УДК 532.5
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.7

Брауде Я.І., студент
Кізілова Н. М., д. ф.-м. н., проф.

Дослідження періодичної вісесиметричної течії в'язкопружної рідини по циліндричній трубці

[1]Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, пл. Свободи, 4,
e-mail: braude.yan@gmail.com
[2]Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

J.I. Braude, student
N. M. Kizilova, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof.

Investigation of the periodic axisymmetric flow of a viscoelastic fluid through a cylindrical tube

[1]V.N. Karazin Kharkiv National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: braude.yan@gmail.com
[2]V.N. Karazin Kharkov National University, 61022, Kharkov, Svobody sq., 4,
e-mail: n.kizilova@gmail.com

Отримана узагальнена модель Womersley нестаціонарної вісесиметричної течії в'язкої нестисливої рідини крізь трубку кругового перетину за рахунок періодичних коливань тиску у вхідному перерізі трубки на випадок рідини з ускладненою реологією. Реологічне співвідношення для рідини має, крім в'язкості, ще чотири параметри, які мають значення коефіцієнтів релаксації деформацій та напружень першого і другого порядку. Такі реологічні співвідношення характерні для неньютонівських в'язкопружних рідин з мезоструктурою, а саме технічних та біологічних мікро/нанорідин. Було показано, що зі зростанням коефіцієнтів релаксації першого/другого порядку об'ємна витрата, середня і максимальні швидкості руху зменшуються/підвищуються. Одночасні зміни цих параметрів можуть призводити до складних змін профілю швидкості, особливо для вищих гармонік. Досліджені закономірності дозволяють пояснити відхилення параметрів течій різних мікро/нанорідин від значень, які передбачені класичним розв'язком Womersley для однорідної ньютонівської рідини, який не ураховує в'язкої диссипації під час перестройки мезоструктури рідини.

Ключові слова: задача Womersley, в'язкопружні рідини, реологічні властивості, математичне моделювання.

A generalized Womersley model of a nonstationary axisymmetric flow of a viscous incompressible fluid through a tube of circular cross-section to periodic pressure fluctuations at the inlet of the tube is obtained due for the case of a fluid with complicated rheology. The rheological parameters of the fluid are viscosity and four relaxation coefficients for strains and stresses of the first and second order. Such rheology is proper to the non-Newtonian viscoelastic fluids with mesostructure, namely technical and biological micro/ nanofluids. It was shown that with the increase of the relaxation coefficients of the first/second order the flow rate, the average and maximum velocities decrease/increase, accordingly. Simultaneous changes in these parameters can lead to complex changes in the velocity profile, especially for higher harmonics. The studied regularities can explain the deviations of the flow parameters of different micro/nanofluids from the values predicted by the classical Womersley solution for a homogeneous Newtonian fluid, which does not take into account viscous dissipation during the rearrangement of the fluid mesostructure.

Keywords: Womersley problem, viscoelastic fluids, rheological properties, mathematical modeling.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я. О.

1. Вступ

Вперше розв'язок задачі про нестаціонарну течію в'язкої нестисливої рідини крізь трубку кругового перерізу з жорсткими стінками за рахунок періодичних коливань тиску на вході було отримано в серії праць J.R. Womersley [1]. Пізніше отриманий розв'язок був узагальнений на випадок пружних, в'язкопружних, ізотропних і анізотропних, тонких і багатошарових стінок трубок, а також для ряду неньютонівських рідин, а саме дилатантних, псевдопластичних, в'язко-пластичних та в'язкопружних однорідних рідин і суспензій [2]. В останні роки значно підвищився інтерес до задач мікро- і нанофлюідики, де вивчаються течії рідин с нестандартними реологічними параметрами біля мікро/наноармованих деформівних поверхонь, які мають не один, а кілька релаксаційних параметрів: для мезо-, мікро- і наноструктури відповідно [3]. В даній роботі розглядається узагальнення задачі Womersley на випадок в'язкопружної рідини з ускладненими реологічними властивостями, які відповідають як технічним, так и біологічним мікро- та нанорідинам.

1. Постановка задачі.

