МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ІВАНЕНКО Дмитро Олександрович

УДК 519.21

# АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ОЦІНОК ПАРАМЕТРІВ МАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ З ПУАССОНОВИМИ ШУМАМИ

01.01.05 – теорія ймовірностей та математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією єрукопис.

Робота виконана на кафедрі математики та теоретичної радіофізики Ки- ївського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник КУЛИК
Олексій Михайлович,
Інститут математики НАН України, провідний науковий співробітник
відділу теорії випадкових процесів

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
ІВАНОВ Олександр Володимирович, Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут» професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник АРЯСОВА Ольга Вікторівна,
Інститут геофізики імені С.І. Субботіна НАН України, старший науковий співробітник відділу тектонофізики

Захист відбудеться “03” жовтня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціа- лізованої вченої ради Д 26.001.37 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, просп. Академіка Глу- шкова, 4 Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в Науковій бібліотеці імені М. Макси- мовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий “01” вересня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М.П.

# ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Дисертаційну роботу присвячено дослідженню асимптотичних властивостей статистичних моделей породжених дискретними спостереженнями марковських процесів з пуассоновими шумами. В сучасній літературі з теоретичної статистики велику увагу приділяється побудові асимптотично ефективних оцінок, що напряму пов'язано із такими асимптотичними властивостями статистичних моделей, як інформація Фішера і ЛАН. Переважна більшість робіт присвячених цій темі стосується дифузійних моделей, або моделей в яких спостереження є незалежними величинами. Такі моделі описують великий клас реальних процесів, однак існує цілий ряд задач, які потребують аналізу спостережень процесів Леві. Зокрема, такі процеси використовуються при дослідженні моделей, що описують турбулентність, економічних моделей стохастичної нестабільності, коливань вартості активів тощо.

У сучасній статистиці задача вибору асимптотично оптимальної оцінки розв'язується за допомогою концепції локальної асимптотичної нормальності (коротко ЛАН) введеної Ле Камом в 1960 р. Зокрема властивість ЛАН виявляється зручним і потужним інструментом для встановлення нижньої границі ефективності для статистичних моделей.

Встановлення властивості ЛАН є суттєвим кроком у статистичному аналізі досліджуваної моделі. Для моделей, породжених процесами Леві, цей крок залишається не дослідженим. Властивість ЛАН статистичних моделей, що генеруються дискретними спостереженнями випадкового процесу керованого шумом Леві, була вивчена в основному у випадку, коли функція вірогідності (або щонайменше її головна частина) відома в деякому смислі. У більшості робіт розглядаються лише лінійні моделі, тобто такі, в яких спостерігається сам процес Леві, або спостерігається процес, що є розв'язком лінійного стохастичного диференціального рівняння з шумом Леві (іншими словами, процес типу Орнштайна – Уленбека). Загальний нелінійний випадок залишається невивченим у значній мірі.

Для розв'язання статистичних задач, які потребують інформацію про функцію вірогідності, в якості інструмента в літературі ефективно використовується числення Малявена. Вперше числення Малявена було розроблено для доведення існування і гладкості щільності розподілу, в подальшому воно виявилось досить ефективним при дослідженні чутливості сподівань відносно параметрів. Метод із застосуванням числення Малявена має природні розширення для статистичних завдань. Так з літератури відоме інтегральне представлення малявенівського типу похідної по параметру від логарифмічної функції вірогідності в моделі, породженій дискретними спостереженнями дифузії. За допомогою такого представлення доводиться властивість ЛАН. Проте питання про зручну версію числення Малявена для моделей, заданих СДР з шумом Леві залишається відкритим.

Особливий інтерес становлять моделі, в яких крок спостереження прямує до нуля, а сам процес, що спостерігається, забруднений фоновим шумом і, крім того, може мати велику інтенсивність стрибків великої амплітуди.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках державної бюджетної науково-дослідної теми № 11БФ038-02 «Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей» (номер державної реєстрації 0111U006561) і № 16БФ038-02 «Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем» (номер державної реєстрації 0116U002530) кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, що входить до комплексного тема- тичного плану науково-дослідних робіт «Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів».

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв'я- зання таких задач:

- Встановити існування густини перехідної імовірності розв'язку СДР з шумом Леві, і для неї знайти інтегральні представлення перших двох логарифмічних похідних по параметру, також побудувати ін- тегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності процеса Леві з важкими хвостами.
- Дослідити достатні умови регулярності статистичного експерименту, породженого дискретними спостереженнями розв'язку СДР з шу- мом Леві і встановити нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.
- Знайти достатні умови, за яких статистична модель, породжена дис- кретними спостереженнями процеса Маркова, має властивість ЛАН та довести властивість ЛАН, у випадку дискретних спостережень зі сталим кроком, моделей, заданих СДР з шумом Леві.
- Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу, заданого СДР з шумом Леві, побудувати алгоритм перевірки ефе- ктивності методу оцінювання і оцінити втрати інформації при умов- ному усередненні.
- Довести властивість ЛАН для моделей, в яких із прямуючим до нуля кроком спостерігається процес Леві на фоні заважаючого шуму і довести, що відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів.

