УДК 519.21:519.1 **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.6**

Марина ГРИСЕНКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0816-4734
e-mail: magryss@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Анастасія ТКАЧЕНКО, студентка
e-mail: nastyatkachenko0711@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЯК НАВЧИТИ УЧНІВ РОЗВ’ЯЗУВАТИ ЙМОВІРНІСНІ ЗАДАЧІ, ЗАСТОСОВУЮЧИ АЛГОРИТМ ПОЯ

Анотація. *Досліджуються особливості застосування алгоритмічного методу Дьордя Поя під час проведення занять математичного гуртка, присвячених вивченню елементів комбінаторики та теорії ймовірностей. Акцент зроблено на алгоритмі Поя як універсальному засобі структурування процесу розв’язування задач та розвитку логічного мислення учнів та учениць. Розглядаються переваги поетапного підходу до навчання, що включає осмислення умови задачі, складання плану, реалізацію та аналіз отриманого результату. Окрему увагу приділено дослідженню емоційного стану учнів та учениць під час занять у гуртку з використанням проєктивної методики «Дерево», спрямованої на вивчення рівня мотивації та адаптації школярів.*

Ключові слова: *алгоритм Поя; система запитань; комбінаторика; теорія ймовірностей; граф–дерево; проєктивна методика «Дерево».*

1. Вступ

Стрімкий прогрес у галузі науки, техніки та інформаційних технологій суттєво впливає на розвиток сучасного суспільства, вимагаючи постійного вдосконалення методів викладання в галузі математичної освіти.

В Україні втілюється в життя освітня реформа НУШ (Нова українська школа), яка зосереджується на індивідуальних особливостях кожного учня. Відбувається переорієнтації навчального процесу на практичну значущість знань та розвиток особистості. Математична освіта покликана формувати фахові «жорсткі» навички (hard skills), які повинні поєднуватися з м’якими навичками (soft skills), зокрема: вміння працювати в команді, комунікувати, приймати рішення, керувати емоціями та діяти в умовах стресу. Це робить заняття з математики важливим інструментом цілісного розвитку школярів.

Формуванню у школярів навичок самостійної дослідницької та пізнавальної діяльності, стійкого інтересу до навчання сприяють не тільки уроки з математики в закладах загальної середньої освіти, а і різні види позакласних занять. Однією з ефективних форм задоволення учнівської допитливості, можливості розширити кругозір школярів з різних тем є математичний гурток. Гуркова робота з математики сприяє розвитку у школярів математичного способу мислення, вміння зосереджувати

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

свою увагу, робити логічні, чіткі висновки та узагальнення, правильно використовувати математичну термінологію та символіку, обґрунтовувати свої думки, аналізувати.

Математична компетентність є однією з 10 ключових компетентностей Нової української школи. Згідно з реформою загальної середньої освіти, випускник Нової української школи має бути сформованим як цілісна всебічно розвинена особистість, яка здатна до успішного критичного, логічного та креативного мислення. Вчитель математики має брати на себе відповідальність не лише за результати навчання учнів та учениць математики, а й за обрану чи побудовану ним технологію розвитку творчого та креативного мислення учнів та учениць засобами математики. Він має акцентувати увагу на мотиваційних аспектах та на потужних можливостях процесу навчання математики для формування та розвитку творчих якостей школярів. Сучасна педагогіка передбачає застосування коучингових інструментів, зокрема системи навчальних запитань, що дозволяють вибудовувати партнерську взаємодію між учнем і вчителем. Така взаємодія ґрунтується на принципах психологічної безпеки, права на помилку, відкритості, що є особливо важливим для подолання «математичної тривожності». У контексті роботи в шкільних гуртках з математики такі підходи набувають додаткової гнучкості, дозволяючи вчителеві адаптувати матеріал до потреб учнів та учениць. Впровадження таких методик дозволяє забезпечити інструментами учнів та учениць для осмисленого розв'язування задач і формує логічне та критичне мислення, необхідне для адаптації до викликів у сучасному світі.

Математика як фундаментальна дисципліна відіграє ключову роль у підготовці молодого покоління до життя в умовах динамічних змін, пропонуючи інструменти для моделювання реальних процесів, аналізу великих масивів даних та прийняття рішень в умовах невизначеності.

Особливе значення у цьому контексті набувають методи та моделі теорії ймовірностей, які дозволяють учням у закладах загальної середньої освіти глибше зрозуміти закономірності випадкових явищ, оцінювати ймовірності подій та будувати прогнози. Вони сприяють розвитку комбінаторного мислення, здатності до аналізу проблем в умовах невизначеності та є важливими компетентностями, які характеризують сучасну людину.

