-00006
8. Celia M., Bouloutas E., Zarba R. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research.* 1990. Vol. 26(1). P. 1483–1496. <https://doi.org/10.1029/WR026i007p01483>
9. Bouloutas E. T. Improved numerical approximations for flow and transport in the unsaturated zone. 1989. *Ph.D. thesis. Dep. of Civ. Eng., Mass. Inst. of Technol., Cambridge.* 218 p. <http://hdl.handle.net/1721.1/14355>
10. Dogan A., Motz L. H. Saturated-unsaturated 3D groundwater model. I: Development. *Journal of Hydrologic Engineering.* 2005. Vol. 10(6). P. 492–504. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2005\)10:6\(492\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2005)10:6(492))
11. Sejna M., Simunek J., van Genuchten M. Th. The HYDRUS Software Package for Simulating One-, Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Porous Media, User Manual, Version 5.0, PC Progress, Prague, Czech Republic. 2022. 348 p.
12. Simunek J., van Genuchten M., Sejna M. The HYDRUS software package for simulating the two-and three-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. Riverside: University of California Riverside, 2006.

13. Svyatskiy D., Lipnikov K. Second-order accurate finite volume schemes with the discrete maximum principle for solving Richards' equation on unstructured meshes. *Advances in Water Resources*. 2017. Vol. 104. P. 114–126. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2017.03.015>
14. Bertsch M., Hulshof J. Regularity results for an elliptic-parabolic free boundary problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1986. Vol. 297. No. 1. P. 337–350.
15. Di Benedetto E., Gariepy R. Local behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation. *Arch. Rational. Mech. Anal.* 1987. Vol. 97. No. 1. P. 1–17.
16. Solin P., Kuraz M. Solving the nonstationary Richards equation with adaptive hp-FEM. *Adv. Water Resour.* 2011. Vol. 34(9). P. 1062–1081. doi:10.1016/j.advwatres.2011.04.020
17. Farthing M. W., Ogden F. L. Numerical solution of Richards' equation: A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal*. 2017. Vol. 81(6). P. 1257–1269. <https://doi.org/10.2136/sssaj2017.02.0058>
18. Zha Y., Yang J., Zeng J., Tso C.-H. M., Zeng W., Shi L. Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIRES Water*. 2019. Vol. 6. p. e1364, 10.1002/wat2.1364
19. Kolesnykov V. Richards-Klute equation. The state of the art. 2022. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. No. 1. P. 22–34. (In Ukrainian) <https://doi.org/10.17721/2706-9699.2022.1.02>

Надійшла: 10.05.2023 / Прийнята: 20.06.2023