Об'єктом дослідження є процеси Леві та СДР, керовані процесами Леві.

Предметом дослідження є властивість ЛАН статистичних моде- лей, породжених спостереженнями процесів Леві та розв'язків СДР з шу- мами Леві.

Методи дослідження. У дисертації використовуються два основ- них підходи. Спочатку формулюються достатні умови ЛАН для статисти- чних моделей, породжених дискретними спостереженнями марковського процесу. Ці умови узагальнюють класичний результат, запропонований Лє Камом для вибірок з незалежних однаково розподілених випадко- вих величин. З іншого боку, використовується числення Малявена для одержання інтегрального представлення перших двох похідних логари- фмічної функції вірогідності. Саме поєднання цих двох підходів дає мо- жливість довести властивість ЛАН для моделей, породжених процесами Леві.

Наукова новизна одержаних результатів.

- Встановлено існування густини перехідної імовірності розв'язку СДР з шумом Леві, і для неї знайдено інтегральні представлення перших двох логарифмічних похідних по параметру, також побу- довано інтегральне представлення логарифмічної похідної по пара- метру від густини перехідної імовірності процеса Леві з важкими хвостами.
- Досліджено достатні умови регулярності статистичного експеримен- ту, породженого дискретними спостереженнями розв'язку СДР з шу- мом Леві і встановлено нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.
- Знайдено достатні умови, за яких статистична модель, породжена дискретними спостереженнями процеса Маркова, має властивість ЛАН та доведено властивість ЛАН у випадку дискретних спосте- режень зі сталим кроком моделей, заданих СДР з шумом Леві.
- Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу, заданого СДР з шумом Леві, побудувано алгоритм перевірки ефе- ктивності методу оцінювання і оцінено втрати

інформаціїпри умов- ному усередненні.

- Доведено властивість ЛАН для моделей, в яких із прямуючим до ну- ля кроком спостерігається процес Леві на фоні заважаючого шуму і доведено, що відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертація має як теоретичне, так і практичне значення. Теоретичне значення полягає у розробці необхідного математичного апарату для дослідження асим- птотичних властивостей оцінок параметрів моделей, керованих процеса- ми Леві без дифузійної компоненти. Практична цінність одержаних ре- зультатів полягає у тому, що їх можна використовувати при дослідженні явищ, що задаються СДР з шумами Леві: економічних, фізичних, геоло- гічних, хімічних процесів тощо.

Особистий внесок здобувача. Всі основні результати дисертацій- ної роботи отримані здобувачем самостійно. Зі спільних з науковим керів- ником О. М. Куликом статей до основної частини дисертаційної роботи включені лише ті результати, які належать здобувачу. Зі спільної з С. В. Боднарчуком статті включені лише ті результати, які належать здобува- чу.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної ро- боти доповідались на наукових семінарах кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факульте- ту Київського національного університету імені Тараса Шевченка, від- ділу випадкових процесів Інституту математики НАН України, відділу наукових досліджень операцій Інституту кібернетики імені В.М. Глу- шкова НАН України, Department of Mathematical Sciences of Ritsumei- kan University, (Kusatsu, Japan), Osaka University (Osaka, Japan), кафе- дри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного техні- чного університету України ”Київський політехнічний інститут”; на між- народних конференціях: ”Modern stochastics: theory and applications III” (Kyiv, 2012), ”11-th international Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics” (Vilnius, Lithuania, 2014), ”Probability, reli- ability and stochastic optimization” (Kyiv, 2015), ”Stochastic processes in abstract spaces” (Kyiv, 2015).

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 статей у фахових виданнях [1–5] та 5 тез доповідей на конференціях [6– 10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі всту- пу, шести розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 151 сторінку, список використаних джерел за- ймає 10 сторінок і містить 90 найменувань.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв’язок роботи з науковими програмами, темами, планами, встановлено мету, задачі, пре- дмет, об’єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих в роботі результатів та особистий внесок здобувача, наведено список публікацій здобувача та основний зміст дисертаційної роботи.

У першому розділі наводяться деякі означення та теореми викори- стані в змістовній частині дисертаційної роботи. Ці відомості розділені тематично на три групи. Перша група складається з теорем теорії ви- падкових процесів, друга – з означень і теорем статистики випадкових процесів, третя – з граничних теорем для випадкових процесів.