Використання задач з елементами теорії ймовірностей у позаурочній діяльності, зокрема на заняттях математичних гуртків, створює передумови для формування в учнів та учениць навичок критичного мислення та осмисленого аналізу інформації, необхідних для прийняття обґрунтованих рішень. Використання ймовірнісних математичних моделей сприяє розумінню реальних соціальних, економічних та природничих процесів. Це також дозволяє учням більш усвідомлено застосовувати математичні знання у повсякденному житті, вирішуючи завдання, що виходять за межі суто академічних тем. Такий підхід не лише сприяє підвищенню мотивації до навчання, але й забезпечує краще розуміння ролі математичних знань у професійному та особистому житті, що є важливим чинником у підготовці учнів та учениць до викликів сучасного світу.

2. Алгоритм розв'язування задач Поя

Навички розв'язування задач теорії ймовірностей є важливими елементами курсу математичного гуртка, адже вони відкривають перед учнями двері до світу логіки, аналізу та раціонального мислення. Ймовірнісні методи допомагають не лише зрозуміти математичні закономірності, але й дають змогу приймати виважені рішення на основі отриманих реальних даних. Проте навчити учнів та учениць упевнено долати ці завдання – справжній виклик. Тому для ефективного навчання необхідно забезпечити школярів чітким алгоритмом роботи, який допоможе послідовно та структуровано підходити до розв'язування ймовірнісних задач.

Відомий математик Дьордь Поя, (*Джордж Поліа* 13 грудня 1887 – 7 вересня 1985) у своїй книзі «How to Solve It» запропонував універсальний алгоритм розв'язування задач, який став основою для навчання учнів та учениць (Pólya, 1945). У цій книзі дається психологічно-педагогічний аналіз проблеми розв'язування математичної задачі та пропонується певна загальна методика розв'язування задач. Приклади, за допомогою яких автор ілюструє свій метод, наведені головним чином з області елементарної математики (лише деякі з них відносяться до початкових елементів аналітичної геометрії або диференціального числення). Замість хаотичного пошуку розв'язання алгоритм дозволяє крок за кроком розібратися із задачею, обрати оптимальний підхід та перевірити правильність результату. Завдяки використанню алгоритму учні не лише краще засвоюють матеріал, але й здобувають навички, які стануть у пригоді далеко за межами завдань з математики.

Методика розв'язування задач Поя включає чотири ключові етапи:

1. осмислення умови задачі;
2. складання плану розв'язання;
3. реалізація плану розв'язання;
4. аналіз отриманого результату.

Проаналізуємо кожен із етапів докладніше з метою розкриття їхньої концептуальної сутності, визначення значущості в алгоритмі розв'язання задач та оцінки ролі у формуванні необхідних когнітивних і практичних навичок для ефективного розв'язування математичних задач.

На першому етапі учням необхідно детально ознайомитися з умовою задачі та зрозуміти її зміст. Важливо навчити учнів та учениць читати задачу уважно та аналітично, одразу виділяючи ключову інформацію. Учні можуть прочитати задачу кілька разів, щоб зрозуміти її зміст, проте потрібно прагнути до того, щоб учні робили це з першого разу. З досвіду роботи рекомендується, щоб учні встановлювали тип і структуру задачі та фіксували результати початкового аналізу, що полегшить подальші кроки.

Під час другого етапу учні розглядають можливі підходи до розв'язання задачі, виокремлюючи надані й шукані дані та встановлюючи логічний зв'язок між ними. Це дає змогу вибрати відповідну стратегію розв'язування задачі.

На третьому етапі учні повинні здійснити послідовні кроки розв'язання, ретельно виділяючи логічні зв'язки у кожному елементі міркування. Учням необхідно вміти чітко

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

пояснювати свої дії та аналізувати кожен крок доведення, виділяючи основні та допоміжні дані та елементи розрахунку, а також робити обґрунтовані висновки.

Під час четвертого, завершального етапу, важливо перевірити правильність проведених дій і отриманого результату. Необхідно, щоб учні розуміли важливість цього етапу під час роботи із завданням, адже він допомагає зробити висновки в тому разі, якщо завдання розв'язано невірно та в майбутньому уникати подібних помилок.

Необхідно зауважити, що у процесі розв'язування задач межі названих етапів дуже розмиті. Проте, розв'язування задач має проходити всі етапи, оскільки це полегшить засвоєння матеріалу для учнів та учениць. Крім того, емоційний стан школярів, творча ініціатива, гнучкість розуму, натхненність, радість від інтелектуальної праці при розв’язуванні задач має дуже важливе значення в процесі навчання математики.