Рівняння Нав'є-Стокса для нестисливої рідини можна отримати з умов нестисливості і рівняння імпульсів у вигляді

$$\begin{gathered} div(\vec{v}) = 0, \\ \rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v},\nabla)\vec{v} = -\nabla p + div\hat{\tau}, \end{gathered} \tag{1}$$

якщо підставити замість $\hat{\tau}$ тензор в'язких напружень для ньютонівської рідини $\hat{\tau} = 2\mu\hat{V}$, де $\hat{V}$ - тензор швидкостей деформацій, μ - в'язкість рідини.

Узагальнені моделі для неньютонівських рідин можна отримати за рахунок використання відповідних реологічних моделей. В даній роботі використана загальна модель в'язкопружної рідини, яка складається з кількох пружних, в'язких та інерційних моделей [2]

$$\alpha\frac{\partial^2\hat{\tau}}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial\hat{\tau}}{\partial t} + \hat{\tau} = 2\mu\hat{V} + \lambda\frac{\partial\hat{V}}{\partial t} + \zeta\frac{\partial^2\hat{V}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

де $\alpha,\beta,\lambda,\zeta$ =const - реологічні параметри.

Граничні умови для задачі (1)-(2) є

$$\begin{gathered} \vec{v}\Big|_{r=R} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \quad \vec{v}\Big|_{t=0} = 0, \\ p(t)\Big|_{x=0} = \sum_{j=0}^{\infty} p_j^0 e^{i\omega_j t}, \quad p\Big|_{x=L} = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

де $\vec{v} = v_x(t,r)\vec{e}_x$ - швидкість рідини, p – гідростатичний тиск, ω_j і p_j^0 - частоти і амплітуди Фур'є –розкладання тиску на вході в трубку. Таким чином, можна знайти розв'язок лінеаризованої задачі (1)-(2) у вигляді розкладань.

Лінеаризуємо друге рівняння (2) навколо стану спокою системи $\vec{v} = 0,\ p = p_0 = const$ та підставимо в нього тензор в'язких напружень (3) та отримаємо рівняння руху у вигляді

$$\begin{gathered} \rho\left(\alpha\frac{\partial^3\vec{v}}{\partial t^3} + \beta\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial^2 t} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) = -\nabla p - \beta\frac{\partial}{\partial t}\nabla p - \\ -\alpha\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla p + \mu\Delta\vec{v} + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\Delta\vec{v} + \zeta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\vec{v} \end{gathered} \tag{4}$$

Термодинамічне обґрунтування моделей з підвищеним та дрібним порядками диференційних операторів як за часом, так і за координатами, наведені в [4].

Розв'язок (4) може бути отриманий у формі Womersley [1] у вигляді плоских хвиль тиску та швидкості (малих збурень) в пов'язаній з трубкою циліндричній системі координат $\vec{v} = (r,\theta,x)$ як

$$\frac{\partial p(t)}{\partial x} = P\cdot e^{i\omega t}, \qquad v_x(t,r) = U(r)\cdot e^{i\omega t}, \tag{5}$$

де P і $U(r)$ - амплітуди.

2. Розв'язок задачі.

Після підстановки (5) в (4) та перше рівняння (1), отримаємо наступну систему рівняння для визначення $U(r)$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) - \Xi^2 U = P, \tag{6}$$

де $\xi^2 = i\omega\rho\chi$, $\chi = \dfrac{1 + i\beta\omega - \alpha\omega^2}{\mu + i\lambda\omega - \zeta\omega^2}$.

Розв'язок модифікованого рівняння Бесселя (6) з урахуванням перших двох граничних умов (3) має вигляд

$$U(r) = \frac{iP}{\omega\rho}\left(1 - \frac{J_0(i^{3/2}\Xi r)}{J_0(i^{3/2}\Xi R)}\right), \tag{7}$$

де $\Xi^2 = \omega\chi\rho$, J_0 - функція Бесселя першого роду порядку 0.

Інтеграл від (7) за перерізом трубки дає можливість обчислити об'ємну витрату рідини:

$$Q(t) = 2\pi\int_0^R rU(r)dr = \frac{iP\pi R^2}{\omega\rho}\left(1 - \frac{2J_1(i^{3/2}\Xi R)}{i^{3/2}\Xi R J_0(i^{3/2}\Xi R)}\right), \tag{8}$$

де J_1 - функція Бесселя першого роду порядку 1.