Другий розділ містить стислий історичний огляд літератури за тема- тикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **третьому розділі** за допомогою числення Малявена для процесів, заданих стохастичними диференціальними рівняннями, керованими шумом Леві без дифузійної компоненти будується інтегральне представлення логарифмічної похідної по параметру від густини перехідної імовірності, а також доводиться регулярність стохастичного експерименту. Основні результати цього розділу такі:

Розглядається процес $X$, що є розв'язком рівняння

$$\mathrm{d}X_t = a_\theta(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}Z_t, \tag{1}$$

в якому $Z$ -- процес Леві без дифузійної компоненти, тобто

$$Z_t = ct + \int_0^t\int_{|u|>1} u\,\nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) + \int_0^t\int_{|u|\le 1} u\,\tilde{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u).$$

Тут $\nu$ -- пуассонова точкова міра з інтенсивністю $\mathrm{d}s\mu(\mathrm{d}u)$, а $\tilde{\nu}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) = \nu(\mathrm{d}s,\mathrm{d}u) - \mathrm{d}s\mu(\mathrm{d}u)$ -- відповідна компенсована міра. Крім цього про міру $\mu$ припускається наступне:

**H.** (i) для деякого $\kappa > 0$,

$$\int_{|u|\ge 1} u^{2+\kappa}\mu(du) < \infty;$$

(ii) для деякого $u_0 > 0$, звуження міри $\mu$ на $[-u_0,u_0]$ має додатну густину $\sigma \in C^2\big([-u_0,0)\cup(0,u_0]\big)$;

(iii) існує $C_0$ таке, що

$$|\sigma'(u)| \le C_0|u|^{-1}\sigma(u),\quad |\sigma''(u)| \le C_0 u^{-2}\sigma(u),\quad |u|\in(0,u_0];$$

(iv)

$$\left(\log 1/\varepsilon\right)^{-1}\mu(\{u:|u|\ge\varepsilon\}) \to \infty,\quad \varepsilon\to 0.$$

**Теорема 1 3.1.** *I. Нехай* $a\in C^{2,0}(\mathbb{R}\times\Theta)$*, має обмежені похідні* $\partial_x a_\theta, \partial^2_{xx}a_\theta$.

Тоді марківський процес $X$ визначений рівнянням ((1)) має густину перехідної імовірності $p_t(\theta;x,y)$ відносно міри Лебега, яка допускає інтегральне представлення

$$p_t(\theta;x,y) = \mathrm{E}_x^\theta\left[\Xi_{t\,X_t>y}\right],\quad t>0,\quad x,y\in\mathbb{R}.$$

Функція $p_t(\theta;x,y)$ неперервна по $(t,x,y,\theta)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Theta$.

II. Нехай $a\in C^{3,1}(\mathbb{R}\times\Theta)$ і має обмежені похідні $\partial_x a$, $\partial^2_{xx}a$, $\partial^2_{x\theta}a$, $\partial^3_{xx\theta}a$, $\partial^4_{xxx\theta}a$ і

$$|a_\theta(x)| + |\partial_\theta a_\theta(x)| \le C(1+|x|),\quad \theta\in\Theta,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Тоді густина перехідної імовірності має похідну $\partial_\theta p_t(\theta;x,y)$, яка є неперервною по $(t,x,y,\theta)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Theta$.

III. За умов твердження II, справджується

$$\partial_\theta p_t(\theta;x,y) = g_t(\theta;x,y)\,p_t(\theta;x,y),$$

де

$$g_t(\theta;x,y) = \begin{cases} \mathrm{E}^{t,\theta}_{x,y}\Xi^1_t, & p_t(\theta;x,y)>0,\\ 0, & \text{³íàêøå}. \end{cases} \tag{2}$$

**Зауваження 2** *Із тверджень II і III, випливає, що логарифм густини перехідної імовірності має неперервну похідну відносно* $\theta$ *на відкритій підмножині* $(0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\Theta$ *визначеній нерівністю* $p_t(\theta;x,y)>0$ *і на цій множині допускає інтегральне представлення*

$$\partial_\theta \log p_t(\theta;x,y) = \mathrm{E}^{t,\theta}_{x,y}\Xi^1_t.$$

Другий результат розділу стосується базової властивості статистичного

*

експерименту

$$(\mathsf{R}^n, \mathsf{B}(\mathsf{R}^n), \mathsf{P}^{\theta}_{x,\{t_k\}_{k=1}^n}, \theta \in \Theta), \tag{3}$$

породженого спостереженнями марківського процесу $X$ з $X_0 = x$ в моменти часу $t_1 < \mathrm{K} < t_n$. Експеримент (3) є регулярним, якщо функція $\sqrt{p_t(\theta; x_0, \cdot)}$ -- неперервно диференційовна в $L_2(\mathsf{X}, \lambda)$.