3. Єдина система запитань для дотримання алгоритму

Для того, щоб ефективно застосовувати алгоритм Поя у розв’язуванні задач, доцільно використовувати універсальну систему запитань, яка допомагає послідовно виконувати всі етапи. Ці запитання спрямовані на поглиблення розуміння умови задачі, планування дій, реалізацію розв’язання та перевірку отриманого результату. Систему запитань, яка забезпечує чітку структуру роботи та сприяє розвитку логічного мислення, допомагаючи уникати помилок і досягати максимально точного розв’язання задач, можна застосовувати при розв’язуванні задач теорії ймовірностей незалежно від їх складності.

Розглянемо детальніше запитання для кожного етапу алгоритму.

Етап 1: Осмислення умови задачі.

- Що нам дано в задачі?
- Що потрібно знайти?
- Які обмеження є в задачі?
- Чому виникають ці обмеження?
- Яке основне питання задачі?

Етап 2: Складання плану розв’язання.

- Чи знайомі ми з подібними задачами?
- Які методи розв’язання можна застосувати?
- Який метод буде найзручнішим для цієї задачі?
- Як побудувати математичну модель задачі?
- Якими кроками ми будемо діяти для досягнення результату?

Етап 3: Реалізація плану розв’язання.

- Як виконати кожний крок розв’язання?
- Чи дотримуються всі обмеження задачі?
- Чи враховані всі можливі варіанти (у випадку комбінаторних задач)?
- Чи виконані всі розрахунки правильно?

Етап 4: Аналіз отриманого результату.

- Чи відповідає результат умові задачі?
- Як перевірити правильність розв’язання?

- Чи можна запропонувати альтернативний метод перевірки результату?
- Чи є можливість спростити або вдосконалити процес розв’язування?

Використання цієї системи запитань у навчальному процесі створює основу для глибшого засвоєння матеріалу й сприяє формуванню у учнів та учениць впевненості у правильному розв’язанні задач.

4. Заняття математичного гуртка: приклади застосування алгоритму Поя

На заняттях математичного гуртка особливо важливо створити умови, за яких учні не лише засвоюють навчальний матеріал, а й отримують задоволення від процесу пізнання, розвивають навички логічного мислення та самостійного аналізу задач. Заняття, присвячене розв’язуванню задач з елементами теорії ймовірностей, може стати ефективним засобом для впровадження алгоритму Поя. Одним із методів, який дозволяє зробити процес розв’язування таких задач наочним і зрозумілим для учнів та учениць, є побудова графа–дерева можливих варіантів. Цей підхід не лише спрощує розв’язування задач, але й сприяє систематизації знань та формуванню вміння працювати з елементами комбінаторики. Нижче наведено розгорнуту частину заняття з прикладами задач і поясненням їхнього розв’язання відповідно до методичних рекомендацій. Матеріали можна використовувати як готову розробку для проведення заняття у 5–6 класах.

Задача 1. *У класі призначили чотирьох чергових. Ними виявилися Степан, Ксенія, Роман та Марія. Які можна скласти групи з двох осіб для чергування в класі після уроків? Скільки різних груп може вийти?*

Розв'язання. Перший етап – осмислення умови задачі. На цьому етапі навчання розв'язування комбінаторних задач необхідно переконатися, що учні зрозуміли умову задачі. Необхідна система запитань, що допомагає встановленню зв’язків між даними задачі і величинами, які мають бути визначені в процесі розв’язування задачі. Для пошуку розв’язку задачі 1 корисними можуть бути такі запитання:

1. Що нам дано в задачі?
- У класі призначили чотирьох чергових та їхні імена.

2. Що нам потрібно скласти?
- Пари з двох осіб.

3. Чи є якісь обмеження в складанні пар?
- Ні.

4. Чому?
- В умові задачі немає обмежень, усі можуть чергувати один з одним.

5. Що нам потрібно знайти?
- Кількість пар із двох осіб.

Другий етап – складання плану розв'язання. На цьому етапі навчання розв'язування комбінаторних задач необхідно переконатися, що учень володіє навичками, які знадобляться йому для успішного розв'язування задачі.

На цьому етапі можна коригувати роботу учнів та учениць такими питаннями:

1. Чи знайомі ви з таким видом задач?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

- Знайомі.

2. *Чи розв'язувалися подібні задачі раніше?*
   - Так.
3. *Якими методами такі задачі розв'язувалися раніше?*
   - Методом перебору всіх варіантів, складання таблиці можливих варіантів, побудова графа-дерева можливих варіантів.
4. *Який метод буде найзручнішим?*
   - Граф–дерево можливих варіантів.
5. *Чому?*
   - Цей метод наочно показує всі можливі варіанти і не дасть змоги пропустити жоден з них.