Для проведення чисельних розрахунків та аналізу впливу параметрів задачі в (6)-(8) треба відокремити дійсну, але тоді можна буде описати тільки синфазні коливання тиску та швидкості, чого не буває в дисипативних системах. Джерелом дисипації в даному випадку будуть не тільки в'язкі ефекти, але й зміни за часом мезо-, мікро- та наноструктури рідини, які визначаються значеннями $\alpha, \beta, \lambda, \zeta$. Для цього використаємо підхід Womersley та приймемо $|\nabla p| = M\cos(\omega t - \phi)$, де M і ϕ - амплітуда і фаза градієнту тиску. Тоді після підстановки з (6), (7) отримаємо для швидкості

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}, r) = \frac{M\tilde{M}_0(r)}{\mu\Xi^2}\sin(\omega t - \phi + \varepsilon_0), \tag{9}$$

де $\tilde{M}_0(r)$ - амплітуда функції $J_0(i^{3/2}\Xi r) = \tilde{M}_0(r)\exp(i\vartheta_0(r))$, $\delta_0 = \vartheta_0(\mathrm{R}) - \vartheta_0(\mathrm{r})$, $\varepsilon_0 = \arctan\left(\frac{\mathrm{h}_0 \sin\delta_0}{1 - \mathrm{h}_0\cos\delta_0}\right)$, $\mathrm{h}_0 = \frac{\tilde{\mathrm{M}}_0(\mathrm{r})}{\tilde{\mathrm{M}}_0(\mathrm{R})}$, $\tilde{\mathrm{M}}_0 = \sqrt{1 + \mathrm{h}_0^2 - 2\mathrm{h}_0\cos\delta_0}$.

Аналогічно для об'ємної витрати з (8) отримаємо

$$\mathrm{Q}(\mathrm{t}) = \frac{M\tilde{M}_{01}}{\mu\Xi^2}\sin(\omega t - \phi + \varepsilon_1), \tag{10}$$

де $\tilde{M}_1(r)$ - амплітуда функції $J_1(i^{3/2}\Xi r) = \tilde{M}_1(r)\exp(i\vartheta_1(r))$, $\tilde{M}_{01} = 2\pi\int_0^R r\tilde{M}_1(r)\cos(\varepsilon_1(r))dr$.

Розв'язок задачі (1)-(2) у вигляді (9)-(10) описує зсув фаз між коливаннями тиску та швидкості. Чисельні розрахунки за (9) дозволили Womersley вперше описати ефект зворотного руху рідини у в'язкому шарі біля стінки, який був засвідчений шляхом вимірювань профілю швидкості та об'ємної витрати крові в артеріальних судинах (прямі та ультразвукові методи) [1]. Отримані в даній роботі узагальнені результати (9)-(10) на випадок рідин з ускладненою реологією дозволяють дослідити вплив додаткових реологічних параметрів на течію рідини.

3. Чисельні розрахунки і аналіз результатів

Проведемо чисельні розрахунки за (9)-(10) з використанням параметрів моделі, які відповідають системі кровообігу людини [1] з метою порівняння отриманих результатів з класичною моделлю Womersley. Приймемо $\rho = 1050$ кг/м^3, $\mu = 3.5\cdot10^{-3}$ Па·с, $\mathrm{R} = 2.5$ мм, $\mathrm{L} = 10$ см, $\omega_0 = 2\pi \mathrm{f}_0$, f_0=1 Гц, p^0=90 мм рт.ст. Величини $\alpha, \beta, \lambda, \zeta$ мають різні фізичні розмірності та значення, але $\lambda/\mu \equiv \kappa_{\varepsilon1}$ і $\zeta/\lambda \equiv \kappa_{\varepsilon2}$ мають фізичне значення першого і другого часів релаксації, а $\beta \equiv \kappa_{\tau1}$ і $\alpha/\beta \equiv \kappa_{\tau2}$ - першого і другого часів ретардації рідини, які, відповідно до численних експериментальних даних [1,2], змінюються в діапазонах 0.001-1 с.