**Теорема 3 3.2.** *Нехай умови твердження II Теореми 1 виконано і* $x \in \mathsf{R}, n \in \mathsf{N}$, $0 < t_1 < \mathrm{K} < t_n$ *-- фіксовані.*

Тоді статистичний експеримент ((3)) -- регулярний. Відповідна інформація Фішера дорівнює

$$I(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_x^{\theta}(g_{t_k - t_{k-1}}(\theta; X_{t_{k-1}}, X_{t_k}))^2,$$

де $t_0 := 0$.

Оскільки в багатьох статистичних задачах виникає необхідність у другій похідній по параметру від логарифму густини перехідної імовірності $p$, в цьому ж розділі знайдено відповідне інтегральне представлення. Зокрема таке представлення дозволяє побудувати однокрокові асимптотично ефективні оцінки.

**Четвертий розділ** присвячений встановленню достатніх умов за яких справджується властивість ЛАН у випадку, коли процес задається рівнянням (1), а спостереження відбуваються зі сталим кроком $h$. Припускається, що міра Леві $\mu$, задовольняє умовам:

- $\mu(du) = m(u)du$, і для деякого $C > 0, \alpha \in (0,2)$

$$m(u) : C|u|^{-\alpha-1}, \quad u \to 0;$$

- Для деякого $\delta > 0$ $\int_{|u| \ge 1} |u|^{2+\delta} \mu(du) < \infty;$
- $m \in C^1(\mathsf{R} \setminus \{0\})$, існує $u_0 > 0$ таке що функція

$$\tau(u) = |um'(u)| m(u)$$

обмежена на $\{|u| \le u_0\}$ і $\int_{|u| > u_0} \tau^{2+\delta}(u) \mu(du) < \infty.$

Доведення властивості ЛАН для описаної вище моделі проводиться в два етапи. Спочатку доводиться теорема про достатні умови ЛАН для загальної моделі, в якій спостережуваним є процес Маркова:

Вважаємо, що існує густина перехідної імовірності $p_t(\theta, x, y)$ відносно $\sigma$-скінченної міри $\lambda(dy)$. За марківською властивістю відношення функцій вірогідності

$$Z_n(\theta_0, \theta) = \prod_{k=1}^{n} \frac{p_h(\theta; X_{h(k-1)}, X_{hk})}{p_h(\theta_0; X_{h(k-1)}, X_{hk})}.$$

Припускаємо, що експеримент є регулярним. Результат формулюється в термінах функцій:

$$q_h(\theta; x, y) = \nabla_{\theta} \sqrt{p_h(\theta; x, y)} \quad 3 \quad g_h(\theta; x, y) = 2q_h(\theta; x, y)\sqrt{p_h(\theta; x, y)}.$$

**Теорема 4 4.1.** *Нехай для деякої послідовності невипадкових додатньо визначених матриць* $\{r(n) = r(n, \theta_0), n \in \mathsf{N}\}$

- $\left\{ S_n := r(n)\sum_{j=1}^{n} g_h(\theta_0; X_{h(j-1)}, X_{hj}), X_0 = x, n \geq \mathrm{N} \right\}$ асимптотично нормальна

відносно $\mathrm{P}^{\theta_0}$ з параметрами 0 і $\Sigma$.

- $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}^{\theta_0} \left\| \sum_{j=1}^{n} \left( r(n) g_h(\theta_0; X_{h(j-1)}, X_{hj}) \right)^{\otimes 2} - \Sigma \right\| = 0.$$

- $$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}^{\theta_0} \sum_{j=1}^{n} \left| r(n) g_h(\theta_0; X_{h(j-1)}, X_{hj}) \right|^{\delta+2} = 0.$$

- $$\lim_{n\to\infty} \sup_{|v|<N} \mathrm{E}^{\theta_0} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathrm{X}} r(n) \big( q_h(\theta_0 + r(n)v; X_{h(j-1)}, y) - q_h(\theta_0; X_{h(j-1)}, y) \big)^2 \lambda(\mathrm{d}y) = 0.$$

Тоді послідовність статистичних моделей має властивість ЛАН в точці $\theta_0$.

В цьому ж розділі доводиться наступна

**Теорема 5 4.2.** *Нехай $X$ є розв'язком рівняння (1), в якому $Z$ задовольняє описані вище умови. Припустимо наступне:*

- $a$ має обмежені похідні

$$\partial_x a, \partial^2_{xx} a, \partial^2_{x\theta} a, \partial^3_{xxx} a, \partial^3_{x\theta\theta} a, \partial^3_{xx\theta} a, \partial^4_{xxx\theta} a;$$

- $|a_\theta(x)| + |\partial_\theta a_\theta(x)| \leq C(1 + |x|), \quad \theta \in \Theta, \quad x \in \mathrm{R},$
- $\overline{\lim}_{|x|\to+\infty} \dfrac{a_\theta(x)}{x} < 0, \quad \theta \in \Theta.$

Тоді послідовність статистичних моделей має властивість ЛАН.