Третій етап – реалізація плану розв’язання. До цього етапу навчання розв'язування комбінаторних задач учні зрозуміли умови задачі, що їм дано імена хлопців і дівчат, з яких потрібно скласти пари з двох осіб і знайти їхню кількість, що найоптимальніший варіант для розв'язання цього завдання – це складання графа-древа можливих варіантів розв'язання. Далі учні можуть переходити до розв'язування.

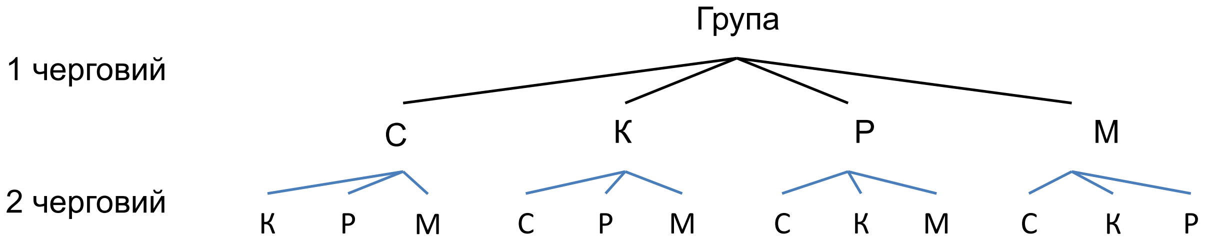

Рис. 1. Дерево можливих варіантів до задачі 1

На цьому етапі необхідно звернути увагу на те, що обраний метод розв'язання враховує всі дані та побудова графа здійснюється правильно. У нашому випадку необхідно проконтролювати, щоб учні об’єднували однакові пари в один варіант, наприклад СК і КС. По закінченню цього етапу учень отримує відповідь на задачу, а також отримує наочний приклад розв'язання (рис. 1).

Таблиця 1.

Матриця можливих пар чергових у класі до задачі 1

	С	К	Р	М
С	СС	СК	СР	СМ
К	КС	КК	КР	КМ
Р	РС	РК	РР	РМ
М	МС	МК	МР	ММ

Четвертий етап – аналіз отриманого результату. До початку цього етапу учень може вважати, що поставлене перед ним завдання вирішене, але це не зовсім так.

Необхідно проаналізувати та перевірити метод розв'язання задачі, виявити правильність ходу отримання розв’язання та відповідь. На цьому етапі можна запропонувати учням самостійно перевірити розв'язок задачі, це можна зробити кількома способами. Наприклад, попросити учнів та учениць ще раз розв'язати цю задачу за допомогою обраного методу або запропонувати їм альтернативний метод розв'язання. У випадку задачі 1 можна перевірити розв'язок за допомогою складання таблиці можливих варіантів. При цьому необхідно проконтролювати, що під час складання таблиці учні розуміють, що обрана людина не може чергувати сама з собою та виключали такі варіанти розв'язання. В таблиці потрібно об'єднувати однакові пари в один варіант. За підсумком перевірки школярі отримають таблицю можливих пар чергових у класі (табл. 1).

Задача 1 є гарним прикладом для первинного закріплення знань, отриманих під час вивчення елементів комбінаторики. Таке завдання підходить для перевірки: як саме учнями засвоєна побудова графа у вигляді «дерева розв’язків» (новий варіант розв'язання комбінаторних задач); чи не виникає в учнів та учениць труднощів у розумінні та побудові графа. Це дасть змогу скоригувати подальшу роботу учнів та учениць. Завдання задачі вимагає від школярів побудувати всі можливі комбінації пар із чотирьох осіб і знайти їх кількість. У процесі розв’язування цієї задачі учні та учениці можуть практично застосувати знання про комбінаторні підрахунки, використовуючи графічний метод для візуалізації варіантів. Ця задача сприяє розвитку таких важливих навичок, як робота з обмеженнями задачі, перевірка результатів та застосування альтернативних методів розв’язання (наприклад, складання таблиці можливих комбінацій). У процесі виконання завдання учні навчаються виділяти ключову інформацію, обирати найзручніший метод розв’язання та аналізувати отримані результати.

Поетапне навчання школярів графічному моделюванню при розв’язуванні комбінаторних задач робить позитивний вплив на вміння використовувати учнями та ученицями схематичного рисунка, а надалі – графічних схем при розв’язуванні будь-якої текстової задачі. Розв’язування комбінаторних задач способом перебору сприяє освоєнню учнями та ученицями основ математичного моделювання. Спочатку це предметні рисунки, потім умовно-символічні позначення, а далі школярі користуватимуться схематичними моделями: таблицями, графами. Розв’язування комбінаторних задач на заняттях математичного гуртка, що перебувають у тісному зв'язку з програмним змістом, буде посилювати позитивний вплив і на розвиток інших психологічних процесів. Так, буде значно розширюватися обсяг і концентрація уваги, розвиватися пам'ять, формуватися вміння оформлювати свої міркування, пояснення, докази в словесній формі, що позитивно впливатиме й на загальний розвиток мовлення.