Результати розрахунків профілю швидкості (9) від безрозмірної координати $\overline{r} = r/R$ при різних наборах параметрів ϕ, $\kappa_{\varepsilon1}$, $\kappa_{\varepsilon2}$, $\kappa_{\tau1}$, $\kappa_{\tau2}$, μ наведені на Рис.1а-в.

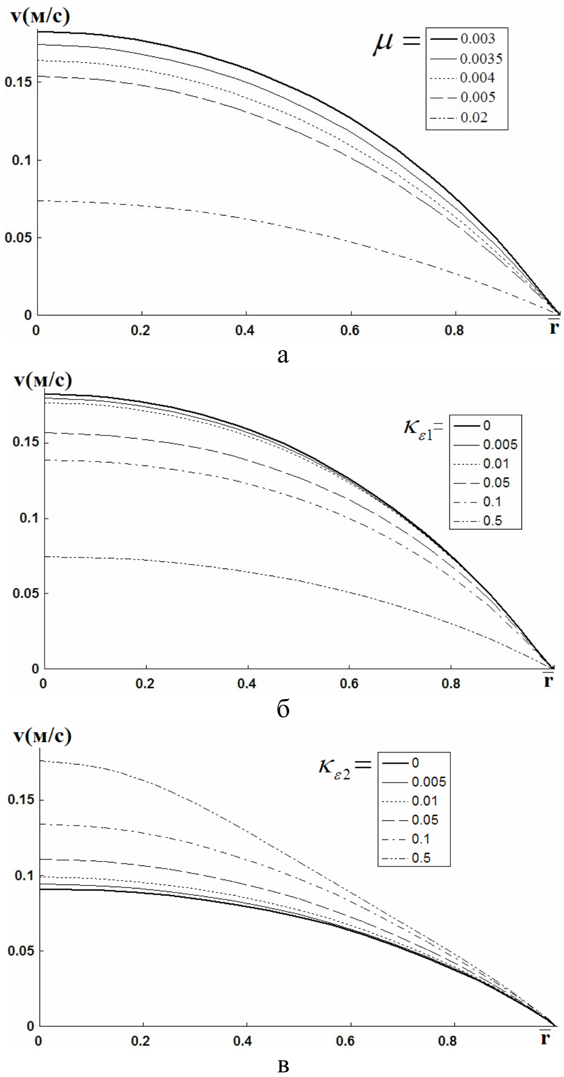

Рис.1. Залежності $v(\overline{r})$ для різних в'язкостей μ, Па·с (а), часів $\kappa_{\varepsilon1}$, с (б) і $\kappa_{\varepsilon2}$, с (в).

Зі зростанням в'язкості рідини об'ємна витрата, середня і максимальні швидкості руху зменшуються. Криві на Рис.1а відповідають відомому на сьогодні діапазону в'язкостей від нижньої границі норми до максимальних значень, які були виміряні у пацієнтів після холодового та електрошоку [1]. Додаткові механізми диссипації у вигляді в'язкої перебудови мезоструктури та перерозподілу рідини між твердими частинками структури теж ведуть до зменшення швидкості руху, особливо коли процеси перебудови повільні та розтягнуті у часі (Рис.1б). Аналогічні зміни відбуваються при варіаціях $\kappa_{\tau 1}$ в тому ж діапазоні значень. Зміни часів релаксації другого порядку $\kappa_{\tau 2}$, $\kappa_{\varepsilon 2}$ викликають зворотній вплив на швидкість за рахунок зміни кривизни профілю швидкості поблизу стінок (Рис.1в). Комбінація одночасних змін всіх параметрів $\kappa_{\varepsilon 1}$, $\kappa_{\varepsilon 2}$, $\kappa_{\tau 1}$, $\kappa_{\tau 2}$, μ може призводити до складних змін профілю швидкості, особливо для вищих гармонік $f > f_0$.