У **п'ятому розділі** для описаної вище статистичної моделі будується алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання. Точне знаходження інформації Фішера $I(\theta_0)$ унеможливлюється з наступних причин:

- інваріантна міра процеса $X$ невідома,

- для функції $g$ відоме лише інтегральне зображення (див. формулу (2)),

- усереднення відносно розподілу моста, що відповідає процесу $X$ є занадто складним для реалізації.

Для вирішення цієї проблеми пропонується наступна схема. Спочатку для заданої точності $\Delta > 0$ вибирається номер $n_0 = n_0(\Delta)$ такий, що

$$\left| I(\theta_0) - \mathrm{E}_x^{\theta_0} (g_h(\theta_0, X_{hn_0}, X_{h(n_0+1)}))^2 \right| < \Delta, \tag{4}$$

потім за формулою для $g$ (див. (2)) та нерівністю Йєнсена для умовного математичного сподівання записується оцінка

$$\mathrm{E}_x^{\theta_0} (g_h(\theta_0, X_{hn_0}, X_{h(n_0+1)}))^2 \leq \mathrm{E}_x^{\theta} \Xi_h(n_0)^2.$$

(для $\Xi_h$ в третьому розділі наводиться точна формула). Остаточно одержуємо верхню оцінку для інформації по Фішеру:

$$I(\theta_0) \leq \mathrm{E}_x^{\theta_0} \Xi_h(n_0)^2 + \Delta =: J(\theta_0, n_0) + \Delta.$$

Нехай вибрано метод оцінювання і $\hat{\theta}_n$ оцінка параметра $\theta$ за цим методом. Асимптотичною якістю оцінки при $n\to\infty$ може слугувати величина $\sqrt{I(\theta_0)\mathrm{E}l_n(\hat{\theta}_n,\theta_0)}$ яка інтерпретується як відносна ефективність оцінки відносно теоретичної границі Гаєка. Оскільки $I(\theta_0)$ неможливо обчислити, замінюємо її верхньою оцінкою $J(\theta_0,n_0)$. Останнім кроком замінюємо математичні сподівання на вибіркові середні. Запропонований підхід дозволяє одержати як оцінку ефективності методу оцінювання так і оцінку долі випадковості, втраченої при усередненні (величина $J(\theta_0,n_0)/I(\theta_0)$ ).

Алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання полягає в наступному:

• вибираємо метод оцінювання і будуємо оцінку $\hat{\theta}_n$ невідомого параметра $\theta_0$;

• генеруємо $N$ траєкторій процеса $X$ заданого рівнянням (1) з $\theta=\hat{\theta}_n$ і по кожній з них будуємо вибірку розміру $n$;

• обчислюємо оцінки $\hat{\theta}_n^k$, $k=1,\ldots,N$ і знаходимо вибіркову дисперсію $s_N^2(\hat{\theta}_n)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\left(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^k-\hat{\theta}_n)\right)^2$;

• обчислюємо $n_0$ з міркувань близькості $X$ до стаціонарного розв'язку рівняння (1) і генеруємо ще $N$ траєкторій $X$ з $\theta=\hat{\theta}_n$, по кожній з них обчислюємо $\Xi_{h,k}^1(n_0)$, $k=1,\ldots,N$;

• знаходимо вибіркове середнє $J_N(\hat{\theta}_n,n_0)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N\Xi_{h,k}^1(n_0)^2$;

• за значенням $\sqrt{J_N(\hat{\theta}_n,n_0)s_N^2(\hat{\theta}_n)}$ робимо висновок про ефективність (при фіксованих параметрах $N$ і $n_0$) методу і про втрату випадковості при умовному усередненні.

Запропонований алгоритм ілюструється на конкретному прикладі.

У **шостому розділі** розглядається наступна модель. Процес Леві, заданий у формі

$$X_t^\theta=\beta t+\gamma Z_t+U_t,\quad t\ge 0, \tag{5}$$

спостерігається в точках $\{t_{k,n}=kh_n, k=1,\ldots,n\}$ зі змінним інтервалом між спостереженнями $h_n$; припускаємо, що $h_n\to 0$ при $n\to\infty$, так, що спостереження процеса $X^\theta$ мають *високу частоту*. Тут $Z$ -- локально $\alpha$-стійкий процес, а $U$ -- незалежний від нього процес Леві меншої активності ніж $Z$ і розглядається як заважаючий шум.