Теорія ймовірностей є важливим розділом математики, який навчає аналізувати випадкові події, оцінювати їхню ймовірність та приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності. Особливу роль у її вивченні відіграють задачі, які базуються на класичному означенні ймовірності. Їх розв’язання вимагає чіткого розуміння умов задачі, формулювання математичної моделі та ретельного аналізу можливих

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

результатів експерименту. Розглянемо приклад розв'язання задач із застосуванням алгоритму Поя.

Задача 2. *Наталка двічі кидає кубик, у сумі вона отримує* 8 *очок. Яка ймовірність того, що на одному з кубиків є число* 5*?*

Розв'язання.

Перший етап – осмислення умови задачі. На цьому етапі переконуємось, що учні та учениці розуміють умову задачі, та будуємо математичну модель задачі. Для цього ставимо такі запитання:

1. *Що нам дано в задачі?*
   - Учні та учениці мають відповісти, що Наталка кидає два стандартні кубики, кожен із яких має числа від 1 до 6.
2. *Що потрібно виконати в задачі?*
   - Визначити ймовірність того, що на одному з кубиків випадає число 5, за умови, що сума очок на обох кубиках дорівнює 8.
3. *Яке обмеження є в задачі?*
   - Сума чисел на двох кубиках має бути рівною 8.
4. *Яке основне запитання задачі?*
   - Скільки серед усіх можливих результатів пар чисел, сума яких дорівнює 8, сприяє події, де на одному з кубиків випадає 5?

Другий етап – складання плану розв'язання. Учням та ученицям потрібно зрозуміти, як правильно підрахувати можливі результати експерименту та визначити сприятливі події. Для цього пропонуємо такі питання:

1. *Яка математична модель задачі?*
   - Модель описується рівнянням: $x + y = 8$, де x – кількість очок на першому кубику, а y – на другому.
2. *Які всі можливі комбінації* x *і* y*, що задовольняють умову* $x + y = 8$*?*
   - Учні та учениці мають перебрати всі можливі значення x та y, де $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$, і визначити, які з них дають суму 8.
3. *Які результати є сприятливими для події* A*: на одному з кубиків випадає* 5*?*
   - Школярі мають знайти серед усіх пар такі, що на одному з кубиків є число 5.
4. *Як знайти ймовірність події* A*?*
   - Використати класичне означення ймовірності.

Третій етап – реалізація плану розв'язання.

1. *Визначаємо всі можливі результати.*
   - Рівняння $x + y = 8$ обмежує можливі комбінації чисел x та y, які можуть випасти на двох кубиках. Усі можливі пари (x, y): $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$, $(6,2)$. Отже, кількість усіх можливих результатів: $|\ S\ |= 5$.
2. *Знаходимо сприятливі результати для події* A*.*
   - Подія A – на одному з кубиків випадає 5. Це означає, що серед пар (x, y) повинна бути пара, в якій хоча б одна координата дорівнює 5. Сприятливі пари: $(3,5)$ і $(5,3)$. Кількість сприятливих результатів: $|\ A\ |= 2$.
3. Обчислюємо ймовірність події A.

- Використовуємо формулу класичного означення ймовірності:

$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$. Підставляємо значення: $P(A) = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Четвертий етап – аналіз отриманого результату. Усі можливі пари (5 пар) дійсно задовольняють рівняння $x + y = 8$. Сприятливі пари (2 пари) включають усі випадки, коли хоча б один із кубиків має число 5. Можемо використовувати альтернативну візуалізація. Побудуємо таблицю (табл. 2), яка показує всі можливі результати.

Таблиця 2.

Співвідношення чисел на двох кубиках із заданою сумою

Кубик 1 (x)	Кубик 2 (y)	Сума $(x + y)$	Чи є 5?
2	6	8	Ні
3	5	8	Так
4	4	8	Ні
5	3	8	Так
6	2	8	Ні

З даних таблиці видно, що лише 2 з 5 пар сприяють появі події A. Тому, шукана ймовірність становить $0{,}4$.

Відповідь: Ймовірність того, що на одному з кубиків є число $5 – P(A) = 0{,}4$.