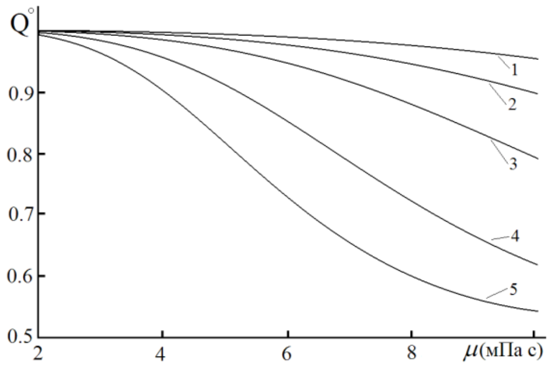

Рис.2. Залежності $Q^{\circ}(\mu)$ для випадків $\{\kappa_{\varepsilon 1}, \kappa_{\varepsilon 2}, \kappa_{\tau 1}, \kappa_{\tau 2}\}$={0.01,0,0.01,0} (1), {0.1,0.1,0.1,0} (2), {0.1,0,0.1,0} (3), {0.5,0.1,0.1,0.1} (4), {0.5,0,0.5,0} (5).

Залежності безрозмірної об'ємної витрати течії рідини Q° від в'язкості μ наведені на Рис.2 для різних комбінацій параметрів $\kappa_{\varepsilon 1}, \kappa_{\varepsilon 2}, \kappa_{\tau 1}$, $\kappa_{\tau 2}$ з тих значень, які використалися раніше (Рис.1а-в). В залежності від значень цих параметрів монотонно спадаюча залежність $Q^{\circ}(\mu)$ може бути опукла вниз, вгору, S- або N-подібна.

Були також розраховані профілі швидкості гармонік f_0=2-16 і показано, що відкритий Womersley ефект зворотного руху рідини у пристінному шарі зберігається також у рідин з ускладненою реологією. Завдяки цьому ефекту загальний профіль швидкості, який складається з усіх гармонік, може суттєво відрізнятися від профілю, який передбачений класичною формулою Womersley, що неодноразово спостерігалося в експериментах з мікро- і нанорідинами.

5. Висновки

Отримана і досліджена узагальнена модель Womersley періодичної вісесиметричної течії рідини на випадок рідин, моделі яких містять пружний, в'язкий та інерційний елементи [2]. Показано, що при варіації всіх параметрів моделі зі зростанням коефіцієнтів релаксації першого/другого порядку об'ємна витрата, середня і максимальні швидкості руху зменшуються/підвищуються. Одночасні зміни цих параметрів викликають різноманітні зміни, так що зростання витрати за рахунок підвищення коефіцієнтів першого порядку може компенсуватися зменшенням витрати за рахунок підвищення коефіцієнтів другого порядку. Останні впливають на кривизну профілю швидкості поблизу стінок трубки, що проявляється в прискоренні швидкості в ядрі течії та слабкому зворотному руху при стінках. Аналогічні процеси в класичній моделі Womersley пов'язані з фазою коливань тиску у вхідному перерізі [1]. Досліджені залежності показують, що відхилення параметрів течій різних мікро/нанорідин [3] від значень, які передбачені класичною формулою Womersley для однорідної ньютонівської рідини можуть бути викликані додатковими джерелами в'язкої диссипації протягом перестройки мезоструктури підчас періодичного прискорення-гальмування рідини у зсувній течії.

Список використаних джерел

1. *McDonald's Blood Flow in Arteries*. By Ch. Vlachopoulos, M. O'Rourke, W.W. Nichols. CRC Press. - 2011. - 768p.
2. Fridtjov I. *Rheology and non-Newtonian fluids*. Springer. - 2016. - 199 p.
3. *Complex Fluid-Flows in Microfluidics*. Galindo-Rosales J.F.H. (ed.) Springer. - 2017. - 111p.
4. He J.-H., Ji F.-Y. Two-scale mathematics and fractional calculus for thermodynamics. // Thermal Sci. - 2019. - Vol.23,N4. - P.2131-2133.

References

1. *McDonald's Blood Flow in Arteries*. (2011) By Ch. Vlachopoulos, M. O'Rourke, W.W. Nichols. CRC Press. 768p.
2. FRIDTJOV I. (2016) *Rheology and non-Newtonian fluids*. Springer. 199 p.
3. *Complex Fluid-Flows in Microfluidics*. (2017) Galindo-Rosales J.F.H. (ed.) Springer. 111p.
4. HE J.-H., JI F.-Y. (2019) Two-scale mathematics and fractional calculus for thermodynamics. *Thermal Sci.* Vol.23(4). p.2131-2133.

Надійшла до редколегії 27.11.2019