Припустимо, що в представленні Леві -- Хінчіна процеса $Z$,

$$\mathrm{E}e^{i\lambda Z_t}=e^{t\psi(\lambda)},$$

$\psi$ має вигляд

$$\psi(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\left(e^{i\lambda u}-1-i\lambda u 1_{|u|\le 1}\right)\mu(du). \tag{6}$$

Про міру Леві $\mu$ процеса $Z$ припускаємо наступне

• $\mu(du)=m(u)du$ і для деякого $\alpha\in(0,2)$

$$m(u):\begin{cases}C_+|u|^{-\alpha-1}, & u\to 0+,\\ C_-|u|^{-\alpha-1}, & u\to 0-,\end{cases}\quad C_-+C_+>0.$$

• $m\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, існує $u_0>0$ таке, що функція

$$\tau(u)=|um'(u)|m(u)$$

обмежена на множині $\{|u|\le u_0\}$ і задовольняє

$$\int_{|u|>u_0}\tau^{2+\delta}(u)\mu(du)<\infty$$

для деякого $\delta>0$.

Зазначимо, що умова **H2** не вимагає від $\tau(u)$ обмеженості для ``великих'' $u$; ця умова справедлива для широкого класу процесів $Z$ таких як ``подібні до стійких'' процеси Леві з

$$m(u)=f(u)m_{\alpha,C_\pm}(u),$$

де $f(u)\to C, |u|\to 0$.

**Приклад 6** *(Пом'якшений $\alpha$-стійкий процес). Наприклад, при*

$$f(u)=Ce^{-\sqrt{1+u^2}},\quad f(u)=Ce^{-u^2},\quad \text{àâî}\, f(u)=Ce^{-|u|},$$

умови **H1** і **H2** виконані, хоча $\tau(u)$ не є обмеженою.

**Приклад 7** *(Гладко затухаючий $\alpha$-стійкий процес). Нехай*

$$m(u)=f(u)|u|^{-\alpha-1}1_{[-u_1,u_1]}(u),\quad u_1>0,$$

де $f$ неперервна на R, $f>0$ при $u\in[-u_1,u_1]$ така, що $f(u)\to C$ коли $u\to 0$ і $f$ гладко зануляється поза інтервалом $[-u_1,u_1]$ в такий спосіб, що функція $|u||f'(u)|/f(u)$ є локально обмеженою і крім того функція $\{|u||f'(u)|/f(u)\}^{2+\delta}m(u)$ -- $du$-інтегровна на множині $\{|u|\ge u_0\}$ для деякого $\delta>0$ і $u_0>0$. Тоді умови **H1, H2** виконані. Зазначимо, що $\tau(u)\le|u||f'(u)|/f(u)+\alpha+1$. Частковим випадком функції $f$ є

$$f(u)=e^{-1/(u+u_1)-1/(u_1-u)}1_{[-u_1,u_1]}(u).$$

Нагадаємо, що для $\alpha$-стійкого процеса його міра Леві має густину

$$m_{\alpha,C_\pm}(u)=\begin{cases}C_+|u|^{-\alpha-1}, & u>0,\\ C_-|u|^{-\alpha-1}, & u<0.\end{cases}\tag{7}$$

Позначимо

$$c_t=t\int_{1/\alpha<|u|\le 1}u\mu(du).\tag{8}$$

Через $Z^{\alpha,C_\pm}$ позначаємо $\alpha$-стійкий процес, чия характеристична функція має вигляд ((6)) з мірою Леві ((7)), де $C_+,C_-$ задані умовою **H1**. Нехай також $\phi_{\alpha,C_\pm}$ -- густина розподілу $Z_1^{\alpha,C_\pm}$.

Для такої моделі в доведено наступне

**Твердження 8 6.1.** *Нехай $Z$ задовольняє умови **H1**, **H2**, а $U$ -- процес Леві, незалежний від $Z$ і такий, що*

$$t^{-1/\alpha}U_t\to 0,\quad t\to 0\tag{9}$$

за імовірністю. У випадку $\alpha\in(1,2)$, додатково припускаємо, що

$$n^{-1/2}h_n^{1/\alpha-1}\to 0.$$

Тоді в кожній точці $\theta_0\in\Theta$ справджується властивість ЛАН з

$$r(n)=n^{-1/2}\begin{pmatrix}h_n^{1/\alpha-1} & c_{h_n}h_n^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \Sigma(\theta)=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}(\theta) & 0\\ 0 & \Sigma_{22}(\theta)\end{pmatrix},\tag{10}$$

де

*

$$\Sigma_{11}(\theta_0) = \gamma_0^{-2} \int_{\Re} \left( \phi'_{\alpha,C_\pm}(x) \phi_{\alpha,C_\pm}(x) \right)^2 \phi_{\alpha,C_\pm}(x) dx,$$

$$\Sigma_{22}(\theta_0) = \gamma_0^{-2} \int_{\Re} \left( 1 + x\phi'_{\alpha,C_\pm}(x) \phi_{\alpha,C_\pm}(x) \right)^2 \phi_{\alpha,C_\pm}(x) dx.$$

Таким чином Теорема узагальнює результат, одержаний в роботі Y. A´'it-Sahalia, J. Jacod (2007). Зокрема від основного процеса �вимагається

лише локальна �-стійкість, властивість ЛАН доводиться рівномірно по класу шумів (справджується для всіх процесів � , задовольняючих умову (9)), модель є двопараметричною (присутній тренд).