Розв’язок задачі 2 демонструє, як застосування класичного означення ймовірності допомагає учням та ученицям розв’язувати практичні задачі, пов’язані з аналізом випадкових подій. У ході її розв’язування учні навчаються складати математичну модель задачі, визначати можливі та сприятливі результати експерименту, а також обчислювати ймовірність події. Завдання дозволяє перевірити рівень розуміння учнями основних понять теорії ймовірностей та їхню здатність використовувати отримані знання на практиці. Альтернативні способи перевірки результату, наприклад, складання таблиці можливих варіантів, сприяють глибшому осмисленню задачі та зміцнюють упевненість учнів та учениць у своїх розрахунках. Завдяки своїй наочності та прикладній спрямованості ця задача стає ефективним інструментом для закріплення теоретичних знань і формування практичних навичок, необхідних для обчислень за класичним означенням ймовірності. Вона також готує учнів та учениць до більш складних задач, які потребують вищого рівня абстрактного мислення та математичного аналізу.

7. Методика визначення емоційного стану учнів

У шкільному середовищі взаємодія ігрової та освітньої діяльності є головним джерелом виникнення та прояву емоцій учнів та учениць. Усі види почуттів розвиваються під час процесу навчання математики. Коли у активній діяльності учні та учениці мають справу з труднощами, які навчаються успішно долати, докладаючи вольові зусилля, то ж в результаті у них з’являються такі нові інтелектуальні почуття,

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

як: інтерес, допитливість, радість, сумнів, здивування та багато інших. Згодом у дітей формується і розвивається розуміння власних почуттів, емоцій, вони навчаються проявляти їх у спілкуванні з оточуючими людьми.

Якщо вчитель, який навчає математики, має високий рівень математичної компетентності, добре знає сферу застосувань математики, вміє організувати захопливий процес пошуку розв’язання кожної математичної задачі, вірить у розвивальні можливості занять математикою для формування творчої особистості, то такий учитель здатен не лише оволодіти технологіями розвитку критичного та творчого мислення учнів та учениць, а й здатен творити такі освітні технології. Вчитель, який любить математику, може: розбудити інтерес до математики у своїх учнів та учениць і розвивати їх засобами математики, а також формувати в них творче креативне мислення.

Від учителя математики вимагається вміння організувати свою дію так, щоб її кінцевим результатом стала особиста взаємодія з учнями на педагогічно оптимальному рівні. Значну допомогу у цьому плані надають педагогічні технології – наукове проєктування та точне відтворення педагогічних дій, що гарантують успіх усіх учасників освітнього процесу. Центральним компонентом педагогічної технології є чітко визначена кінцева мета, що дозволяє розробити оптимальний алгоритм її досягнення. Важливим також є інструментарій відстеження рівня досягнення запланованих результатів та за необхідності внесення покрокових корективів. Зокрема важливим етапом підведення підсумків уроку з математики буде отримання вчителем від учнів та учениць так званого «зворотного зв’язку» з використанням інтерактивних та коучингових освітніх технологій.

Використання інтерактивної моделі навчання математики передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання ролевих ігор, проєктну діяльність, спільне вирішення проблемних ситуацій. Інтерактивне навчання – це навчання з добре організованим зворотним зв'язком учнів та учениць з учителем, двосторонній обмін інформацією між ними. Інтерактивні технології базуються на прямій взаємодії з учнями. При використанні інтерактивних технологій завданням вчителя є створення умов для розвитку ініціативи учнів та учениць. Останні виступають повноправними учасниками освітнього процесу, при розв’язуванні задач – їх досвід важливий не менше, ніж досвід учителя математики, який не тільки повідомляє готові знання, а й спонукає учнів та учениць до самостійності, аналізу ситуацій, надає право вибору розв’язку поставленої задачі, залишаючи за учнями та ученицями право на помилку та пошук правильного розв’язку на основі аналізу (самоаналізу) обраної раніше позиції. Вчитель виступає в декількох основних ролях: інформатора-експерта, коли викладає суть теми чи проблеми, описує ситуацію, відповідає на питання школярів, відстежує результати освітнього процесу; консультанта, коли звертається до досвіду учнів та учениць, допомагає шукати розв’язання поставлених задач, самостійно ставити нові завдання тощо.

Однією із методик дослідження емоційного стану учнів та учениць на заняттях математичного гуртка є проєктивна методика «Дерево». Методика спрямована на дослідження шкільної мотивації та адаптації учнів та учениць. Вона була створена для школярів з метою перевірити, як вони освоїлися в школі за перші роки навчання. Проте пізніше з'ясувалося, що тест актуальний і для дорослих. Методика була запропонована на семінарі шкільних психологів в Одесі англійськими психологами Джоном і Дайаной Лампен (1997 р.) для забезпечення можливості більш повного вивчення особистості школярів. Даний тест дітям дуже подобається. Автор цього тесту – відомий британський психолог Піп Вілсон (Pip Wilson). Тест допомагає людині визначити її сьогодення та бажаний емоційний стан. Мета: дослідження рівня шкільної мотивації та адаптації учнів та учениць на уроках математики.