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розроблено зручний апарат для вивчення асим- птотичних властивостей оцінок невідомих параметрів в динамічних си- стемах заданих СДР з шумами Леві без дифузійної компоненти. За до- помогою числення Малявена доведено властивість ЛАН статистичних моделей нелінійних з ”легкими хвостами” в шумах і лінійних з ”важки- ми хвостами”. Для статистичного експерименту зі сталим кроком спо- стереження знайдено нижню границю ефективності оцінок і побудовано алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання.

У дисертаційній роботі наведено наступні результати:

- Встановлено існування густини перехідної імовірності розв'язку СДР з шумом Леві, і для неї знайдено інтегральні представлення перших двох логарифмічних похідних по параметру, також побу- довано інтегральне представлення логарифмічної похідної по пара- метру від густини перехідної імовірності процеса Леві з важкими хвостами.

- Досліджено достатні умови регулярності статистичного експеримен- ту, породженого дискретними спостереженнями розв'язку СДР з шу- мом Леві і встановлено нижню оцінку для квадратичної функції втрат при оцінюванні невідомого параметра.

- Знайдено достатні умови, за яких статистична модель, породжена дискретними спостереженнями процеса Маркова, має властивість ЛАН та доведено властивість ЛАН у випадку дискретних спосте- режень зі сталим кроком моделей, заданих СДР з шумом Леві.

- Для статистичних моделей зі сталим кроком спостережень процесу, заданого СДР з шумом Леві, побудувано алгоритм перевірки ефективності методу оцінювання і оцінено втрати інформації при умов- ному усередненні.

- Доведено властивість ЛАН для моделей, в яких із прямуючим до ну- ля кроком спостерігається процес Леві на фоні заважаючого шуму і доведено, що відповідна властивість ЛАН справджується рівномірно по класу заважаючих процесів.

Одержані результати є актуальними як з теоретичної, так і з практи- чної точки зору. З одного боку в роботі були одержані вагомі результати для моделей з досить загальними умовами на шум.

З іншого боку, одержані результати можна використати на практиці при дослідженні статистичних моделей, які описують фізичні, біологічні, хімічні явища, процеси у фінансовій сфері та фондовому ринку, а також при встановленні асимптотичних меж ефективності для оцінок параме- трів у відповідних моделях.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ


1. Ivanenko D. O. Second derivative of te log-likelyhood in the model giv- en by Lévy driven SDE's / D. O. Ivanenko // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико- математичні науки. — 2014. — №2. — С. 18-22.
2. Ivanenko D. O. Malliavin calculus approach to statistical inference for Lévy driven SDE's / D. O. Ivanenko, A. M. Kulik // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2015. — №17. — P. 107-123.
3. Ivanenko D. O. LAN property for families of distributions of solutions to Lévy driven SDEs / D. O. Ivanenko, A. M. Kulik // Modern Stochas- tics: Theory and Applications. — 2014. — №1. — P. 33-47.
4. Ivanenko D. O. Uniform LAN property of locally stable location-scale Lévy process observed at high frequency / D. O. Ivanenko, A. M. Kulik, H. Masuda // Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics. — 2015. — №12(2). — P. 797-824.
5. Іваненко Д. О. Оцінка ефективності методу оцінювання в статистичних моделях, керованих шумом Леві / Д. О. Іваненко, С. В. Боднарчук // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2015. — №92. — С. 9-22 .
6. Ivanenko D. O. Malliavin-type representation for the sensitivity of the likelihood function of discretely observed Levy driven SDE's / D. O. Iva- nenko // Abstracts of International conference Modern stochastics: the- ory and applications III, September 10–14,2012, Kyiv —2012. — P. 50.
7. Ivanenko D. O. Asymptotic properties of MLE for discretely observed solution to a Levy driven SDE's / D. O. Ivanenko //Abstracts of Inter- national conference 11-th international Vilnius conference on probability theory and mathematical statistics,June 30 – July 4,2014, Vilnius, Litu- ania —2014. — P. 116.
8. Ivanenko D. O. LA(M)N property of Lévy process observed at high frequency / D. O. Ivanenko //Abstracts of International conference Probability, reliability and stochastic optimization, April 1–5,2015, Kyiv — 2015.— P. 38–39.
9. Ivanenko D. O. Uniform LAN of locally stable Lévy process observed at high frequency / D. O. Ivanenko //Abstracts of International conference Sochastic processes in abstract spases, October 14 – 16,2015, Kyiv — 2015. — P. 21.
10. Іваненко Д. О. Асимптотичні властивості ОМВ для дискретних спостережень розв'яку СДР, керованості процесом Леві/ Д. О.Іваненко //Сучасніпроблемитеоріймовірностейтаматематичного аналізу: тези доповідей, 24 Лютого – 2 Березня 2014 року, м. Івано- Франківськ. — 2014. — С. 18–19.

*

## АНОТАЦІЯ

Іваненко Д. О. Асимптотичні властивості оцінок параметрів марковських процесів з пуассоновими шумами — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-мате- матичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і мате- матична статистика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2016.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню асимптотичних властивостей оцінок параметрів статистичних моделей породжених дискретними спостереженнями марковських процесів з пуассоновими шумами. А саме, розроблено зручний апарат для вивчення асимптотичних власти- востей оцінок невідомих параметрів в динамічних системах заданих СДР з шумами Леві без дифузійної компоненти. Зокрема, за допомогою чи- слення Малявена доведено властивість ЛАН статистичних моделей: нелінійних з "легкими хвостами" в шумах і лінійних, з високою частотою спостережень і, можливо, "важкими хвостами". Для статистичного експерименту зі сталим кроком спостереження знайдено нижню границю ефективності оцінок і побудовано алгоритм перевірки ефективностіметоду оцінювання.

Ключові слова: процес Леві, ЛАН, асимптотична ефективність, числення Малявена, СДР.

## АННОТАЦИЯ

Иваненко Д. О. Асимптотические свойства оценок параме- тров марковских процессов с пуассоновыми шумами — Рукопись. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-матема- тических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и ма- тематическая статистика. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко МОН Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена исследованию асимптотических свойств оценок параметров статистических моделей, порожденных дискретными наблюдениями марковских процессов с пуассоновыми шумами. В работе разработан удобный аппарат для изучения асимптотических свойств оценок неизвестных параметров в динамических системах, заданных СДУ с шумами Леви без диффузионной компоненты. С помощью исчисления Маллявэна доказано свойство ЛАН статистических моделей: нелинейных с "легкими хвостами" в шумах и линейных, с высокой частотой наблюдений и, возможно, "тяжелыми хвостами". Для статистического эксперимента с постоянным шагом наблюдений найдена нижняя граница эффективности оценок и построен алгоритм проверки эффективности метода оценивания.

Ключевые слова: процесс Леви, ЛАН, асимптотическая эффектив- ность, исчисление Маллявэна, СДУ.

## ABSTRACT

Ivanenko. D. O. Asymptotic properties of parameters estimators of Markov processes with Poisson noises — Manuscript.

PhD Thesis in the speciality 01.01.05 — probability theory and mathemati- cal statistics. — Taras Shevchenko National University of Kyiv of the MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the study of asymptotic properties of statistical models with the data presented by Markov processes with Poisson noises. A comprehensive method is developed, which applies well to the study of asymptotic properties of unknown parameters estimators in statistical systems generated by discrete observations of the solution to SDE with Lévy noises without the diffusion component. This method is based on an appropri- ate modification of the Malliavin calculus, and is used in the thesis to prove the LAN property for two types of statistical models: a nonlinear one with light tails of the noise, and a linear one with high frequency of observation and possibly heavy tails of the noise.

The main results obtained in the thesis are the following:

- The version of Malliavin calculus for functionals of Lévy processes is developed. The stochastic derivative of Lévy process �� is found, the 2nd order stochastic differentiability of the solution �� to SDE generated by

  �� is proved and the corresponding stochastic derivatives are evaluated.

- Existence of transition probability density � is established for the soluti- on to SDE generated by Lévy noise. Integral representations of the first two logarithmic derivatives with respect to parameter for � is given. Regularity of the statistic experiment generated by discretely observed solution SDE controlled by Lévy process is established and the lower esti- mator of quadratic loss function in estimating the unknown parameter is found.

- General sufficient condition for a statistical model generated by discrete

  observations of Markov process has LAN property is established.

- The LAN property is proved in the case of discrete observations, with the constant step, of the solution to SDE driven by Lévy process.

- The verification algorithm of the estimation method efficiency is constructed for the statistical models with the constant observation step of the process given by solution to SDE with Lévy noise. The loss of information in the conditional averaging is estimated.

- Integral representation for logarithmic derivative of transition probabili- ty density with respect to parameter for Lévy processes with heavy tails is constructed.

- The LAN property is proved for the statistical model based on a Lévy process observed on the background noise and discrete observations have high frequency. The corresponded LAN property holds true uniformly on class of noises.

Keywords: Lévy process, LAN, asymptotic efficiency, Malliavin calculus, SDE.