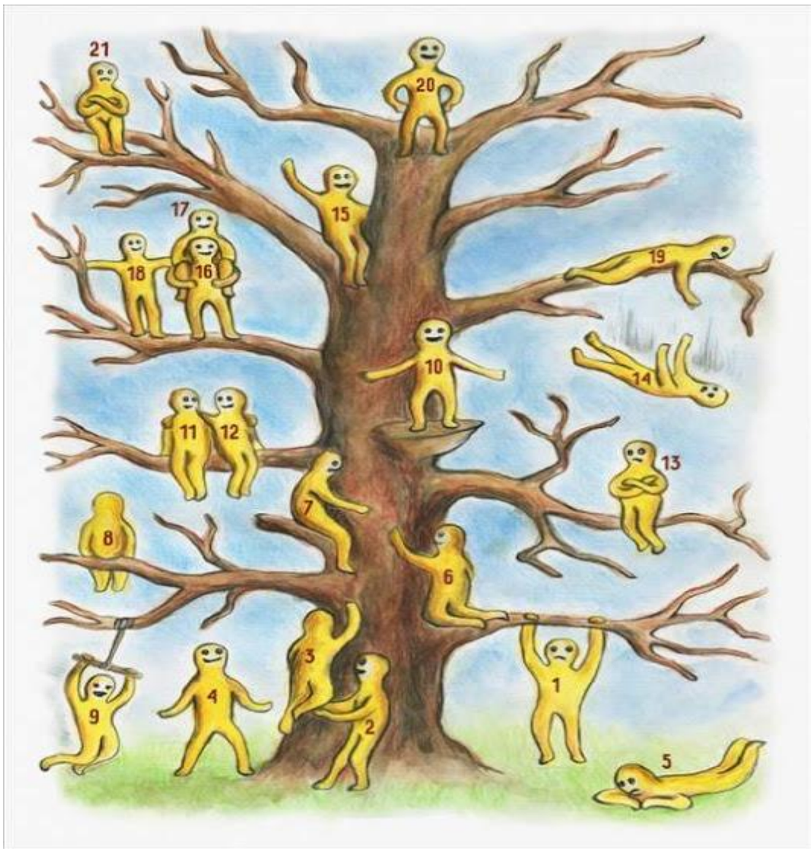

Рис. 2. Інтерактивний інструмент для самооцінки – «Дерево»

Інструкція для учнів та учениць. Щколярам пропонуються аркуші з готовим зображенням сюжету: дерево, на якому розташовуються чоловічки (рис. 2). Кожен учень одержує лист із таким зображенням (але без нумерації фігурок).

Завдання учню дається в наступній формі.

1. Розглянь це дерево. На ньому і поряд з ним множина чоловічків. У кожного з цих чоловічків на дереві різний настрій і вони займають різні місця.
2. Уяви, що це «дерево знань» і один із чоловічків – це ти. Подивись уважно на дерево. Де ти знаходишся?
3. Візьми червоний фломастер і обведи в кружечок того чоловічка, який нагадує тобі себе та має такий же настрій як у тебе зараз.
4. Наскільки добре ти впорався з теоретичним матеріалом сьогоднішньої теми? Як ти відчуваєш?

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

5. Як ти почуваєш себе після розв’язування задач?
6. Яке твоє положення в класі сьогодні?
7. Де твої друзі? Обведи їх на дереві знань.
8. Перевіримо, наскільки ти уважний. Зверни увагу, що кожну гілку дерева можна прирівняти твоїм досягненням і успіхам у засвоєнні теми.
9. Тепер візьми зелений фломастер і обведи того чоловічка, яким ти хотів стати, отримавши сьогодні знання та навички. На якому місці ти би хотів знаходитись?

Буває так, що деякі учні просять дозволу позначити позиції двох чоловічків. У такому випадку не слід обмежувати їх вибір, але необхідно зафіксувати, який чоловічок був відзначений у першу чергу, який у другу, так як співвідношення цих виборів може бути досить інформативним.

Інтерпретація результатів виконання проєктивної методики «Дерево» проводиться виходячи з того, які позиції вибирає даний учень чи учениця, з положенням якого чоловічка ототожнює своє реальне та ідеальне положення, чи є між ними відмінності. Інтерпретація розроблена з урахуванням досвіду практичного застосування методики та порівняння її результатів із спостереженнями за поведінкою дітей, даних, отриманих із бесіди з дитиною. Для зручності пояснення кожній фігурці привласнений свій номер.

Інтерпретація результатів. Позиції, які вибирає школяр, є ототожненням свого реального та ідеального положення, чи є між ними розходження?

Вибір позицій характеризує:

- № 1, 3, 6, 7 – установку на подолання перешкод;
- № 2, 19, 18, 11, 12 – товариськість, дружню підтримку;
- № 4 – стійкість положення (бажання домагатися успіхів, не переборюючи труднощі);
- № 5 – стомлюваність, загальна слабість, невеликий запас сил, сором'язливість;
- № 9 – мотивація на розваги;
- № 13, 21 – відстороненість, замкнутість, тривожність;
- № 8 – відстороненість від навчального процесу, відхід у себе;
- № 10, 15 – комфортний стан, нормальна адаптація;
- № 14 – кризовий стан, "падіння в прірву".
- № 20 – часто вибирають як перспективу учні з завищеною самооцінкою й установкою на лідерство.

Слід зауважити, що позицію № 16 учні чи учениці не завжди розуміють як позицію «чоловічка, який несе на собі чоловічка № 17», а схильні бачити в ній людину, яку підтримує та обіймає інший чоловічок № 17.

8. Висновки

У статті розглянуто використання алгоритмічного методу Поя у викладанні тем, пов’язаних з елементами теорії ймовірностей на заняттях математичного гуртка.

Алгоритмічний підхід до навчання, зокрема застосування поетапного розв’язування задач, є ефективним інструментом для систематизації знань і розвитку навичок роботи з реальними математичними моделями. Розбиття процесу знаходження розв'язку на чіткі етапи дозволяє учням краще розуміти структуру задачі, планувати її розв'язання та аналізувати результати. Значення алгоритмічного методу полягає в його універсальності: він може бути застосованим до задач різної складності та рівня, сприяючи поступовому зануренню учнів та учениць у матеріал. Такий підхід допомагає зробити навчання більш структурованим, зрозумілим і мотивуючим для школярів, забезпечуючи їм фундаментальні знання та навички для подальшого розвитку.

У перспективі вдосконалення підходів до викладання елементів теорії ймовірностей передбачає впровадження інноваційних методів навчання, які враховуватимуть сучасні тенденції освіти та особливості нових поколінь школярів. Особливий акцент може бути зроблено на адаптації матеріалів до різних рівнів підготовки учнів та учениць, створенні інтерактивних інструментів для навчання, таких як цифрові платформи, симуляції та візуалізації, зокрема проєктивна методика «Дерево». Подальший розвиток методик навчання та викладання може не лише покращити навчальні результати учнів та учениць, але й підготувати їх до використання отриманих знань у майбутньому, що є важливою складовою сучасної математичної освіти.

Список використаних джерел

Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. (2019). Алгебра і початки аналізу: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Гімназія. https://pidruchnyk.com.ua/439-algebra-merzlyak-nomrovskiy-polonskiy-yakr-11-klas.html

Бевз Г.П. (2021). Моя методика математики. Навчальна книга – Богдан. 584 с.

Мамбрей Т., Халл. С.(2024). Математика для початківців. Книголав. 128 с.

Бевз В.Г.(2006). Історія математики. Основа. http://matematuka.inf.ua/rizne/hist_mat_bevz/hist_mat_bevz.html

Проєктивна методика "Дерево" (Джон і Дайан Лампен) https://zlatolic.com.ua/sites/zlatolic.com.ua/files/document/proektivna-metodika-derevo.docx_0.pdf

Pólya, G. (1945). How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. https://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/PolyaHowToSolveIt.pdf

Отримано редакцією журналу: 10.01.2025
Прорецензовано: 20.04.2025
Схвалено до друку: 10.06.2025

Maryna HRYSENKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0816-4734
e-mail: magryss@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Anastasia TKACHENKO, student
e-mail: nastyatkachenko0711@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

HOW TO TEACH STUDENTS TO SOLVE PROBABILITY PROBLEMS USING THE POLYA'S ALGORITHM

Abstract. *The features of the application of George Polya's algorithmic method during classes in a mathematics club dedicated to the study of elements of combinatorics and probability theory are studied.*

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

The emphasis is on Polya's algorithm as a universal means of structuring the process of solving problems and developing students' logical thinking. The advantages of a step-by-step approach to learning are considered, which include understanding the condition of the problem, drawing up a plan, implementing and analyzing the result obtained. Special attention is paid to the study of the emotional state of students during classes in the club using the projective technique "Tree", aimed at studying the level of motivation and adaptation of schoolchildren.

Keywords: *Polya's algorithm; system of questions; combinatorics; probability theory; graph-tree; projective methodology «Tree».*